

---

Universidade Federal da Bahia  
Escola Politécnica  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

---

MODELAGEM DINÂMICA DE UMA  
ESTRUTURA DE BASE HOLONÔMICA  
PARA ROBÔS MÓVEIS: INCLUSÃO DAS  
NÃO-LINEARIDADES DE ENTRADA

**Autor:** Adriane Pires Bomfim da Cruz  
**Orientador:** Prof. Dr. Jês de Jesus Fiais Cerqueira  
**Co-Orientador:** Prof. Dr. Augusto César Pinto Loureiro da Costa

*Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Bahia,  
para preenchimento de requisitos parciais à obtenção do  
Título de*

MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**Banca Examinadora**

Dr. Jês de Jesus Fiais Cerqueira - **UFBA** (Presidente)  
Dr. Augusto César Pinto Loureiro da Costa - **UFBA**    Dra. Cristiane Corrêa Paim - **UFBA**  
Dr. Teodiano Freire Bastos Filho - **UFES**

Salvador-BA



# Resumo

Esta Dissertação apresenta a modelagem dinâmica de uma estrutura de base móvel holonômica, com três rodas ativas e suecas, acionadas por motores de corrente contínua, considerando as não-linearidades na entrada do sistema como zona morta e saturação.

Considera-se que a não-linearidade do tipo saturação é decorrente das limitações construtivas do acionamento eletrônico dos motores elétricos estando, portanto, relacionada com a modelagem do subsistema eletrônico, existentes em todos os sistemas de acionamento elétrico, fazendo com que existam estados inalcançáveis e comportamentos dinâmicos não rastreáveis [1]. A não-linearidade do tipo zona morta é relacionada com fenômenos decorrentes do atrito entre a base móvel e o chão, e este inclui o escorregamento do sistema, permitindo uma abordagem e simulação da base móvel a mais próxima da real possível. Serão analisados os principais modelos de atrito, com destaque para o Modelo LuGre Compacto, que se adequa à deformação de um ponto da roda com a superfície de contato.

A modelagem desenvolvida objetiva a simulação como ferramenta de projeto e especificação de componentes para o sistema e, portanto, não houve a preocupação de se obter funções de transferência, ou equações de estados. Os principais desenvolvimentos desta Dissertação foram implementados em ambiente Matlab *Simulink*<sup>®</sup>, com os resultados aplicados em um sistema real para prévia de comportamento de simulação. Este sistema real é a base móvel AxeBot [2], utilizada para compor o time de futebol de robôs da Universidade Federal da Bahia.

## Palavras-Chaves

Modelagem Dinâmica, Robôs Móveis, Zona Morta, Saturação, Escorregamento.



# Abstract

This Work presents a dynamic model for a holonomic mobile robot. The mobile robot has three Swedish active wheels driven by direct-current motors. In the Dynamic Modeling are considered the input system non-linearities: dead-zone and saturation.

It is considered that saturation is decurrent of limitations from electronic drive for direct-current motors and, therefore, it is related to electronic subsystem modeling [1]. The dead zone is related to friction phenomena between wheel/motion movement surface, considering therefore, the friction Compact LuGre Model.

The developed modeling has as objective the simulation as tool of project and specification of mobile robot components, and therefore it did not have the concern of getting transference functions, or state equations. The developments of this Work were implemented in Matlab *Simulink*<sup>®</sup>, with the results applied in an actual system for previous of simulation behavior. This system is AxeBot [2] mobile base, used to compose the robots soccer team of Federal University of Bahia.

## Key Words

Dynamic Modeling, Mobile Robot, Dead-Zone, Saturation, Slip.



# Agradecimentos

- À Capes, pela concessão de uma bolsa de estudos durante a realização do Curso.
- À UFBA, por ter me proporcionado a oportunidade de realização do curso de Mestrado.
- Ao Prof. Dr. Jês de Jesus Fiais Cerqueira, por ter aceito a minha proposta de trabalho, e pela orientação, intensa dedicação, extrema paciência e grandes contribuições dedicados a este Trabalho ao longo do Mestrado. Muito obrigada!
- Ao Prof. Dr. Augusto César Pinto Loureiro da Costa, por ter também aceito a minha proposta de trabalho, pela co-orientação e contribuições a esta Dissertação.
- À Profa. Dra. Cristiane Corrêa Paim, pelas trocas de idéias e dúvidas que me auxiliaram na elaboração de alguns pontos deste Trabalho.
- Aos comentários e excelentes sugestões dos membros da banca examinadora desta Dissertação: Profa. Dra. Cristiane Corrêa Paim, da UFBA, e Prof. Dr. Teodiano Freire Bastos Filho, da UFES.
- Aos colegas, professores e funcionários da Universidade Federal da Bahia pelo apoio e incentivo dados.
- Aos colegas e amigos do Laboratório de Sistemas Inteligentes, LSI, da UFBA: Tânia Luna e Armando Sanca, que me ajudaram tecnicamente e/ou em momentos de impaciência, ansiedade.
- Ao colega e amigo Allan Freitas pelo apoio e sugestões dados ao longo deste Trabalho.
- Aos colegas e amigos Gustavo Pinho, Lourdes Ribeiro, Selma Evangelista, e algumas pessoas de minha adicional e nova família: a mascote Bibiana da Cruz (Bibi),

minhas cunhadas Marilei e Marinês da Cruz, meus sogros Therezinha Lourdes da Cruz e Mário Sefrin da Cruz, pelas palavras de carinho e coragem.

- Aos muitos amigos que me deram forças, incentivos e ajuda moral e/ou técnica: Cleber Ribeiro, Yan Medeiros, Fabiano Poderoso, Milena Moreira, Bruno, Ana Paola, Cláudia Santos, Marinalva, Joel, Moema, Profa. Dra. Luciana Martinez, Prof. Dr. Antônio César de Castro Lima, Rafaella Vidal, Clara Roberta, Telma, Márcio Antônio Santana, Máximo, Prof. Dr. Eudemário Santana, João Paulo, Andréa Bittencourt, Alexandre Franco, Tiago Nascimento, Fabrício Oliveira e muitos outros que não me vêem, à mente, agora, mas que estão guardados no coração.
- Um agradecimento a minha família, especialmente a meu irmão André Pires Bomfim, meus pais Alberto de Carvalho Bomfim e Aurileide Pires Bomfim, por tudo que me proporcionaram, na vida, e por sempre acreditarem, confiarem e terem me incentivado, desde os dois anos de idade, ao mundo fascinante dos estudos, momento este em que entro no maternal, e por terem suportado meus momentos de ansiedade e *stress* durante o Mestrado.
- As minhas avós Maria de Jesus Pires e Noêmia Bomfim que, apesar de não estarem mais fisicamente presentes, estão mentalmente e espiritualmente em todos os momentos de minha vida.
- A minha prima-irmã Gabriela Ramos Tavares e a minha tia-mãe-avó Aurineide Pires por sempre acreditarem no meu potencial e pelas palavras de conforto, carinho, fé e persistência.
- Ao meu marido, companheiro, grande amor e pai de meus futuros filhos Emerson Luciano da Cruz, pelo grande apoio, extrema paciência e intenso incentivo nos momentos difíceis e estressantes do Mestrado, e por suportar meus momentos de grande ausência para a conclusão deste importante Trabalho.
- A mim, já que não foi fácil conseguir realizar este sonho antigo, objetivo este mentalizado desde o vestibular para Engenharia Elétrica. Muitas vezes precisei retirar “forças” quando estava me sentindo esgotada de cansaço, seja fisicamente ou mentalmente, ou ambos, e finalmente, não desisti da conclusão do Mestrado.



- Por fim (e principalmente), a Deus, ao qual sou grata por todas as coisas boas e ruins da minha vida, pela superação de momentos difíceis, e também por momentos maravilhosos em que esteve sempre presente, nunca me abandonando. Claro que a minha parte estive sempre fazendo, e *tentando* sempre *outra vez* acertar quando algo estava ainda errado. Assim, posso, ou melhor, sinto-me na obrigação de fazer referência à música seguinte que pode explicar meus momentos de duro trabalho e superação de limites:

“Veja/ Não diga que a canção está perdida/ Tenha em fé em Deus, tenha fé na vida tente ou...tra vez

Beba/ Pois a água viva ainda está na fonte você tem dois pés para cruzar a ponte/  
Nada aca...bou, não não não não

Tente/ Levante sua mão sedenta e recomece a andar/ Não pense que a cabeça agüenta se você parar,/ Há uma voz que canta, uma voz que dança, uma voz que gira/ Bailando no ar

Queira/ Basta ser sincero e desejar profundo/ Você será capaz de sacudir o mundo, vai/ Tente ou...tra vez

Tente/ E não diga que a vitória está perdida/ Se é de batalhas que se vive a vida/  
Tente outra vez.”

Raul Seixas/ Paulo Coelho/ Marcelo Motta

“É melhor tentar e falhar, que se preocupar e ver a vida passar;  
é melhor tentar, ainda que em vão, que se sentar fazendo nada até o final.  
Eu prefiro, na chuva, caminhar que, em dias tristes em casa esconder-me.  
Prefiro ser feliz, embora louco, que em conformidade viver ...”

Martin Luther King

# Índice

<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>vii</b>
<b>Índice</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xix</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Análise da Temática . . . . .	3
1.2 Contribuições e Propostas da Dissertação . . . . .	5
1.3 Estrutura do Texto . . . . .	5
<b>2 Preliminares Teóricas</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução . . . . .	7
2.2 Acionamento Elétrico . . . . .	9
2.2.1 Considerações sobre Acionamento de um Motor CC . . . . .	11
2.2.2 Dinâmica do Motor de Corrente Contínua . . . . .	12
2.3 Cinemática da Estrutura de Base de Um Robô Móvel . . . . .	14
2.3.1 Restrições Cinemáticas da Roda . . . . .	16

2.3.2	Restrições Cinemáticas da Estrutura de Base de Robôs Móveis . .	23
2.4	Atrito . . . . .	27
2.4.1	Modelos Matemáticos para o Atrito . . . . .	33
2.4.2	Modelos Matemáticos para o Atrito de Rolamento . . . . .	37
2.5	Sumário . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Modelagem Dinâmica de uma Estrutura de Base</b>	<b>43</b>
3.1	Introdução . . . . .	43
3.2	Modelagem dos Atuadores . . . . .	44
3.3	Inclusão das Não-Linearidades de Entrada . . . . .	45
3.4	Modelagem Dinâmica da Base Móvel Incluindo as Rodas . . . . .	47
3.5	Implementação Computacional . . . . .	51
3.6	Sumário . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Aplicação do Modelo Dinâmico</b>	<b>55</b>
4.1	Introdução . . . . .	55
4.2	Aplicação do Modelo Dinâmico no AxeBot . . . . .	58
4.2.1	Resultados Experimentais e de Simulações . . . . .	60
4.3	Sumário . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>101</b>
5.1	Sugestões de Futuros Trabalhos . . . . .	102
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>103</b>
<b>A</b>	<b>Modelo Dinâmico do Veículo Implementado em Ambiente Matlab</b>	<b>107</b>

# Lista de Figuras

1.1	Robô móvel holonômico AxeBot. . . . .	4
2.1	Não-linearidade do tipo zona morta. . . . .	8
2.2	Não-linearidade do tipo saturação. . . . .	9
2.3	Esquema de acionamento de um motor de corrente contínua. . . . .	11
2.4	Modelo de campo elétrico do motor. . . . .	13
2.5	Modelo mecânico do motor elétrico com a roda. . . . .	14
2.6	Referências global e local do robô móvel. . . . .	15
2.7	Roda padrão fixa e seus parâmetros. . . . .	17
2.8	Roda padrão manobrável e seus parâmetros. . . . .	19
2.9	As rodas (a) e (c) não têm restrições; já a roda (b) apresenta restrições. .	20
2.10	Atrito entre duas superfícies. . . . .	28
2.11	Exemplos de tipos de atrito. A força de atrito é dada pela função estática, exceto na velocidade nula. Figura <i>a</i> ) mostra o atrito Coulomb; Figura <i>b</i> ) atrito Coulomb e viscoso; Figura <i>c</i> ) <i>stiction</i> + Coulomb e atrito viscoso; Figura <i>d</i> ) mostra como a força de atrito decresce a partir do nível de atrito estático. . . . .	30
2.12	Cilindro homogêneo rolando sobre uma superfície lisa. . . . .	32
2.13	Relação característica entre a taxa de força aplicada e a força de ruptura. Verifica-se que a força de ruptura diminui com o aumento da taxa de força aplicada. . . . .	34
2.14	Pré-Escorregamento: efeito trampolim antes do início do deslocamento. .	35

2.15	Ilustração do rolamento de uma roda. . . . .	37
2.16	Sistema de uma roda com atrito compacto (lado esquerdo) e atrito distribuído (lado direito). . . . .	40
2.17	Ilustração do rolamento compacto de uma roda. . . . .	41
3.1	Interação do atrito com o atuador. . . . .	46
3.2	Diagrama das forças e torques que atuam sobre a base móvel. . . . .	48
3.3	Implementação do modelo dinâmico de base móvel holonômica de três rodas suecas em ambiente Matlab <i>Simulink</i> <sup>®</sup> . . . . .	51
4.1	Disposição angular das rodas do robô móvel holonômico AxeBot. . . . .	56
4.2	Robô móvel holonômico AxeBot. . . . .	56
4.3	Robô móvel holonômico AxeBot. . . . .	57
4.4	Gráficos da primeira simulação: valores com o escorregamento nulo e o coeficiente de atrito de Coulomb é quase nulo (utilizou-se um valor muito pequeno, mas não-nulo para evitar uma divisão por zero [vide equações (2.49) e (2.50)]). $s_1(t) = 0$ , $s_2(t) = 0$ e $s_3(t) = 0$ ; $\mu_c = 5 \times 10^{-8}$ e $\mu_s = 5 \times 10^{-8}$ . . . . .	64
4.5	Gráficos da primeira simulação. . . . .	65
4.6	Gráficos da primeira simulação. . . . .	66
4.7	Velocidade da base móvel na primeira simulação. . . . .	67
4.8	Gráficos da segunda simulação: o escorregamento foi incrementado para 0,03 e o coeficiente de atrito de Coulomb e estático também foram incrementados para $\mu_c = 0,26$ e $\mu_s = 0,26$ . . . . .	68
4.9	Gráficos da segunda simulação. . . . .	69
4.10	Gráficos da segunda simulação. . . . .	70
4.11	Segunda simulação: velocidade linear da base móvel. . . . .	71
4.12	Gráficos da terceira simulação: o coeficiente de atrito de Coulomb e estático foram decrementados para $\mu_c = 0,25$ e $\mu_s = 0,25$ . . . . .	72
4.13	Gráficos da terceira simulação. . . . .	73

4.14	Gráficos da terceira simulação. . . . .	74
4.15	Velocidade da base móvel na terceira simulação. . . . .	75
4.16	Quarta simulação: o coeficiente de atrito de Coulomb e o estático foram incrementados para $\mu_c = 0,47$ e $\mu_s = 0,47$ . . . . .	76
4.17	Quarta simulação. . . . .	77
4.18	Quarta simulação. . . . .	78
4.19	Velocidade linear da base móvel na quarta simulação. . . . .	79
4.20	Quinta simulação: o coeficiente de atrito de Coulomb e o estático foram incrementados para $\mu_c = 0,56$ e $\mu_s = 0,56$ . . . . .	80
4.21	Quinta simulação. . . . .	81
4.22	Quinta simulação. . . . .	82
4.23	Quinta simulação: velocidade linear da base móvel. . . . .	82
4.24	Gráficos da sexta simulação: o coeficiente de atrito de Coulomb e o estático foram decrementados para $\mu_c = 0,25$ e $\mu_s = 0,25$ . O coeficiente de rigidez longitudinal foi incrementado para $\sigma_0 = 10^5 \text{ N/m}$ . . . . .	83
4.25	Gráficos da sexta simulação. . . . .	84
4.26	Gráficos da sexta simulação. . . . .	85
4.27	Velocidade linear da base móvel na sexta simulação. . . . .	86
4.28	Gráficos da sétima simulação: o coeficiente de amortecimento longitudinal foi incrementado para $\sigma_1 = 100\sqrt{10} \text{ N s/m}$ . . . . .	87
4.29	Gráficos da sétima simulação. . . . .	88
4.30	Gráficos da sétima simulação. . . . .	89
4.31	Velocidade linear da base móvel na sétima simulação. . . . .	91
4.32	Gráficos da oitava simulação: o coeficiente de atrito viscoso foi incrementado para $\sigma_2 = 0,4 \text{ N s/m}$ . . . . .	92
4.33	Gráficos da oitava simulação. . . . .	93
4.34	Gráficos da oitava simulação. . . . .	94
4.35	Velocidade linear da base móvel na oitava simulação. . . . .	95

4.36	Gráficos da nona simulação: os coeficientes de atrito de Coulomb e o estático assumiram valores diferentes entre si $\mu_c = 0,25$ e $\mu_s = 0,56$ . Já os coeficientes de rigidez longitudinal, de amortecimento longitudinal e de atrito viscoso foram decrementados para $\sigma_0 = 100\text{ N/m}$ , $\sigma_1 = 0,1\text{ Ns/m}$ e $\sigma_2 = 0,1\text{ Ns/m}$ . . . . .	96
4.37	Gráficos da nona simulação. . . . .	97
4.38	Nona simulação. . . . .	98
4.39	Nona simulação: velocidade linear da base móvel. . . . .	99
4.40	Comparação das simulações em relação à velocidade da base móvel. . . . .	99
A.1	Implementação da roda 1 em ambiente Matlab <i>Simulink</i> <sup>®</sup> . As rodas 2 e 3 são análogas à roda 1. . . . .	108
A.2	Subsistema da estrutura de cada PWM. . . . .	108
A.3	Subsistema da soma algébrica das entradas. . . . .	109
A.4	Subsistema contendo o escorregamento no ponto de contato da roda 1 com a superfície. O mesmo se aplica às demais rodas. . . . .	110
A.5	Subsistema com o atrito de LuGre Compacto. . . . .	110
A.6	Subsistema das entradas não-linearidades na roda 1. Como as outras duas rodas são iguais, obviamente, tudo que for considerado para a roda 1, poderá ser também deduzido e considerado para as rodas 2 e 3. . . . .	111
A.7	Implementação da base móvel sem as rodas no Matlab <i>Simulink</i> <sup>®</sup> . . . . .	111
A.8	Subsistema da base móvel sem as rodas. . . . .	112
A.9	Subsistema da base móvel sem as rodas com obtenção da força, no eixo $x$ , da base móvel $F_{x\text{aparente}}(t)$ . . . . .	112
A.10	Subsistema da base móvel sem as rodas com obtenção da força, no eixo $y$ , da base móvel $F_{y\text{aparente}}(t)$ . . . . .	113
A.11	Subsistema da base móvel sem as rodas com a obtenção do torque $\tau_{\text{aparente}}(t)$ da base móvel. . . . .	114
A.12	Subsistema da base móvel sem as rodas com a obtenção do das velocidades $\bar{v}_x(t)$ , $\bar{v}_y(t)$ e $\bar{\omega}(t)$ da base móvel. . . . .	114



A.13 Subsistema da cinemática direta. . . . .	115
A.14 Subsistema da base móvel sem as rodas. A partir de $\overline{v}_x(t)$ e $\overline{v}_y(t)$ , obtém-se $\bar{v}(t)$ . . . . .	115
A.15 Implementação da cinemática inversa em ambiente Matlab <i>Simulink</i> <sup>®</sup> . . .	116
A.16 Subsistema da cinemática inversa. . . . .	116
A.17 Subsistema da cinemática inversa. . . . .	117



# Lista de Tabelas

3.1	Os principais parâmetros de um sistema robótico móvel holonômica de três rodas suecas com as respectivas unidades. . . . .	53
4.1	Parâmetros utilizados nos experimentos e nas simulações. A velocidade de <i>Stribeck</i> , $v_s$ , assume o valor $6 \times 10^{-10} \text{ m/s}$ para evitar uma divisão por zero [vide expressão (2.50)]. . . . .	59
4.2	Comparação das velocidades lineares médias alcançadas pela base móvel experimentalmente. . . . .	62
4.3	Comparação das velocidades lineares máximas alcançadas pela base móvel em relação aos respectivos valores experimentais e de projeto, variando-se o coeficiente de atrito estático, de Coulomb, de rigidez longitudinal, de amortecimento longitudinal e de atrito viscoso. . . . .	90



# Capítulo 1

## Introdução

Os manipuladores robóticos são sistemas formados de diversos elos interligados por eixos rotacionais ou translacionais. Estes sistemas mecânicos podem exibir fenômenos cinemáticos e dinâmicos complexos, e como consequência uma maior dificuldade em aplicá-los no dia-a-dia. Assim, a maioria dos manipuladores robóticos em aplicações industriais são de base fixa e operam em ambientes livres de obstáculos aos movimentos de suas partes móveis, sendo estes ambientes ditos estruturados.

Nos últimos anos, porém, tem havido uma crescente investigação, em modelos de robô de base móvel [3], incluindo os manipuladores, visando à realização de tarefas em ambientes com a possibilidade de existência de obstáculos ao movimento das partes móveis do robô, ambientes estes ditos não estruturados. Uma característica construtiva predominante de robôs para essas aplicações é que a base é móvel.

Na investigação de modelos de bases móveis, aspectos relacionados com as não-linearidades de entrada devem ser levados em consideração. As principais não-linearidades de entrada são: zona morta, saturação e folga [4, 5, 6]. Neste Trabalho, a folga não será analisada, devido à existência de acoplamentos mecânicos comerciais que compensam este efeito [7].

A não-linearidade de zona morta é a faixa operacional do atuador que não produz resposta na dinâmica do sistema em função do sinal de controle aplicado em qualquer instante de tempo. Sua presença geralmente causa degradação de desempenho do controlador, podendo inclusive levar ao aparecimento de ciclos-limites no sistema em malha fechada [8]. Quando se trata de robôs, a zona morta é causada pelo atrito, o qual será tratado, com mais detalhes, no decorrer do Texto.

Existente em todos os sistemas, a não-linearidade do tipo saturação é um conjunto de restrições de limites máximo e mínimo impostas ao atuador, fazendo com que existam estados inalcançáveis e comportamentos dinâmicos não rastreáveis [1].

Para o projeto de sistemas robóticos apropriados à realização de determinadas tarefas, precisa-se compreender o comportamento mecânico do sistema para que, junto com as não-linearidades de entrada a que a base móvel está sujeita, possa haver uma adequada e eficiente funcionalidade do sistema.

Alguns artigos mencionam o fator escorregamento em robôs móveis com rodas holonômicas, como em [9], [3], [10], [11], dentre outros. Em [11], apresenta-se o Modelo de atrito de LuGre Compacto, em que há o contato de um ponto da roda com a superfície. Este Modelo será utilizado na Modelagem Dinâmica deste Trabalho.

Em [9], apresenta-se uma modelagem dinâmica não-linear de uma base para robôs móveis com rodas holonômicas, mas a modelagem não considera o escorregamento de um ponto de contato da roda com a superfície nem tampouco as não-linearidades de entrada. O modelo final apresenta três rodas holonômicas, sendo que as rodas dianteiras estão dispostas de  $105^\circ$  da roda traseira. Apesar destas rodas não estarem simétricas entre si ( $120^\circ$  uma relação à outra), a geometria utilizada no artigo otimizou a velocidade da base móvel numa direção frontal, mas com uma perda de agilidade holonômica.

Por outro lado, em [3, 10], apresenta-se um modelo dinâmico para robôs móveis com rodas holonômicas, considerando o escorregamento entre as rodas e a superfície de movimento. Duas superfícies de movimento - papel e carpete (este último é um material muito similar ao de um campo de futebol de robôs) - foram usadas nas simulações e experimentos, com diferentes propriedades do atrito. Além da modelagem dinâmica com escorregamento, o artigo apresenta também um método para determinar os coeficientes de atrito experimentalmente, e o coeficiente de atrito dinâmico foi igual ao estático.

Um aspecto interessante a ser considerado neste artigo foi que as dinâmicas do escorregamento de um robô holonômico não estão limitadas apenas a altas velocidades e acelerações. Sendo assim, para o modelo robótico, um fator igualmente importante na dinâmica do escorregamento é o material rígido entre os rolamentos, mesmo em velocidades e acelerações baixas.

Em suma, tratando-se de alguns trabalhos encontrados na Literatura [9, 3, 10], relacionados ao tema em estudo desta Dissertação, ainda não foi abordada a modelagem dinâmica de uma estrutura de base holonômica para robôs móveis com inclusão das não-

linearidades de entrada, e usaram modelos simplificados para o fenômeno de atrito.

Desta forma, este Trabalho apresenta uma modelagem dinâmica de robôs móveis holonômicos [12] com três rodas do tipo sueca, acionadas por motores elétricos de corrente contínua, considerando as não-linearidades de entrada dos tipos zona morta e saturação. A Modelagem desenvolvida objetiva a simulação como ferramenta de projeto e especificação de componentes para o sistema e, portanto, não houve a preocupação de se obter funções de transferência, ou equações de estados.

Na abordagem usada, a zona morta foi relacionada com fenômenos decorrentes do atrito entre as rodas que suportam a base móvel e o chão, e a saturação foi relacionada com limitações físicas do acionamento elétrico dos motores que são acoplados às rodas. A aplicação desta Modelagem é feita na base móvel real *AxeBot* [2], utilizada para compor o time de futebol de robôs da Universidade Federal da Bahia. Os principais desenvolvimentos desta Dissertação foram analisados e simulados em ambiente Matlab *Simulink*<sup>®</sup>, com aplicação deste, no sistema robótico *AxeBot*.

## 1.1 Análise da Temática

O robô móvel *AxeBot* [2] é um robô com três rodas omnidirecionais, ativas e suecas, com  $\gamma = 0$  e dispostas a  $120^\circ$  umas das outras. Esta configuração possibilita o movimento desta base móvel em qualquer direção sem a necessidade de re-orientação.

Algumas suposições são levadas em consideração, dentre elas, podem-se destacar: (i) a base móvel é constituída de material rígido e não é considerado qualquer tipo de deformação sobre a mesma; (ii) existe apenas um ponto de contato de cada roda com a superfície e, quando a base está em movimento, as velocidades relativas nestes pontos não são nulas, ou seja, há deslizamento das rodas sobre o solo; e (iii) pode haver rolamento lateral do robô, assim como rolamentos frontal e retrógrado. O *AxeBot* é ilustrado na figura 1.1.

O *AxeBot* é formado pelos seguintes componentes: (i) sistemas de sensoriamento e de controle; (ii) sistema computacional; e (iii) atuadores. Os sistemas de sensoriamento e controle são suportados pelo sistema computacional microcontrolador *Strongarm*.

Os propulsores são três motores de corrente contínua (CC), modelo *Amax 22 R179-6V*, da marca *Maxon*, controlados por duas placas *BrainStem Moto 1.0*. Cada motor é

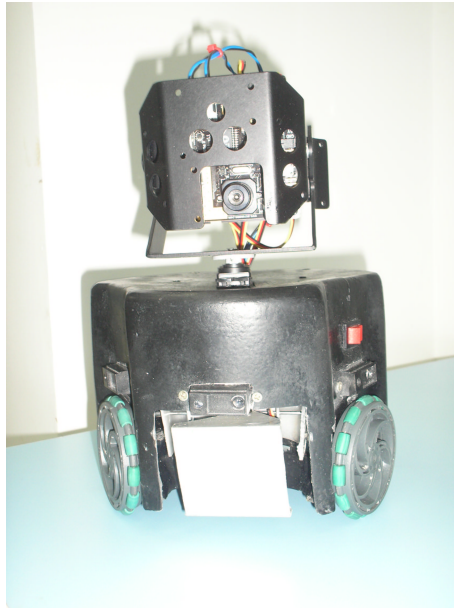


Figura 1.1: Robô móvel holonômico AxeBot.

acoplado a uma caixa de redução planetária de 19:1. São utilizadas ainda três pontes H para o acoplamento dos motores de corrente contínua aos respectivos controladores. Cada roda holonômica é acoplada a um conjunto motor com caixa de redução e *encoder* incremental, que permite estimar a velocidade angular tangencial de cada roda.

Dois outros servo-motores são usados para acionar uma câmera. Este sistema de visão é composto por uma *WebCam CMUCam2* sobre a base móvel, combinados com seis sensores de distância da *Sharp GP2D120*, e objetivam o desvio de obstáculo e posicionamento relativo da bola, de companheiros de time, de adversários e dos gols. Todos estes objetos são referenciados ao centro da base móvel por este sistema de visão.

Mais dois outros servo-motores de alto torque são destinados a um efetuator, que é a ferramenta de chute da base móvel, transformando-a assim em um robô móvel.

Devido à existência de escorregamento nas rodas, não é possível relacionar os movimentos nas rodas com o deslocamento e a velocidade do centro da base móvel. As medidas de postura, velocidade linear e velocidade angular da base móvel poderiam ser obtidas mediante um sistema de medição por imagens, sendo que este sistema ainda está em desenvolvimento pelo grupo de pesquisadores da Universidade Federal da Bahia que desenvolvem o AxeBot. O sistema de visão mencionado acima não permite o posicionamento da base móvel em relação a um referencial cartesiano externo e fixo.



## 1.2 Contribuições e Propostas da Dissertação

As principais contribuições e propostas desta Dissertação são:

- (i) Apresentar a modelagem dinâmica de uma estrutura de base móvel holonômica com três rodas suecas, acionadas por motores elétricos de corrente contínua (CC), analisando as não-linearidades na entrada do sistema. As não-linearidades modeladas são caracterizadas como dos tipos: zona morta e saturação. A não-linearidade do tipo zona morta está relacionada com a modelagem do atrito existente no subsistema mecânico, e a não-linearidade do tipo saturação está relacionada com as limitações físicas do subsistema eletrônico de acionamento dos motores de corrente contínua (CC);
- (ii) Apresentar um bloco de simulação, em ambiente Matlab *Simulink*<sup>®</sup>, desenvolvido a partir do modelo citado acima, o qual proporciona a projetistas a simulação com dados reais de todos os componentes do sistema e características ambientais. Isto possibilita uma visão geral do desempenho do sistema, operando em condições próximas às reais.

Como contribuições e propostas não menos importantes, esta Dissertação apresenta:

- (i) A aplicação, num sistema real, o AxeBot;
- (ii) Verificação das principais imperfeições, às quais um sistema real está exposto em seu ambiente de aplicação.

## 1.3 Estrutura do Texto

O Capítulo 2 apresenta os conceitos teóricos preliminares necessários à compreensão do conteúdo da Dissertação, objetivando um entendimento sobre alguns conceitos fundamentais. Primeiramente, são apresentadas definições sobre algumas não-linearidades inerentes a um sistema real como zona morta e saturação. Em seguida, são mostrados conceitos sobre acionamento e dinâmica de motores de corrente contínua (CC), restrições cinemáticas impostas por rodas à bases móveis, e na última seção, são apresentados os principais modelos de atrito existentes.

No Capítulo 3, é feita a modelagem dinâmica de uma estrutura de base móvel holonômica com três rodas suecas incluindo os atuadores elétricos, considerando as não-linearidades na entrada do sistema, e utilizando o modelo de atrito de LuGre Compacto para modelar a zona morta, e as limitações do acionamento elétrico dos motores para modelar a saturação. Ainda no mesmo Capítulo, há a implementação computacional desta modelagem dinâmica em ambiente Matlab *Simulink*<sup>®</sup>.

O Capítulo 4 apresenta a base móvel real AxeBot. Os resultados foram obtidos com a utilização do bloco de simulação em ambiente Matlab *Simulink*<sup>®</sup>, e também foi feita a verificação das limitações físicas às quais um sistema real está exposto em seu ambiente de aplicação.

O Capítulo 5 apresenta considerações e resultados finais, assim como sugestões para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Preliminares Teóricas

*Este Capítulo apresenta a base teórica necessária para o entendimento de todo o Texto. Primeiramente, são apresentadas definições sobre as principais não-linearidades de entrada que um sistema real normalmente apresenta. Posteriormente, são abordados conceitos sobre acionamento e dinâmica de motores de corrente contínua, e restrições cinemáticas impostas por rodas à bases móveis. Por fim, são abordados os principais modelos de atrito existentes, com destaque para o de LuGre Compacto que será utilizado nos capítulos posteriores dessa Dissertação.*

### 2.1 Introdução

A grande maioria dos sistemas mecânicos reais possui as principais não-linearidades de entrada como zona morta, saturação, e folga [5, 6, 4]. Neste Trabalho, a folga não será analisada, devido à existência de acoplamentos mecânicos comerciais que compensam este efeito [7].

A não-linearidade de zona morta é um fenômeno comumente encontrado, em diversos sistemas, especialmente naqueles que utilizam atuadores do tipo servo-válvulas hidráulicas ou servo-motores elétricos. Ela é a faixa operacional do atuador que não produz resposta na dinâmica do sistema em função do sinal de controle aplicado em qualquer instante de tempo. Sua presença normalmente causa degradação de desempenho do controlador, podendo inclusive levar ao aparecimento de ciclos-limites no sistema em malha fechada. Diversas estratégias de controle podem ser empregadas para minimizar

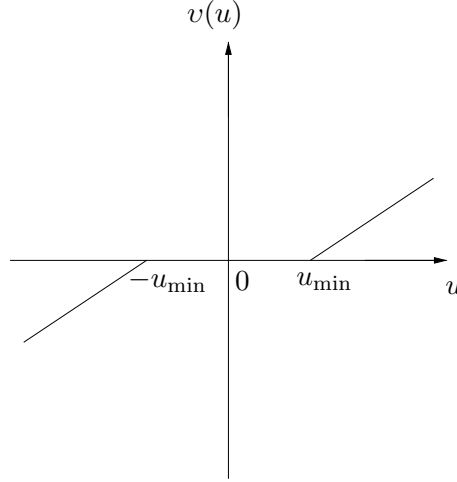


Figura 2.1: Não-linearidade do tipo zona morta.

a perda de desempenho causada por este tipo de não-linearidade, como por exemplo o uso de técnicas com redes neurais artificiais ou lógica nebulosa [13].

Quando se trata de robôs, a zona morta é causada pelo atrito estático. Os robôs móveis aceleram e freiam com bastante frequência, o que torna a zona morta um efeito impactante. Sendo este efeito altamente não linear, o sistema pode apresentar desempenho pobre. Conseqüentemente, é importante que engenheiros de controle entendam o fenômeno do atrito e saibam como lidar com ele.

A não-linearidade do tipo zona morta pode ser representada pela curva característica de resposta linear de um atuador, como mostrado na figura 2.1, onde  $v(u(t))$  é a resposta do atuador ao sinal de controle  $u(t)$ . A resposta deste atuador pode ser modelada matematicamente na forma

$$v(u(t)) = \begin{cases} m[u(t) - \text{sgn}(u(t))u_{\min}(t)] & \text{se } |u(t)| > u_{\min}(t) \\ 0 & \text{se } |u(t)| \leq u_{\min}(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $u_{\min}(t)$  é o valor mínimo de sinal de controle capaz de alterar a posição do atuador,  $m \in \mathbb{R}_+^*$  é uma constante linear, e  $\text{sgn}(u(t))$  é o sinal matemático da variável de controle. Nota-se que, para  $|u(t)| \leq u_{\min}(t)$ , o sistema será forçado e que, para  $|u(t)| > u_{\min}(t)$ , o comportamento será não forçado [14].

A não-linearidade do tipo saturação é constituída pelas restrições de limites máximo e mínimo impostas ao atuador. Uma curva característica para a saturação é mostrada na figura 2.2, sendo  $\pm u_{\max}(t)$  os valores limites da resposta do atuador.

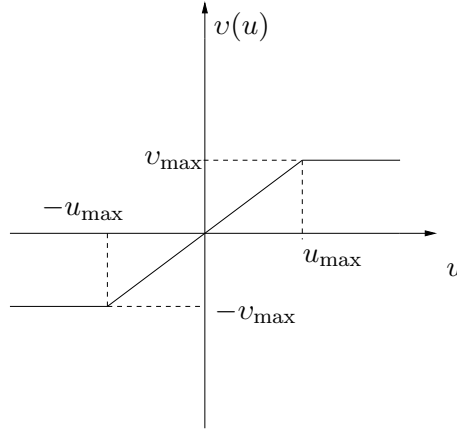


Figura 2.2: Não-linearidade do tipo saturação.

Para  $|u(t)| \leq u_{\max}(t)$ , o atuador responde proporcionalmente ao sinal de controle, e para qualquer outro valor de  $|u(t)|$ , o atuador responderá com valor quase constante chamado valor de saturação,  $u_{\max}(t)$  ou  $-u_{\max}(t)$ , dependendo do sentido de atuação imposto pelo controlador. Matematicamente, este comportamento pode ser descrito pela expressão

$$v(u)(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(u(t))v_{\max}(t) & \text{se } |u(t)| > u_{\max}(t) \\ m u(t) & \text{se } |u(t)| \leq u_{\max}(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

É muito comum sistemas reais apresentarem a superposição da zona morta e da saturação, como ocorre com os sistemas robóticos, em especial os que possuem base móvel.

## 2.2 Acionamento Elétrico com Motores de Corrente Contínua

O sistema de acionamento influencia no desempenho dinâmico de qualquer sistema robótico. Em certa medida, o sistema de acionamento determina os tipos de aplicação que o robô pode realizar.

Um dos tipos de acionamento mais usado é o elétrico. Este não propicia altas velocidades, mas a repetibilidade e a precisão são grandes. Os robôs com acionamento elétrico podem usar servomotores de corrente contínua (CC), entre outros tipos de

motores elétricos.

Um motor elétrico de corrente contínua sempre é acionado por uma fonte de alimentação cuja saída é sujeita à saturação. Atualmente, os circuitos eletrônicos que realizam tal acionamento são modulados por largura de pulso (*Pulse Width Modulation* - PWM). Assim, o motor passa a ter restrições de entrada e, como consequência, a produzir uma degradação no seu desempenho. Portanto, a modelagem correta destas restrições é muito importante para quantificar e compreender os aspectos desta degradação [8].

Em circuitos eletrônicos modulados por largura de pulso, a tensão média da saída deve ser controlada em um nível de tensão desejada. Estes circuitos utilizam uma ou mais chaves para transformar uma fonte de tensão contínua constante em uma fonte de tensão contínua variável [8], e são também conhecidos como conversores CC-CC.

Em um conversor CC-CC, com tensão de saída modulada por largura de pulso, para uma tensão de entrada constante, a tensão média da saída é controlada pelo tempo de condução ( $t_{on}$ ) e pelo tempo de bloqueio ( $t_{off}$ ) das chaves. Define-se  $T_s = t_{on} + t_{off}$  como sendo o período de chaveamento e  $f_s = \frac{1}{T_s}$  como a frequência de chaveamento.

Utilizando-se como referência [15], um operador PWM pode ser definido na forma

$$PWM(t_K) = \begin{cases} V_d(t), & t_k < t \leq t_k + \bar{\delta}T_s \\ 0, & t_k + \bar{\delta}(t)T_s < t \leq t_k + T_s \end{cases}$$

sendo  $t_k = kT_s$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , o incremento do tempo.  $\bar{\delta}(t)$  é uma função conhecida como largura de pulso ou ciclo de trabalho e ela varia em um intervalo fechado  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ . O ciclo de trabalho também pode ser definido como a relação entre o intervalo de condução das chaves e o período de chaveamento  $\bar{\delta}(t) = t_{on}/T_s$ , ou definido pela relação entre a tensão média terminal na carga,  $u(t)$ , e a tensão de entrada,  $V_d(t)$ , na forma

$$2\bar{\delta}(t) - 1 = \frac{u(t)}{V_d(t)}, \quad (2.3)$$

ou

$$u(t) = \delta(t) V_d(t), \quad (2.4)$$

para  $\delta(t) \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}$ .

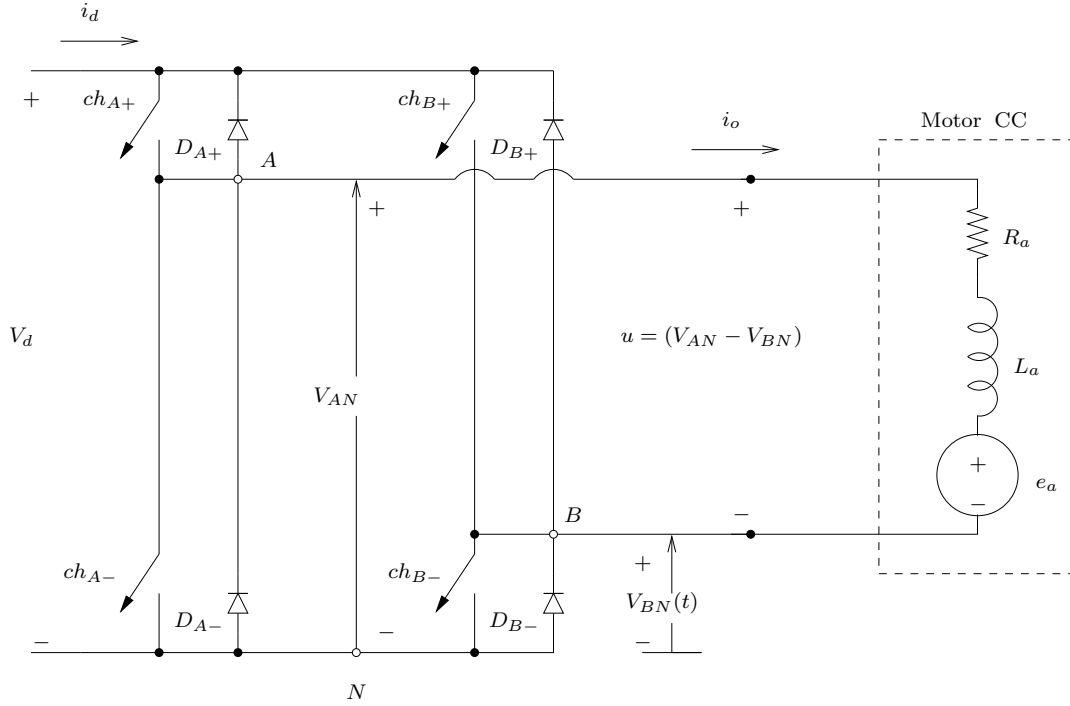


Figura 2.3: Esquema de acionamento de um motor de corrente contínua.

### 2.2.1 Considerações sobre Acionamento de um Motor CC

Na figura 2.3, onde se ilustra o esquema de acionamento de um motor de corrente contínua e, considerando-se o acionamento de um motor com chaveamento do tipo bipolar<sup>1</sup> [16], tomando-se o ponto  $N$  da figura 2.3 como referência, tem-se que a tensão média, na saída, é  $u(t) = V_{AN}(t) - V_{BN}(t)$ , sendo  $V_{AN}(t) = \bar{\delta}(t) V_d(t)$  e  $V_{BN}(t) = (1 - \bar{\delta}(t)) V_d(t)$ , com  $\bar{\delta}(t) \in [0, 1]$ . A relação entre a fonte de tensão primária e a tensão média de saída pode então ser representada da forma:

$$u(t) = \delta(t) V_d(t), \quad (2.5)$$

com  $\delta(t) = (2\bar{\delta}(t) - 1) \in [-1; 1] \subset \mathbb{R}$ .

A partir da equação (2.5), nota-se que o controle do motor passa a ser feito não mais pela tensão, sendo feito então pela largura de pulso do sinal PWM do motor  $\delta(t)$ . A dinâmica desta variável está restrita ao intervalo  $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$  independente do valor de  $V_d(t)$ . Logo, nesta situação, tem-se que  $\delta_{\max}(t) = 1$ . Apesar disso, consideram-se as

<sup>1</sup>Neste tipo de chaveamento, no mesmo instante de tempo em que as chaves  $(ch_{A+}, ch_{B-})$  são fechadas, as chaves  $(ch_{B+}, ch_{A-})$  são abertas e, no mesmo instante de tempo em que as chaves  $(ch_{A+}, ch_{B-})$  são abertas, as chaves  $(ch_{B+}, ch_{A-})$  são fechadas.

limitações físicas existentes no sistema de acionamento, e verifica-se que  $u(t)$  pode não atingir o valor de  $\pm V_d(t)$  quando  $\delta(t) = \pm 1$ , na equação (2.5), e que  $V_d(t)$  pode variar no tempo.

Podem-se enumerar duas limitações básicas:

- A primeira limitação é a consideração de chaves não ideais. Estas chaves são transistores que apresentam uma queda de tensão, quando usadas como chaves em condução, chamada de tensão de saturação,  $V_{sat}(t)$ , que varia entre 0,1 a 0,3 volts para transistores comuns.  $V_{sat}(t)$  pode ser desprezado para valores elevados de  $V_d(t)$ . No entanto, para valores baixos de  $V_d(t)$ , o que ocorre em sistema embarcados e com baterias servindo como fonte primária de tensão, esta suposição não pode ser considerada;
- A segunda limitação é o próprio  $V_d(t)$  que, em sistemas embarcados autônomos com baterias servindo como fonte primária de tensão, diminui o seu valor com o passar do tempo de funcionamento do sistema. A diminuição do valor de  $V_d(t)$  pode ser modelada como uma perturbação  $\Delta V_d(t)$ , e com a criação de uma nova variável  $V'_d(t)$ , na forma

$$V'_d(t) = V_d(t) - 2 V_{sat}(t) - \Delta V_d(t), \quad (2.6)$$

para se substituir  $V_d(t)$ , na equação (2.5) e, com isso, manter  $\delta_{max}(t) = 1$ .

### 2.2.2 Dinâmica do Motor de Corrente Contínua

Um motor de corrente contínua (CC) pode ser dividido em dois subsistemas: um elétrico e outro mecânico, como mostrados nas figuras 2.4 e 2.5. A equação dinâmica do sistema elétrico é dada por

$$L \frac{d i}{d t} + R i(t) = u(t) - e_{em}(t), \quad (2.7)$$

tal que  $L$  é a indutância da armadura,  $R$  é a resistência do motor da armadura,  $i(t)$  é a corrente elétrica variante no tempo,  $u(t)$  é a tensão elétrica de alimentação do motor, e  $e_{em}(t)$  é a força contra-eletromotriz gerada na armadura do motor. Para motores com campo constante, a força contra-eletromotriz é proporcional à velocidade angular do eixo do motor na forma

$$e_{em}(t) = k_{em} \omega_m(t), \quad (2.8)$$



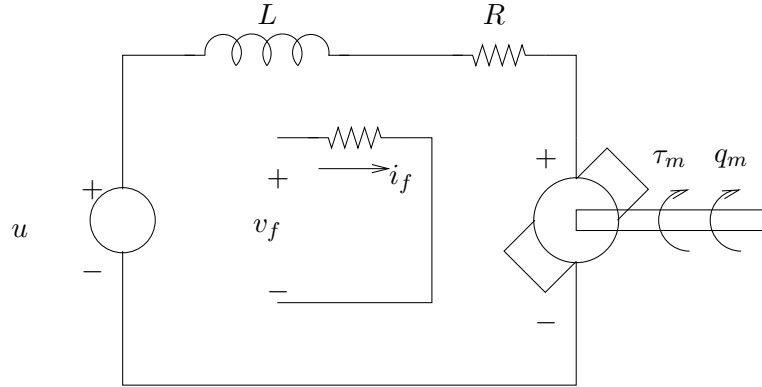


Figura 2.4: Modelo de campo elétrico do motor.

em que  $\omega_m(t)$  é a velocidade angular do eixo do motor, e  $k_{em}$  é a constante de força contra-eletromotriz de rotação.

A evolução do torque motor no tempo,  $\tau_m(t)$ , é proporcional à corrente elétrica no formato

$$\tau_m(t) = k_t i(t), \quad (2.9)$$

onde  $k_t$  é a constante de torque.

No acionamento de uma carga mecânica por um motor CC, muitas vezes são usados sistemas de acoplamento para se adequar o movimento ou torque do motor ao movimento ou torque requerido pela carga. Assim, para o acoplamento sem escorregamento, tem-se a relação (2.10) entre os movimentos na carga e no motor elétrico:

$$N = \frac{\omega_m(t)}{\omega_\omega(t)}, \quad (2.10)$$

sendo  $N$  o fator de redução de velocidade, e  $\omega_\omega(t)$  a velocidade angular da carga.

A relação entre os torques na carga,  $\tau_\omega(t)$ , e o torque eletromagnético,  $\tau_m(t)$ , em regime permanente, é dada por:

$$\tau_\omega(t) = \eta N \tau_m(t),$$

onde  $\eta \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$  é a eficiência mecânica do acoplamento.

A equação dinâmica do sub-sistema mecânico é dada por

$$\tau_m(t) - \frac{\tau_\omega(t)}{\eta N} = J_m \dot{\omega}_m, \quad (2.11)$$

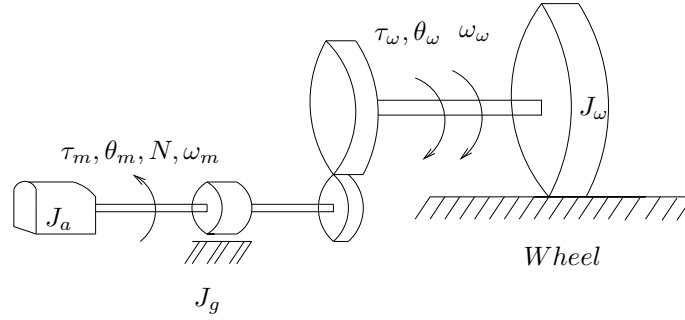


Figura 2.5: Modelo mecânico do motor elétrico com a roda.

sendo  $J_m = J_a + J_g$  o momento de inércia de cada rotor (ou seja, a soma dos momentos de inércia do eixo do motor e do sistema redutor, respectivamente). O atrito, no motor, não é levado em consideração na expressão (2.11).

## 2.3 Cinemática da Estrutura de Base de Um Robô Móvel

A Cinemática é o estudo mais básico que descreve o comportamento dos sistemas mecânicos. Para o projeto de sistemas robóticos apropriados à realização de determinadas tarefas, precisa-se compreender o comportamento cinemático do robô [17].

Sistemas mecânicos com movimento, especialmente os robôs móveis, são descritos por um conjunto de coordenadas generalizadas e estão sujeitos às restrições cinemáticas (condições de rolamento e escorregamento das rodas sobre o plano), as quais são expressas pela relação das coordenadas generalizadas e suas derivadas [18, 19].

O foco desta seção é uma apresentação resumida da modelagem cinemática dos robôs móveis utilizando a nomenclatura dada em [17]. É interessante ressaltar que as estruturas de base de robôs móveis são, na realidade, estruturas de veículos geralmente autônomos [8].

O desenvolvimento de um modelo cinemático completo, para o movimento de um robô móvel, é um processo de extrema importância. Cada roda contribui com o movimento da estrutura de base e, ao mesmo tempo, impõe restrições sobre o seu movimento. A disposição das rodas varia em relação à geometria do chassis e, conseqüentemente, suas restrições combinam-se para dar forma às restrições no movimento total da base.

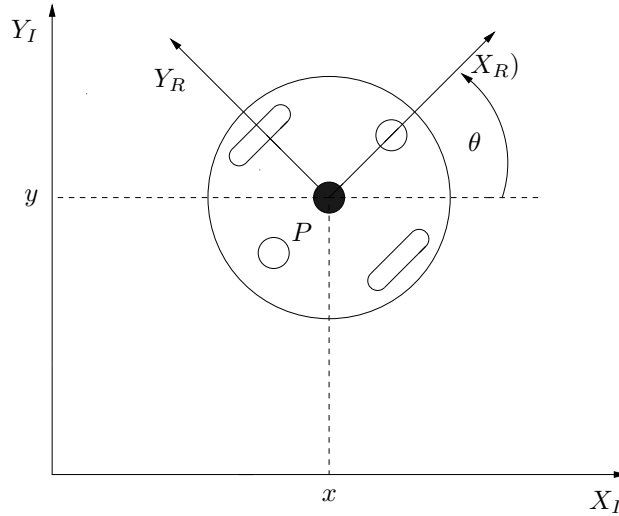


Figura 2.6: Referências global e local do robô móvel.

As forças e as restrições de cada roda devem ser expressas em relação a um ambiente livre de obstáculos [17].

Para um melhor entendimento desta seção, serão feitas as seguintes suposições:

- A estrutura de base móvel do robô é um corpo rígido sobre as rodas, operando sobre um plano horizontal;
- As variáveis de interesse do chassi sobre o plano horizontal, são três: duas para posição no plano, e uma para a orientação ao longo do eixo vertical, o qual é ortogonal ao plano;
- As rodas são rígidas e não deformáveis. Esta suposição é razoável, uma vez que elas não são pneumáticas;
- Há escorregamento nas rodas, ou seja, o movimento produzido pela roda não é inteiramente convertido em um corresponde movimento da estrutura de base móvel.

Para se especificar a posição do veículo sobre o plano, estabelece-se uma relação entre a referência global do plano e a referência local do veículo, como é mostrado na figura 2.6. Os eixos  $X_I(t)$  e  $Y_I(t)$  definem uma base inercial arbitrária sobre o plano, como a referência global desde a origem  $O$ :  $\{X_I(t), Y_I(t)\}$ . É importante lembrar que existe um eixo  $Z_I(t)$  perpendicular ao plano  $(XY)(t)$ .

Para se especificar a posição do veículo, escolhe-se um ponto  $P$  sobre o chassi, e este será o ponto de referência sobre a base. Os eixos ortogonais  $\{X_R(t), Y_R(t)\}$  fixados em  $P$  constroem a referência local do veículo.

A posição de  $P$  em relação a referência global é especificada pelas coordenadas  $x(t)$  e  $y(t)$ , e a diferença angular entre os eixos  $X_I(t)$  e  $X_R(t)$ , medida a partir da intersecção entre estes dois eixos, fornece a medida de orientação da base, definida por  $\theta$ . Pode-se descrever o posicionamento do móvel como um vetor com apenas estes três elementos<sup>2</sup> na forma

$$\xi_I(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Para se descrever o movimento do veículo em termos de suas variáveis cinemáticas é preciso mapear o movimento ao longo dos eixos de referência global em relação ao movimento ao longo dos eixos de referência local do móvel. O mapeamento deve ser em função do posicionamento do móvel e dado em função da matriz de rotação ortogonal

$$R(\theta(t)) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) & 0 \\ -\sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Esta matriz é usada para o mapeamento do movimento da referência global  $X_I(t), Y_I(t)$  em relação à referência local  $X_R(t), Y_R(t)$ . Esta operação é indicada por

$$\xi_R(t) = R(\theta(t))\xi_I(t). \quad (2.14)$$

### 2.3.1 Restrições Cinemáticas da Roda

O primeiro passo para se obter o modelo cinemático da estrutura da base de um robô móvel é expressar as restrições de movimento de cada roda. Supõe-se durante o movimento que: (i) as rodas permaneçam verticais ao plano (significa que estão paralelas ao eixo  $Z_R(t)$ ); e (ii) as rodas giram ao redor de um eixo horizontal e, em todos os casos, há um ponto de contato entre a roda e o plano [8].

---

<sup>2</sup>Nota-se que o subíndice  $I$  é usado para o esclarecimento de que a base, nesta posição, é em relação às escalas globais.

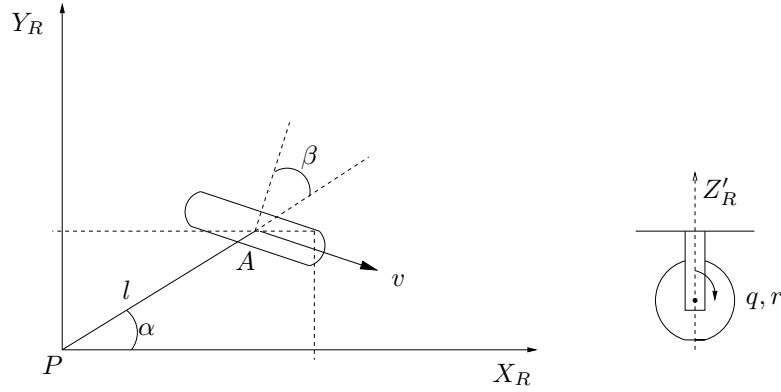


Figura 2.7: Roda padrão fixa e seus parâmetros.

Conforme estas suposições, apresentam-se duas restrições para cada tipo de roda: (i) a primeira restrição aborda contato-rolamento, onde a roda deve rolar quando o movimento ocorre no sentido apropriado; e (ii) a segunda restrição reforça o conceito da existência de deslizamento lateral, que a roda deve deslizar ortogonalmente ao seu plano.

Há diversos tipos de rodas classificadas dentro de cinco categorias, segundo [17]:

- (i) Rodas padrão fixas [vide figura 2.7];
- (ii) Rodas padrão manobráveis [vide figura 2.8];
- (iii) Rodas castor [vide figura 2.9(a)];
- (iv) Rodas suecas [vide figura 2.9(b)];
- (v) Rodas esféricas [vide figura 2.9(c)].

### Rodas Padrão Fixas

Na figura 2.7, o centro da roda é indicado por  $A$ . A posição de  $A$ , na base  $X_R(t), Y_R(t)$ , é caracterizada usando-se coordenadas polares para a distância  $\overline{PA} = l$  e o ângulo  $\alpha$ . A orientação da roda, no plano, em relação a  $\overline{PA}$ , é representada pelo ângulo constante  $\beta$ . A rotação do ângulo da roda, ao redor do eixo horizontal, é indicado por  $q(t)$ , e o raio da roda é indicado por  $r$ .

Portanto, a posição da roda é caracterizada por quatro constantes:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $l$ ,  $r$ , e o seu movimento, por um ângulo variável  $q(t)$ . Com esta descrição, os componentes da velocidade do ponto de contato são calculáveis e podem-se deduzir as duas outras restrições:

(i) Ao longo do plano da roda:

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta) & -\cos(\alpha + \beta) & (-l)\cos\beta \end{bmatrix} R(\theta(t))\dot{\xi} - r\dot{q} = 0. \quad (2.15)$$

(ii) Ortogonal ao plano da roda:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l\sin\beta \end{bmatrix} R(\theta(t))\dot{\xi} = 0. \quad (2.16)$$

### Rodas Padrão Manobráveis

A roda padrão manobrável se diferencia da roda padrão fixa por haver um grau de liberdade adicional. A roda padrão manobrável pode girar ao redor de um eixo vertical que passa pelo do centro da roda e o ponto de contato com a superfície.

As equações de posição da roda padrão manobrável são idênticas às da roda padrão fixa, com uma exceção: a orientação da roda em relação à base  $X_R(t)$ ,  $Y_R(t)$  não é mais um valor fixo e único  $\beta$ . Este varia em função do tempo:  $\beta(t)$ , como indicado na figura 2.8. Portanto,

(i) A restrição de rolamento é:

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta(t)) & -\cos(\alpha + \beta(t)) & (-l)\cos(\beta(t)) \end{bmatrix} R(\theta(t))\dot{\xi} - r\dot{q} = 0. \quad (2.17)$$

(ii) A restrição de deslizamento é:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta(t)) & \sin(\alpha + \beta(t)) & l\sin(\beta(t)) \end{bmatrix} R(\theta(t))\dot{\xi} = 0. \quad (2.18)$$

### Rodas Castor

A roda tipo castor é apta a girar ao redor de um eixo vertical. Contudo, o eixo vertical de rotação neste tipo de roda não passa por um ponto de contato com a superfície, como ocorre na roda tipo padrão manobrável. A figura 2.9(a) mostra uma

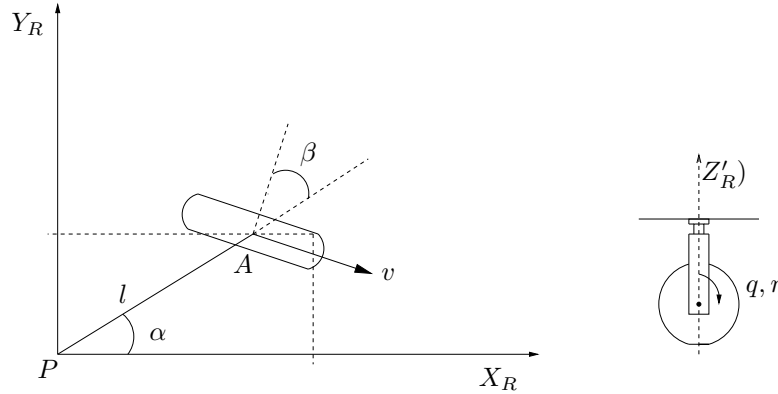


Figura 2.8: Roda padrão manobrável e seus parâmetros.

roda tipo castor, demonstrando que a especificação formal da posição deste tipo de roda requer um parâmetro adicional [17].

O ponto de contato da roda, o ponto  $B$ , é conectado ao ponto  $A$  por um corpo rígido  $AB$  de comprimento fixo  $d$ . O eixo vertical está sobre  $A$ , e esse ponto  $A$  tem uma posição fixa em relação à base  $X_R(t), Y_R(t)$ , conforme é ilustrado na figura 2.9(a).

Assume-se que o plano vertical da roda é alinhado com  $AB$  o tempo todo. A roda castor tem dois parâmetros que variam em função do tempo: (i)  $\varphi(t)$  representa o giro da roda no tempo; e (ii)  $\beta(t)$  denota o ângulo manobrável e a orientação de  $AB$  no tempo.

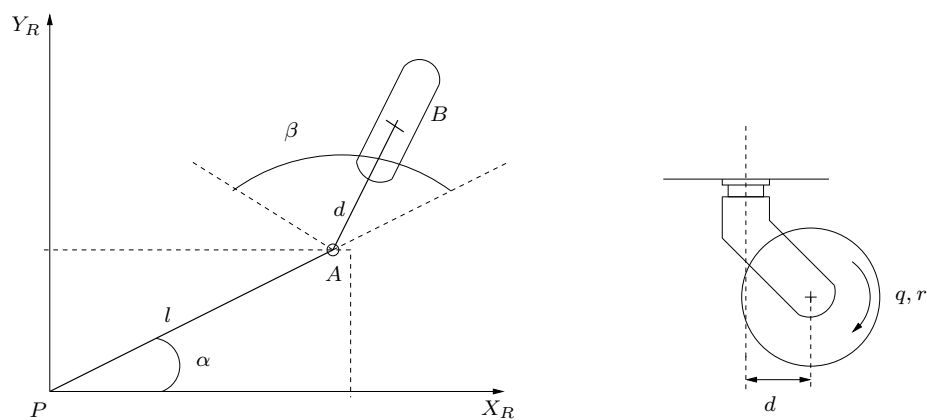
Para a roda castor o eixo  $AB$ , também chamado de *offset*, gira livremente durante o movimento. A restrição de rolamento é representada pela expressão:

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta(t)) & -\cos(\alpha + \beta(t)) & (-l)\cos(\beta(t)) \end{bmatrix} R(\theta(t))\dot{\xi} - r\dot{q} = 0. \quad (2.19)$$

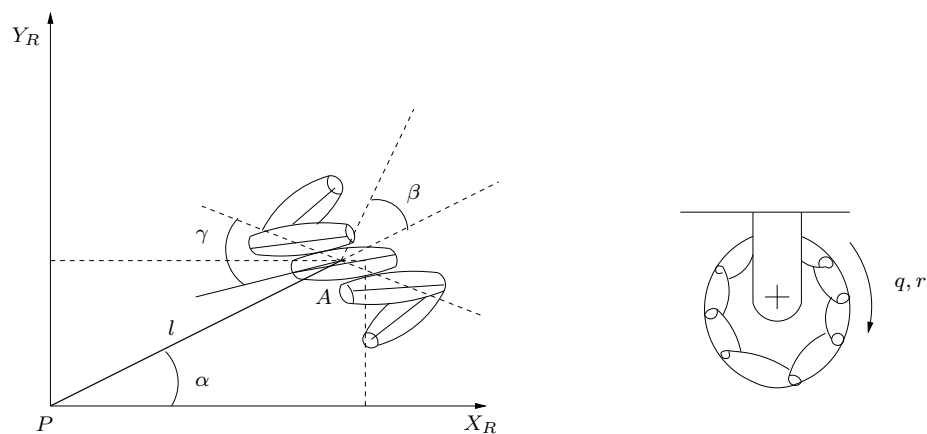
A geometria da roda castor possibilita escorregamento ou deslizamento da roda sobre o ponto de contato. Um ponto crítico é que a força lateral na roda ocorre no ponto  $A$ , que é o ponto de existência da roda em relação à base  $X_R(t), Y_R(t)$ . Como o ponto de contato da roda com a superfície possui um *offset* relativo ao ponto  $A$ , a variável que tiver movimento lateral anulado estará configurada de forma errada. Desta forma, a variável configurada erroneamente comporta-se como uma variável de rolamento, na rotação apropriada do eixo vertical, e assim

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta(t)) & \sin(\alpha + \beta(t))d & l\sin(\beta(t)) \end{bmatrix} R(\theta(t))\dot{\xi} + d\dot{\beta} = 0. \quad (2.20)$$

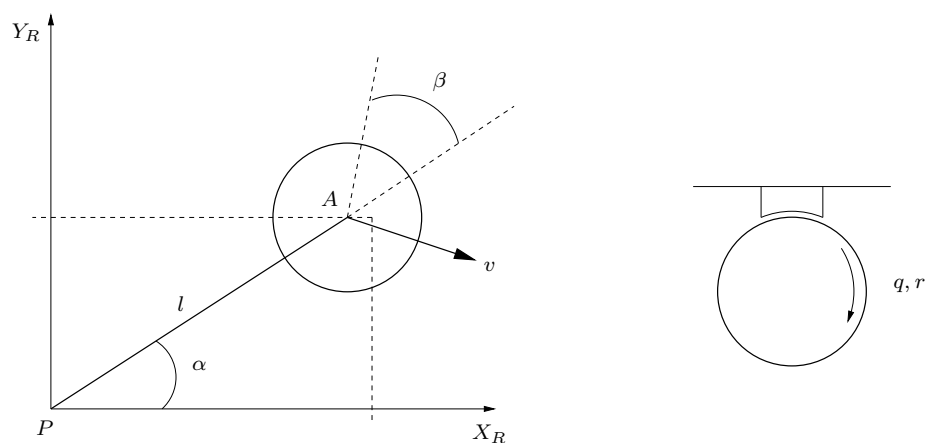
Na equação (2.20), qualquer movimento ortogonal ao plano da roda deve ser ba-



(a) Roda castor e seus parâmetros.



(b) Roda sueca e seus parâmetros.



(c) Roda esférica e seus parâmetros.

Figura 2.9: As rodas (a) e (c) não têm restrições; já a roda (b) apresenta restrições.



lanceado por um movimento manobrável castor oposto e equivalente. Este resultado é crítico ao sucesso das rodas castor porque, após se estabelecer o valor de  $\dot{\beta}$ , qualquer movimento lateral pode ser aceitável. Numa roda padrão manobrável, a ação, por ela mesma, não causa um movimento do chassi do robô. Mas, numa roda castor, a ação, por si só, move o chassi do robô por causa do *offset* entre o ponto de contato com a superfície e o eixo vertical de rotação.

Mais precisamente, pode-se assumir que, a partir das expressões (2.19) e (2.20), dado qualquer movimento  $\dot{\xi}_I$ , há algum valor para as velocidades de rotação  $\dot{\varphi}$  e manobrável  $\dot{\beta}$ , tal que as variáveis são encontradas. Assim, um robô com apenas rodas castor pode mover-se com qualquer velocidade no espaço de possíveis movimentos do robô. Tais sistemas são chamados Omnidirecionais [12].

### Rodas Suecas

A roda sueca [3] não possui eixo vertical de rotação, e é apta a se mover de forma omnidirecional como a roda castor. É o tipo de roda a ser usada na aplicação da modelagem dinâmica deste Trabalho, que será explanada posteriormente.

A roda sueca consiste de uma roda padrão fixa com rolamentos ligados ao perímetro da roda. Estes rolamentos possuem eixos que não são paralelos ao eixo principal do componente da roda padrão fixa. O ângulo exato,  $\gamma$ , entre os eixos de rolamento e o principal pode variar, como se ilustra na figura 2.9(b).

Por exemplo, dada uma roda sueca de grau 45, os vetores de movimento entre o eixo principal e os eixos de rolamento podem ser representados como na figura 2.9(b). Desde que cada eixo possa girar nos sentidos horário ou anti-horário, pode-se combinar qualquer vetor ao longo de um eixo com qualquer vetor ao longo de outro eixo. Estes dois eixos não são necessariamente independentes (exceto no caso da roda sueca de grau 90). Apesar disso, é visualmente perceptível que qualquer direção desejada de movimento é alcançável, escolhendo-se os vetores apropriados [17].

A posição de uma roda sueca é expressa exatamente como numa roda padrão fixa, incluindo-se o termo  $\gamma$ , que representa o ângulo entre o principal plano da roda e o eixo de rotação de pequenos rolamentos circunferenciais. Isso é mostrado na figura 2.9(b), dentro do eixo de referência do robô.

O eixo ao redor do qual cada rolamento gira é um componente nulo de velocidade

no ponto de contato com a superfície. Ou seja, movendo-se naquela direção, sem rotação do eixo principal, não é possível um movimento sem ocorrer escorregamento. A variável de movimento, que é uma derivada, parece idêntica à variável de rolamento para a roda fixa padrão na expressão (2.15), exceto que esta expressão é modificada adicionando-se  $\gamma$ , tal que a direção efetiva, ao longo da qual a variável de rolamento é fixa, é um componente nulo ao longo do plano da roda, e é dada por

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha + \beta + \gamma) & -\cos(\alpha + \beta + \gamma) & (-l) \cos(\beta + \gamma) \end{bmatrix} R(\theta(t)) \dot{\xi}_I - r \dot{\varphi} \cos \gamma = 0. \quad (2.21)$$

Ortogonalmente a esta direção, o movimento não é variável por causa da livre rotação  $\dot{\varphi}_{s\omega}$  dos pequenos rolamentos, dados por

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta + \gamma) & \sin(\alpha + \beta + \gamma) & l \sin(\beta + \gamma) \end{bmatrix} R(\theta(t)) \dot{\xi}_I - r \dot{\varphi} \sin \gamma - r_{s\omega} \dot{\varphi}_{s\omega} = 0. \quad (2.22)$$

O comportamento dessa variável e, conseqüentemente, da roda sueca, muda drasticamente conforme  $\gamma$  varia. Considerando-se  $\gamma = 0$ , isso representa que a roda sueca possui grau 90. Neste caso, o componente nulo de velocidade está alinhado com o plano da roda, e a expressão (2.21) é reduzida à equação (2.19), que é a variável de rolamento da roda padrão fixa. Mas, por causa dos rolamentos, não há variável de rolamento ortogonal ao plano da roda [vide expressão (2.22)]. Variando-se o valor de  $\dot{\varphi}$ , qualquer vetor de movimento desejado pode ser feito para satisfazer a expressão (2.21) e, assim, a roda é omnidirecional. De fato, este caso especial do modelo sueco resulta num movimento não acoplado, em que os rolamentos e a roda principal provêem as direções ortogonais de movimento.

Em outro extremo, considerando-se  $\gamma = \pi/2$ , os rolamentos têm eixos de rotação que são paralelos ao eixo de rotação da roda principal. Se o valor for substituído por  $\gamma$ , na equação (2.21), o resultado será a variável de escorregamento da roda padrão fixa, expressão (2.20). Em outras palavras, os rolamentos não provêem benefícios, em termos de liberdade lateral de movimento, desde que estejam alinhados com a roda principal. Apesar disso, no caso da roda principal nunca precisar de rotação, a variável de rolamento desaparece. Isso é uma forma degenerada da roda sueca, e assume-se que  $\gamma \neq \pi/2$  por motivos de simplicidade.

### Rodas Esféricas

Este tipo de roda, que pode ser uma esfera, não apresenta variáveis diretas em movimento [vide figura 2.9(c)]. Tal mecanismo não tem um eixo principal de rotação e, assim, nenhuma variável de rolamento apropriada ou de escorregamento existe. Como ocorre com as rodas castor e sueca, a roda esférica é omnidirecional e não apresenta variáveis na cinemática do chassis do robô, tendo como expressão:

$$\left[ \sin(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta)(-l) \cos(\beta) \right] R(\theta(t))\dot{\xi}_I - r\dot{\varphi} = 0. \quad (2.23)$$

Por definição, a rotação da roda ortogonal a esta direção é nula, assim:

$$\left[ \cos(\alpha + \beta)\sin(\alpha + \beta)l\sin(\beta) \right] R(\theta(t))\dot{\xi}_I = 0. \quad (2.24)$$

Como se conclui, as equações para a roda esférica são exatamente as mesmas da roda padrão fixa. Contudo, a interpretação da expressão (2.24) é diferente. A roda esférica omnidirecional pode ter qualquer direção arbitrária de movimento, onde a direção de movimento, dada por  $\beta$ , é uma variável livre, deduzida da expressão (2.24). Considera-se o caso de que o robô está em pura translação na direção de  $Y_R(t)$ ; então, a equação (2.24) reduz-se a  $\sin(\alpha + \beta) = 0$ , com  $\beta = -\alpha$ , que faz sentido para este caso especial.

### 2.3.2 Restrições Cinemáticas da Estrutura de Base de Robôs Móveis

Dada uma estrutura de base de um robô móvel com  $M$  rodas, pode-se calcular as restrições cinemáticas desta estrutura. Cada roda impõe zero ou mais restrições sobre o seu movimento e, assim, o processo é uma combinação de todas as restrições cinemáticas das rodas colocadas no chassis da estrutura de base do robô móvel.

As rodas castor e esféricas não impõem restrições cinemáticas sobre o chassis do robô. Isto quer dizer que se movimentam livremente ao redor do eixo  $Z'_R(t)$ . Consequentemente, apenas as rodas padrão fixas, manobráveis e suecas têm impacto sobre a cinemática do chassis do robô móvel e, por isto, requerem consideração quanto às restrições cinemáticas da estrutura de base do robô móvel [20, 19].

Supõe-se que a estrutura da base de um robô móvel tenha  $N$  rodas padrão, compostas pelas rodas padrão fixas  $N_f$ , e rodas padrão manobráveis  $N_s$ .  $\beta_s(t)$  indica a

variável ângulo manobrável da roda padrão manobrável  $N_s$ . No entanto,  $\beta_f(t)$  refere-se à orientação da roda padrão fixa  $N_f$ . No caso de giro da roda, ambas as rodas, tanto a fixa quanto a manobrável, têm posições rotatórias ao redor do eixo horizontal, que variam em função do tempo. Diferencia-se o caso fixo do manobrável como  $q_f(t)$  para o fixo e  $q_s(t)$  para o manobrável, e utiliza-se  $Q(t)$  como uma matriz agregada que combina ambos os valores:

$$Q(t) = \begin{bmatrix} q_f(t) \\ q_s(t) \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

As restrições de rolamento de todas as rodas são agora dispostas em uma simples expressão

$$J_1(\beta_s(t))R(\theta(t))\dot{\xi}_I - J_2\dot{Q} = 0. \quad (2.26)$$

A equação assemelha-se bastante à restrição de rolamento de uma roda simples, no caso, substituindo-se por simples matrizes. Dessa forma, consideram-se todas as rodas,  $J_2$  é uma matriz diagonal constante  $N \times N$ , cujos elementos da diagonal principal são os raios das rodas.  $J_1(\beta_s(t))$  indica uma matriz com projeções dos movimentos de todas as rodas ao longo dos planos individuais:

$$J_1(\beta_s(t)) = \begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1s}(\beta_s(t)) \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Observa-se que a expressão (2.27) está somente em função de  $\beta_s$  e não de  $\beta_f(t)$ . Isto porque a orientação da roda manobrável varia em função do tempo e a orientação das rodas padrão fixas são constantes.  $J_{1f}$  é, assim, uma matriz constante de projeções para todas as rodas padrão fixas, e tem a dimensão  $(N_f \times 3)$ , com cada linha formada por três termos;  $J_{1s}(\beta_s(t))$  é uma matriz de tamanho  $(N_s \times 3)$ , com cada linha formada por três termos para cada roda padrão manobrável.

Em suma, a equação (2.26) representa a restrição de todas as rodas padrão que giram ao redor do eixo horizontal, com uma quantidade apropriada de movimento sobre o plano, de maneira que haja um ponto de contato com a superfície. Utiliza-se a mesma técnica para se coletar as restrições de deslizamento de todas as rodas dentro de uma simples expressão:

$$C_1(\beta_s(t))R(\theta)\dot{\xi}_I = 0, \quad (2.28)$$

$$C_1(\beta_s(t)) = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1s}(\beta_s(t)) \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

onde  $C_{1f}$  e  $C_{1s}(t)$  são matrizes  $(N_f \times 3)$  e  $(N_s \times 3)$ , respectivamente, cujas linhas têm os três termos das matrizes das equações (2.20) e (2.18) para todas as rodas padrão fixas e manobráveis. Assim, a equação (2.28) é uma restrição sobre todas as rodas padrão, e seus componentes de movimento ortogonal ao plano são nulas. Estas restrições de deslizamento sobre as rodas têm um significado de importante impacto sobre a manobrabilidade do chassis da estrutura de base de um robô móvel.

### Manobrabilidade e Mobilidade de Robô Móvel

Para um robô móvel, a manobrabilidade é equivalente aos graus de liberdade deste. Como o robô móvel opera situado em algum espaço de trabalho, a questão é situar sua análise neste espaço. É de vital importância considerar de que maneira os graus de liberdade do veículo podem ser usados para posicioná-lo no seu espaço de trabalho [17]. A manobrabilidade define então a capacidade de se mudar a direção do movimento do veículo.

A mobilidade cinemática do chassis de uma estrutura de base de um robô móvel é sua habilidade de mover-se diretamente no ambiente. As restrições básicas que limitam a mobilidade são regras que cada roda deve satisfazer, sendo esta a restrição de deslizamento. Assim, formalmente, deriva-se a mobilidade da estrutura da base móvel de um robô manipulador a partir da equação (2.28). Uma análise mais detalhada pode ser vista em [19] e [17].

### Espaço de Trabalho de Robô Móvel e Graus de Liberdade

Definir o espaço de trabalho ou ambiente de um robô móvel é útil, porque se examinam suas velocidades admissíveis. Dadas as restrições cinemáticas da estrutura da base móvel de um robô manipulador, estas velocidades descrevem os componentes independentes de movimento que podem ser controlados na estrutura da base móvel [17].

Se a base móvel opera em um ambiente, a questão é situar a análise nesse local. A identificação de um espaço de possíveis configurações é importante, conhecido como espaço de trabalho. Além do espaço de trabalho, é interessante saber como o robô pode se movimentar entre várias configurações: saber quais os tipos de caminhos ou possíveis trajetórias que pode seguir neste espaço de configuração.

Na definição do espaço de trabalho de um robô, é útil primeiramente examinar seu espaço de velocidades admissíveis. Dadas as variáveis cinemáticas do robô, seu espaço de velocidades descreve os componentes independentes do movimento do móvel que podem ser controlados. Por exemplo, o espaço de velocidade de um unicycle pode ser representado com dois eixos, um representando a velocidade instantânea de avanço do unicycle, e o segundo representando a mudança instantânea na orientação,  $\dot{\theta}$ , do unicycle [17].

O número de dimensões no espaço de velocidade de uma base móvel é o número de velocidades independentes alcançáveis. Isso também pode ser chamado de graus diferenciáveis de liberdade (DDOF). Um DDOF robótico sempre é igual ao seu grau de mobilidade  $\delta_m(t)$ . Por exemplo, um bicicleta tem o seguinte grau de manobrabilidade:  $\delta_M(t) = \delta_m(t) + \delta_s(t) = 1 + 1 = 2$ . O DDOF de um bicicleta é considerado 1 [17].

### Robôs Móveis Holonômicos e Omnidirecionais

Quando se descreve o espaço de trabalho de um robô móvel, o conceito holonômico é usado. O termo holonômico tem aplicabilidade larga, em diversas áreas matemáticas, incluindo-se equações diferenciais, funções e expressões restritas. Em Robótica Móvel, o termo refere-se às restrições cinemáticas do chassis do veículo [17].

Um robô é holonômico quando a relação entre graus diferenciáveis de liberdade (DDOF) de um robô e os graus de liberdade de seu espaço de trabalho (DOF) se igualam [17]. Contudo, as habilidades holonômicas, para se desviar dos obstáculos sem afetar a orientação do móvel e poder traçar um caminho completo, são aspectos importantes.

Tratando-se de robôs móveis, o chassis deve alcançar uma posição, num ambiente, com dimensão 3, tal que se requeira  $DOF = 3$  para o chassis. Assim, a forma de um robô ou espaço de trabalho holonômico deve ser relevante a robôs móveis, e que  $DDOF = DOF = 3$ . Esta classe de configurações é definida como Omnidirecional. Para a obtenção desta configuração se faz necessário o uso de rodas especiais, como por exemplo as rodas suecas.

Uma restrição cinemática não-holonômica requer o relacionamento diferencial, tal como a derivada da variável de posição. Além disso, não pode ser integrada somente para fornecer uma restrição nos termos das variáveis de posições. Deste último ponto de vista, os sistemas não-holonômicos são chamados sistemas não integráveis. Logo, os

sistemas não-holonômicos obedecem às restrições comentadas a seguir:

- (i) Considere a restrição de deslizamento da roda padrão fixa:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l\sin(\beta) \end{bmatrix} R(\theta(t))\dot{\xi}_I = 0 \quad (2.30)$$

Esta restrição pode não ser integrável, dependendo do movimento do veículo. Assim, a restrição de deslizamento é uma restrição não-holonômica.

- (ii) A única restrição cinemática não-holonômica de rolamento da roda padrão fixa é:

$$\begin{bmatrix} -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & l\cos\beta \end{bmatrix} R(\theta)\dot{\xi}_I + r\dot{q} = 0 \quad (2.31)$$

Esta restrição requer que cada roda relacione a rapidez de giro desta com a rapidez do movimento projetado ao longo do plano da roda.

Um sistema não-holonômico é um sistema com uma ou mais restrições cinemáticas não-holonômicas. Uma restrição cinemática holonômica pode ser expressa em função da variável de posição. Por exemplo, no caso de uma estrutura da base de um robô móvel com uma simples roda padrão fixa, uma restrição cinemática holonômica deve ser expressa usando-se  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $l_1$ ,  $r_1$ ,  $q_1(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $\theta(t)$ . Tal restrição não pode usar a derivada destes valores, tais como:  $\dot{q}$  ou  $\dot{x}_i$ .

## 2.4 Atrito

O fenômeno de atrito ocorre em todos os sistemas mecânicos, como por exemplo mancais, transmissões, cilindros pneumáticos e hidráulicos, válvulas, freios, rodas, etc. O conhecimento sobre o atrito é muito importante para a engenharia de controle como, por exemplo, no levantamento de modelos para controle em sistemas de direção, mecanismos servos de alta precisão, robôs, sistemas pneumáticos e hidráulicos, etc. É um fenômeno altamente não linear e pode resultar em ciclos limites e desempenho pobre.

Tal fenômeno ocorre apenas na superfície física de contato entre dois corpos, e é fortemente influenciado por contaminações nesta superfície. Há uma grande variedade de fenômenos físicos que causam atrito, que inclui deformações plásticas e elásticas, por exemplo.

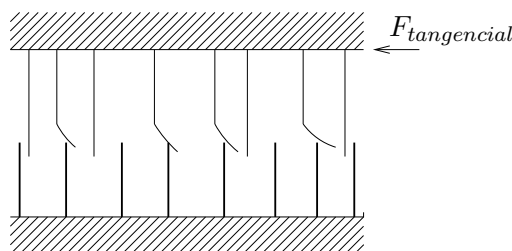


Figura 2.10: Atrito entre duas superfícies.

No nível microscópico, o contato entre superfícies é muito irregular. Pode-se visualizar o contato entre dois corpos rígidos como sendo o contato entre cerdas elásticas (duas escovas de dentes, por exemplo). Quando uma força tangencial é aplicada, para que exista movimento, as cerdas deflexionam-se como uma mola, fazendo com que parte da força tangencial seja consumida para vencer o atrito estático, como é mostrado na figura 2.10. Para que haja um arrastamento ou movimento de um corpo em relação ao outro, é necessário que a força tangencial aplicada seja maior que um determinado valor de limiar.

O arrastamento ou rolamento entre diferentes corpos, em movimento relativo, resultam nas chamadas forças de atrito ou resistência mecânica. Na maioria dos casos, as forças de atrito presentes são uma combinação de algumas variedades de atrito, como o estático, o viscoso, o *stiction* conforme é representado na figura 2.11.

O atrito estático alcança seu valor máximo quando o arrastamento, entre duas superfícies, é eminente. Portanto, a força de atrito estático equivale na máxima força necessária para iniciar o movimento relativo do corpo.

A força de atrito, que atua sobre o corpo quando este se movimenta de forma uniforme, é chamado de atrito deslizante ou cinético, também chamado de atrito de Coulomb, conforme se ilustra na figura 2.11(a). Portanto, a força de atrito de Coulomb é o atrito definido para velocidades diferentes de zero e independente do módulo da velocidade, mas dependente do sentido do movimento.

O atrito viscoso é o atrito que se observa quando um corpo desliza sobre uma superfície ou corpo, sendo este atrito proporcional à velocidade de deslizamento, como ilustrado na figura 2.11(b).

Os coeficientes de atrito estático e por deslizamento dependem principalmente da natureza das superfícies em contato e da lubrificação do sistema. Imediatamente após



o início do movimento, quando o sistema é lubrificado, a magnitude da força de atrito pode decrescer rapidamente. Este comportamento é ilustrado nas figuras 2.11(c), efeito *stiction*, que é o decréscimo do atrito na fase de pré-deslizamento, e 2.11(d), efeito de *Stribeck*, que é o decréscimo na força de atrito a velocidades baixas.

O atrito seco é o atrito que se observa quando corpos com superfícies não lubrificadas deslizam um sobre o outro. Neste caso, a força de atrito estática permanece quase inalterada após o início do deslocamento relativo, caracterizando a não-linearidade do tipo zona morta.

Estratégias de controle que compensam os efeitos do atrito, sem recorrerem a malhas de controle de alto ganho, requerem adequada modelagem do atrito para prevêê-lo e compensá-lo. Um bom modelo de atrito também é necessário para se analisar a estabilidade, prever ciclos limites, achar ganhos do controlador, executar simulações, etc. Uma melhor descrição do fenômeno do atrito para velocidades baixas é necessária, especialmente quando se opera próximo da velocidade nula [21].

A maioria dos modelos de compensação de atrito existentes usam modelos de atrito clássicos, como o atrito viscoso e o de Coulomb. Em aplicações com posicionamento de alta precisão e com velocidade baixa, os resultados não são sempre satisfatórios com modelos clássicos. Os modelos de atrito clássicos são descritos por mapas estáticos entre velocidade e força de atrito. Exemplos típicos são combinações diferentes do atrito de Coulomb, atrito viscoso e efeito de *Stribeck*. Este último produz um efeito desestabilizante em velocidades muito baixas, conforme se ilustra na figura 2.11(d). Os modelos clássicos não explicam o comportamento de histerese quando se estuda o atrito para velocidades não estacionárias, nem variações, na força de parada com a condição experimental, e nem pequenos deslocamentos que ocorrem na *interface* de contato durante o atrito estático. O último assemelha-se a uma conexão de mola dura com amortecedor e, em algumas vezes, é referido como o efeito Dahl. Estudos posteriores têm mostrado que um modelo de atrito, envolvendo dinâmica, é necessário para se descrever o fenômeno de atrito.

Desde que o atrito é o maior responsável por gerar forças em oposição ao movimento de sistemas mecânicos, é extremamente importante ter uma caracterização acurada da magnitude (e direção) desta força gerada na *interface* de contato. Assim, o problema de modelagem e de se prever o atrito têm se tornado uma área de grande pesquisa na Comunidade Científica.

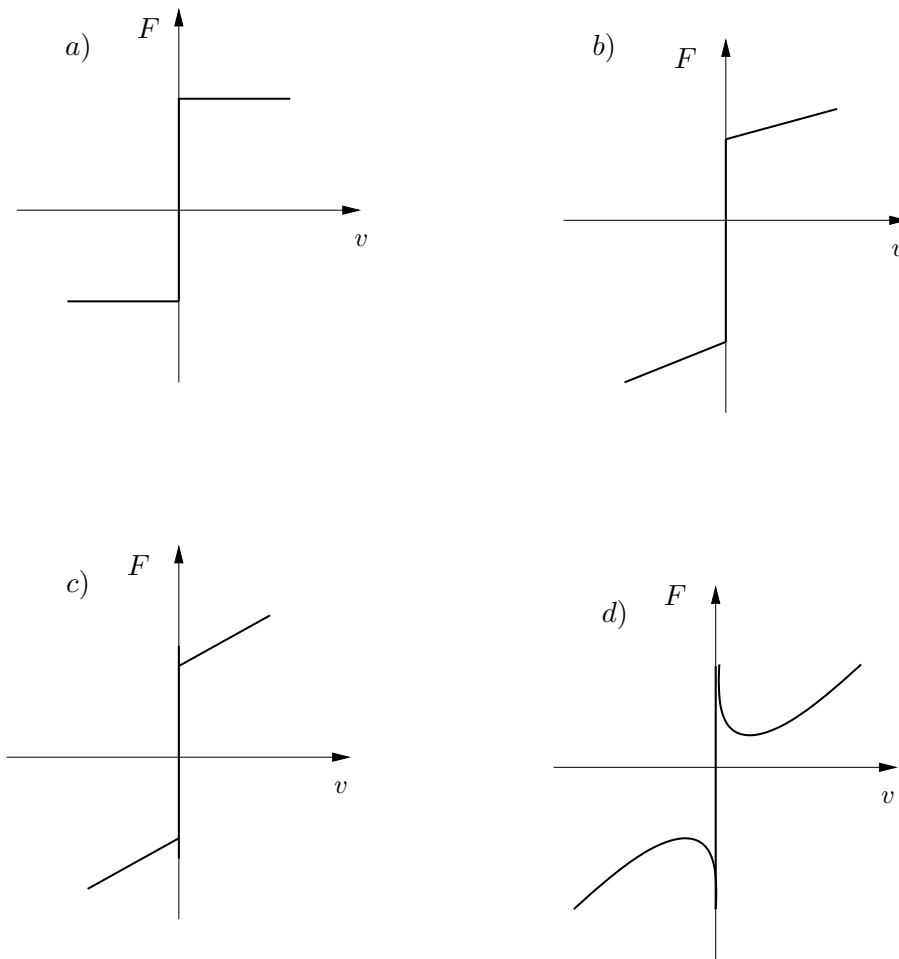


Figura 2.11: Exemplos de tipos de atrito. A força de atrito é dada pela função estática, exceto na velocidade nula. Figura a) mostra o atrito Coulomb; Figura b) atrito Coulomb e viscoso; Figura c) *stiction* + Coulomb e atrito viscoso; Figura d) mostra como a força de atrito decresce a partir do nível de atrito estático.

O contato deslizante seco, entre superfícies planas, pode ser modelado como forças de deformações elásticas (ou plásticas) de asperezas microscópicas, como mostrado na figura 2.10. Cada uma destas asperezas (ou rugosidades) leva a uma força  $f_i$ , na força normal (de apoio)  $F_N$ , que representa a força de reação do corpo à superfície de contato. A área de contato total pode ser escrita como  $A_R(t) = F_N/h$ , onde  $h$  representa a distância da superfície de contato ao centro do corpo. Para cada contato rugoso, a deformação tangencial é elástica até que a pressão aplicada exceda a força de ruptura,  $F_{ruptura}(t)$ , da superfície dos materiais quando se torna plástica. Quando há deslizamento, a força de atrito é, portanto,  $F_T(t) = F_{ruptura}(t) A_R$ , e o coeficiente de atrito é  $\mu = F_T(t)/F_N = F_{ruptura}(t)/h$ .

No movimento de um corpo que rola sobre outro, há uma força oposta chamada de força de atrito de rolamento, que é o resultado da deformação dos corpos no ponto de contato. Na figura 2.12 é ilustrado um cilindro homogêneo que rola sobre uma superfície plana. A força  $F$  atua paralela à superfície. A força gravitacional  $m g$  atua de forma contrária à força de carga normal  $F_N$ , aplicada sobre o cilindro e a superfície plana, constituindo um momento de atrito de rolamento, separadas (estas forças) por uma distância  $\rho$ , devido às deformações do cilindro e da superfície ( $\rho \neq r$ ).

O momento de atrito de rolamento é um torque que tem o eixo tangente à superfície do plano ao redor do qual o cilindro está rolando. Seu máximo valor de pressão normal multiplicado pela distância  $\rho$  geralmente é muito pequeno e quase sempre desprezado. A direção, na qual o atrito de rolamento tende a movimentar o cilindro, é oposta àquela na qual este está realmente rolando. Se o cilindro está em repouso, mas regido por forças que tendem a fazê-lo rolar, o momento de atrito de rolamento tende a evitar a rotação em relação à tangente comum às superfícies [22].

Na figura 2.12, o momento devido à força de tração atua no sentido horário e a magnitude é  $\tau_1(t) = F(t) h \equiv F(t) r$ ; o momento oposto à rotação do cilindro origina-se devido à  $m g$  e a  $F_N$ , que atua no sentido anti-horário, e a magnitude é  $\tau_2(t) = F_N \rho$ . Supondo-se que o corpo é puxado por uma força crescente, se esta alcança um valor suficientemente grande para superar a força resistente  $\tau_2(t)$ , o cilindro começará a rolar. Assim,  $\tau_1(t) = \tau_2(t)$  é a condição para uma rotação eminente. A distância  $\rho$  é a deformação do corpo. Além da dimensão de longitude, este atrito depende de fatores como natureza das superfícies e pressão de contato entretanto, este atrito é muito pequeno e geralmente é desprezado na análise de sistemas mecânicos.

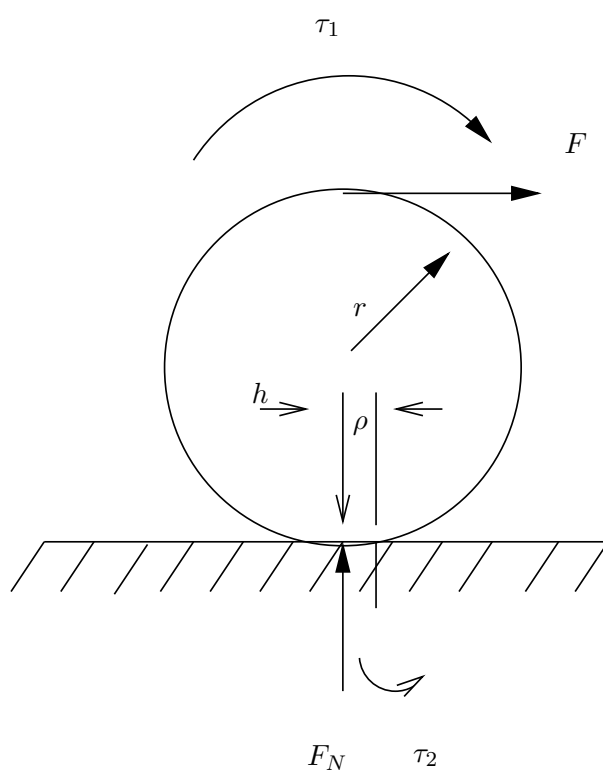


Figura 2.12: Cilindro homogêneo rolando sobre uma superfície lisa.

Outros fenômenos físicos aparecem quando uma lubrificação é adicionada ao contato. Em baixas velocidades, o lubrificante age como uma película de superfície, onde a resistência de corte (ruptura) determina o atrito. A velocidades mais altas e baixas pressões, a força de atrito é então determinada pela força de ruptura do fluido, dependente da característica viscosa do lubrificante e, a elevadas pressões, o lubrificante é transformado em um sólido amorfo e a força de ruptura deste sólido torna-se praticamente independente da velocidade de corte do lubrificante. O coeficiente de atrito, em sistemas lubrificados, geralmente decresce quando a velocidade aumenta, partindo-se do zero.

Quando a viscosidade é muito grande para separar totalmente os corpos em contato, o coeficiente de atrito pode aumentar com a velocidade como um efeito hidrodinâmico que se torna significativo. Isso é o que se chama de efeito de *Stribeck*. A viscosidade é um parâmetro vital em sistemas lubrificados. Os mecanismos subjacentes, na construção da película fluida, possuem dinâmica, assim sugerindo um modelo dinâmico para o atrito [22].

Ao longo do Texto, serão apresentados alguns mecanismos que ilustram a dificuldade de se modelar o atrito. Há muitos mecanismos diferentes, mas a construção de um modelo genérico, para o atrito, não é algo muito simples de se fazer. Há modelos aproximados, para certas aplicações de controle, os quais incluem observadores do atrito em tais sistemas. Porém, o objetivo deste Trabalho é apresentar a modelagem dinâmica e não o controle do atrito.

### 2.4.1 Modelos Matemáticos para o Atrito

A questão dos modelos matemáticos para o atrito tem sido levantada diversas vezes, especialmente quando se analisam aspectos como modelagem, controle e aplicações do atrito. Alguns dos modelos mais usados são os modelos clássicos, e os modelos dinâmicos, como por exemplo o de LuGre, os quais serão detalhados na sequência.

A força de atrito como função da velocidade constante ocorre depois que se vence o estado estático ou estacionário, como é representado na figura 2.11. Esta relação atrito-velocidade varia com as propriedades dos materiais, temperatura, desgaste, etc.

O atrito estático máximo é a força requerida para se vencer o regime estático e iniciar o movimento. Também é conhecido como força de ruptura. A máxima força de

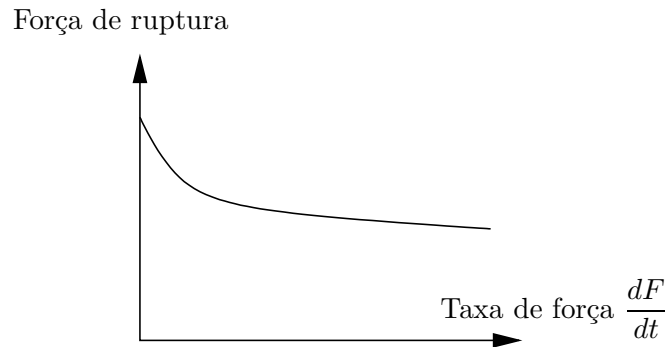


Figura 2.13: Relação característica entre a taxa de força aplicada e a força de ruptura. Verifica-se que a força de ruptura diminui com o aumento da taxa de força aplicada.

atrito estático ocorre no ponto de início de movimento, conforme se mostra, na figura 2.11, sendo que a força de ruptura depende da taxa de incremento da força externa, como também se ilustra na figura 2.13.

Estudando-se o atrito, o mesmo apresenta um comportamento *spring-like* (efeito trampolim) antes do início do deslocamento, mostrado na figura 2.14. O movimento microscópico normalmente é chamado de pré-deslizamento.

Quando o atrito está no modo estático não há movimento relativo. Com o incremento da força sobre o sistema, como não há deslizamento verdadeiro nesta fase, ela é chamada de pré-deslizamento. Um modelo matemático de atrito produz deslocamento pré-deslizamento se as variações da força aplicada abaixo da força de ruptura do sistema produzem deformações elásticas e movimento. Um modelo de atrito produz atrito estático se, para forças aplicadas menores do que a força de ruptura do sistema, não houver movimento relativo de regime permanente [23].

### Modelos Clássicos do Atrito

Os modelos clássicos de atrito consistem de diferentes componentes, em que cada um destes apresenta certas características da força de atrito. No primeiro caso, o atrito opõe-se ao movimento do corpo e sua magnitude independe da velocidade e da área de contato, conforme se mostra na expressão

$$F(t) = F_c \operatorname{sgn}(v(t)), \quad (2.32)$$

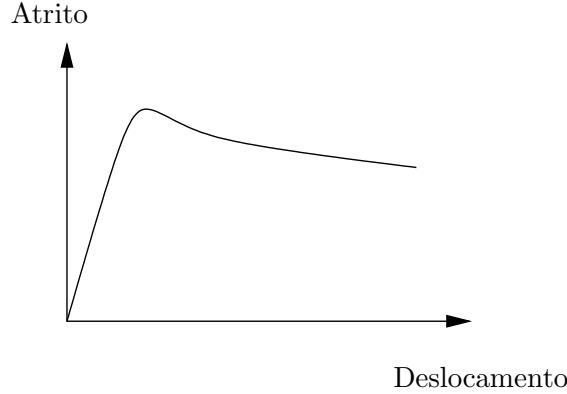


Figura 2.14: Pré-Escorregamento: efeito trampolim antes do início do deslocamento.

onde  $F_c$  é a força de atrito proporcional à carga normal e toma a forma  $F_c = \mu F_N$ . Isto é o que se conhece por Atrito de Coulomb, mostrado na figura 2.11(a). Este modelo de atrito não especifica a força de atrito a velocidade nula. Esta força de atrito pode ser nula ou assumir algum valor, no intervalo  $[-F_c, F_c]$ , dependendo da definição da função sinal [24].

Com o aparecimento da Hidrodinâmica, desenvolveram-se teorias que tratam a força do atrito gerada pela viscosidade dos lubrificantes, e o termo atrito viscoso aparece para o componente da força de atrito proporcional à velocidade descrita como

$$F(t) = F_v v(t), \quad (2.33)$$

onde  $F_v(t)$  é conhecido como coeficiente de atrito viscoso.

Uma forma clássica mais geral de se modelar o atrito é a partir da expressão

$$F(t) = \left[ F_c + (F_S(t) - F_c) e^{|-v(t)/v_s(t)|^{\delta_s}} \right] \text{sgn}(v)(t) + F_v(t) v(t), \quad (2.34)$$

onde  $v_s(t)$  é a velocidade de *Stribeck*.

## Modelos Dinâmicos do Atrito

Diferentemente dos modelos clássicos, os modelos dinâmicos supõem um comportamento dinâmico para o fenômeno do atrito, sendo este comportamento representado por estados internos para o fenômeno, sendo estes estados geralmente em nível microscópico e não mensuráveis.

Um modelo bastante conhecido é o Modelo de LuGre, que é especificado no domínio do tempo e usado para controle e simulação de sistemas, devido principalmente a sua simplicidade e integração dos regimes de pré-deslizamento e deslizamento em uma única equação de estado [21].

O Modelo de LuGre é uma extensão de um modelo conhecido como Modelo de Dahl, onde o atrito é modelado como a força média da deflexão das cerdas elásticas. Quando uma força tangencial é aplicada, as cerdas deflexionam-se como as molas. Se esta deflexão for grande o suficiente, as cerdas começarão a se deslizar. A deflexão média das cerdas é determinada pela velocidade num movimento em regime permanente. A deflexão é menor, em velocidades altas, o que implica em regime permanente, e a deflexão diminui à medida que a velocidade cresce (efeito de *Stribeck*).

O Modelo de LuGre assume a forma

$$\frac{dz}{dt} = v(t) - \sigma_0(t) \frac{|v(t)|}{g(v)(t)} z(t), \quad (2.35)$$

com

$$g(v) = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) e^{-(v(t)/v_S(t))^2} \quad (2.36)$$

e

$$F(t) = \sigma_0(t) z(t) + \sigma_1(v, t) \frac{dz}{dt} + \sigma_2(t) v(t), \quad (2.37)$$

onde  $F(t)$ , na expressão (2.37), é a força de atrito;  $z(t)$  representa o estado interno do atrito;  $\alpha_0(t)$  e  $\alpha_1(t)$  são dois parâmetros associados ao efeito de *Stribeck* e ao atrito estático;  $\sigma_0(t)$  é um coeficiente de rigidez das deformações microscópicas de  $z(t)$  durante o pré-deslizamento;  $\sigma_1(t)$  é o coeficiente de amortecimento associado a  $\frac{dz}{dt}$ ; e  $\sigma_2(t)$  representa o coeficiente de atrito viscoso.

A característica do atrito em regime permanente [21], é dada por

$$z_{ss}(t) = \frac{v(t)}{|v(t)|} g(v)(t) = g(v)(t) \operatorname{sgn}(v(t)),$$

e a força de atrito por

$$\begin{aligned} F_{ss}(t) &= \sigma_0(t) g(v)(t) \operatorname{sgn}(v)(t) + \sigma_2(t) v(t) \\ &= [F_C(t) + (F_S(t) - F_C(t)) e^{-(v(t)/v_S(t))^2}] \operatorname{sgn}(v(t)) + \sigma_2(t) v(t). \end{aligned}$$

O modelo de LuGre é capaz de modelar as principais características do atrito, de ocorrência na maioria dos sistemas físicos, como atrito estático, representado por  $\alpha_0(t)$ ,



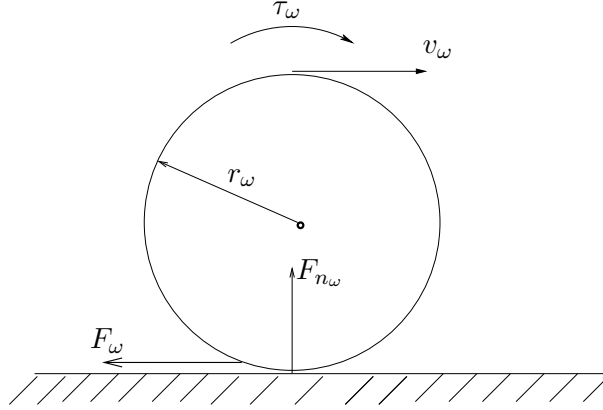


Figura 2.15: Ilustração do rolamento de uma roda.

o atrito viscoso, representado pelo termo  $\sigma_2(t) v(t)$ , os efeitos de pré-deslizamento e de *Stribeck*, representado por  $\alpha_1(t) e^{-(v(t)/v_S(t))^2}$ , e o efeito dinâmico trampolim. Todas estas características são representadas numa equação de estados não-linear diferencial de primeira ordem. Este modelo tem sido muito aplicado em simulações de sistemas e em controle com compensação de atrito, onde dele é derivada uma estrutura de estimação de atrito convergente e estável em malha fechada [21, 25, 22].

Existem outros modelos dinâmicos para o atrito desenvolvidos posteriormente ao modelo LuGre, como por exemplo o modelo elasto-plástico [26], o modelo generalizado Maxwell-slip [27]. Estes modelos apresentam maior complexidade paramétrica e computacional que o modelo LuGre, e por este motivo não serão abordados neste Trabalho.

### 2.4.2 Modelos Matemáticos para o Atrito de Rolamento

O principal mecanismo para a transferência do torque do eixo da roda para um movimento para frente é a força de atrito. A modelagem dinâmica do rolamento de uma roda, como mostrado na figura 2.15, é dada na forma

$$M \frac{dv}{dt} = F_\omega(t) \quad (2.38)$$

e

$$J_\omega \dot{\omega}_\omega = -r_\omega F_\omega(t) + \tau_\omega(t), \quad (2.39)$$

onde  $M$  é a massa suportada pela roda,  $J_\omega$  é o momento de inércia,  $r_\omega$  é o raio da roda,  $\frac{dv}{dt}$  é a aceleração linear da roda,  $\omega_\omega(t)$  é a velocidade angular tangencial da roda,  $\tau_\omega(t)$  é

o torque no centro da roda, e  $F_\omega(t)$  é a força de atrito de contato na roda. Note por este modelo que a força de atrito é responsável pela existência do movimento longitudinal da roda.

Por motivos de simplicidade, apenas o movimento longitudinal será considerado neste Trabalho. O movimento lateral e as dinâmicas laterais não serão considerados aqui. As dinâmicas dos atuadores de direção e frenagem, dinâmicas de suspensão, etc, são também negligenciados.

Os modelos de atrito para rodas mais comuns usados na Literatura Científica são os de relacionamento algébrico de força/escorregamento. Estes modelos de atrito são definidos como mapas sem memória ou dinâmica entre a força de atrito na roda e uma variável  $s(t)$  chamada de escorregamento e definida como

$$s(t) = \frac{v_\omega(t) - \bar{v}_\omega(t)}{\max(v_\omega(t), \bar{v}_\omega(t))}, \quad (2.40)$$

onde  $v_\omega(t)$  é a velocidade linear real da roda em relação ao ponto de contato com a superfície de movimento, e que pode ser obtida a partir de sua velocidade angular tangencial, e  $\bar{v}_\omega(t)$  é a velocidade linear da roda em relação a um referencial externo, também chamada de velocidade aparente.

A velocidade linear real da roda também pode ser obtida, em função do escorregamento e da velocidade aparente, pela expressão

$$v_\omega(t) = \begin{cases} \frac{\bar{v}_\omega(t)}{1 - s(t)} & \text{se } s(t) \geq 0 \\ (1 + s(t)) \bar{v}_\omega(t) & \text{se } s(t) < 0 \end{cases}. \quad (2.41)$$

A redução da circunferência efetiva da roda é considerada uma consequência da deformação esperada para a elasticidade da borracha da roda. Isso, em termos, implica que a velocidade de contato real  $v_\omega(t)$  não será igual a  $\bar{v}_\omega(t)$ . A diferença entre a velocidade linear tangencial real da roda e a sua aparente é chamada de velocidade relativa  $v_{r_\omega}(t)$ . O valor absoluto do escorregamento é definido pelo intervalo  $[0, 1]$ . Quando  $s(t) = 0$ , não há escorregamento (há puro rolamento), onde  $|s(t)| = 1$  indica completo escorregamento/derrapagem. Como resultado disso, o coeficiente de escorregamento é positivo quando o veículo está em movimento, e negativo quando o mesmo freia.

Os modelos de força/escorregamento descrevem as formas de mapas estáticos  $F(s, t)_\omega : s(t) \mapsto F_\omega(t)$ . Eles podem também depender da velocidade da roda  $v_\omega(t)$ , ou seja,  $F(s, v_\omega)_\omega$ , e variarem quando as características de contato (superfície) mudarem.

Um dos modelos mais conhecidos deste tipo é o de Pacejka [28]. Este modelo tem sido aplicado em experimentos realizados sob condições particulares de velocidades linear e angular constantes. O Modelo de Pacejka tem a forma

$$F(s, v, t)_\omega = [c_1 (1 - e^{-c_2 s(t)}) - c_3 s(t)] e^{-c_4 v(t)}, \quad (2.42)$$

onde  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ , e  $c_4$  são constantes.

Um outro modelo, chamado de modelo de Kiencke e Daiss, negligencia o termo dependente da velocidade na equação (2.42), e depois aproxima a função exponencial para a curva força/escorregamento na forma

$$F(s, t)_\omega = k_s(t) \frac{s(t)}{c_1 s^2(t) + c_2 s(t) + 1}, \quad (2.43)$$

onde  $k_s(t)$  é a inclinação de  $F(s)_\omega(t)$  versus  $s(t)$ , em  $s(t) = 0$ , e  $c_1$  e  $c_2$  são os parâmetros escolhidos pelo usuário [28].

Em um terceiro modelo, chamado de modelo de Burckhardt, é proposta uma independência em relação à velocidade na forma

$$F(s)_\omega(t) = c_1 (1 - e^{-c_2 s(t)}) - c_3 s(t). \quad (2.44)$$

onde  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  são constantes [28].

Todos estes modelos de atrito são não-lineares em relação aos parâmetros desconhecidos. Por isso, modelos mais simplificados como

$$F(s)_\omega(t) = c_1 \sqrt{s(t)} - c_2 s(t) \quad (2.45)$$

têm sido propostos na Literatura Científica [28].

### Modelos Dinâmicos para o Atrito de Rolamento

Os modelos estáticos para o atrito de rolamento são apropriados quando há condições de regime permanente para as velocidades linear e angular. De fato, os dados experimentais usados para se validar as curvas de atrito/escorregamento podem ser obtidos usando-se equipamento especializado, tal que permitam a modulação das velocidades linear e angular de forma independente. Este ponto de vista de regime permanente é difícil de ser obtido [28].

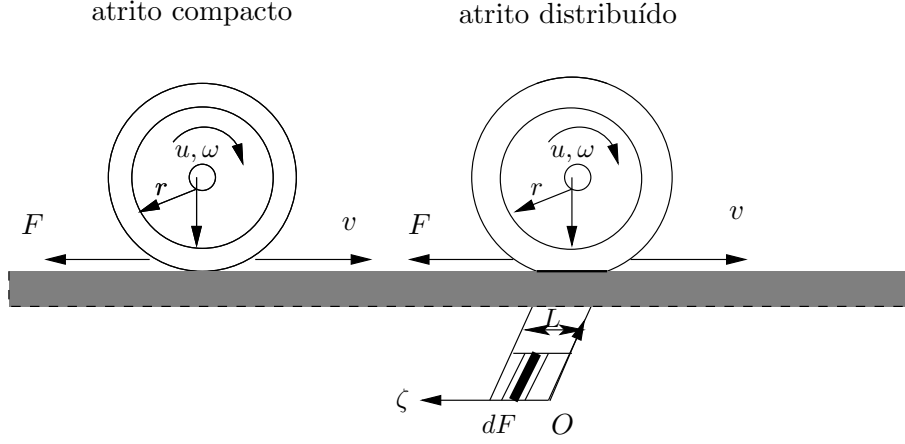


Figura 2.16: Sistema de uma roda com atrito compacto (lado esquerdo) e atrito distribuído (lado direito).

Os modelos dinâmicos de atrito de rolamento capturam o comportamento transiente das forças de contato sob condições de velocidades variantes no tempo. Tais modelos dinâmicos podem ser classificados como compactos ou como distribuídos, como se mostra na figura 2.16.

Um modelo de atrito compacto assume que existe apenas um ponto de contato entre a roda e a superfície de movimento, como mostrado na figura 2.16. Assim, a expressão matemática que descreve tal categoria de modelo é uma equação diferencial ordinária, que pode ser facilmente solucionada pela integração no tempo. Esta abordagem é apropriada para rodas não pneumáticas.

Um modelo distribuído para o atrito de rolamento assume a existência de um caminho na superfície de contato, com uma distribuição de pressão associada (há mais de um ponto de contato com a superfície). Esta suposição resulta numa equação diferencial parcial dependente do tempo e do espaço. Esta abordagem é apropriada para sistema com rodas pneumáticas, onde nesses casos as deformações na roda são muito significativas.

Em um modelo dinâmico para o atrito de rolamento [28], é suposta a existência de estados para o atrito, em nível microscópico, sendo o atrito calculado solucionando-se uma equação diferencial, como exemplo

$$\dot{z}(t) = |v_{r\omega}(t)| A z(t) + B v_{r\omega}(t), \quad (2.46)$$

$$F(z(t), v_{r\omega}(t))_w = C z(t) + \text{sgn}(v_{r\omega}(t)) D, \quad (2.47)$$

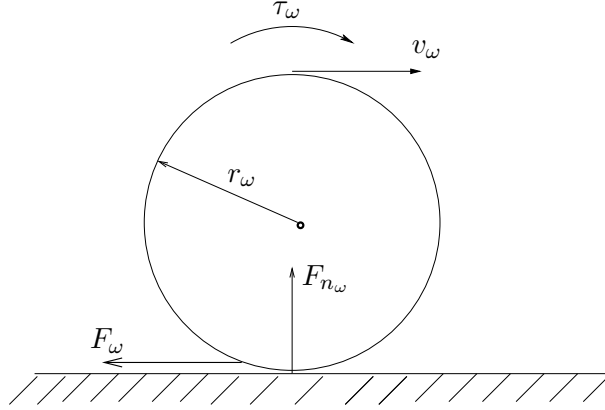


Figura 2.17: Ilustração do rolamento compacto de uma roda.

onde  $z(t)$  é o estado interno do atrito, e  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são matrizes.

### Modelo LuGre Compacto

O Modelo LuGre Compacto inclui o efeito de *Stribeck*, os coeficientes de atrito estático e viscoso, e será usado como uma base para desenvolvimentos adicionais no Modelo final proposto deste Trabalho. Um exemplo do atrito de rolamento compacto, em que há deformação num único ponto de contato da roda, é mostrado na figura 2.17.

O Modelo LuGre Compacto é dado como

$$F_\omega(t) = (\sigma_0(t) z(t) + \sigma_1(t) \dot{z} + \sigma_2(t) v_{r_\omega}(t)) F_{n_\omega}, \quad (2.48)$$

com

$$\dot{z} = v(t)_{r_\omega} - \frac{\sigma_0(t) |v(t)_{r_\omega}|}{g(v_{r_\omega}(t))} z(t), \quad (2.49)$$

e com

$$g(v(t)_{r_\omega}) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c) e^{-(v_{r_\omega}(t)/v_{s_\omega}(t))^{1/2}}, \quad (2.50)$$

onde  $z(t)$  é o estado interno do atrito,  $\sigma_0(t)$  é a rigidez longitudinal,  $\sigma_1(t)$  é o amortecimento longitudinal,  $\sigma_2(t)$  é o coeficiente de atrito viscoso,  $\mu_s$  é o atrito estático,  $\mu_c$  é o atrito de Coulomb, sendo  $(\mu_c \leq \mu_s)$ ,  $v_{s_\omega}(t)$  é a velocidade de *Stribeck* no ponto de contato da roda,  $F_{n_\omega}$  é a força normal da roda no ponto de contato,  $v_{r_\omega}(t) = v_\omega(t) - \bar{v}_\omega(t)$  é a velocidade relativa linear tangencial na roda (diferença entre a velocidade linear tangencial real da roda e a sua velocidade aparente). Este Modelo é dissipativo [11].

Este modelo de atrito relaciona o atrito com o escorregamento existente na roda, uma vez que a partir da expressão (2.40), a velocidade relativa assume a forma

$$v_{r\omega}(t) = s(t) \max(v_{\omega}(t), \bar{v}_{\omega}(t)), \quad (2.51)$$

sendo, portanto, este modelo também do tipo força/escorregamento.

## 2.5 Sumário

Foram apresentados conceitos importantes para a compreensão do conteúdo da Dissertação. Foram mostradas na seção 2.1 definições de algumas não-linearidades que são inerentes em sistemas reais, sendo que a zona morta é causada pelo atrito estático, e a saturação é constituída pelas restrições de limites máximo e mínimo impostas ao atuador.

A seção 2.2 abordou tópicos sobre o acionamento e a dinâmica de motores de corrente contínua. O sistema de acionamento influencia no desempenho dinâmico de qualquer sistema robótico e, em certa medida, o sistema de acionamento determina os tipos de aplicação que o robô pode realizar. Um dos tipos de acionamento mais usado é o elétrico, e este não propicia altas velocidades, porém a repetibilidade e a precisão são grandes.

A seção 2.3 explanou sobre a cinemática da estrutura de base de um robô móvel; sobre as restrições cinemáticas da roda e da estrutura de base de robôs móveis, citando os principais tipos de rodas existentes, os conceitos de manobrabilidade, mobilidade, espaço de trabalho, e graus de liberdade de um robô móvel; e sobre robôs móveis holonômicos.

Finalmente, a seção 2.4 abordou o fenômeno do atrito; os modelos matemáticos para o atrito como os cinemáticos e os dinâmicos; os modelos matemáticos para o atrito de rolamento, principalmente explanando o Modelo dinâmico para o atrito de rolamento de LuGre Compacto. Este inclui os coeficientes de atrito estático e viscoso, apresenta deformação num único ponto de contato da roda, e será usado como base para desenvolvimentos adicionais no Modelo final proposto deste Trabalho.

## Capítulo 3

# Modelagem Dinâmica de uma Estrutura de Base para Robôs Móveis Holonômicos

*Neste Capítulo, é feita uma modelagem dinâmica de uma estrutura de base para robôs móveis holonômicos com três rodas ativas do tipo sueca e com inclusão do modelo do atuador elétrico, considerando as não-linearidades de zona morta e saturação nas entradas do sistema. O modelo de atrito escolhido para a modelagem da zona morta é o Modelo LuGre Compacto, já que a zona morta foi relacionada com fenômenos decorrentes do atrito entre a base móvel e o chão, e este inclui o escorregamento do sistema, permitindo uma abordagem e simulação da base móvel a mais próxima da real possível. A saturação é modelada a partir das limitações decorrentes do acionamento eletrônico dos motores elétricos. Uma implementação computacional deste Modelo Dinâmico de base móvel foi realizada em ambiente Matlab Simulink®.*

### 3.1 Introdução

Os sistemas mecânicos com movimentos são matematicamente de forma lagrangeana [29, 30, 31, 32]. Particularmente, para a análise da dinâmica da estrutura de base de um robô móvel, as equações lagrangeanas são de vital importância. Os movimentos

gerados pela estrutura de base de robô móvel são respostas a torques aplicados na entrada [33].

Atualmente, estão sendo estudados controladores que fazem uso de modelos de referência de torques ou forças acopladas (método também conhecido como controle no espaço de atuadores) [5]. Esta estratégia pode incluir também a compensação da mudança do momento de inércia e do atrito. A compensação do atrito requer um conhecimento de leis que descrevam o comportamento do atrito das juntas e de seus coeficientes associados [34].

A análise dinâmica da estrutura de base de um robô móvel [3] inclui restrições adicionais no ambiente de trabalho e na trajetória devido às considerações da massa e da força. A base móvel é também limitada pela sua dinâmica. Por exemplo, um centro de gravidade elevado limita o raio de giro prático e rápido. A análise dinâmica é importante para o estabelecimento de estruturas de controle apropriadas para a realização das tarefas com exatidão e velocidade desejadas [17].

## 3.2 Modelagem dos Atuadores

Como foi mostrado na seção 2.4.2, a dinâmica do movimento de cada roda da base móvel pode ser representada por meio da equação

$$F_\omega(t) = \frac{1}{r_\omega}(\tau_\omega(t) - J_\omega \dot{\omega}_\omega(t)), \quad (3.1)$$

onde  $r_\omega$  e  $\omega_\omega(t)$  representam o raio e a velocidade angular de cada roda, respectivamente; e  $\tau_\omega(t)$  e  $F_\omega(t)$  são, respectivamente, o torque e a força aplicados em cada roda em função do atrito.

Como mostrado na seção 2.2, sabe-se que a relação entre o torque na roda,  $\tau_\omega(t)$ , e o torque no motor,  $\tau_m(t)$ , é também dada por

$$\tau_\omega(t) = \eta N (\tau_m(t) - J_m \dot{\omega}_m(t)), \quad (3.2)$$

onde

$$\tau_m(t) = k_t i_\omega(t), \quad (3.3)$$

com  $\tau_m(t)$  sendo o torque eletromagnético, e considerando-se que  $J_m$  seja o momento de inércia de cada rotor,  $N$  o fator de redução de velocidade,  $\eta$  a eficiência do acoplamento mecânico,  $i_\omega(t)$  a corrente elétrica em cada motor, e  $k_t$  a constante de torque.



A partir da equação dinâmica do sistema elétrico, isolando-se a corrente, e fazendo sua derivada, tem-se a expressão (3.4), podendo ser associada a cada roda

$$\frac{di_\omega}{dt} = \frac{1}{L}[u_\omega(t) - k_{em} \omega_m(t) - R i_\omega(t)], \quad (3.4)$$

onde  $L$  é a indutância de cada motor,  $u_\omega(t)$  é a tensão elétrica de alimentação de cada motor,  $k_{em}$  é a constante de força contra-eletromotriz de rotação,  $\omega_m(t)$  é a velocidade angular direcionada para o eixo do motor de cada roda, e  $R$  é a resistência de cada motor da armadura.

Assim, o modelo dinâmico de cada roda que aciona a base móvel, sem a inclusão das não-linearidades de entrada é obtido pela combinação das expressões (3.4), (3.3), (3.2) e (3.1).

### 3.3 Inclusão das Não-Linearidades de Entrada

Na seção 2.1 foram apresentados os conceitos sobre as não-linearidades de entrada do tipo saturação e do tipo zona morta. Na seção 2.2 a não-linearidade do tipo saturação foi relacionada com limitações físicas do acionamento eletrônico dos motores elétricos de corrente contínua que acionam as rodas. Na seção 2.4 a não-linearidade do tipo zona morta foi relacionada com o fenômeno de atrito, em particular o atrito estático.

Para a inclusão da saturação no modelo do atuador, ou seja no modelo da roda, considere a tensão elétrica de alimentação de cada motor,  $u_\omega(t)$ , que reflete a relação entre a fonte de tensão primária e a tensão média de saída, a partir de um conversor modulado por largura de pulso (PWM), e que é representada da forma

$$u_\omega(t) = V'_d(t) \delta(t), \quad (3.5)$$

sendo

$$\delta(t) = (2\bar{\delta}(t) - 1) \in [-1, 1] \subset \Re \quad (3.6)$$

e

$$V'_d(t) = V_d(t) - 2 V_{sat}(t) - \Delta V_d(t), \quad (3.7)$$

onde  $V'_d(t)$  é a tensão elétrica efetiva,  $V_{sat}(t)$  representa a tensão de saturação do transistor, e  $\Delta V_d(t)$  é a variação da tensão elétrica de alimentação que ocorre com o passar do tempo de funcionamento do sistema.

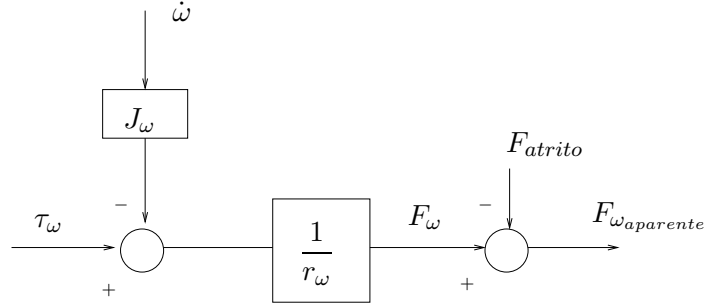


Figura 3.1: Interação do atrito com o atuador.

A expressão (3.6) mostra a não-linearidade de saturação para a variável  $\delta(t)$ . Agora, aplicando-se a expressão (3.5) na expressão (3.4) chega-se a

$$\frac{di_{\omega}}{dt} = \frac{1}{L}[V_d'(t) \delta_{\omega}(t) - k_{em}\omega_m(t) - Ri_{\omega}(t)], \quad (3.8)$$

onde a variável de entrada para o atuador, ou seja a roda, passa ser a variável  $\delta_{\omega}(t) \in [-1, 1]$ , ficando portanto inclusa a saturação no modelo do atuador.

Para a inclusão da zona morta no modelo do atuador, ou seja da roda, considere a expressão (3.1), que descreve a dinâmica da roda sem a inclusão de qualquer fenômeno de atrito, e considere também a figura 3.1, que ilustra como o atrito interage com o atuador, ou melhor, com qualquer sistema. Nesta, é mostrado que a interferência do atrito é no sentido de reduzir a força líquida de saída do atuador, fazendo com a força aplicada pelo atuador na entrada do sistema aparente seja menor. Assim, a expressão (3.1) pode ser reescrita na forma

$$F_{\omega_{aparente}}(t) = F_{\omega}(t) - F_{atrito}(t) = \frac{1}{r_{\omega}}(\tau_{\omega}(t) - J_{\omega} \dot{\omega}_{\omega}(t)) - F_{atrito}(t), \quad (3.9)$$

onde

$$F_{atrito}(t) = (\sigma_0(t) z(t) + \sigma_1(t) \dot{z} + \sigma_2(t) v_{r_{\omega}}(t)) F_{n_{\omega}}, \quad (3.10)$$

com

$$\dot{z} = v_{r_{\omega}}(t) - \frac{\sigma_0(t) |v_{r_{\omega}}|(t)}{g(v_{r_{\omega}})(t)} z(t), \quad (3.11)$$

e com

$$g(v_{r_{\omega}})(t) = \mu_c + (\mu_s - \mu_c) e^{-(v_{r_{\omega}}(t)/v_{s_{\omega}}(t))^{1/2}}, \quad (3.12)$$

onde  $z(t)$  é o estado interno do atrito,  $\sigma_0(t)$  é a rigidez longitudinal,  $\sigma_1(t)$  é o amortecimento longitudinal,  $\sigma_2(t)$  é o coeficiente de atrito viscoso,  $\mu_s$  é o atrito estático,  $\mu_c$  é

o atrito de Coulomb, sendo  $(\mu_c \leq \mu_s)$ ,  $v_s(t)$  é a velocidade de *Stribeck*,  $F_{n\omega}(t)$  é a força normal da roda no ponto de contato,  $v_{r\omega}(t) = v_\omega(t) - \bar{v}_\omega(t)$  é a velocidade relativa linear tangencial na roda.

Observe que  $v_\omega(t)$  pode ser obtida diretamente da medição da velocidade  $\omega_\omega(t)$  do centro da roda na forma  $v_\omega(t) = r_\omega \omega_\omega(t)$ , e que  $\bar{v}_\omega(t)$  deve ser obtida a partir da medição da velocidade linear tangencial da roda em relação a algum referencial fixo, como por exemplo o centro da base móvel, como será mostrado na seção a seguir.

A força normal da roda no ponto de contato pode ser obtida, para o plano horizontal, a partir da expressão

$$F_{n\omega} = \frac{M g}{N_{\text{rodas}}}, \quad (3.13)$$

onde  $M$  é a massa total da base móvel,  $g$  é a aceleração da gravidade, e  $N_{\text{rodas}}$  é o número total de rodas da base móvel. Como observado experimentalmente por Sanca e colaboradores [22, 35], para bases móveis sem o uso de lubrificantes a velocidade de *Stribeck* pode ser tomada como zero. Os demais parâmetros do modelo de atrito devem ser obtidos experimentalmente.

Este modelo de atrito é o Modelo LuGre Compacto, apresentado na seção 2.4, e além de modelar satisfatoriamente o atrito estático, que provoca o efeito da zona morta no sistema, modela satisfatoriamente outros componentes do atrito, como atrito viscoso, representado pela parcela  $\sigma_2(t) v_{r\omega}(t)$  na expressão (3.10).

### 3.4 Modelagem Dinâmica da Base Móvel Incluindo as Rodas

Na figura 3.2, é representada uma base móvel com três rodas no espaço cartesiano. O modelo a ser desenvolvido a seguir é válido para rodas sucas com  $\gamma = 0$ . O principal ponto, sob análise, é o centro do corpo da base  $\langle x, y \rangle$ , e sua orientação  $\theta$ , que é o ângulo entre o eixo de orientação da base móvel, o eixo  $x'$ , e o eixo das abscissas, eixo  $x$ , no espaço cartesiano, como foi mostrado na seção 2.3.

Na figura, podem ser verificadas também outras variáveis, todas  $\in \mathbb{R}$ , como  $\bar{v}(t)$ , que é a velocidade linear da base móvel;  $r_{\omega_1}$ ,  $r_{\omega_2}$  e  $r_{\omega_3}$ , que são os raios das rodas 1, 2 e 3, respectivamente;  $\alpha_{\omega_1}$ ,  $\alpha_{\omega_2}$  e  $\alpha_{\omega_3}$ , ângulos da origem do eixo móvel  $x$  até à extremidade superior das rodas 1, 2 e 3, respectivamente; e  $\dot{\omega}(t)$ , a aceleração angular da base móvel.

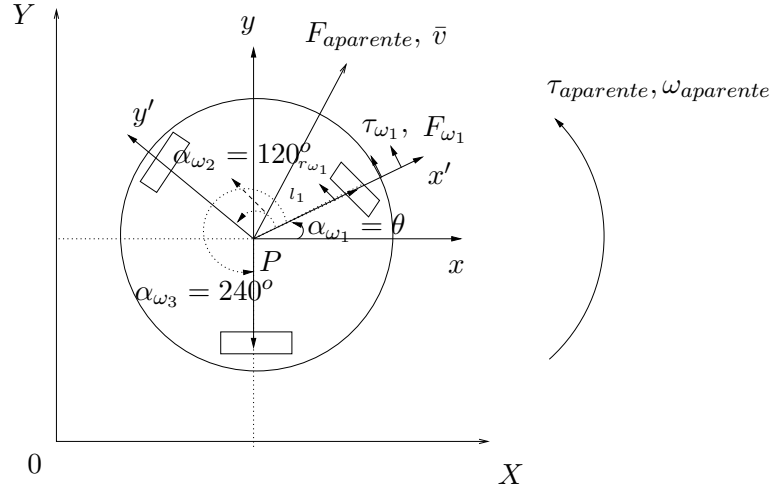


Figura 3.2: Diagrama das forças e torques que atuam sobre a base móvel.

Para facilitar o entendimento dos desenvolvimentos apresentados a seguir, será considerado  $\alpha_{\omega_1} = 0 \forall \theta(t) \in \mathbb{R}$ , ou seja, o eixo  $x(t)$  sempre estará coincidente com o eixo  $x'(t)$ , onde está posicionado o plano  $(xoy)(t)$ . O ponto  $(0,0)$  está indicado pela letra  $P$ . Com isso, obtendo-se as resultantes  $\bar{v}_x(t)$  e  $\bar{v}_y(t)$  das três rodas, nos eixos  $x(t)$  e  $y(t)$ , têm-se que

$$\bar{v}_{x_1}(t) = 0, \quad (3.14)$$

$$\bar{v}_{y_1}(t) = \bar{v}_{\omega_1}(t), \quad (3.15)$$

$$\bar{v}_{x_2}(t) = -\cos(\alpha_{\omega_2})\bar{v}_{\omega_2}(t), \quad (3.16)$$

$$\bar{v}_{y_2}(t) = -\sin(\alpha_{\omega_2})\bar{v}_{\omega_2}(t), \quad (3.17)$$

$$\bar{v}_{x_3}(t) = \sin(\alpha_{\omega_3})\bar{v}_{\omega_3}(t), \quad (3.18)$$

$$\bar{v}_{y_3}(t) = -\cos(\alpha_{\omega_3})\bar{v}_{\omega_3}(t), \quad (3.19)$$

onde  $\bar{v}_{x_1}(t)$ ,  $\bar{v}_{y_1}(t)$ ,  $\bar{v}_{x_2}(t)$ ,  $\bar{v}_{y_2}(t)$ ,  $\bar{v}_{x_3}(t)$  e  $\bar{v}_{y_3}(t)$  são as velocidades lineares tangenciais de cada roda em relação ao centro da base móvel (o ponto  $P$ ), respectivamente, decompostas em relação aos eixos  $x(t)$  e  $y(t)$ ;  $\bar{v}_{\omega_1}(t)$ ,  $\bar{v}_{\omega_2}(t)$  e  $\bar{v}_{\omega_3}(t)$  são as velocidades lineares tangenciais aparentes de cada roda em relação à base móvel, como definido na seção 2.3.

A partir das expressões (3.14), (3.15), (3.16), (3.17), (3.18) e (3.19), e assumindo-se que a velocidade angular do centro de massa da base móvel é a média aritmética da velocidade tangencial linear aparente de cada roda em relação à base móvel, podem-se obter as resultantes  $\bar{v}_x(t)$  e  $\bar{v}_y(t)$  das três rodas, nos eixos  $x(t)$  e  $y(t)$ , e a velocidade

angular da base móvel nos formatos

$$\bar{v}_x(t) = -\cos(\alpha_{\omega_2})\bar{v}_{\omega_2}(t) + \sin(\alpha_{\omega_3})\bar{v}_{\omega_3}(t), \quad (3.20)$$

$$\bar{v}_y(t) = \bar{v}_{\omega_1}(t) - \sin(\alpha_{\omega_2})\bar{v}_{\omega_2}(t) - \cos(\alpha_{\omega_3}(t))\bar{v}_{\omega_3}(t), \quad (3.21)$$

$$\bar{\omega}(t) = \frac{1}{3} \left( \frac{\bar{v}_{\omega_1}(t)}{l_1} + \frac{\bar{v}_{\omega_2}(t)}{l_2} + \frac{\bar{v}_{\omega_3}(t)}{l_3} \right), \quad (3.22)$$

onde  $\bar{v}_x(t)$  e  $\bar{v}_y(t)$  são as velocidades lineares da base móvel nos eixos  $x(t)$  e  $y(t)$ , respectivamente;  $\bar{\omega}(t)$  é a velocidade angular do centro de massa da base móvel; e  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_3$  são as distâncias do centro da base móvel à extremidade superior de cada roda.

A partir das expressões (3.20), (3.21) e (3.22), chega-se à equação em forma de matriz

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = A_1 \bar{\mathbf{v}}_{\omega}(t), \quad (3.23)$$

sendo:

$$\bar{\mathbf{v}}(t) = \begin{bmatrix} \bar{v}_x(t) \\ \bar{v}_y(t) \\ \bar{\omega}(t) \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\cos(\alpha_{\omega_2}) & \sin(\alpha_{\omega_3}) \\ 1 & -\sin(\alpha_{\omega_2}) & -\cos(\alpha_{\omega_3}) \\ \frac{1}{3l_1} & \frac{1}{3l_2} & \frac{1}{3l_3} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{v}}_{\omega}(t) = \begin{bmatrix} \bar{v}_{\omega_1}(t) \\ \bar{v}_{\omega_2}(t) \\ \bar{v}_{\omega_3}(t) \end{bmatrix}.$$

Naturalmente,

$$\bar{\mathbf{v}}_{\omega}(t) = A_1^{-1} \bar{\mathbf{v}}(t), \quad (3.24)$$

admitindo-se  $A_1$  sempre inversível. A expressão (3.24) é usada para a obtenção de  $\bar{\mathbf{v}}_{\omega}(t)$  a partir de  $\bar{\mathbf{v}}(t)$ . Os componentes de  $\bar{\mathbf{v}}(t)$  podem ser obtidos, por exemplo, por meio de um sistema de medição por processamento de imagens e do uso de rótulos sobre o corpo da base para gerar as referências dos eixos  $\langle x, y \rangle$ . A partir da obtenção dos componentes de  $\bar{\mathbf{v}}_{\omega}(t)$  obtém-se as velocidades relativas  $v_{r_{\omega_1}}(t)$ ,  $v_{r_{\omega_2}}(t)$  e  $v_{r_{\omega_3}}(t)$ , respectivamente, para o cálculo da força de atrito em cada roda conforme as expressões (3.10), (3.11) e (3.12).

A partir da análise da dinâmica do movimento do centro de massa da base móvel observa-se que

$$F_{\text{aparente}}(t) = M \dot{\vec{v}}(t), \quad (3.25)$$

para o movimento retilíneo, e

$$\tau_{\text{aparente}}(t) = J \dot{\vec{\omega}}(t), \quad (3.26)$$

para o movimento rotacional, onde  $M$  e  $J$  representam a massa e o momento de inércia da base móvel, respectivamente;  $\tau(t)$  e  $F(t)$  são, respectivamente, o torque aparente total e a força aparente total aplicados ao centro da base móvel, e  $\dot{v}(t)$  é a aceleração linear da base móvel.

De forma análoga ao procedimento para se achar  $\sum \bar{v}_x(t)$  e  $\sum \bar{v}_y(t)$ , em (3.20) e (3.21), têm-se as expressões

$$F_{x_{\text{aparente}}}(t) = -\cos(\alpha_{\omega_2}) F_{\omega_{\text{aparente}_2}}(t) + \sin(\alpha_{\omega_3}) F_{\omega_{\text{aparente}_3}}(t), \quad (3.27)$$

$$F_{y_{\text{aparente}}}(t) = F_{\omega_{\text{aparente}_1}}(t) - \sin(\alpha_{\omega_2}) F_{\omega_{\text{aparente}_2}}(t) - \cos(\alpha_{\omega_3}) F_{\omega_{\text{aparente}_3}}(t), \quad (3.28)$$

$$\tau_{\text{aparente}}(t) = l_1 F_{\omega_{\text{aparente}_1}}(t) + l_2 F_{\omega_{\text{aparente}_2}}(t) + l_3 F_{\omega_{\text{aparente}_3}}(t). \quad (3.29)$$

Decompondo-se  $F_{\text{aparente}}(t)$  na expressão (3.25) em seus componentes nos eixos  $x(t)$  e  $y(t)$  chega-se às equações

$$\dot{\vec{v}}_x(t) = \frac{F_{x_{\text{aparente}}}(t)}{M}, \quad (3.30)$$

$$\dot{\vec{v}}_y(t) = \frac{F_{y_{\text{aparente}}}(t)}{M}, \quad (3.31)$$

e da expressão (3.26) chega-se à

$$\dot{\vec{\omega}}(t) = \frac{\tau_{\text{aparente}}(t)}{J}. \quad (3.32)$$

Assim, a modelagem da base móvel com a inclusão da dinâmica das rodas é obtida pela combinação das expressões (3.27), (3.28), (3.29), (3.30), (3.31), (3.32), (3.4), (3.3), (3.8) e (3.1).

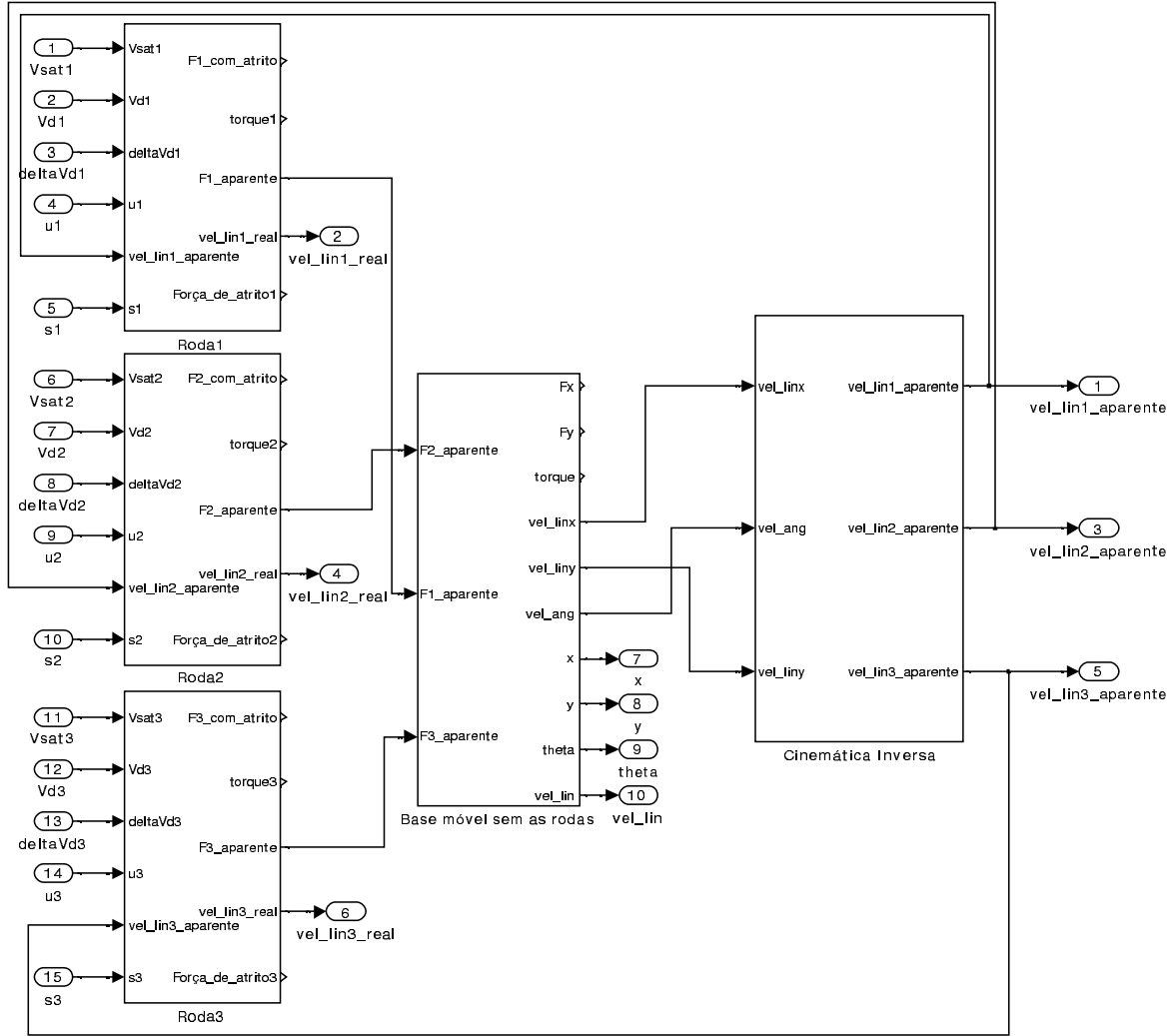


Figura 3.3: Implementação do modelo dinâmico de base móvel holonômica de três rodas suecas em ambiente Matlab *Simulink*<sup>®</sup>.

### 3.5 Implementação Computacional

O Modelo da base móvel holonômica de três rodas suecas foi implementado no ambiente Matlab *Simulink*<sup>®</sup>, em blocos, conforme se ilustra na figura 3.3.

Para um melhor entendimento da modelagem dinâmica em estudo, segue uma sequência explicativa:

- (i) Para cada roda temos uma entrada  $u(t) \in \mathbb{R}$  que corresponde ao sinal de controle oriundo de um controlador. Este sinal, livre em extensão positiva ou negativa, serve de entrada para um modulador PWM que irá modular a tensão média de

entrada de cada motor, o que pode ser observado pelas expressões (3.5), (3.6) e (3.7). Esta tensão  $u_\omega(t)$  é sujeita à saturação conforme explicado na seção 3.3.  $V_{sat}(t)$  representa a tensão de saturação do transistor, e  $\Delta V_d(t)$  é a variação da tensão de referência decorrente do passar de tempo do funcionamento do sistema, o que acarreta uma diminuição da tensão da bateria  $V_d(t)$ ;

- (ii) A largura de pulso  $\delta_\omega(t)$  usada para o acionamento de cada motor entrará na equação (3.8), que terá como saída a derivada da corrente elétrica no tempo. Com a obtenção da corrente por integração, o torque mecânico de cada motor é obtido pela expressão (3.3);
- (iii) O torque mecânico de cada motor é aplicado na equação (3.2) para a obtenção do torque no eixo de cada roda. Da expressão (3.1), a partir do torque na roda, chega-se à força real em cada roda,  $F_\omega(t)$ ;
- (iv) A força real de cada roda é subtraída da força de atrito em cada roda a partir das expressões (3.9), (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) e (2.50), chegando-se assim a força aparente,  $F_{\omega_{aparente}}(t)$ , para cada roda. Neste ponto, a variável  $s(t)$  é imposta pelo usuário como uma perturbação ao sistema;
- (v) As forças aparentes em cada roda, a partir das expressões (3.27), (3.28) e (3.29), formarão as forças  $F_{x_{aparente}}(t)$  e  $F_{y_{aparente}}(t)$  e torque  $\tau_{aparente}(t)$  da base móvel;
- (vi) A partir das equações (3.30), (3.31) e (3.32), e fazendo-se a integração das mesmas, chega-se às velocidades  $\bar{v}_x(t)$ ,  $\bar{v}_y(t)$  e  $\bar{\omega}(t)$ . Estas velocidades são usadas no modelo cinemático inverso do sistema, equação (3.24), para a determinação das velocidades lineares aparentes de cada roda, informações essas que são usadas para a estimação da força de atrito, expressões (3.9), (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) e (2.50);
- (vii) Finalmente, as posições  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $\theta(t)$  são obtidas por integração.

No Apêndice A, são explanados detalhadamente cada bloco de simulação e seus sub-sistemas implementados no ambiente Matlab *Simulink*®.

O projetista pode escolher quais de todas as saídas citadas serão visualizadas e analisadas. Nesta Dissertação, a saída foi a velocidade linear da base móvel  $\bar{v}(t)$ . Do ponto de vista de controle, naturalmente que as entradas do sistema são os sinais  $u(t)$



Tabela 3.1: Os principais parâmetros de um sistema robótico móvel holonômica de três rodas suecas com as respectivas unidades.

Parâmetro	Unidade
$M$	$kg$
$r_{\omega_1}, r_{\omega_2}, r_{\omega_3}$	$m$
$l_1, l_2, l_3$	$m$
$\alpha_{\omega_1}, \alpha_{\omega_2}, \alpha_{\omega_3}$	$rad$
$N$	adimensional
$\eta$	adimensional
$L$	$H$
$R$	$\Omega$
$kem$	$Volts/rad$
$k_t$	$Nm/A$
$J_{m_1}, J_{m_2}, J_{m_3}$	$kgm^2$
$J_{\omega_1}, J_{\omega_2}, J_{\omega_3}$	$kgm^2$
$J$	$kgm^2$
$\mu_c$	adimensional
$\mu_s$	adimensional
$\sigma_0(t)$	$N/m$
$\sigma_1(t)$	$Ns/m$
$\sigma_2(t)$	$Ns/m$

de cada roda oriundos de controladores e a definição dos estados e das variáveis de saída ficaria na dependência da aplicação, podendo os estados e as saídas serem tomados em relação ao centro de massa da base ou em relação às rodas.

Esta Implementação Computacional permite a construção de um robô móvel holonômica de três rodas suecas que possa funcionar a mais próxima da real possível, já que as não-linearidades de entrada de zona morta e saturação, além do escorregamento foram incluídos na modelagem em estudo. Ainda pensando nestes projetistas, com o intuito de facilitar a análise e construção de um robô móvel holonômico de três rodas, a Tabela 3.1 apresenta os parâmetros que precisam ser conhecidos, a priori, pelo projetista antes deste poder realizar qualquer outra análise e decisão. Estes parâmetros

representam dados ambientais e estruturais do robô. Outros parâmetros como tensão de saturação do transistor, tensão de referência, dentre outros, geralmente são valores padrões, com poucas variações de um material para outro.

## 3.6 Sumário

Neste Capítulo, foi apresentado o desenvolvimento do Modelo da estrutura de uma base móvel holonômica com três rodas suecas, acionadas por motores elétricos de corrente contínua, incluindo as não-linearidades nas entradas do sistema.

Na seção 3.2, foi-se abordada a modelagem dos atuadores. O modelo dinâmico de cada roda que aciona a base móvel é apresentado sem a inclusão das não-linearidades de entrada.

Na seção 3.3, foram-se inclusas as não-linearidades de entrada do sistema. As não-linearidades modeladas foram caracterizadas como dos tipos zona morta e saturação, e o modelo de atrito utilizado foi o de LuGre Compacto.

A zona morta foi relacionada com fenômenos decorrentes do atrito entre um ponto de contato entre a base móvel e a superfície, e este Modelo ainda inclui o escorregamento do sistema, permitindo uma abordagem e simulação da base móvel a mais próxima da real possível, além dos coeficientes de atrito estático e viscoso. A saturação, por sua vez, é modelada a partir das limitações decorrentes do acionamento eletrônico dos motores elétricos. Na seção 3.4, foi-se abordada a Modelagem Dinâmica da base móvel incluindo as rodas.

Finalmente, na seção 3.5, tivemos a implementação computacional do Modelo. Este Modelo foi analisado criteriosamente, aproximando-se o mais próximo do real possível, e será usado para a construção de um bloco de simulação, em ambiente Matlab *Simulink*<sup>®</sup>, com dados do sistema real AxeBot, que permite a simulação do mesmo com características ambientais, podendo-se realizar a validação do Modelo proposto.

## Capítulo 4

# Aplicação do Modelo Dinâmico em Um Sistema Real

*Este Capítulo apresenta o sistema robótico móvel AxeBot, a aplicação do modelo desenvolvido neste Sistema Real, com os resultados obtidos com a utilização do bloco de simulação, em ambiente Matlab Simulink® e com experimentos do AxeBot no campo de futebol verde, de carpete da Universidade Federal da Bahia. Através destes resultados, pôde-se verificar e analisar as imperfeições às quais um sistema real está exposto em seu ambiente de aplicação.*

### 4.1 Introdução

Hoje em dia, podem-se construir robôs móveis pequenos com diversos atuadores e sensores que são controlados por leves e rápidos sistemas computacionais compactos, os quais são transportados no próprio robô. Devido à capacidade de mobilidade e movimento sem supervisão, a estrutura da base móvel, sem a ferramenta, é também conhecida como veículo autônomo [36]. Na verdade, todas as estruturas da base de um robô móvel são veículos.

O robô móvel AxeBot [2] é um robô com três rodas holonômicas, ativas e suecas, com  $\gamma = 0$  e dispostas a  $120^\circ$  umas das outras, conforme é mostrado na figura 4.1. Esta configuração possibilita o movimento desta base móvel em qualquer direção sem a necessidade de re-orientação.

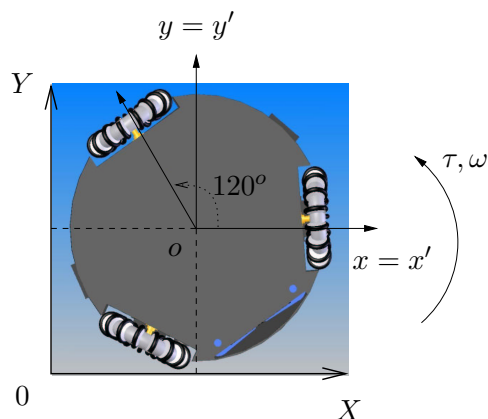


Figura 4.1: Disposição angular das rodas do robô móvel holonômico AxeBot.

Algumas suposições são levadas em consideração, dentre elas, podem-se destacar: (i) a base móvel é constituída de material rígido e não é considerado qualquer tipo de deformação sobre a mesma; (ii) existe apenas um ponto de contato de cada roda com a superfície e, quando a base está em movimento, as velocidades relativas nestes pontos não são nulas, ou seja, há deslizamento das rodas sobre o solo; e (iii) pode haver rolamento lateral do robô, assim como rolamentos frontal e retrógrado. O AxeBot é ilustrado nas figuras 4.2 e 4.3.

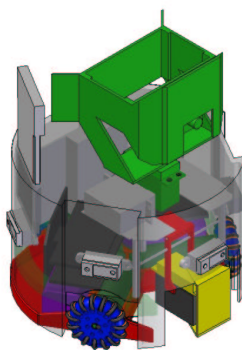


Figura 4.2: Robô móvel holonômico AxeBot.

O AxeBot é formado pelos seguintes componentes: (i) sistemas de sensoramento e de controle; (ii) sistema computacional; e (iii) atuadores. Os sistemas de sensoramento e controle são suportados pelo sistema computacional microcontrolador *Strongarm*.

Os propulsores são três motores de corrente contínua (CC), modelo *Amax 22 R179-6V*, da marca *Maxon*, controlados por duas placas *BrainStem Moto 1.0*. Cada motor é

acoplado a uma caixa de redução planetária de 19:1. São utilizadas ainda três pontes H para o acoplamento dos motores de corrente contínua aos respectivos controladores. Cada roda sueca é acoplada a um conjunto motor com caixa de redução e *encoder* incremental, que permite estimar a velocidade angular tangencial de cada roda.

Dois outros servo-motores são usados para acionar uma câmera. Este sistema de visão é composto por uma *WebCam CMUCam2* sobre a base móvel, combinados com seis sensores de distância da *Sharp GP2D120*, e objetivam o desvio de obstáculo e posicionamento relativo da bola, de companheiros de time, de adversários e dos gols. Todos estes objetos são referenciados ao centro da base móvel por este sistema de visão.



Figura 4.3: Robô móvel holonômico AxeBot.

Mais dois outros servo-motores de alto torque são destinados a um efetuator, que é a ferramenta de chute da base móvel, transformando-a assim em um robô móvel.

Devido à existência de escorregamento nas rodas, não é possível relacionar os movimentos nas rodas com o deslocamento e a velocidade do centro da base móvel. As medidas de postura, velocidade linear e velocidade angular da base móvel poderiam ser

obtidas mediante um sistema de medição por imagens, sendo que este sistema ainda está em desenvolvimento pelo grupo de pesquisadores da Universidade Federal da Bahia que desenvolvem o AxeBot. O sistema de visão mencionado acima não permite o posicionamento da base móvel em relação a um referencial cartesiano externo e fixo.

## 4.2 Aplicação do Modelo Dinâmico no Sistema Robótico AxeBot

A modelagem dinâmica, mostrada no Capítulo 3, pode ser aplicável em qualquer robô móvel com três rodas holonômicas e suecas podendo, portanto, ser utilizada em várias aplicações. O AxeBot, em particular, foi construído com o intuito de ser utilizado em futebol de robôs.

Apesar do entretenimento, uma partida de futebol jogada por robôs autônomos visa ao aperfeiçoamento do controle individual de robôs móveis e da coordenação entre múltiplos robôs. Esta atividade envolve aspectos de extrema complexidade sob a ótica da Ciência Robótica, e configura laboratórios para ensino e pesquisa, cujo conhecimento pode ser depois aplicado em atividades práticas, como na automação industrial, em locais de difícil acesso por humanos, em situações perigosas e até mesmo na exploração espacial [37].

Utilizando-se desta aplicação, pode-se fazer a avaliação de várias teorias, envolvendo algoritmos, visão artificial, comunicação entre máquinas, eletrônica e mecânica, onde uma diversidade de tecnologias pode ser analisada e integrada. O futebol de robôs reúne grande parte dos desafios presentes em problemas eminentemente do mundo real, tais como navegação em ambientes dinâmicos, exploração de ambientes, realização de procedimentos de contingência em ambientes com alta periculosidade ou insalubres, monitoramento ambiental, controle de tráfego aéreo e urbano, etc.

Os parâmetros medidos do sistema robótico móvel real AxeBot e os da estrutura de sua base móvel, obtidos através de *datasheet*, e ainda os de condições de contorno do problema podem ser verificados na Tabela 4.1. Todos os dados desta Tabela foram usados para validar a Modelagem deste Trabalho, através de simulações e experimentos.

As medidas de postura, velocidade linear e velocidade angular da base móvel poderiam ser obtidas mediante um sistema de medição por imagens, sendo que este

Tabela 4.1: Parâmetros utilizados nos experimentos e nas simulações. A velocidade de *Stribeck*,  $v_s$ , assume o valor  $6 \times 10^{-10} \text{ m/s}$  para evitar uma divisão por zero [vide expressão (2.50)].

Parâmetro	Valor
$g$	$9,8 \text{ m/s}^2$
$V_{sat}(t)$	$0,3 \text{ V}$
$V_d(t)$	$6 \text{ V}$
$\Delta V_d(t)$	$0 \text{ V}$
$v_s(t)$	$6 \times 10^{-10} \text{ m/s}$
$M$	$1,830 \text{ kg}$
$l_\omega$	$0,09 \text{ m}$
$r_\omega$	$0,072 \text{ m}$
$k_t$	$0,0059 \text{ Nm/A}$
$k_{em}$	$0,0059 \text{ Vs/rad}$
$N$	$19$
$L$	$0,00011 \text{ H}$
$R$	$1,710 \text{ }\Omega$
$J_{m_\omega}$	$3,88 \times 10^{-7} \text{ kgm}^2$
$J_\omega$	$8.1 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2$
$J$	$2,125 \text{ kgm}^2$
$\eta$	$0,83$

sistema ainda está em desenvolvimento pelo grupo de pesquisadores da Universidade Federal da Bahia que desenvolvem o AxeBot. O sistema de visão mencionado acima não permite o posicionamento da base móvel em relação a um referencial cartesiano externo e fixo.

Em [3, 10], apresenta-se um modelo dinâmico para robôs móveis com rodas holonômicas, considerando o escorregamento entre as rodas e a superfície de movimento. Duas superfícies de movimento - papel e carpete - foram usadas nas simulações e experimentos, com diferentes propriedades do atrito, sendo o carpete é um dos materiais requeridos pela *ROBOCUP* para um campo de futebol de robôs da categoria F-180. Além da modelagem dinâmica com escorregamento, os artigos citados apresentam também um método para determinar os coeficientes de atrito experimentalmente, e o coeficiente de atrito dinâmico foi igual ao estático.

Como o AxeBot foi projetado com o propósito de participar do futebol de robôs da Universidade Federal da Bahia e, de acordo com [3, 10], para as simulações, foram usados diferentes coeficientes de atrito do papel e do carpete. Estes coeficientes de atrito são valores mencionados em relação ao ponto de contato de um rolamento da roda sueca com a superfície e em relação ao ponto de contato do material entre dois rolamentos da roda com a superfície de contato.

#### 4.2.1 Resultados Experimentais e de Simulações

Foram feitos experimentos na base móvel real AxeBot. Estes experimentos consistiram em fazer a base móvel movimentar-se em linha reta em um campo de futebol de robôs de categoria *ROBOCUP* F-180 *small size* com piso verde de carpete de dimensões  $2,90\text{ m} \times 4,10\text{ m}$  da Universidade Federal da Bahia. O objetivo dos experimentos era verificar a velocidade linear média atingida pela base, com acionamento em largura de pulso máxima, ou seja, tensão máxima de alimentação, que no caso foi de 6 volts. Esta velocidade medida seria então comparada com a velocidade linear máxima de projeto de  $2\text{ m/s}$  e com a velocidade máxima obtida na primeira simulação. As trajetórias escolhidas foram a diagonal máxima do campo de um ponto de escanteio ao outro ponto de escanteio do outro lado do campo, a altura e a largura do campo de futebol, e também as distâncias relacionadas à largura e ao comprimento do campo de futebol.

O método de medição usado foi a cronometragem do tempo a partir de um



cronômetro manual desde o instante de início do movimento até o seu final. Naturalmente este método não é muito preciso, mas como ainda não está disponibilizado um sistema de medição de velocidade por imagem cartesiana externa, optou-se pelo uso deste. Esta medida daria então uma estimativa grosseira da aproximação do modelo proposto com algum resultado de simulação.

Durante os experimentos, as baterias estiveram totalmente carregadas, a velocidade linear média atingida pela base móvel foi de  $1,005\text{ m/s}$  e os experimentos duraram um tempo médio de  $3,97\text{ s}$ . Este período de tempo foi bem inferior ao utilizado nas simulações, que serão analisadas posteriormente. Esta velocidade linear representa  $50,25\%$  da velocidade de projeto, e  $69,7\%$  da velocidade linear máxima obtida na primeira simulação, na qual o escorregamento é nulo e o coeficiente de atrito de Coulomb é igual ao estático e de valor muito pequeno de  $5 \times 10^{-8}$ . Uma justificativa adicional para estas diferenças entre velocidades é que para a velocidade máxima de projeto são supostos escorregamento e atrito nulos em cada roda.

Os experimentos têm suas distâncias, períodos de tempo e velocidades médias da base móvel listadas na tabela 4.2.

Além de já ter sido mencionado anteriormente que o método de medição da velocidade estimaria um valor grosseiro, o campo de futebol apresentou uma superfície ligeiramente empoeirada, e o robô AxeBot, durante os testes, não conseguia realizar uma trajetória estritamente retilínea, mas sempre com uma inclinação para a direita ou para a esquerda.

Outro aspecto a ser considerado é que o coeficiente de atrito de Coulomb do carpete é de  $0,25$ , e o estático era desconhecido. Este coeficiente de atrito de Coulomb é um valor diferenciado do utilizado na primeira simulação, que foi de  $5 \times 10^{-8}$ , e considerado o mesmo para o coeficiente de atrito estático de  $5 \times 10^{-8}$ .

Finalmente, nos experimentos, as tensões nas três rodas suecas foram de  $6\text{ V}$ , sendo que as tensões utilizadas nas simulações foram de  $6\text{ V}$  nas rodas 1 e 2, com a roda 3 tendo recebido uma tensão de entrada nula.

A constante de tempo de sistemas mecânicos como a base móvel AxeBot situa-se em uma faixa entre  $200$  milisegundos e  $500$  milisegundos. Isto resulta em um tempo de estabilização para resposta à função degrau na entrada na ordem de  $3,5$  segundos para a estabilização em  $3\%$ . Com isso, as simulações cujos resultados são apresentados a seguir foram feitas para um tempo de simulação de  $10\text{ s}$ .

Tabela 4.2: Comparação das velocidades lineares médias alcançadas pela base móvel experimentalmente.

Distância	Tempo	Velocidade Média
5,022 m	4 s	1,2555 m/s
2,9 m	2,4 s	1,21 m/s
4,1 m	4,5 s	0,91 m/s
5,022 m	4 s	1,2555 m/s
3,9 m	3,88 s	1,005 m/s
3,9 m	4,16 s	0,9375 m/s
4,1 m	4,5 s	0,91 m/s
4,1 m	5,48 s	0,75 m/s
3,9 m	3,67 s	1,063 m/s
3,9 m	3,32 s	1,175 m/s
5,022 m	4,07 s	1,234 m/s
5,022 m	4,04 s	1,2431 m/s
4,1 m	4,56 s	0,9 m/s
4,1 m	3,99 s	1,028 m/s
2,9 m	3,09 s	0,94 m/s
2,9 m	3,22 s	0,9 m/s
2,9 m	3,69 s	0,786 m/s
2,9 m	4,38 s	0,662 m/s
4,1 m	4,44 s	0,9234 m/s

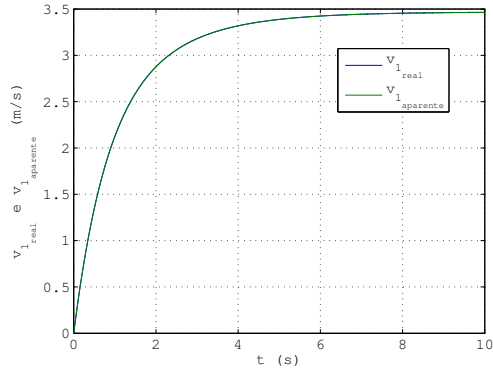
Foram feitas simulações com suas particularidades diferenciadas, porém todas com as configurações apresentadas na Tabela 4.1, e supondo as baterias totalmente carregadas durante todo o período de simulação. Alguns parâmetros desta tabela foram atribuídos empiricamente a partir de informações obtidas de outros trabalhos [22, 35], como é o caso dos parâmetros  $\sigma_0(t)$ ,  $\sigma_1(t)$  e  $\sigma_2(t)$ . Os demais parâmetros correspondem a parâmetros de projeto do sistema AxeBot. Os tipos de trajetória e de movimento gerados pela base móvel não foram analisados neste Trabalho.

O fator importante destacado nas simulações foi a análise das variações dos seguintes coeficientes: de atrito de Coulomb,  $\mu_c$ , e do atrito estático,  $\mu_s$ ; de rigidez longitudinal,  $\sigma_0(t)$ ; de amortecimento longitudinal,  $\sigma_1(t)$ ; e do coeficiente de atrito viscoso,  $\sigma_2(t)$ , também na presença do escorregamento ( $s_\omega(t)$ ) da superfície de contato em cada roda.

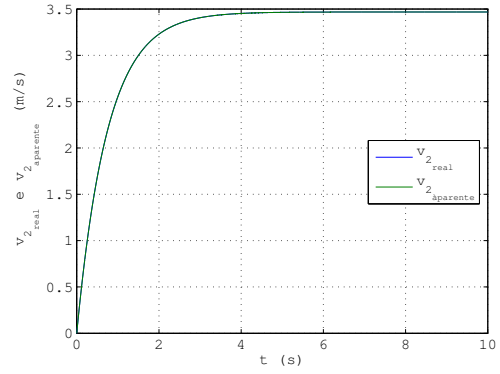
A primeira simulação objetiva avaliar o comportamento da base móvel para condições de escorregamento nulo nas três rodas, ou seja  $s_1(t) = 0$ ,  $s_2(t) = 0$  e  $s_3(t) = 0$ . Para esta simulação usou-se  $\mu_c = 5 \times 10^{-8}$  e  $\mu_s = 5 \times 10^{-8}$ . Os coeficientes de rigidez longitudinal, de amortecimento longitudinal e de atrito viscoso assumiram os valores  $\sigma_0(t) = 100 \text{ N/m}$ ,  $\sigma_1(t) = 0,1 \text{ Ns/m}$  e  $\sigma_2(t) = 0,1 \text{ Ns/m}$ , respectivamente. Os sinais de controle aplicados nas rodas 1 e 2 foram tensões de 6 V, que corresponderiam às larguras de pulsos máximas aplicadas aos motores elétricos, e para a roda 3 foi aplicada uma tensão nula.

Esta simulação será a de referência às demais, pois gera gráficos com valores correspondentes aos valores de projeto do sistema. Estes gráficos são mostrados nas figuras 4.4, 4.5, 4.6 e 4.7. Nas figuras 4.4(a) e 4.4(b) e 4.4(c) as velocidades lineares tangenciais reais e aparentes de cada roda são as mesmas, uma vez que o escorregamento imposto é nulo. Na figura 4.4(d), apesar do escorregamento ser nulo nas três rodas, as velocidades aparentes de cada roda são diferentes entre si que, devido ao acoplamento das rodas, uma influencia no comportamento das outras.

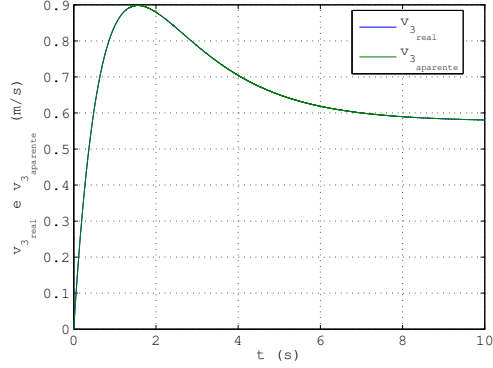
Nas figuras 4.5(a) e 4.5(b), temos as posições alcançadas pela base móvel nos eixos  $x$  e  $y$ ,  $x = 10,24 \text{ m}$  e  $y = 6,249 \text{ m}$ , respectivamente, e a posição angular  $\theta = 2,084 \text{ rad}$ . Nas figuras 4.6(a), 4.6(b), 4.6(c) e 4.6(d), temos os torques de cada motor em função do sinal de controle aplicado em cada roda; e os estados internos do atrito em cada roda, respectivamente. Como o escorregamento em cada roda foi nulo, a força de atrito estática em cada roda também foi nula, resultando então em estados internos nulos.



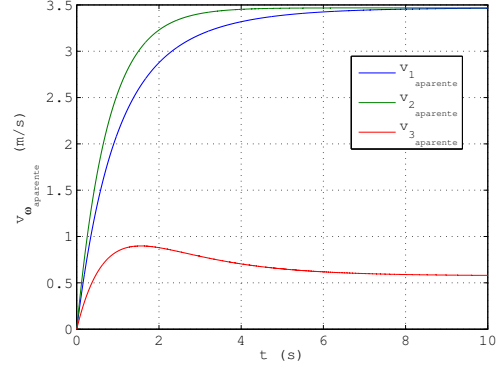
(a) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 1.



(b) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 2.

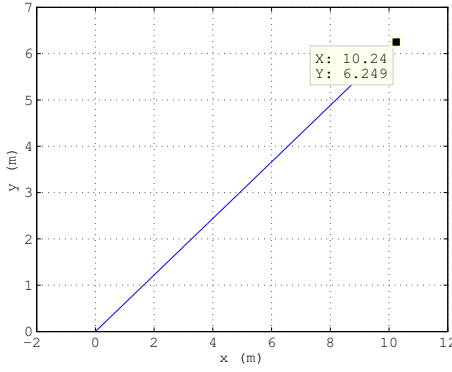


(c) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 3.

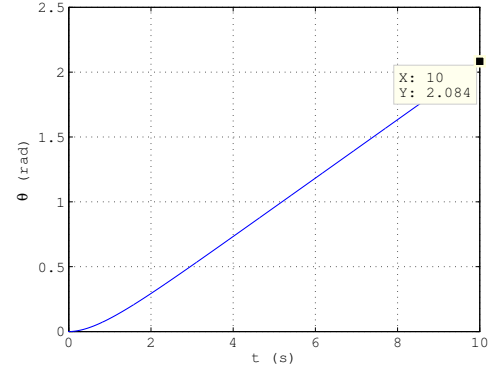


(d) Velocidades lineares aparentes de cada roda.

Figura 4.4: Gráficos da primeira simulação: valores com o escorregamento nulo e o coeficiente de atrito de Coulomb é quase nulo (utilizou-se um valor muito pequeno, mas não-nulo para evitar uma divisão por zero [vide equações (2.49) e (2.50)]).  $s_1(t) = 0$ ,  $s_2(t) = 0$  e  $s_3(t) = 0$ ;  $\mu_c = 5 \times 10^{-8}$  e  $\mu_s = 5 \times 10^{-8}$ .



(a) Posições alcançadas pela base móvel nos eixos  $x$  e  $y$ .



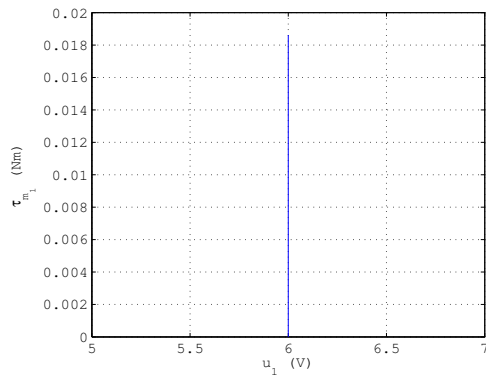
(b) Posição angular alcançada pela base móvel.

Figura 4.5: Gráficos da primeira simulação.

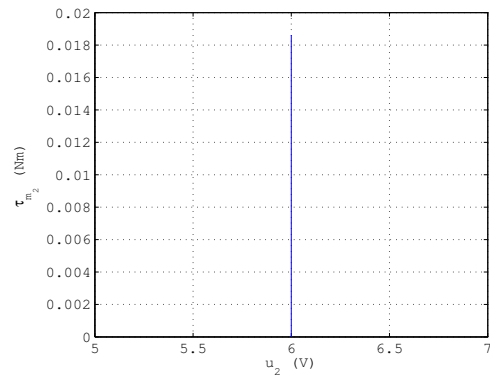
Finalmente, analisando-se a máxima velocidade linear atingida pela base móvel, na figura 4.7 em 10 s, a mesma apresentou o valor de  $\bar{v}(t) \simeq 1,442 m/s$ , o que representa 143,48% do valor obtido experimentalmente; e 72,1% do valor de projeto. Esta diferença pode ser explicada pelo fato de que, nesta primeira simulação, o valor do coeficiente de atrito de Coulomb ser igual ao estático, o que não ocorre experimentalmente, e pelo fato destes coeficientes terem assumidos valores muito pequenos como  $5 \times 10^{-8}$ , e nos experimentos, estes valores eram relativamente maiores que os da primeira simulação. Na figura 4.7 é mostrado que a velocidade linear da base móvel começa a ser constante a partir dos 6 s de simulação.

A segunda simulação objetiva avaliar o comportamento da base móvel para condições de escorregamento de valor incrementado para 0,03 nas três rodas, ou seja  $s_1(t) = 0,03$ ,  $s_2(t) = 0,03$  e  $s_3(t) = 0,03$ . Para esta simulação usou-se um incremento de  $\mu_c = 0,26$  e de  $\mu_s = 0,26$ , que é o coeficiente de atrito de Coulomb entre um ponto de contato do rolamento com a superfície do papel [10]. Os gráficos desta segunda simulação são mostrados nas figuras 4.8, 4.9, 4.10 e 4.11.

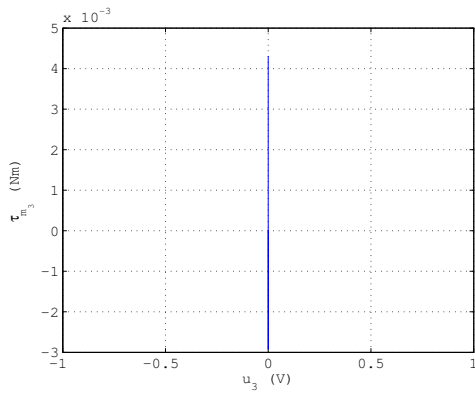
Nas figuras 4.8(a), 4.8(b) e 4.8(c), as velocidades lineares tangenciais reais e aparentes de cada roda não são as mesmas, uma vez que o escorregamento imposto não é nulo. Analisando-se a máxima velocidade linear atingida pela base móvel, em 10 s, a mesma apresentou o valor de  $\bar{v}(t) \simeq 1,062 m/s$ , o que representa 105,67% do valor obtido experimentalmente; 73,65% do valor obtido da primeira simulação e 53,1%



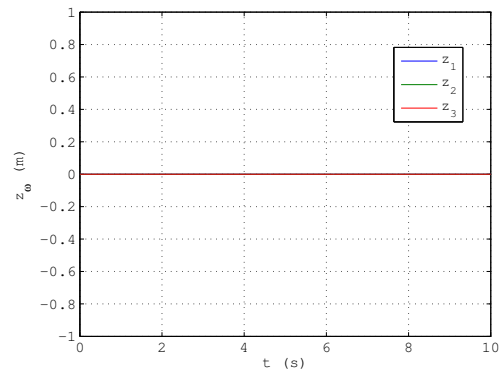
(a) Torque do motor 1 em função do sinal de controle da roda 1.



(b) Torque do motor 2 em função do sinal de controle da roda 2.



(c) Torque do motor 3 em função do sinal de controle da roda 3.



(d) Estados internos do atrito relacionados a cada roda.

Figura 4.6: Gráficos da primeira simulação.

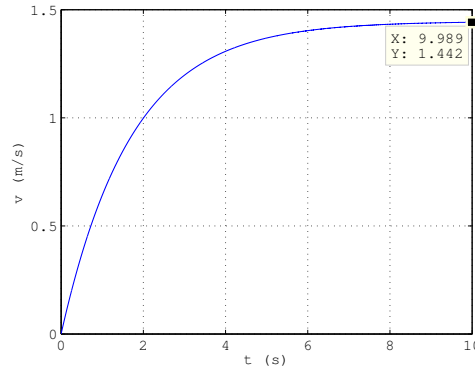


Figura 4.7: Velocidade da base móvel na primeira simulação.

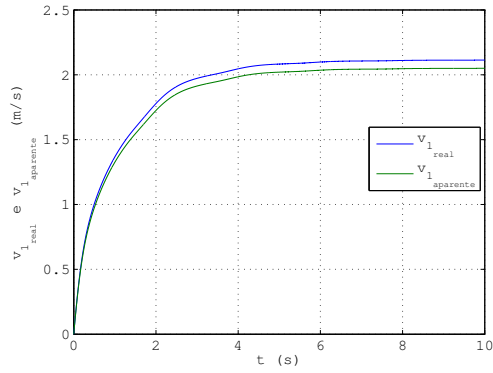
do valor de projeto. Em relação à primeira simulação, já era de se esperar que, ao ser aumentado o coeficiente de atrito estático e de Coulomb, naturalmente a velocidade linear máxima da base móvel diminuiria.

Na figura 4.11, a velocidade da base móvel começa a se tornar constante a partir dos 5 s de simulação. Já se analisarmos a figura 4.9, devido às tensões de 6 V aplicadas nas rodas 1 e 2, a força de atrito nestas rodas será constante em menos de 1 s de simulação. Tratando-se agora da roda 3, devido à tensão de 0 V aplicada nesta roda, sua força de atrito será constante a partir de somente 9 s de simulação.

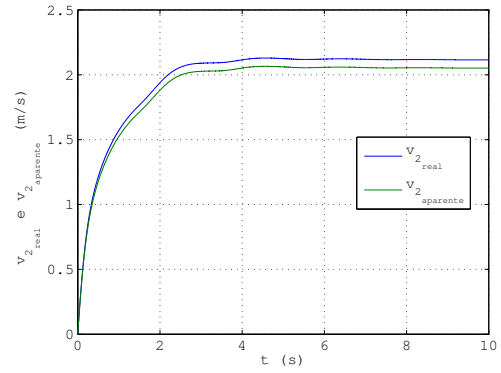
A terceira simulação objetiva avaliar o comportamento da base móvel para condições com coeficientes de atrito de Coulomb e estático decrementados para  $\mu_c = 0,25$  e  $\mu_s = 0,25$ , que é o coeficiente de atrito de Coulomb entre um ponto de contato do rolamento com a superfície do carpete [10]. Os gráficos são mostrados nas figuras 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15.

Nas figuras 4.12(a), 4.12(b) e 4.12(c), as velocidades lineares tangenciais reais e aparentes de cada roda também não são as mesmas. Analisando-se a máxima velocidade linear atingida pela base móvel, em 10 s, a mesma apresentou o valor de  $\bar{v}(t) \simeq 1,087 \text{ m/s}$ , o que representa 108,16% do valor obtido experimentalmente; 75,4% do valor obtido da primeira simulação e 54,35% do valor de projeto. Assim como na segunda simulação, diminuindo-se  $\mu_c$  e  $\mu_s$ , a velocidade linear máxima assumiria um valor maior. Na figura 4.15, a velocidade da base móvel será constante a partir dos 6 s de simulação.

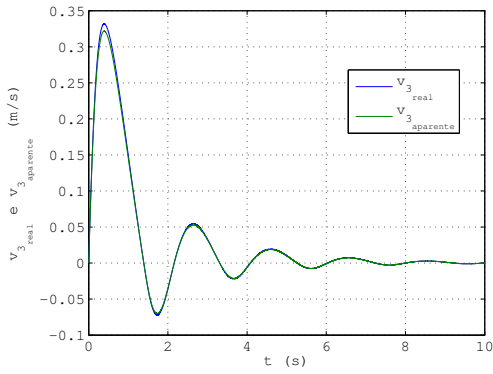
A quarta simulação objetiva avaliar o comportamento da base móvel com coefi-



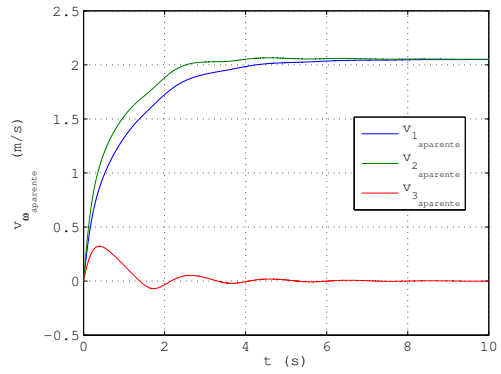
(a) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 1.



(b) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 2.



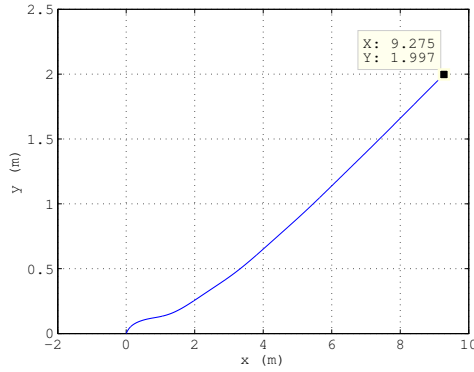
(c) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 3.



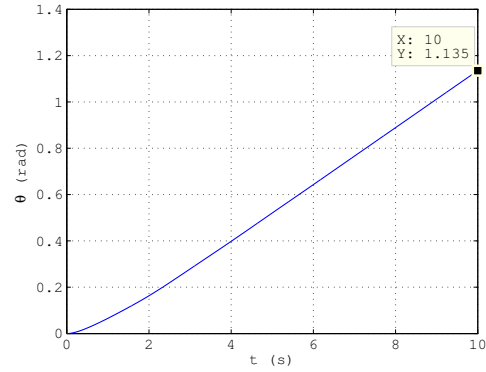
(d) Velocidades lineares aparentes de cada roda.

Figura 4.8: Gráficos da segunda simulação: o escorregamento foi incrementado para 0,03 e o coeficiente de atrito de Coulomb e estático também foram incrementados para  $\mu_c = 0,26$  e  $\mu_s = 0,26$ .





(a) Posições alcançadas pela base móvel nos eixos  $x$  e  $y$ .



(b) Posição angular alcançada pela base móvel.

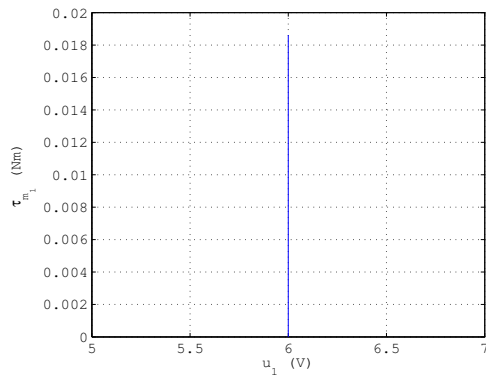
Figura 4.9: Gráficos da segunda simulação.

cientes de atrito de Coulomb e estático incrementados para  $\mu_c = 0,47$  e  $\mu_s = 0,47$ , que é o coeficiente de atrito de Coulomb entre um ponto de contato da região entre dois rolamentos com a superfície do papel [10]. Os gráficos desta segunda simulação são mostrados nas figuras 4.16, 4.17, 4.18 e 4.19.

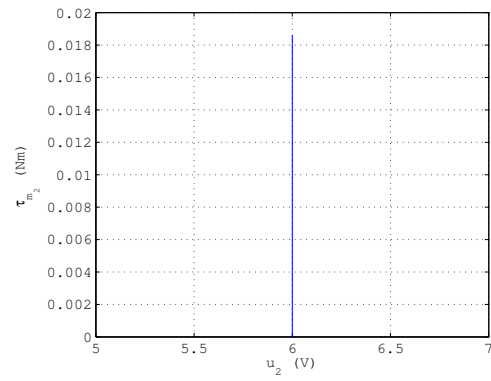
Nas figuras 4.16(a), 4.16(b) e 4.16(c), verifica-se que as velocidades lineares tangenciais reais e aparentes de cada roda não são iguais. Analisando-se a máxima velocidade linear atingida pela base móvel, em 10 s, a mesma apresentou o valor de  $\bar{v}(t) \simeq 0,594 \text{ m/s}$ , o que representa 59,1% do valor obtido experimentalmente; 41,2% do valor obtido da primeira simulação e 29,7% do valor de projeto. Isso pode ser explicado devido ao valor incrementado dos coeficientes de atrito de Coulomb e estático.

A quinta simulação objetiva avaliar o comportamento da base móvel com coeficientes de atrito de Coulomb e estático incrementados para  $\mu_c = 0,56$  e  $\mu_s = 0,56$ , que é o coeficiente de atrito de Coulomb entre um ponto de contato da região entre dois rolamentos com a superfície do carpete [10]. Os gráficos desta segunda simulação são mostrados nas figuras 4.20, 4.21, 4.22 e 4.23.

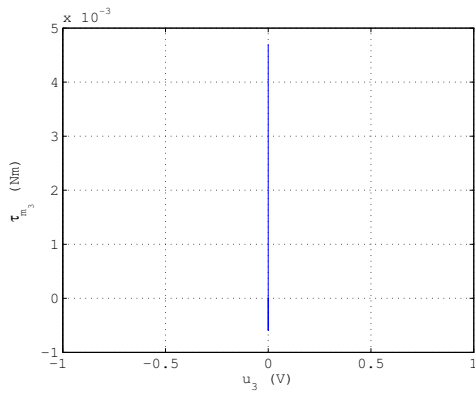
As figuras ilustradas em 4.20(a), 4.20(b) e 4.20(c), onde as velocidades lineares tangenciais reais e aparentes de cada roda não são iguais. Analisando-se a máxima velocidade linear atingida pela base móvel, em 10 s, a mesma apresentou o valor de  $\bar{v}(t) \simeq 0,5027 \text{ m/s}$ , o que representa 44,5% do valor obtido experimentalmente; 35% do valor obtido da primeira simulação e 25,1% do valor de projeto.



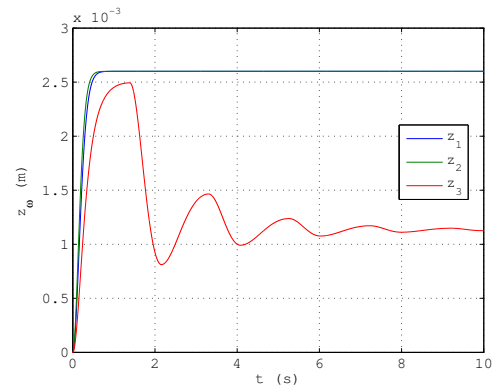
(a) Torque do motor 1 em função do sinal de controle da roda 1.



(b) Torque do motor 2 em função do sinal de controle da roda 2.



(c) Torque do motor 3 em função do sinal de controle da roda 3.



(d) Estados internos do atrito relacionados a cada roda.

Figura 4.10: Gráficos da segunda simulação.

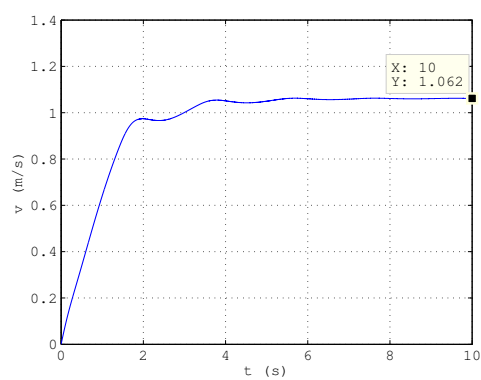
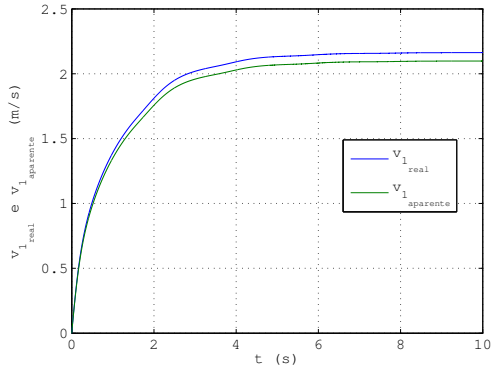
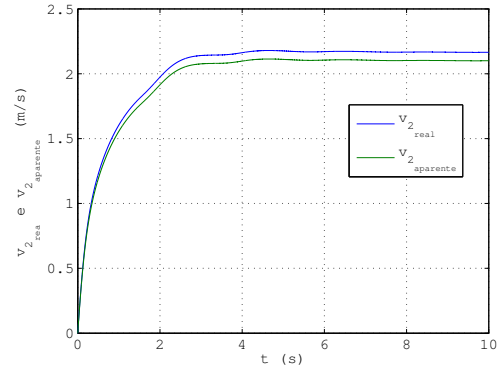


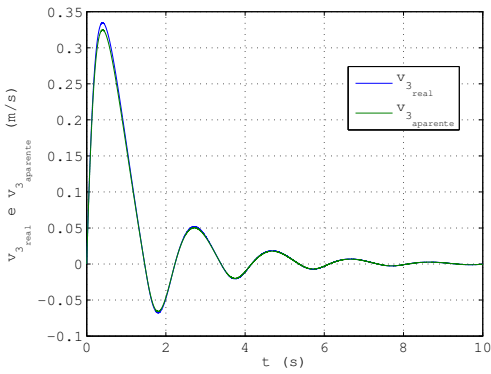
Figura 4.11: Segunda simulação: velocidade linear da base móvel.



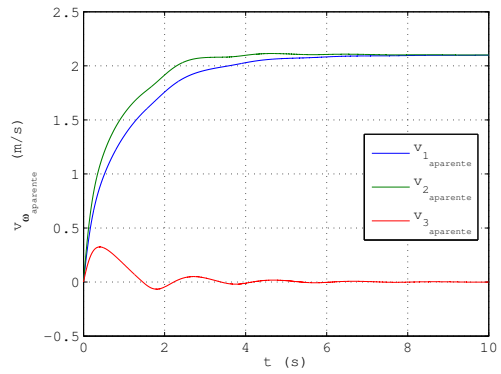
(a) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 1.



(b) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 2.

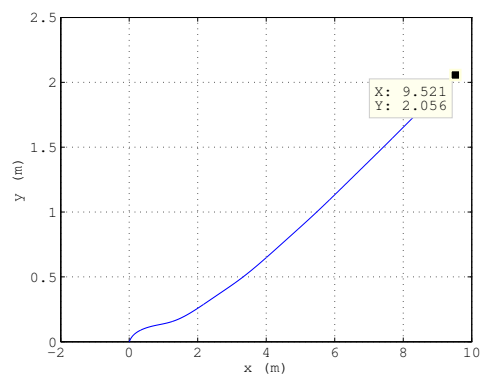


(c) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 3.

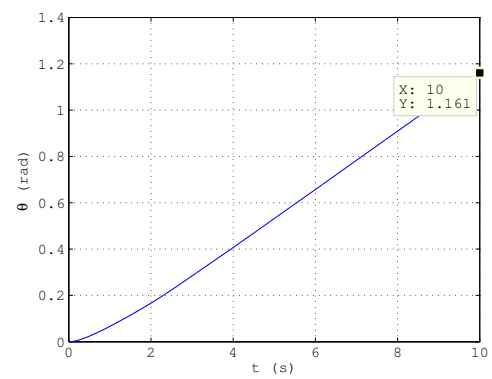


(d) Velocidades lineares aparentes de cada roda.

Figura 4.12: Gráficos da terceira simulação: o coeficiente de atrito de Coulomb e estático foram decrementados para  $\mu_c = 0,25$  e  $\mu_s = 0,25$ .

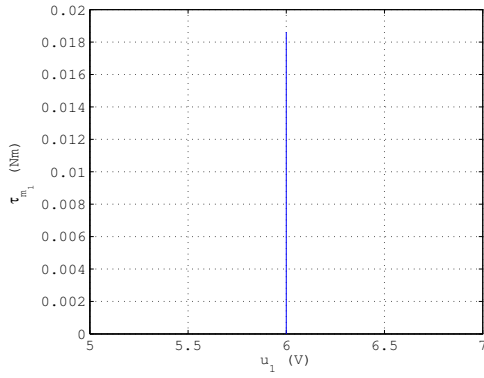


(a) Posições alcançadas pela base móvel nos eixos  $x$  e  $y$ .

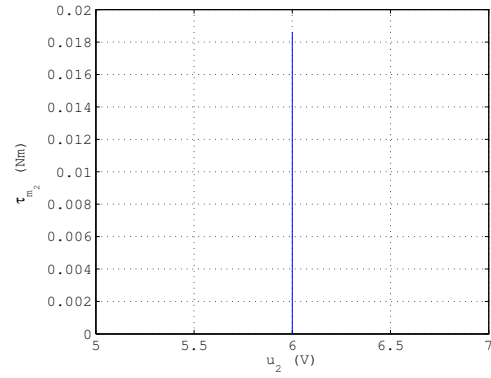


(b) Posição angular alcançada pela base móvel.

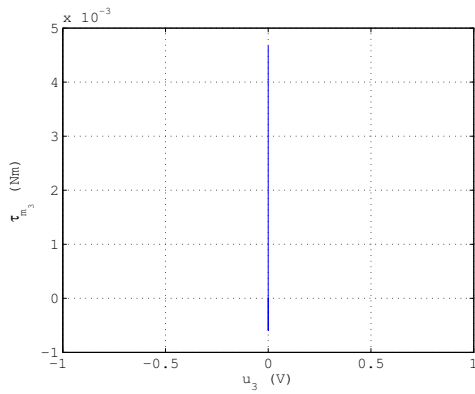
Figura 4.13: Gráficos da terceira simulação.



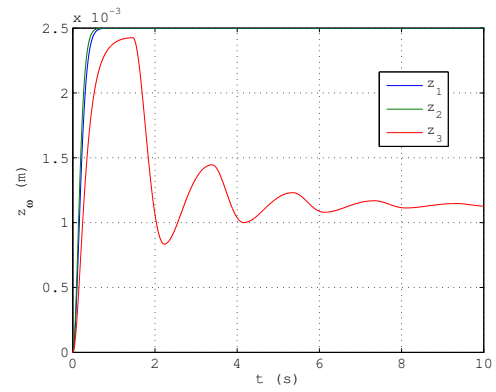
(a) Torque do motor 1 em função do sinal de controle da roda 1.



(b) Torque do motor 2 em função do sinal de controle da roda 2.



(c) Torque do motor 3 em função do sinal de controle da roda 3.



(d) Estados internos do atrito relacionados a cada roda.

Figura 4.14: Gráficos da terceira simulação.

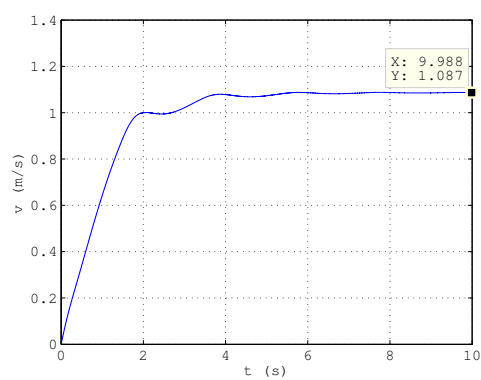
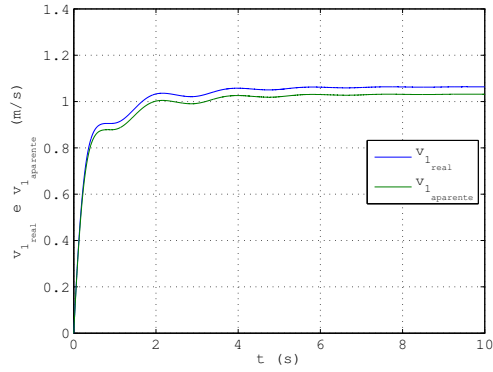
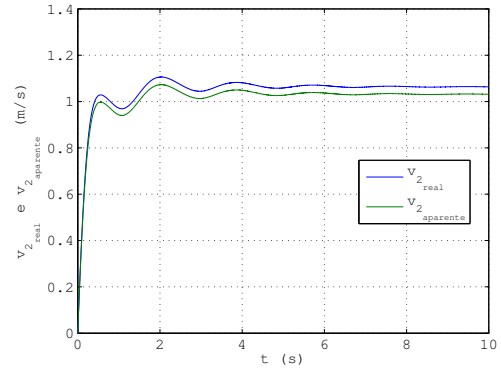


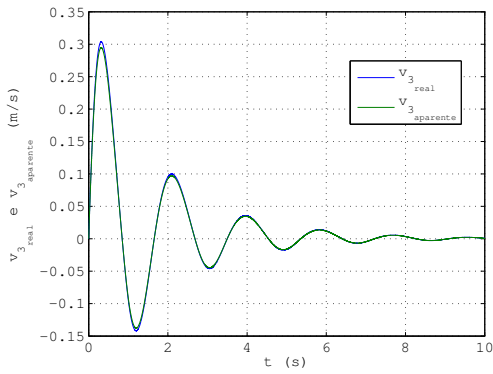
Figura 4.15: Velocidade da base móvel na terceira simulação.



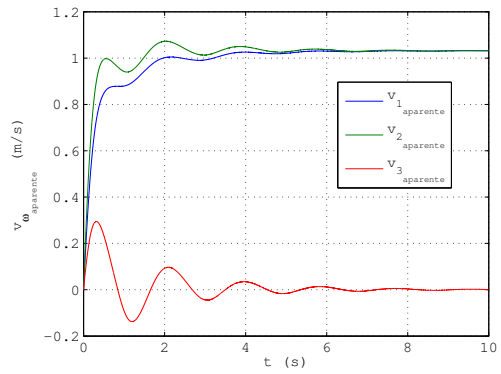
(a) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 1.



(b) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 2.



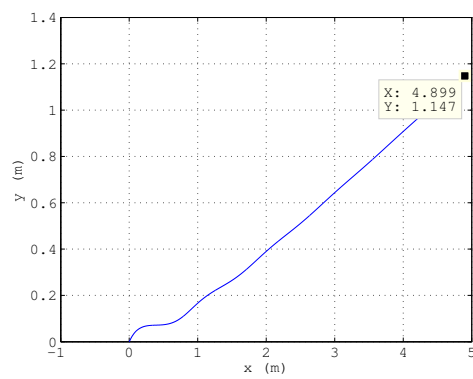
(c) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 3.



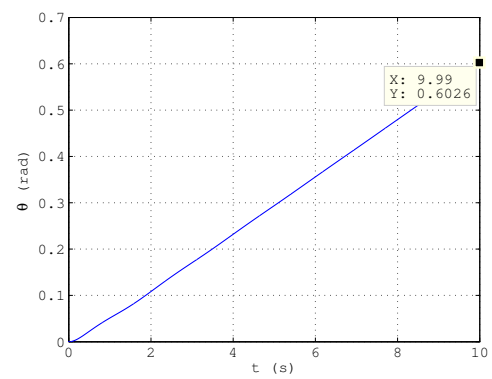
(d) Velocidades lineares aparentes de cada roda.

Figura 4.16: Quarta simulação: o coeficiente de atrito de Coulomb e o estático foram incrementados para  $\mu_c = 0,47$  e  $\mu_s = 0,47$ .



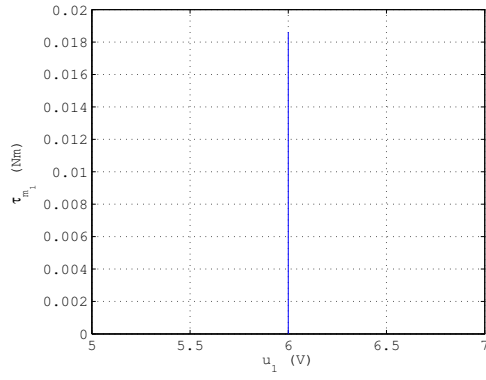


(a) Posições alcançadas pela base móvel nos eixos  $x$  e  $y$ .

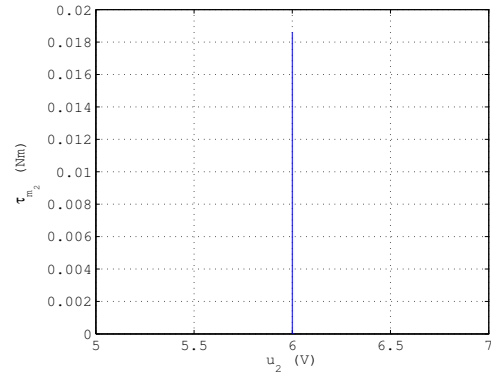


(b) Posição angular alcançada pela base móvel.

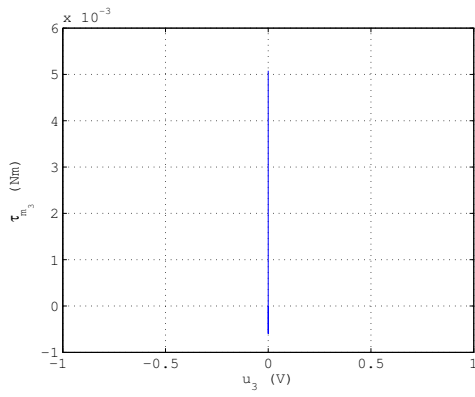
Figura 4.17: Quarta simulação.



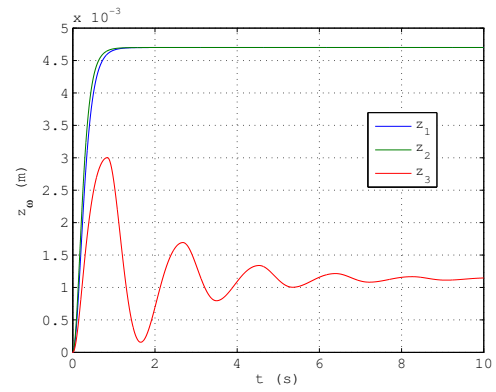
(a) Torque do motor 1 em função do sinal de controle da roda 1.



(b) Torque do motor 2 em função do sinal de controle da roda 2.



(c) Torque do motor 3 em função do sinal de controle da roda 3.



(d) Estados internos do atrito relacionados a cada roda.

Figura 4.18: Quarta simulação.

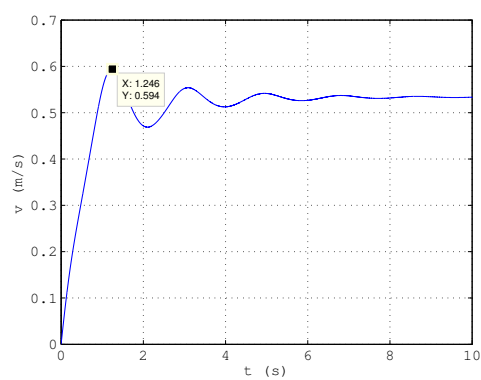
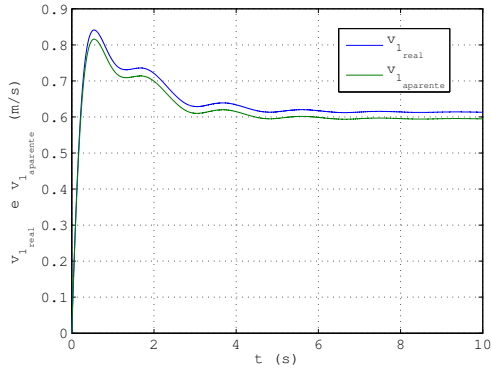
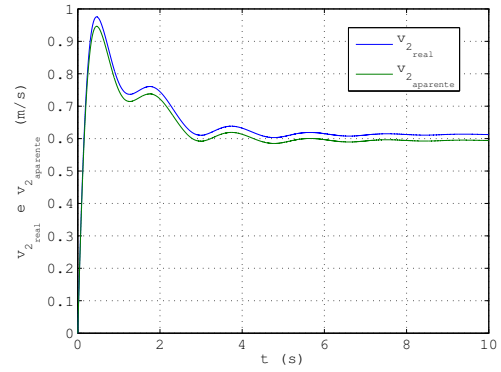


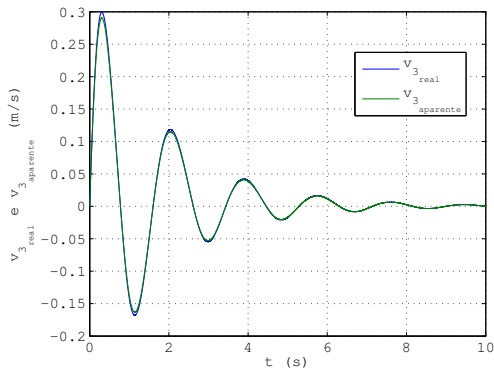
Figura 4.19: Velocidade linear da base móvel na quarta simulação.



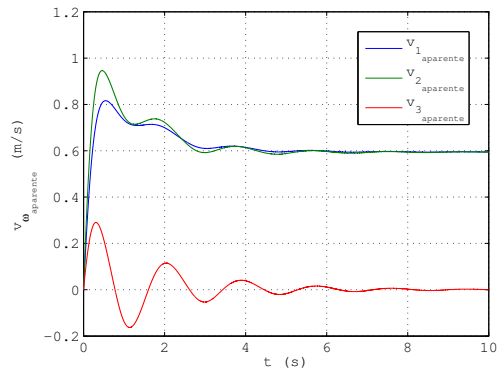
(a) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 1.



(b) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 2.

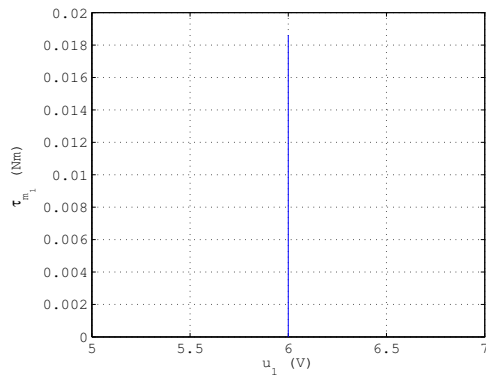


(c) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 3.

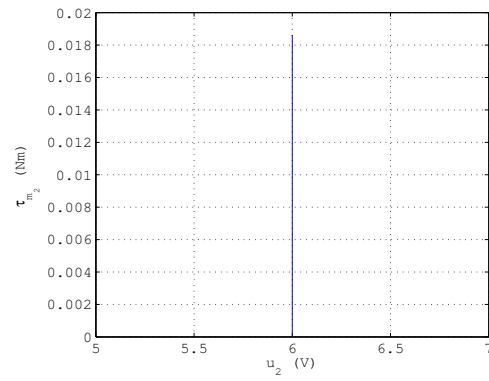


(d) Velocidades lineares aparentes de cada roda.

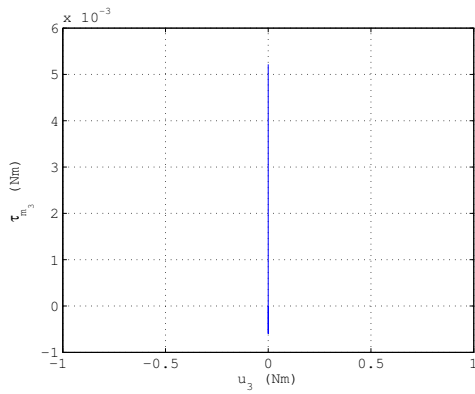
Figura 4.20: Quinta simulação: o coeficiente de atrito de Coulomb e o estático foram incrementados para  $\mu_c = 0,56$  e  $\mu_s = 0,56$ .



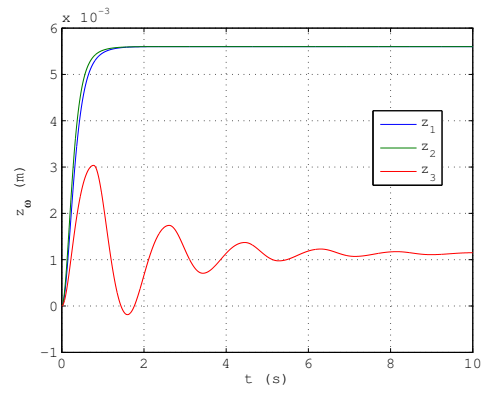
(a) Torque do motor 1 em função do sinal de controle da roda 1.



(b) Torque do motor 2 em função do sinal de controle da roda 2.

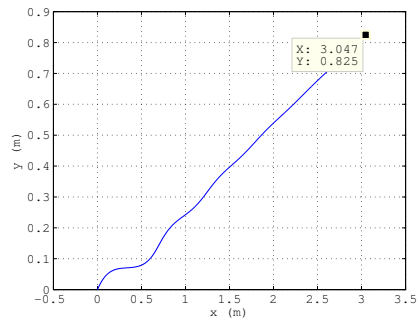


(c) Torque do motor 3 em função do sinal de controle da roda 3.

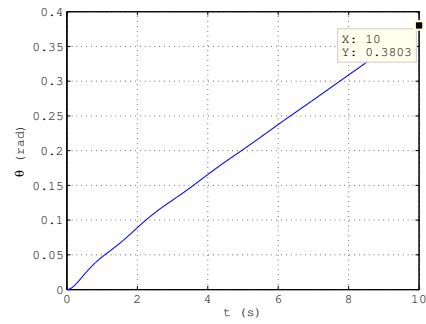


(d) Estados internos do atrito relacionados a cada roda.

Figura 4.21: Quinta simulação.



(a) Posições, nos eixos  $x$  e  $y$ , da base móvel.



(b) Posição angular  $\theta$  da base móvel.

Figura 4.22: Quinta simulação.

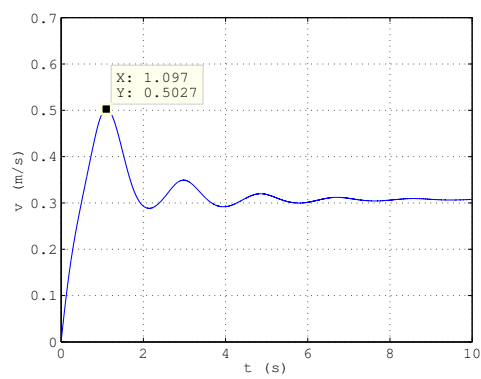
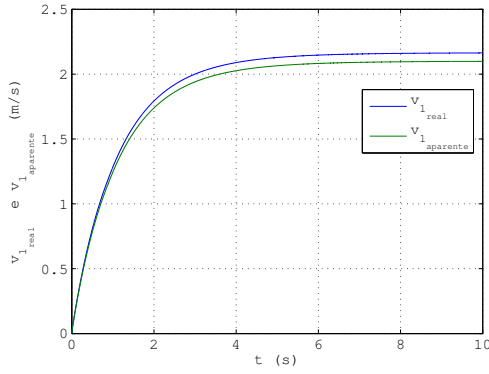
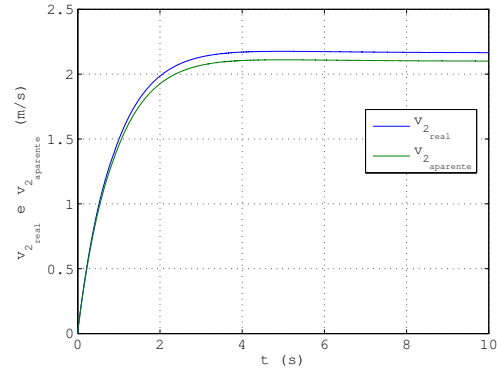


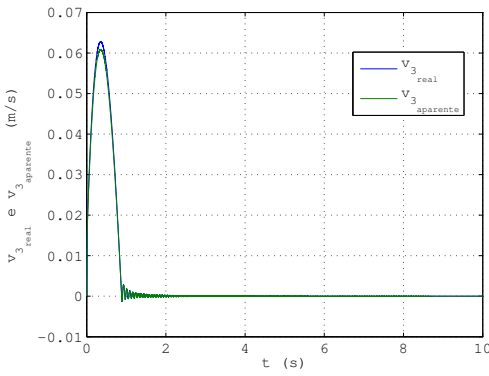
Figura 4.23: Quinta simulação: velocidade linear da base móvel.



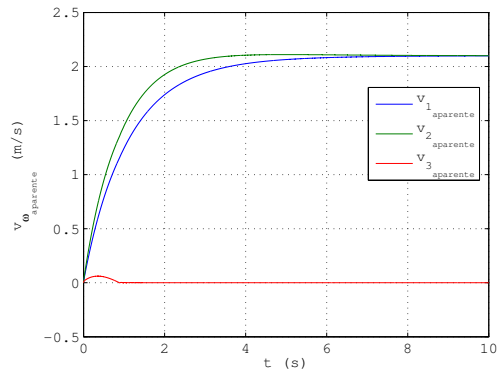
(a) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 1.



(b) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 2.



(c) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 3.

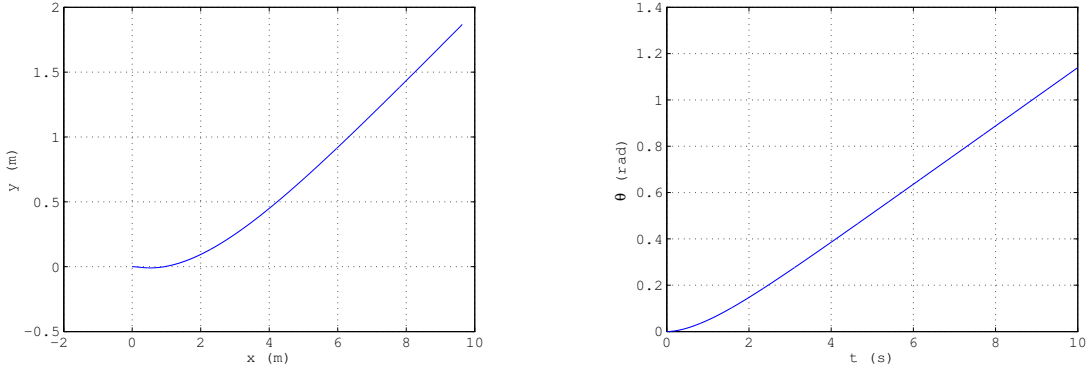


(d) Velocidades lineares aparentes de cada roda.

Figura 4.24: Gráficos da sexta simulação: o coeficiente de atrito de Coulomb e o estático foram decrementados para  $\mu_c = 0,25$  e  $\mu_s = 0,25$ . O coeficiente de rigidez longitudinal foi incrementado para  $\sigma_0 = 10^5 \text{ N/m}$ .

A sexta simulação objetiva avaliar o comportamento da base móvel para condições dos coeficientes de atrito de Coulomb e estático novamente decrementados para  $\mu_c = 0,25$  e  $\mu_s = 0,25$ ; e com o coeficiente de rigidez longitudinal incrementado para  $\sigma_0(t) = 10^5 \text{ N/m}$ . Os gráficos são mostrados nas figuras 4.24, 4.25, 4.26 e 4.27.

Os gráficos desta simulação são mostrados nas figuras 4.24(a), 4.24(b) e 4.24(c), onde as velocidades lineares tangenciais reais e aparentes de cada roda não são iguais. Analisando-se a máxima velocidade linear atingida pela base móvel, em 10 s, a mesma



(a) Posições alcançadas pela base móvel nos eixos  $x$  e  $y$ .

(b) Posição angular alcançada pela base móvel.

Figura 4.25: Gráficos da sexta simulação.

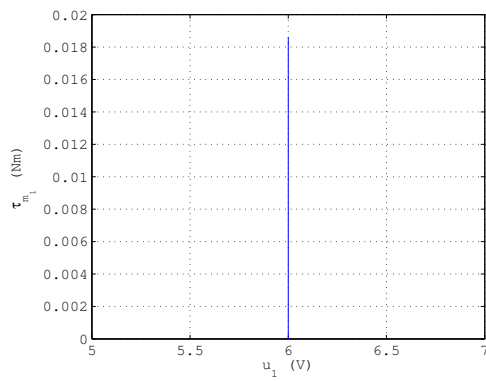
apresentou o valor de  $\bar{v}(t) \simeq 1,087 \text{ m/s}$ , o que representa 108,16% do valor obtido experimentalmente; 96,2% do valor obtido da primeira simulação e 54,35% do valor de projeto. Esta velocidade obtida nesta simulação foi semelhante à obtida na terceira simulação, onde  $\mu_c = 0,25$  e  $\mu_s = 0,25$ , mas  $\sigma_0(t) = 100 \text{ N/m}$ . Isso demonstra que a variação do coeficiente de rigidez longitudinal não altera a velocidade linear máxima da base móvel.

A sétima simulação objetiva avaliar o comportamento da base móvel para condições em que o coeficiente de amortecimento longitudinal incrementado para  $\sigma_1(t) = 100\sqrt{10} \text{ Ns/m}$ . Os gráficos desta sétima simulação são mostrados nas figuras 4.28, 4.29, 4.30 e 4.31.

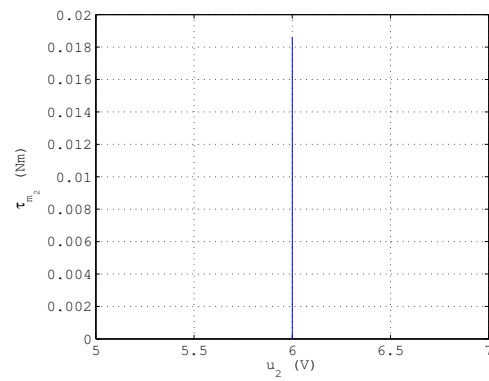
As figuras 4.28(a), 4.28(b) e 4.28(c), onde as velocidades lineares tangenciais reais e aparentes de cada roda não são iguais. Analisando-se a máxima velocidade linear atingida pela base móvel, em 10 s, a mesma apresentou novamente o valor de  $\bar{v}(t) \simeq 1,087 \text{ m/s}$ , o que representa 108,16% do valor obtido experimentalmente; 96,2% do valor obtido da primeira simulação e 54,35% do valor de projeto. Estes resultados foram os mesmos obtidos nas terceira e sexta simulações.

A oitava simulação objetiva avaliar o comportamento da base móvel para condições em que o coeficiente de atrito viscoso foi incrementado para  $\sigma_2(t) = 0,4 \text{ Ns/m}$ . Os gráficos são mostrados nas figuras 4.32, 4.33, 4.34 e 4.35.

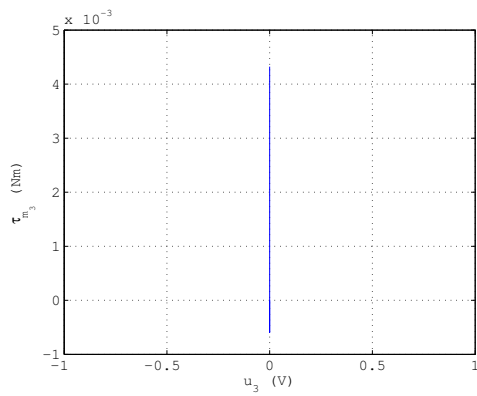




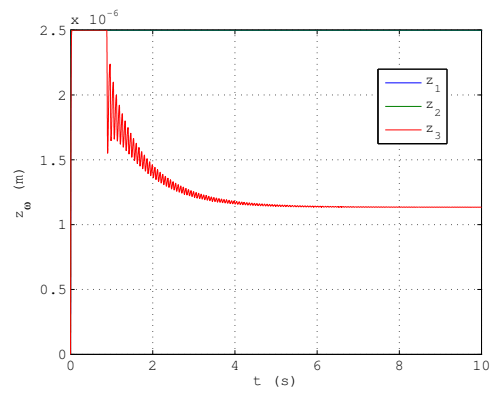
(a) Torque do motor 1 em função do sinal de controle da roda 1.



(b) Torque do motor 2 em função do sinal de controle da roda 2.



(c) Torque do motor 3 em função do sinal de controle da roda 3.



(d) Estados internos do atrito relacionados a cada roda.

Figura 4.26: Gráficos da sexta simulação.

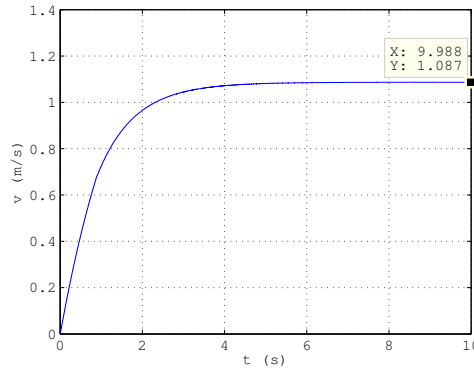


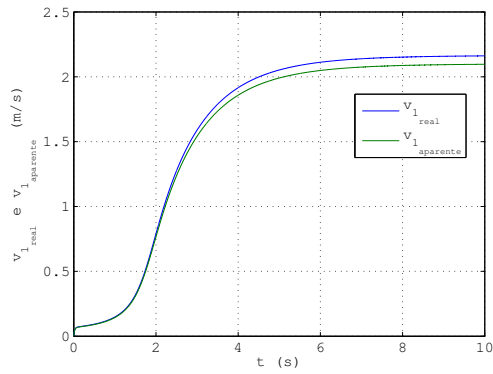
Figura 4.27: Velocidade linear da base móvel na sexta simulação.

Os gráficos desta simulação são mostrados nas figuras 4.32(a), 4.32(b) e 4.32(c), onde as velocidades lineares tangenciais reais e aparentes de cada roda são diferentes. Analisando-se a máxima velocidade linear atingida pela base móvel, em 10 s, a mesma apresentou novamente o valor de  $\bar{v}(t) \simeq 1,041 \text{ m/s}$ , o que representa 103,6% do valor obtido experimentalmente; 72,2% do valor obtido da primeira simulação e 52,05% do valor de projeto. Diferentemente da variação de  $\sigma_0$  e de  $\sigma_1$ , aumentando-se  $\sigma_2$  a velocidade irá diminuir.

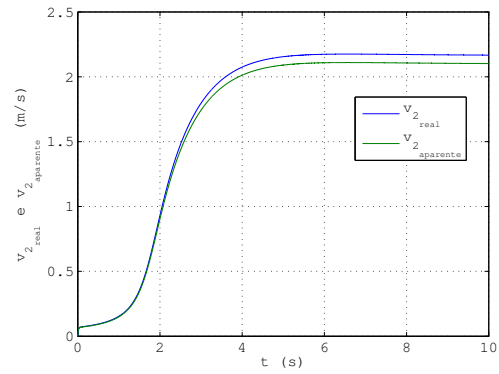
A nona e última simulação objetiva avaliar o comportamento da base móvel para coeficientes de atrito de Coulomb e estático de valores diferentes entre si como  $\mu_c = 0,25$  e  $\mu_s = 0,56$ , respectivamente. Os gráficos são mostrados nas figuras 4.36, 4.37, 4.38 e 4.39.

Nas figuras 4.36(a), 4.36(b) e 4.36(c), onde as velocidades lineares tangenciais reais e aparentes de cada roda são diferentes. Analisando-se a máxima velocidade linear atingida pela base móvel, em 10 s, a mesma apresentou novamente o valor de  $\bar{v}(t) \simeq 0,5028 \text{ m/s}$ , o que representa 50,03% do valor obtido experimentalmente; 34,9% do valor obtido da primeira simulação e 25,14% do valor de projeto. Com esta velocidade obtida, seu valor irá ser diferente do que se a simulação fosse realizada com  $\mu_c$  e  $\mu_s$  de valores semelhantes.

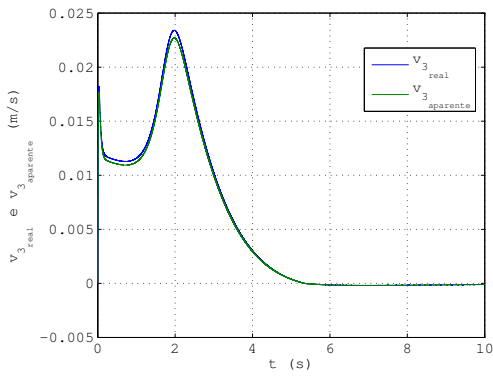
Comparando-se os gráficos das primeira, segunda, terceira, quarta, quinta, sexta, sétima, oitava e quinta simulações, através da tabela 4.3, percebe-se que a máxima velocidade linear alcançada pela base móvel, foi de  $1,087 \text{ m/s}$ , o que corresponde 54,35% do valor de projeto e 96,20% do valor experimental, na situação em que  $\mu_c = 0,25$  e com



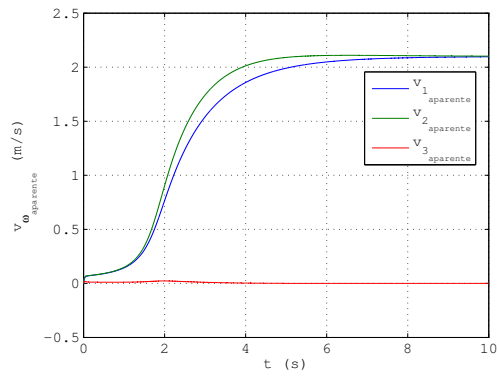
(a) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 1.



(b) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 2.

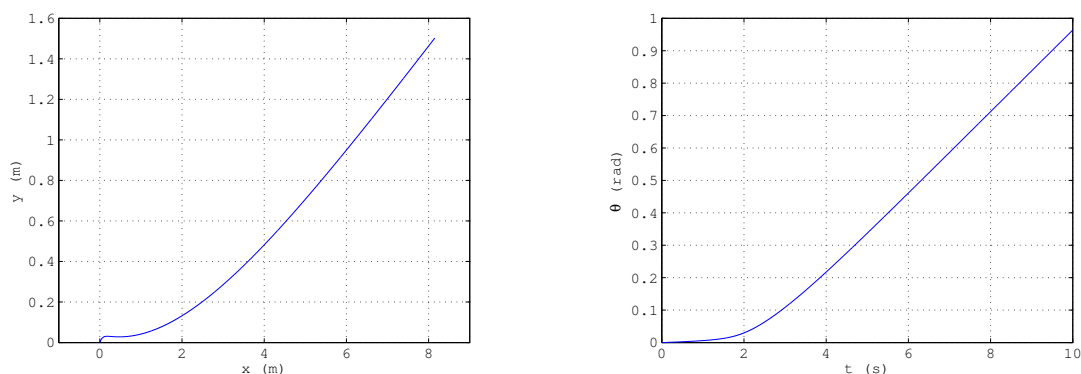


(c) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 3.



(d) Velocidades lineares aparentes de cada roda.

Figura 4.28: Gráficos da sétima simulação: o coeficiente de amortecimento longitudinal foi incrementado para  $\sigma_1 = 100\sqrt{10} \text{ N s/m}$ .



(a) Posições alcançadas pela base móvel nos eixos  $x$  e  $y$ .

(b) Posição angular alcançada pela base móvel.

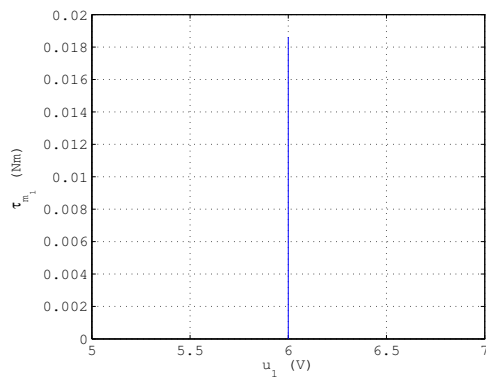
Figura 4.29: Gráficos da sétima simulação.

escorregamento em cada roda de 0,03, no período de tempo de 10 s. Este coeficiente de Coulomb de 0,25 corresponde ao material carpete do ponto de contato do rolamento da roda com a superfície. A velocidade linear de 1,079 m/s corresponde também a 75,40% do valor obtido na primeira simulação, onde  $s_{\omega}(t) = 0$ ; e a 54,35% do valor de projeto.

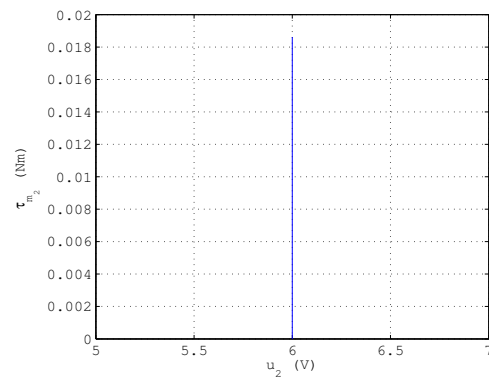
Além da tabela 4.3, a velocidade linear da base móvel em todas simulações também podem ser melhor visualizada e comparada através da figura 4.40. Até o tempo de 0,3302 s, todas as simulações, exceto a sétima, assumem o mesmo valor de velocidade. Depois disso, pode-se melhor verificar a influência da mudança dos parâmetros de simulação na velocidade da base móvel.

Uma possível solução seria um compensador efetivo e adaptativo do atrito e escorregamento do sistema. Outra opção sugerida poderia ser um redimensionamento dos motores elétricos, mudando-se o fator de redução de velocidade  $N$ .

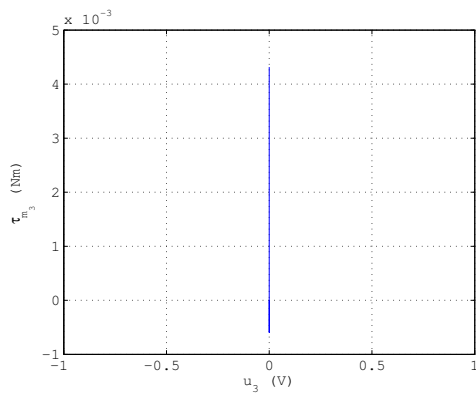
Assim, pode-se ter uma economia de tempo e de custos dos projetistas e fabricantes de robôs móveis, já que o bom funcionamento de um sistema real inclui todos os fatores citados. A validação do modelo dinâmico proposto neste Trabalho pôde ser verificada por comparações entre simulações e experimentos reais.



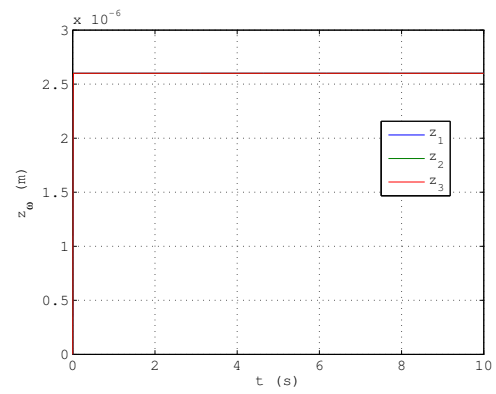
(a) Torque do motor 1 em função do sinal de controle da roda 1.



(b) Torque do motor 2 em função do sinal de controle da roda 2.



(c) Torque do motor 3 em função do sinal de controle da roda 3.



(d) Estados internos do atrito relacionados a cada roda.

Figura 4.30: Gráficos da sétima simulação.

Tabela 4.3: Comparação das velocidades lineares máximas alcançadas pela base móvel em relação aos respectivos valores experimentais e de projeto, variando-se o coeficiente de atrito estático, de Coulomb, de rigidez longitudinal, de amortecimento longitudinal e de atrito viscoso.

$\mu_c$	$\mu_s$	$\sigma_0$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\bar{v}$	% simul. 1	% média exper.	% máx. exper.	% proj.
$5 \times 10^{-8}$	$5 \times 10^{-8}$	100 N/m	0,1 Ns/m	0,1 Ns/m	1,442 m/s	100%	143,48%	114,85%	72,1%
0,25	0,25	100 N/m	0,1 Ns/m	0,1 Ns/m	1,087 m/s	75,4%	96,2%	86,58%	54,35%
0,25	—	100 N/m	0,1 Ns/m	0,1 Ns/m	1,005 m/s	69,7%	100%	80,05%	50,25%
0,25	—	100 N/m	0,1 Ns/m	0,1 Ns/m	1,2555 m/s	69,7%	124,93%	100%	50,25%
0,26	0,26	100 N/m	0,1 Ns/m	0,1 Ns/m	1,062 m/s	73,65%	105,67%	84,59%	53,10%
0,25	0,25	$10^5$ N/m	0,1 Ns/m	0,1 Ns/m	1,087 m/s	96,2%	108,16%	86,58%	54,35%
0,25	0,25	100 N/m	$100\sqrt{10}$ Ns/m	0,1 Ns/m	1,087 m/s	96,2%	108,16%	86,58%	54,35%
0,25	0,25	100 N/m	0,1 Ns/m	0,4 Ns/m	1,041 m/s	72,2%	103,6%	82,92%	52,05%
0,25	0,56	100 N/m	0,1 Ns/m	0,1 Ns/m	0,5028 m/s	34,9%	50,03%	40,05%	25,14%
0,47	0,47	100 N/m	0,1 Ns/m	0,1 Ns/m	0,594 m/s	41,2%	59,1%	47,31%	29,7%
0,56	0,56	100 N/m	0,1 Ns/m	0,1 Ns/m	0,5027 m/s	35%	44,5%	40,04%	25,1%

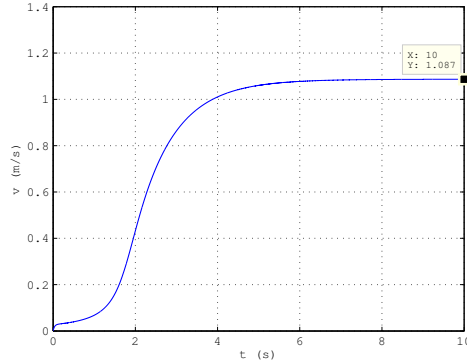


Figura 4.31: Velocidade linear da base móvel na sétima simulação.

### 4.3 Sumário

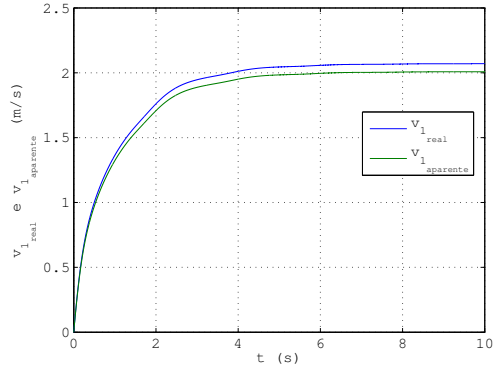
Neste Capítulo, aplicou-se o modelo desenvolvido no capítulo precedente da estrutura de uma base móvel para robô holonômico com três rodas suecas, acionadas por motores elétricos de corrente contínua, considerando as não-linearidades nas entradas do sistema, aplicadas ao sistema robótico móvel AxeBot.

Foi-se apresentada uma descrição do robô AxeBot, e a aplicação do modelo dinâmico neste sistema robótico real, o que representa um aspecto importante, pois foram realizados experimentos e simulações do modelo dinâmico da estrutura desta base móvel, implementado em ambiente Matlab *Simulink*<sup>®</sup>. O resultado das simulações e dos experimentos são as diferentes velocidades lineares alcançadas pela estrutura da base móvel durante um período de tempo de 10 s e de 4 s, respectivamente.

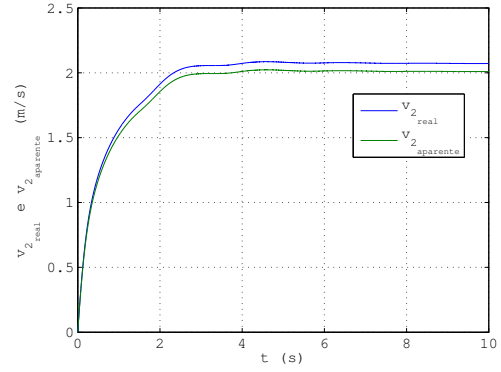
Durante os experimentos, as baterias estiveram totalmente carregadas, a velocidade linear média atingida pela base móvel foi de  $1,005 \text{ m/s}$  e os experimentos duraram um tempo médio de  $3,97 \text{ s}$ .

Esta velocidade linear de  $1,005 \text{ m/s}$  representa  $50,25\%$  da velocidade de projeto, e  $69,7\%$  da velocidade linear máxima obtida na primeira simulação.

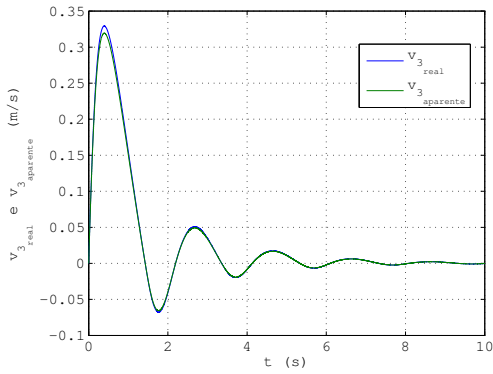
Foram feitas simulações supondo as baterias totalmente carregadas durante todo o período de simulação. O fator importante destacado foi a análise das variações dos seguintes coeficientes: de atrito de Coulomb,  $\mu_c$ , e do atrito estático,  $\mu_s$ ; de rigidez longitudinal,  $\sigma_0(t)$ ; de amortecimento longitudinal,  $\sigma_1(t)$ ; e do coeficiente de atrito viscoso,  $\sigma_2(t)$ , também na presença do escorregamento ( $s_\omega(t)$ ) da superfície de contato



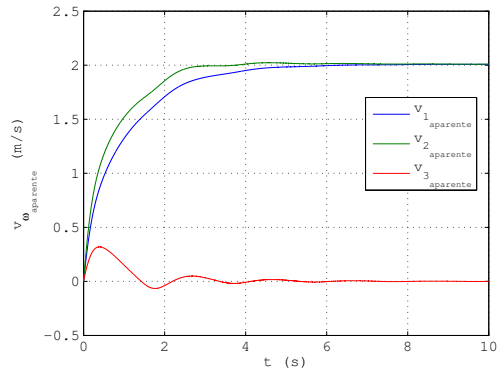
(a) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 1.



(b) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 2.



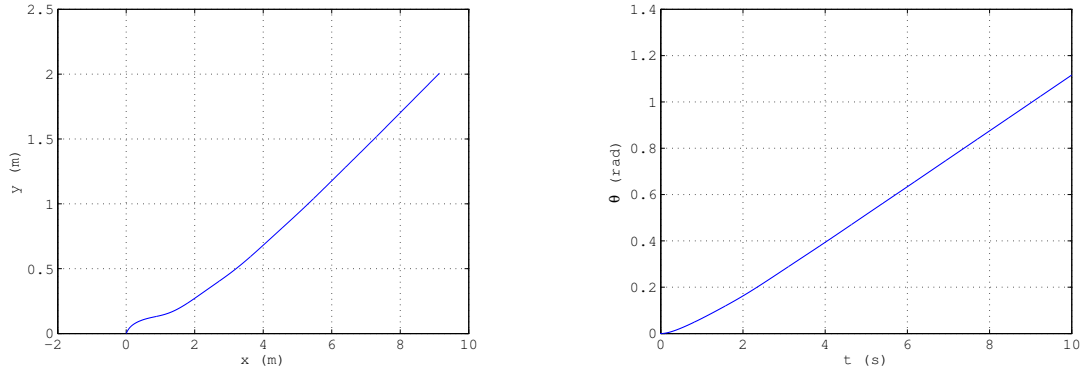
(c) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 3.



(d) Velocidades lineares aparentes de cada roda.

Figura 4.32: Gráficos da oitava simulação: o coeficiente de atrito viscoso foi incrementado para  $\sigma_2 = 0,4 \text{ N s/m}$ .





(a) Posições alcançadas pela base móvel nos eixos  $x$  e  $y$ .

(b) Posição angular alcançada pela base móvel.

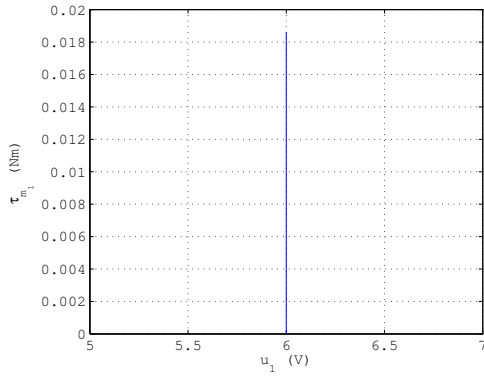
Figura 4.33: Gráficos da oitava simulação.

em cada roda.

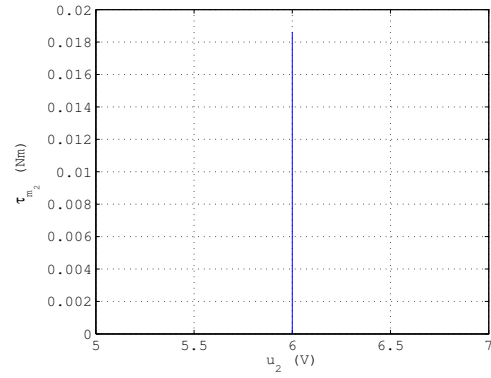
A primeira simulação teve como objetivo a avaliação do comportamento da base móvel para condições de escorregamento nulo nas três rodas. Para esta simulação usou-se  $\mu_c = 5 \times 10^{-8}$  e  $\mu_s = 5 \times 10^{-8}$ . Os coeficientes de rigidez longitudinal, de amortecimento longitudinal e de atrito viscoso assumiram os valores  $\sigma_0(t) = 100 \text{ N/m}$ ,  $\sigma_1(t) = 0,1 \text{ Ns/m}$  e  $\sigma_2(t) = 0,1 \text{ Ns/m}$ , respectivamente. Os sinais de controle aplicados nas rodas 1 e 2 foram tensões de  $6V$ , que corresponderiam às larguras de pulsos máximas aplicadas aos motores elétricos, e para a roda 3 foi aplicada uma tensão nula.

Analisando-se a máxima velocidade linear atingida pela base móvel, a mesma apresentou o valor de  $\bar{v}(t) \simeq 1,442 \text{ m/s}$ , o que representa 143,48% do valor obtido experimentalmente; e 72,1% do valor de projeto. Esta diferença pode ser explicada pelo fato de que, nesta primeira simulação, o valor do coeficiente de atrito de Coulomb ser igual ao estático, o que não ocorre experimentalmente, e pelo fato destes coeficientes terem assumidos valores muito pequenos como  $5 \times 10^{-8}$ , e nos experimentos, estes valores eram relativamente maiores que os da primeira simulação.

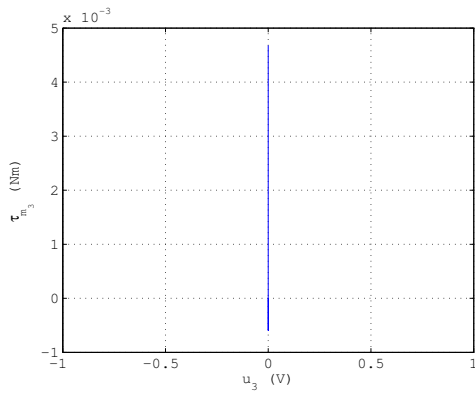
A segunda simulação objetivou avaliar o comportamento da base móvel para condições de escorregamento de valor incrementado para 0,03 nas três rodas, ou seja  $s_1(t) = 0,03$ ,  $s_2(t) = 0,03$  e  $s_3(t) = 0,03$ . Para esta simulação usou-se um incremento de  $\mu_c = 0,26$  e de  $\mu_s = 0,26$ .



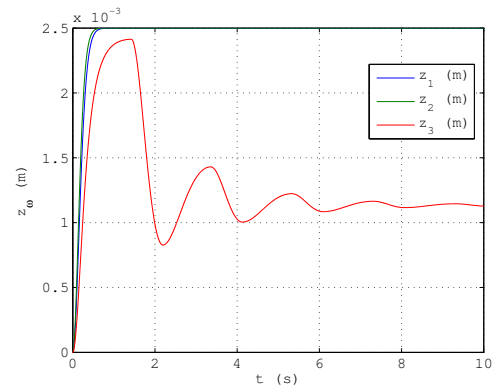
(a) Torque do motor 1 em função do sinal de controle da roda 1.



(b) Torque do motor 2 em função do sinal de controle da roda 2.



(c) Torque do motor 3 em função do sinal de controle da roda 3.



(d) Estados internos do atrito relacionados a cada roda.

Figura 4.34: Gráficos da oitava simulação.

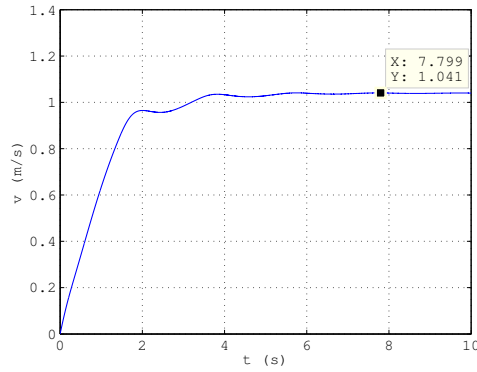


Figura 4.35: Velocidade linear da base móvel na oitava simulação.

Analisando-se a máxima velocidade linear atingida pela base móvel, em 10 s, a mesma apresentou o valor de  $\bar{v}(t) \simeq 1,062 \text{ m/s}$ , o que representa 105,67% do valor obtido experimentalmente; 73,65% do valor obtido da primeira simulação e 53,1% do valor de projeto. Em relação à primeira simulação, já era de se esperar que, ao ser aumentado o coeficiente de atrito estático e de Coulomb, naturalmente a velocidade linear máxima da base móvel diminuiria.

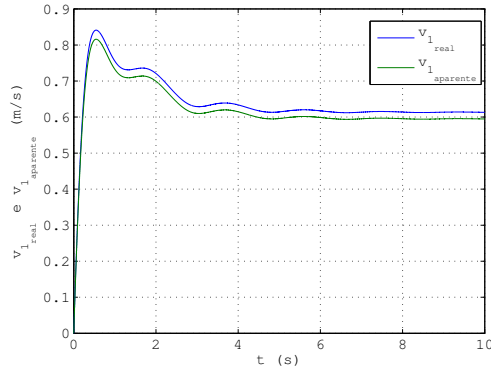
A terceira simulação objetivou avaliar o comportamento da base móvel para condições com coeficientes de atrito de Coulomb e estático decrementados para  $\mu_c = 0,25$  e  $\mu_s = 0,25$ .

Analisando-se a máxima velocidade linear atingida pela base móvel, em 10 s, a mesma apresentou o valor de  $\bar{v}(t) \simeq 1,087 \text{ m/s}$ , o que representa 108,16% do valor obtido experimentalmente; 75,4% do valor obtido da primeira simulação e 54,35% do valor de projeto. Assim como na segunda simulação, diminuindo-se  $\mu_c$  e  $\mu_s$ , a velocidade linear máxima assumiria um valor maior.

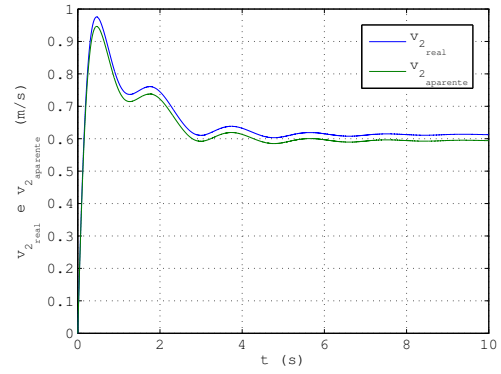
A quarta simulação objetivou avaliar o comportamento da base móvel com coeficientes de atrito de Coulomb e estático incrementados para  $\mu_c = 0,47$  e  $\mu_s = 0,47$ .

Analisando-se a máxima velocidade linear atingida pela base móvel, em 10 s, a mesma apresentou o valor de  $\bar{v}(t) \simeq 0,594 \text{ m/s}$ , o que representa 59,1% do valor obtido experimentalmente; 41,2% do valor obtido da primeira simulação e 29,7% do valor de projeto. Isso pode ser explicado devido ao valor incrementado dos coeficientes de atrito de Coulomb e estático.

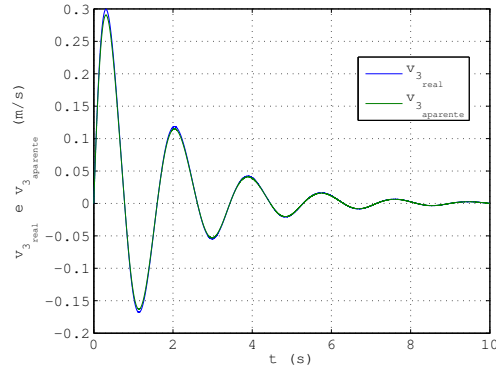
A quinta simulação teve como objetivo a avaliação do comportamento da base



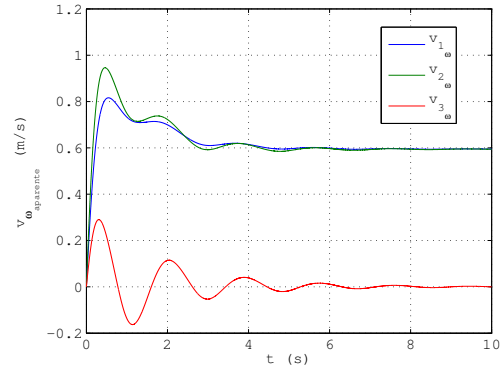
(a) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 1.



(b) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 2.



(c) Velocidades lineares tangenciais real e aparente da roda 3.



(d) Velocidades lineares aparentes de cada roda.

Figura 4.36: Gráficos da nona simulação: os coeficientes de atrito de Coulomb e o estático assumiram valores diferentes entre si  $\mu_c = 0,25$  e  $\mu_s = 0,56$ . Já os coeficientes de rigidez longitudinal, de amortecimento longitudinal e de atrito viscoso foram decrementados para  $\sigma_0 = 100 \text{ N/m}$ ,  $\sigma_1 = 0,1 \text{ Ns/m}$  e  $\sigma_2 = 0,1 \text{ Ns/m}$ .

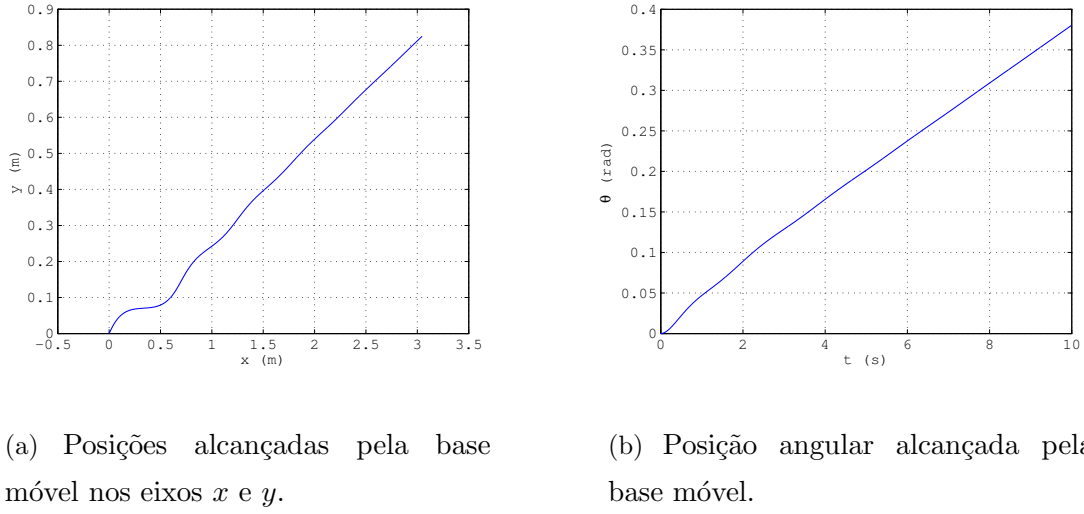


Figura 4.37: Gráficos da nona simulação.

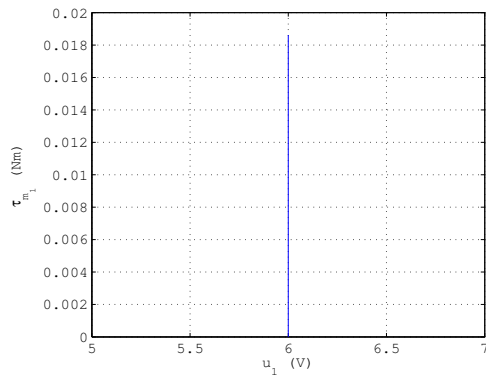
móvel com coeficientes de atrito de Coulomb e estático incrementados para  $\mu_c = 0,56$  e  $\mu_s = 0,56$ .

Analisando-se a máxima velocidade linear atingida pela base móvel, em 10 s, a mesma apresentou o valor de  $\bar{v}(t) \simeq 0,5027 \text{ m/s}$ , o que representa 44,5% do valor obtido experimentalmente; 35% do valor obtido da primeira simulação e 25,1% do valor de projeto.

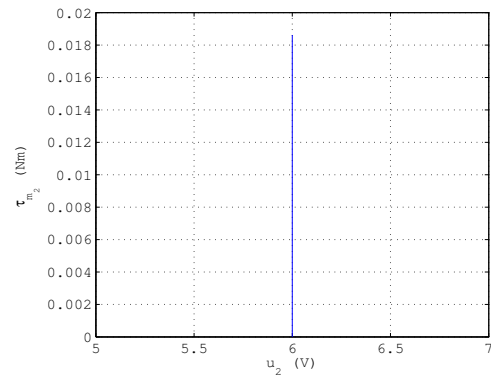
A sexta simulação objetivou avaliar o comportamento da base móvel para condições dos coeficientes de atrito de Coulomb e estático novamente decrementados para  $\mu_c = 0,25$  e  $\mu_s = 0,25$ ; e com o coeficiente de rigidez longitudinal incrementado para  $\sigma_0(t) = 10^5 \text{ N/m}$ .

Analisando-se a máxima velocidade linear atingida pela base móvel, em 10 s, a mesma apresentou o valor de  $\bar{v}(t) \simeq 1,087 \text{ m/s}$ , o que representa 108,16% do valor obtido experimentalmente; 96,2% do valor obtido da primeira simulação e 54,35% do valor de projeto. Esta velocidade obtida nesta simulação foi semelhante à obtida na terceira simulação, onde  $\mu_c = 0,25$  e  $\mu_s = 0,25$ , porém  $\sigma_0(t) = 100 \text{ N/m}$ . Isso demonstra que a variação do coeficiente de rigidez longitudinal não altera a velocidade linear máxima da base móvel.

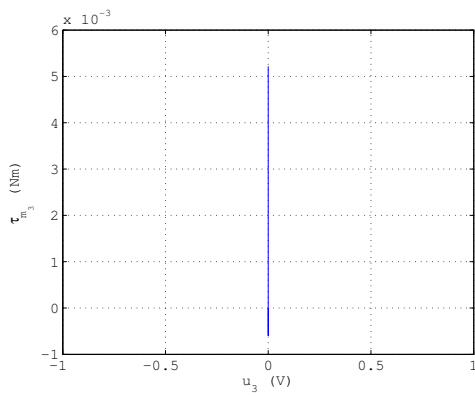
A sétima simulação objetivou avaliar o comportamento da base móvel para condições em que  $\sigma_1(t)$  foi incrementado para  $\sigma_1(t) = 100\sqrt{10} \text{ Ns/m}$ .



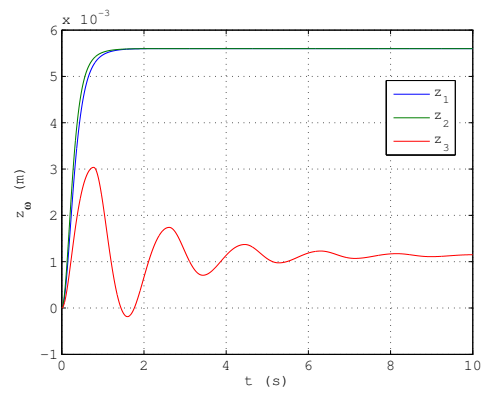
(a) Torque do motor 1 em função do sinal de controle da roda 1.



(b) Torque do motor 2 em função do sinal de controle da roda 2.



(c) Torque do motor 3 em função do sinal de controle da roda 3.



(d) Estados internos do atrito relacionados a cada roda.

Figura 4.38: Nona simulação.

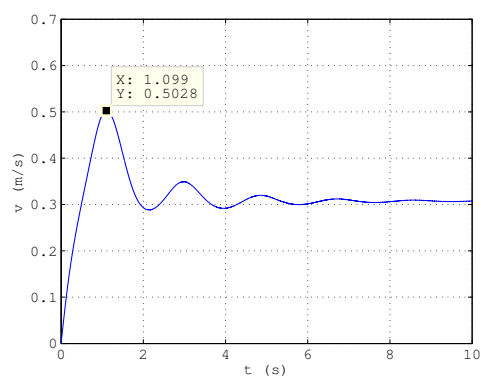


Figura 4.39: Nona simulação: velocidade linear da base móvel.

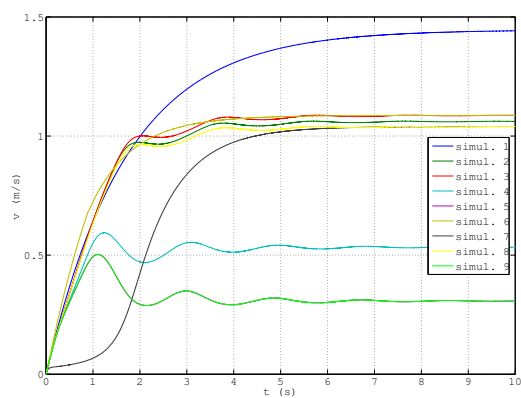


Figura 4.40: Comparação das simulações em relação à velocidade da base móvel.

Analisando-se a máxima velocidade linear atingida pela base móvel, em 10 s, a mesma apresentou novamente o valor de  $\bar{v}(t) \simeq 1,087 \text{ m/s}$ , o que representa 108,16% do valor obtido experimentalmente; 96,2% do valor obtido da primeira simulação e 54,35% do valor de projeto. Estes resultados foram os mesmos obtidos nas terceira e sexta simulações.

A oitava simulação objetivou avaliar o comportamento da base móvel para condições em que o coeficiente de atrito viscoso foi incrementado para  $\sigma_2(t) = 0,4 \text{ N s/m}$ .

Analisando-se a máxima velocidade linear atingida pela base móvel, em 10 s, a mesma apresentou novamente o valor de  $\bar{v}(t) \simeq 1,041 \text{ m/s}$ , o que representa 103,6% do valor obtido experimentalmente; 72,2% do valor obtido da primeira simulação e 52,05% do valor de projeto. Diferentemente da variação de  $\sigma_0$  e de  $\sigma_1$ , aumentando-se  $\sigma_2$  a velocidade irá diminuir.

A nona e última simulação objetivou avaliar o comportamento da base móvel para coeficientes de atrito de Coulomb e estático de valores diferentes entre si como  $\mu_c = 0,25$  e  $\mu_s = 0,56$ , respectivamente.

Analisando-se a máxima velocidade linear atingida pela base móvel, em 10 s, a mesma apresentou novamente o valor de  $\bar{v}(t) \simeq 0,5028 \text{ m/s}$ , o que representa 50,03% do valor obtido experimentalmente; 34,9% do valor obtido da primeira simulação e 25,14% do valor de projeto. Com esta velocidade obtida, seu valor irá ser diferente do que se a simulação fosse realizada com  $\mu_c$  e  $\mu_s$  de valores semelhantes.

Pôde-se, dessa forma, verificar que uma economia de tempo e de custos dos projetistas e fabricantes de robôs móveis são garantidas, já que o bom funcionamento de um sistema real inclui todos os fatores citados. A validação do Modelo Dinâmico proposto neste Trabalho pôde ser verificada por comparações entre simulações e experimentos reais.



## Capítulo 5

# Considerações Finais

Neste Trabalho, um modelo para a estrutura da base móvel holonômica de robôs manipuladores com três rodas suecas foi desenvolvido para uso em simulação, considerando as não-linearidades de entrada dos tipos saturação e zona morta. A saturação foi relacionada com aspectos construtivos do acionamento elétrico. Para modelar a zona morta e outros efeitos foi usado o Modelo de atrito LuGre Compacto, já que a zona morta foi relacionada com fenômenos decorrentes do atrito entre a base móvel e o chão, e este inclui o escorregamento do sistema, permitindo uma abordagem e simulação da base móvel a mais próxima da real possível.

O modelo desenvolvido foi implementado em ambiente Matlab *Simulink*<sup>®</sup>, com aplicação deste num sistema real, o AxeBot. Por meio deste modelo, pôde-se verificar o comportamento do sistema, analisando-se a saída, por exemplo, a velocidade linear da base móvel.

No caso da aplicação citada, a saída foi analisada em função dos diferentes coeficientes de atrito estático e de Coulomb (o escorregamento da superfície de contato do chão com a roda não foi nulo, porém assumiu valor sempre constante), e diferentes coeficientes de rigidez longitudinal, de amortecimento longitudinal e de atrito viscoso, e as mesmas diferenciaram-se dos valores nominais, pois estes valores são relativos a um sistema sem atrito e/ou escorregamento. Isso pode ser contornado, por exemplo, através de um compensador adaptativo de atrito. Outra opção possível seria um redimensionamento dos motores elétricos, com a modificação do fator de redução de velocidade.

Pode-se ter um ganho de tempo e de custos dos projetistas e fabricantes de bases móveis, já que o funcionamento de um sistema real inclui todos os fatores citados. A vali-

dação do Modelo Dinâmico proposto neste Trabalho pôde ser verificada por comparações entre simulações, experimentos reais e valor de projeto.

Analisando-se o atrito e escorregamento de um sistema, o mesmo comporta-se o mais próximo do real possível, e isso evita um desperdício de tempo na construção de uma base móvel holonômica para verificar qual será seu comportamento real. Além disso, a economia de custos é, conseqüentemente, auto-explicável.

## 5.1 Sugestões de Futuros Trabalhos

Como sugestões de trabalhos futuros, podemos citar:

- (i) Projetar estruturas de controle que suportem variações paramétricas, em particular para o sistema AxeBot, considerando as não-linearidades da entrada.
- (ii) Analisar a dinâmica da base móvel em movimentos variados: retilíneos, circulares, elípticos;
- (iii) Redimensionar os motores elétricos para o sistema AxeBot.
- (iv) Projetar um controlador adaptativo para a estrutura da base de robôs móveis com zonas mortas desconhecidas, usando técnicas de obtenção da força de atrito que usem redes neurais.
- (v) Projetar um compensador de saturação e zona morta para a estrutura de robôs móveis no espaço de juntas usando redes neurais e lógica *Fuzzy* [13].

# Referências Bibliográficas

- [1] T. Perez, G. C. Goodwin, and M. M. Seron, “Performance degradation in feedback control due to constraints,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 48, no. 8, pp. 1381–1385, 2003.
- [2] A. C. E. S. Franco and A. L. Costa, “Modelagem e simulação do robô omnidirecional *AxeBot*,” in *XVI Congresso Brasileiro de Automática*, (Salvador-BA, Brasil), pp. 2844–2849, 2006.
- [3] R. L. Williams, B. E. Carter, P. Gallina, and G. Rosati, “Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots,” *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 18, no. 3, pp. 285–293, 2002.
- [4] H. G. Sage, M. F. D. Mathelin, and E. Ostertag, “Robust control of robot manipulators: A survey,” *International Journal of Control*, vol. 72, no. 16, pp. 1498–1522, 1999.
- [5] M. W. Spong and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*. John Wiley chassiss Sons, 1989.
- [6] G. Tao and P. V. Kokotovic, “Adaptative control of plants with unknown dead-zones,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 1, pp. 59–68, 1994.
- [7] FAULHABER Group, *Precision Gearheads Technical Information*. FAULHABER Group, 2005.
- [8] T. L. Laura, “Modelagem dinâmica de uma base móvel incluindo as não-linearidades de entrada,” Master’s thesis, Universidade Federal da Bahia, 2006.

- [9] B. Carter, M. Good, M. Dorohoff, J. Lew, R. L. W. II, and P. Gallina, “Mechanical design and modeling of an omni-directional robocup player,” in *Proceedings RoboCup 2001 International Symposium*, (Athens, Ohio), pp. 1–10, 2001.
- [10] R. L. W. II, B. E. Carter, P. Gallina, and G. Rosati, “Wheeled omni-directional robot dynamics including slip,” in *2002 ASME Design Engineering Technical Conferences*, (Montreal, Canada), pp. 1–7, 2002.
- [11] C. Canudas de Wit and P. Tsiotras, “Dynamic tire friction models for vehicle traction control,” in *Proceedings of the 38<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, (Phoenix, Arizona - USA), pp. 3746–3751, 1999.
- [12] K. Watanabe, Y. Shiraishi, S. G. Tzafestas, J. Tang, and T. Fukuda, “Feedback control of an omnidirectional autonomous platform for mobile service robots,” *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, vol. 22, no. 3-4, pp. 315–330, 1998.
- [13] J. O. Jang, H. T. Chung, and G. J. Jeon, “Saturation and deadzone compensation of systems using neural network and fuzzy logic,” in *American Control Conference*, (Portland, OR - USA), pp. 1715–1720, 2005.
- [14] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice-Hall, Inc., second edition ed., 1993.
- [15] H. S. Ramirez and P. L. Arenas, “Dynamical discontinuous feedback control of nonlinear systems,” in *Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control*, (Tampa, Florida), pp. 1373–1378, 1989.
- [16] N. Mohan, T. M. Undeland, and W. P. Robbins, *Power Electronics: Converters, Applications and Design*. John Wiley Sons, second ed., 1995.
- [17] R. Siegwart and I. R. Nourbakhsh, *Introduction to Autonomous Mobile Robots*. London, England: The MIT Press., 2004.
- [18] G. Campion, B. D’Andréa-Novel, and G. Bastin, “Modelling and state feedback control of nonholonomic mechanical systems,” in *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*, (Brighton, England), pp. 1184–1188, 1991.
- [19] G. Campion, G. Bastin, and B. D’Andréa-Novel, “Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots,” *IEEE Transaction On Robotics and Automation*, vol. 12, no. 1, pp. 47–62, 1996.

- [20] B. D'Andrea-Novell, G. Bastin, and G. Campion, "Modeling and control of non holonomic wheeled mobile robots," in *Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, (Sacramento, California), pp. 1130–1135, 1991.
- [21] C. Canudas de Wit, H. Olsson, K. J. Åström, and P. Lischinsky, "A new model for control of system with friction," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, no. 3, pp. 419–425, 1995.
- [22] A. S. Sanca, "Controle com compensação de atrito para estruturas de base móvel de robôs manipuladores," Master's thesis, Universidade Federal da Bahia, 2006.
- [23] B. Armstrong and B. Amin, "Pid control in the presence of static friction: A comparison of algebraic and describing function analysis," *Automatica*, vol. 32, no. 5, pp. 679–692, 1996.
- [24] M. L. B. Moreira, R. V. F. Lopes, and H. K. Kuga, "Estimation of torque in a reaction wheel using a bristle model for friction," in *Proceedings of COBEM 2005 18<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering*, (Ouro Preto-MG, Brasil), pp. 1–8, 2005.
- [25] C. Canudas de Wit and P. Lischinsky, "Adaptive friction compensation with partially known dynamic friction model," in *International journal of adaptive control and signal processing*, pp. 65–80, 1997.
- [26] B. A. P. Dupont and V. Hayward, "Elasto-plastic friction model: Contact compliance and stiction," in *Proceedings of the American Control Conference*, (Chicago, Illinois - USA), pp. 1072–1077, 2000.
- [27] V. Lampaert, F. Al-Bender, and J. Swevers, "A generalized Maxwell-slip friction model appropriate for control purposes," in *Proceedings 2003 International Conference Physics and Control*, 2003, pp. 1170–1177, 2003.
- [28] C. Canudas de Wit, P. Tsiotras, E. Velenis, M. Basset, and G. Gissinger, "Dynamic friction models for road/tire longitudinal interaction," *Vehicle System Dynamics*, pp. 1–35, 2002.

- [29] F. L. Lewis, K. Liu, R. Selmic, and L.-X. Wang, “Adaptative fuzzy logic compensation of actuator deadzones,” *Journal Of Robotic Systems*, vol. 14, no. 6, pp. 501–511, 1998.
- [30] R. R. Selmic and F. L. Lewis, “Deadzone compensation in motion control systems using adaptive fuzzy logic control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 4, pp. 602–613, 2000.
- [31] R. R. Selmic and F. L. Lewis, “Deadzone compensation in motion control systems using neuralnetworks,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 4, pp. 602–613, 2000.
- [32] J. O. Jang, “A deadzone compensator of a dc motor system using fuzzy logic control,” *IEEE Transaction On Systems, Man, and Cybernetics-Part C: Applications and Reviews*, vol. 31, no. 1, pp. 42–48, 2001.
- [33] J. J. F. Cerqueira, *Identificação de Sistemas Dinâmicos Usando Redes Neurais Artificiais: Uma Aplicação a Manipuladores Robóticos*. PhD thesis, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas, 2001.
- [34] M. R. Elhami and D. J. Brookfield, “Sequential identification of coulomb and viscous friction in robot drives,” *Automatica*, vol. 33, no. 3, pp. 393–401, 1997.
- [35] J. J. F. Cerqueira, C. E. T. Dórea, and A. S. Sanca, “Controle com compensação de atrito para estruturas de bases móveis de robôs manipuladores,” in *VIII SBAI - Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, (Florianópolis - SC, BRA), pp. 1–6, 2007.
- [36] T. Bräunl, *Embedded Robotics: Mobile Robot Design and Applications with Embedded Systems*. Springer-Verlag Berlin Heildberg, 2003.
- [37] E. L. M. Mehl, J. K. A. C. Zani, V. R. Mognon, and G. dos Santos, “O “futebol de robôs” como ferramenta tecnológica para o ensino de engenharia elétrica e ciência da computação,” in *XXIX Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia*, (Porto Alegre,RS - Brasil), pp. 1–10, 2001.

# Apêndice A

## Modelo Dinâmico do Veículo Implementado em Ambiente Matlab

Este Apêndice tem o objetivo de mostrar o modelo dinâmico da estrutura de uma base móvel holonômica de três rodas suecas implementado no ambiente Matlab *Simulink*®.

O primeiro bloco, denominado “Roda 1” e ilustrado na figura A.1, apresenta a modelagem dinâmica da roda holonômica e sueca, com inclusão do modelo do atuador elétrico e incluindo as não-linearidades de entrada de saturação e zona morta. Como a zona morta é causada pelo atrito estático, este é incluso através do Modelo de atrito de LuGre Compacto. Os blocos intitulados “Roda 2” e “Roda 3” seguem o mesmo procedimento adotado à “Roda 1”.

O modelo dinâmico de cada atuador (ou seja, cada roda) que aciona a base móvel, sem a inclusão das não-linearidades de entrada é obtido pela combinação das expressões (3.4), (3.3), (3.2) e (3.1).

Para a inclusão da saturação no modelo do atuador, a expressão (3.6) mostra a não-linearidade de saturação para a variável  $\delta(t)$ . Aplicando-se a expressão (3.5) na expressão (3.4) chega-se à equação (3.8), onde a variável de entrada para o atuador, ou seja a roda, passa ser a variável  $\delta_\omega(t) \in [-1, 1]$ , ficando portanto inclusa a saturação no modelo do atuador. Isto pode ser melhor compreendido através das ilustrações A.2 e A.3.

Para a inclusão da zona morta no modelo do atuador, ou seja da roda, considere a

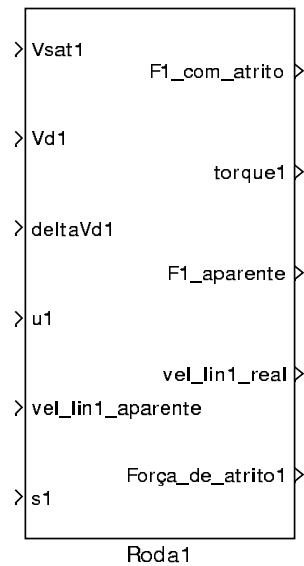


Figura A.1: Implementação da roda 1 em ambiente Matlab *Simulink*®. As rodas 2 e 3 são análogas à roda 1.

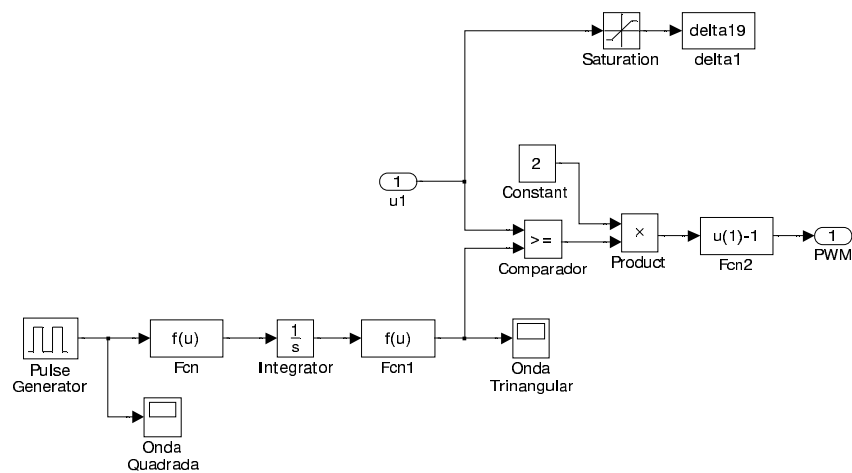


Figura A.2: Subsistema da estrutura de cada PWM.



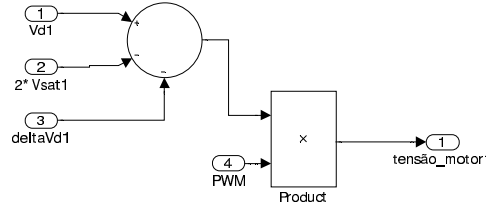


Figura A.3: Subsistema da soma algébrica das entradas.

expressão (3.1), que descreve a dinâmica da roda sem a inclusão de qualquer fenômeno de atrito. A interferência do atrito é no sentido de reduzir a força líquida de saída do atuador, fazendo com a força aplicada pelo atuador na entrada do sistema aparente seja menor. Assim, a expressão (3.1) pode ser reescrita na forma (3.9), (3.10), (3.11) e (3.12).

Observe que  $v_\omega(t)$  pode ser obtida diretamente da medição da velocidade  $\omega_\omega(t)$  do centro da roda na forma  $v_\omega(t) = r_\omega \omega_\omega(t)$ , e que  $\bar{v}_\omega(t)$  deve ser obtida a partir da medição da velocidade linear tangencial da roda em relação a algum referencial fixo.

A força normal da roda no ponto de contato pode ser obtida, para o plano horizontal, a partir da expressão (3.13), onde  $N_{\text{rodas}} = 3$  neste caso particular de três rodas suecas.

Este modelo de atrito é o Modelo LuGre Compacto, apresentado na seção 2.4, e além de modelar satisfatoriamente o atrito estático, que provoca o efeito da zona morta no sistema, modela satisfatoriamente outros componentes do atrito, como atrito viscoso, representado pela parcela  $\sigma_2(t) v_{r_\omega}(t)$  na expressão (3.10). Este Modelo LuGre Compacto é ilustrado nas figuras A.4 e A.5, ao passo que o modelo dinâmico do atuador incluindo as não-linearidade de entrada é ilustrado na figura A.6.

O bloco nomeado “Base móvel sem as rodas” é ilustrado em A.7 e em A.8. Analisando-se cada bloco da figura A.8, primeiramente temos a figura A.9. Nesta, encontra-se a força aparente da base móvel no eixo  $x$ ,  $F_{x_{\text{aparente}}}(t)$ , a partir da expressão (3.27).

Seguindo-se o mesmo procedimento adotado para  $F_{x_{\text{aparente}}}(t)$ , temos a figura A.10, a qual ilustra a obtenção de  $F_{y_{\text{aparente}}}(t)$ , que provém da expressão (3.27). Seguindo a

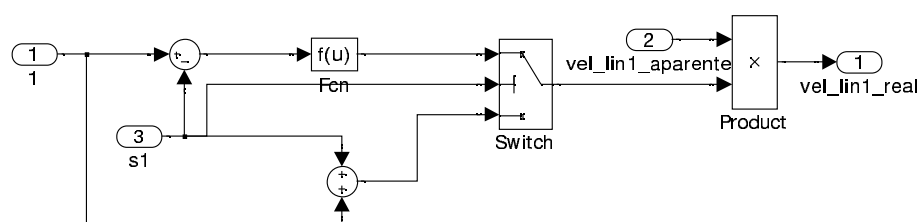


Figura A.4: Subsistema contendo o escorregamento no ponto de contato da roda 1 com a superfície. O mesmo se aplica às demais rodas.

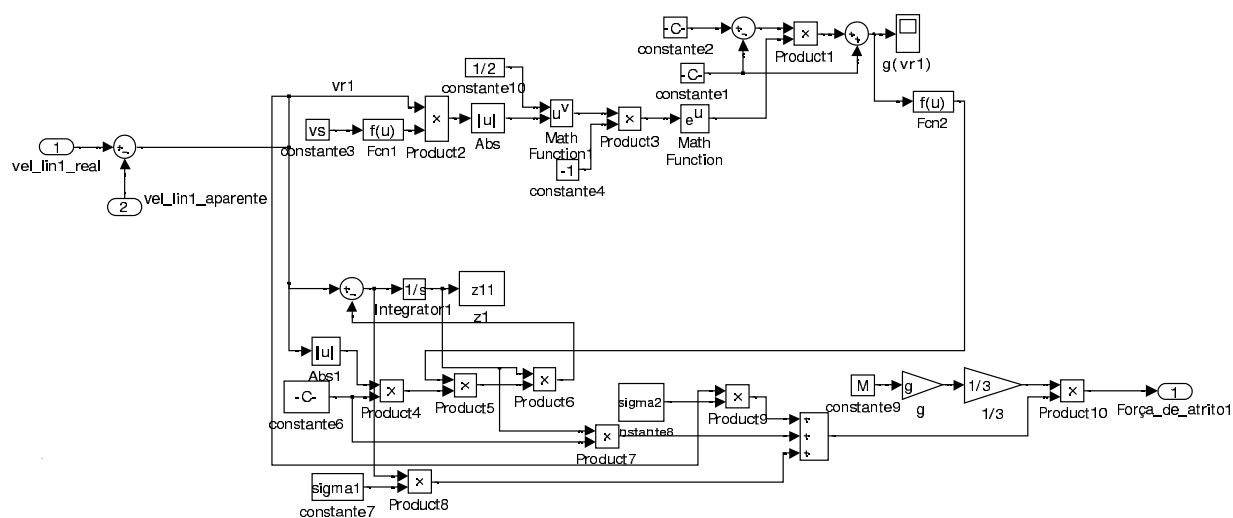


Figura A.5: Subsistema com o atrito de LuGre Compacto.

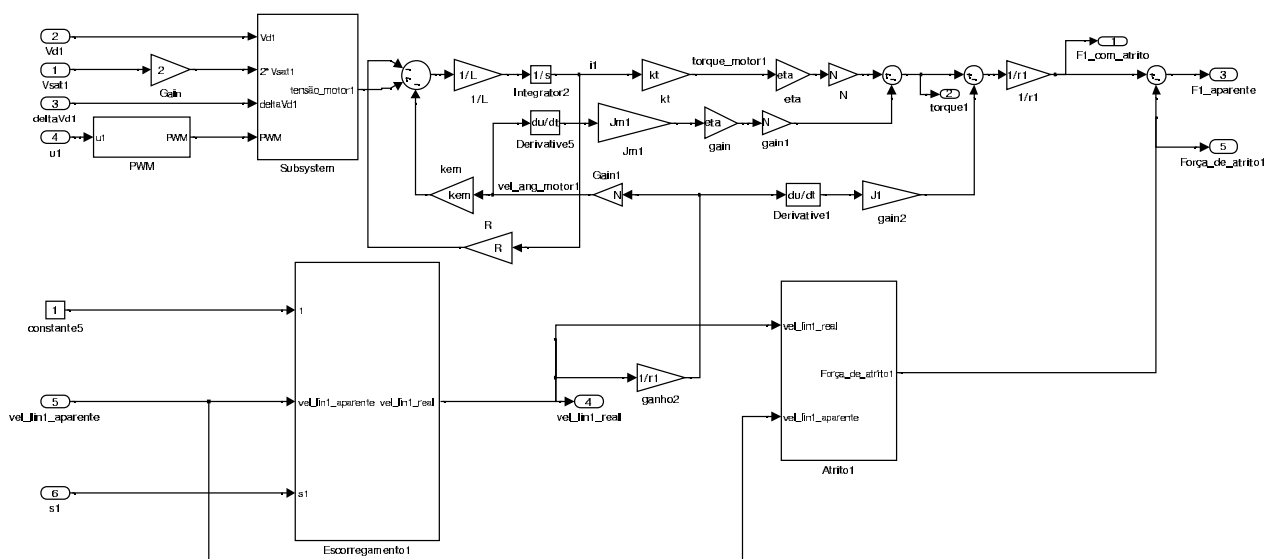


Figura A.6: Subsistema das entradas não-linearidades na roda 1. Como as outras duas rodas são iguais, obviamente, tudo que for considerado para a roda 1, poderá ser também deduzido e considerado para as rodas 2 e 3.

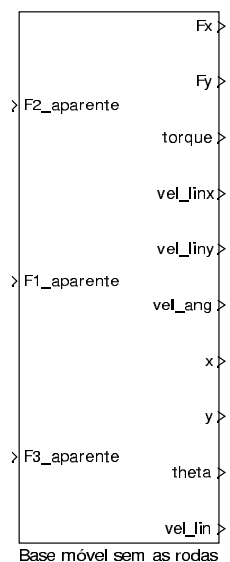


Figura A.7: Implementação da base móvel sem as rodas no Matlab *Simulink*<sup>®</sup>.

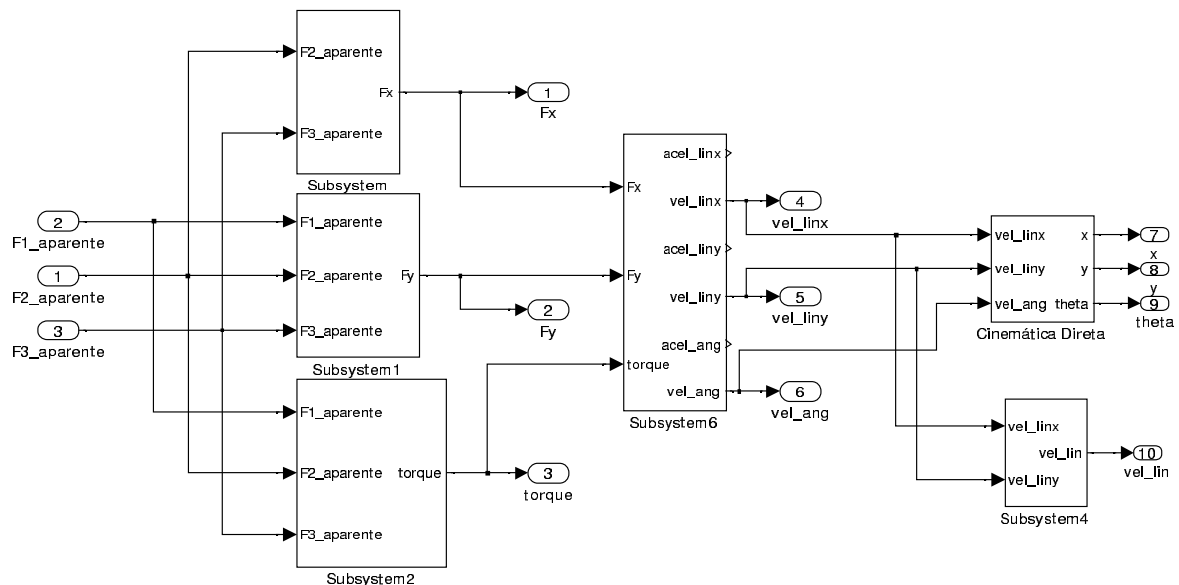


Figura A.8: Subsistema da base móvel sem as rodas.

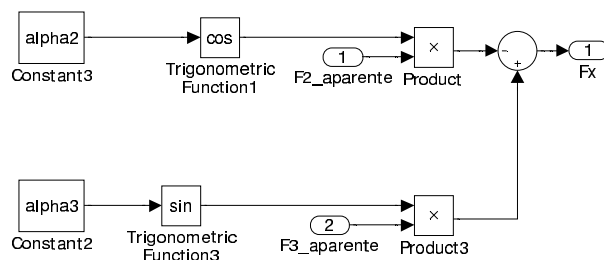


Figura A.9: Subsistema da base móvel sem as rodas com obtenção da força, no eixo  $x$ , da base móvel  $F_{x\_aparente}(t)$ .

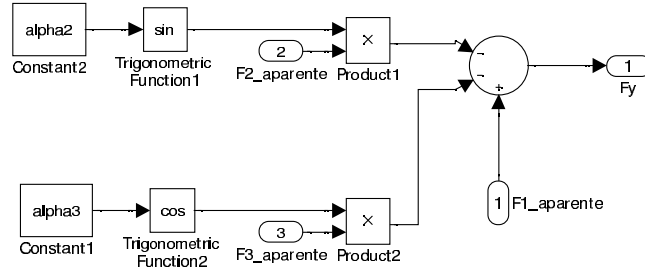


Figura A.10: Subsistema da base móvel sem as rodas com obtenção da força, no eixo  $y$ , da base móvel  $F_{y\text{aparente}}(t)$ .

mesma linha de raciocínio anterior, temos  $\tau_{\text{aparente}}(t)$  na expressão (3.29) e ilustrado na figura A.11.

As velocidade lineares, nos eixos  $x$  e  $y$  da base móvel em relação ao seu centro de massa,  $\bar{v}_x(t)$  e  $\bar{v}_y(t)$ , assim como a sua velocidade angular  $\bar{\omega}(t)$  são ilustrados na figura A.12 e obtidos pela integração das expressões (3.30), (3.31) e (3.32). Fazendo-se outra integração ainda nestas mesmas expressões, chegamos às orientações do centro de massa da base móvel  $x$ ,  $y$  e  $\theta$ , que constituem as expressões da Cinemática Direta da base móvel. Estas orientações são ilustradas em A.13. Naturalmente, a partir da obtenção de  $\bar{v}_x(t)$  e  $\bar{v}_y(t)$ , chega-se à velocidade linear da base móvel  $\bar{v}$ , como se ilustra na figura A.14.

Finalmente, o último bloco nomeado “Cinemática Inversa” é ilustrado nas figuras A.15 e A.16. Para uma explanação mais detalhada deste bloco, segue-se a figura A.17, que relaciona as velocidades lineares e angular aparentes da base móvel,  $\bar{v}_x(t)$ ,  $\bar{v}_y(t)$  e  $\bar{\omega}(t)$ , às velocidades lineares aparentes de cada roda da base móvel,  $\bar{v}_{\omega_1}(t)$ ,  $\bar{v}_{\omega_2}(t)$  e  $\bar{v}_{\omega_3}(t)$ . Estas velocidades lineares aparentes de cada roda são obtidas pela expressão (3.24).

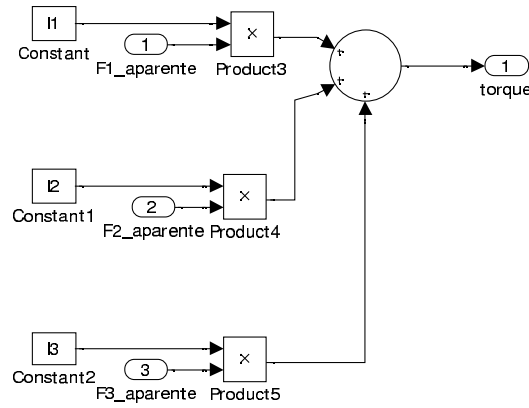


Figura A.11: Subsistema da base móvel sem as rodas com a obtenção do torque  $\tau_{\text{aparente}}(t)$  da base móvel.

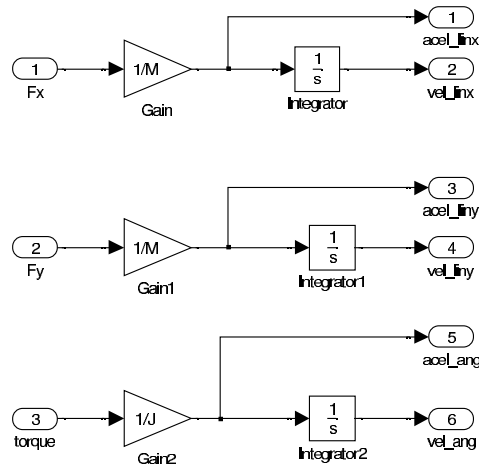


Figura A.12: Subsistema da base móvel sem as rodas com a obtenção do das velocidades  $\bar{v}_x(t)$ ,  $\bar{v}_y(t)$  e  $\bar{\omega}(t)$  da base móvel.

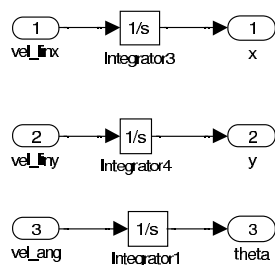


Figura A.13: Subsistema da cinemática direta.

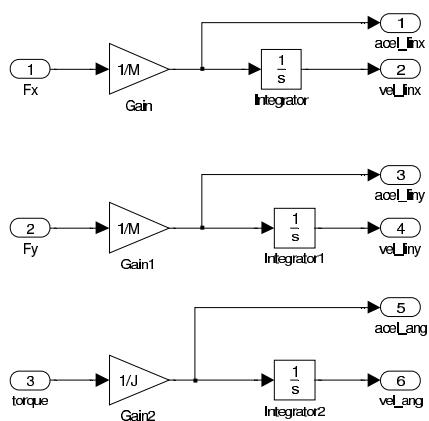


Figura A.14: Subsistema da base móvel sem as rodas. A partir de  $\bar{v}_x(t)$  e  $\bar{v}_y(t)$ , obtém-se  $\bar{v}(t)$ .

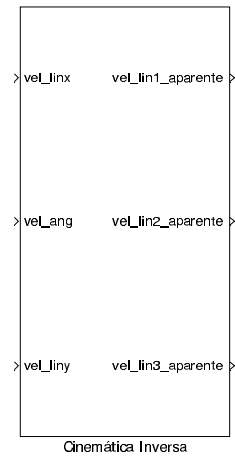


Figura A.15: Implementação da cinemática inversa em ambiente Matlab *Simulink*®.

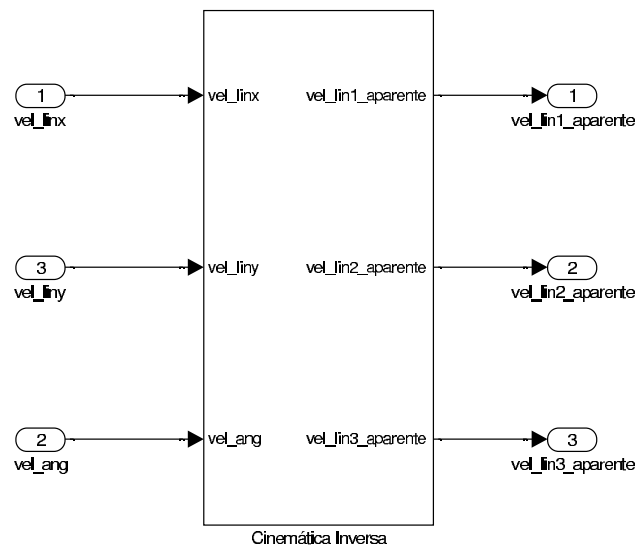


Figura A.16: Subsistema da cinemática inversa.



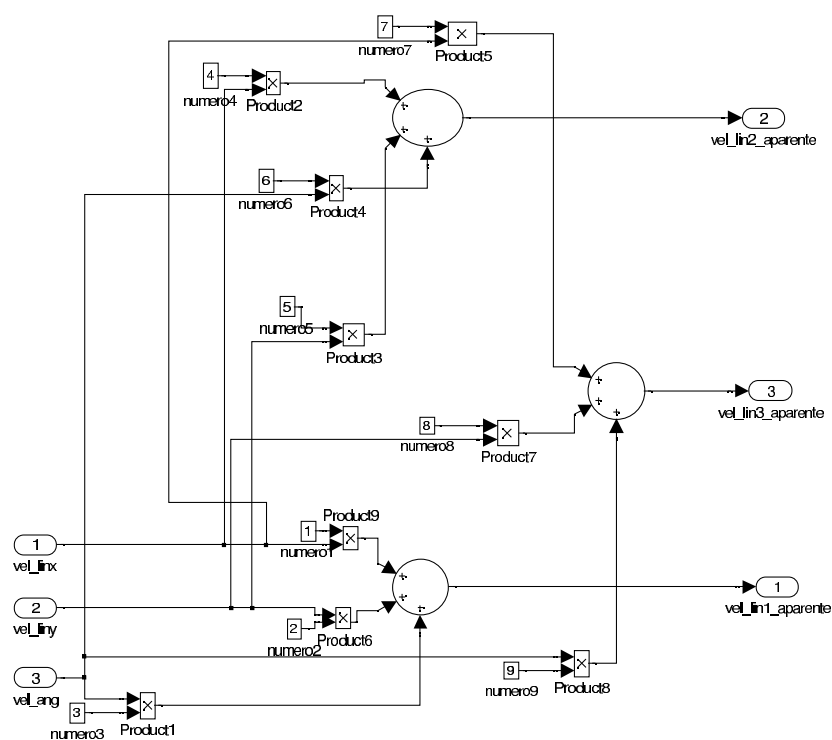


Figura A.17: Subsistema da cinemática inversa.

