



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA – UFBA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA E DE
COMPUTAÇÃO - DEEC
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA - PPGE**

Taniel Silva Franklin

**CONTRIBUIÇÕES PARA O CONTROLE DE SISTEMAS COM
ATRASO VARIÁVEL:
ABORDAGEM FREQUENCIAL BASEADA EM PREDITORES**

Salvador – Bahia – Brasil, 2020



CONTRIBUIÇÕES PARA O CONTROLE DE SISTEMAS COM ATRASO VARIÁVEL: ABORDAGEM FREQUENCIAL BASEADA EM PREDITORES

Taniel Silva Franklin

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, da Universidade Federal da Bahia, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Tito Luis Maia Santos

Salvador
Dezembro de 2020

F831 Franklin, Taniel Silva.
Contribuições para o controle de sistemas com atraso variável:
abordagem frequencial baseada em preditores / Taniel Silva Franklin.
– Salvador, 2020.
165 f. : il. color.

Orientador: Prof. Dr. Tito Luis Maia Santos.

Tese (doutorado) – Universidade Federal da Bahia. Escola
Politécnica, 2020.

1. Sistemas com atraso. 2. Preditores. 3. Sistemas - controle. I.
Santos, Tito Luis Maia. II. Universidade Federal da Bahia. III. Título.

CDD: 621.3

CONTRIBUIÇÕES PARA O CONTROLE DE SISTEMAS COM ATRASO
VARIÁVEL: ABORDAGEM FREQUENCIAL BASEADA EM PREDITORES

Taniel Silva Franklin

TESE SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA ELÉTRICA (PPGEE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL
DA BAHIA COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
ELÉTRICA.

Examinada por:



Prof. Tito Luis Maia Santos, Dr.



Prof. Antonio da Silva Silveira, Dr.



Prof. Carlos Eduardo Trabuco Dórea, Dr.



Prof. Bismark Claire Torrico, Dr.



Prof. Humberto Xavier de Araújo, Dr.

SALVADOR, BA – BRASIL
DEZEMBRO DE 2020

DEDICO

À minha família, por todo suporte, carinho e educação.

À minha esposa Andréa, pela companhia, apoio e paciência.

Aos meus filhos Tatius e Giovana que, com toda dificuldade, precisaram compreender a minha ausência.

A todos os meus professores e orientadores que contribuíram para moldar a minha formação durante toda minha vida.

Aos colegas do CIMATEC, pelas trocas de experiência e estímulos.

A todos os meus amigos e amigas que me ajudaram a manter o foco no objetivo, a descontrair e preservar a saúde física e mental durante toda essa jornada.

A todos os profissionais que se dedicaram e permanecem se dedicando no combate à COVID19.

Aos familiares e vítimas dessa grave pandemia.

AGRADECIMENTOS

Ao amigo e Prof. Tito, pela valiosa orientação e por toda sua ajuda.

Ao professor Antonio da Silva, pelo minucioso e rico relatório da Tese.

Ao professor José Mário, pelas parcerias nas publicações envolvendo sistemas de segunda ordem.

Aos professores Bernardo, Humberto e Bismark, pelas valiosas recomendações apresentadas na qualificação.

Ao SENAI CIMATEC por todo apoio dispensado.

Resumo da Tese apresentada ao PPGEE/UFBA como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

CONTRIBUIÇÕES PARA O CONTROLE DE SISTEMAS COM ATRASO VARIÁVEL: ABORDAGEM FREQUENCIAL BASEADA EM PREDITORES

Taniel Silva Franklin

Dezembro/2020

Orientador: Tito Luis Maia Santos

Programa: Engenharia Elétrica

Os sistemas sujeitos a atraso de transporte se apresentam em diversos setores produtivos que, combinados com as tendências de conectividade 4.0, impõem desafios de controle significativos para seu desempenho robusto devido ao efeito do atraso variável que se apresenta nas malhas de controle. No presente trabalho, são propostos critérios simplificados de garantia da estabilidade robusta em sistemas sujeitos a atraso variável controlados por preditores através da abordagem baseada na resposta em frequência usando o teorema do pequeno ganho. Baseados no teorema do pequeno ganho, parte dos critérios são obtidos com uso de preditores para compensação de parte mínima e constante do atraso variável. Outros critério são definidos aplicando diretamente em sistemas de segunda ordem descritos por meio de receptâncias. A descrição de incertezas não estruturadas é considerada como forma de simplificar a análise robusta e os critérios são ilustrados por meio de simulações e de um caso experimental. Os novos critérios permitem determinar um valor máximo robusto para o atraso variável baseado em informações do modelo e limitantes de incerteza. Com utilização do filtro de robustez, a estabilidade robusta pode ser recuperada durante a operação por meio da redefinição da sintonia do filtro. As condições apresentadas podem ser verificadas diretamente por meio de ferramentas de matemática computacional bem estabelecidas. Não há necessidade de supor qualquer informação acerca da taxa de variação do atraso. Os resultados de simulação e experimental ilustram a utilidade dos critérios como alternativa aos métodos já estabelecidos, os quais usualmente desconsideram a utilização de preditores e seu consequente impacto nas margens de robustez na presença de atraso variável.

Abstract of Thesis presented to PPGEE/UFBA as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

CONTRIBUTIONS FOR THE CONTROL OF SYSTEMS WITH TIME
VARYING DEADTIME: FREQUENCY APPROACH BASED ON
PREDICTORS

Taniel Silva Franklin

December/2020

Advisor: Tito Luis Maia Santos

Department: Electrical Engineering

Time-delay systems are found in several industrial control problems such that, combined with 4.0 connectivity trends, impose relevant control challenges in order to achieve robust performance with time-varying delays. This work proposes new simple and robust stability criteria to systems affected by time-varying delays and controlled by predictors using a frequency approach based on small gain theorem. Firstly, the small gain theorem criteria are combined with predictors in order to compensate the minimum and constant part of the time-varying delay. Others criteria are defined directly to be applied to second-order systems described by the system receptances. Unstructured uncertainty descriptions are used as worst-case bounds to simplify robust analysis. The results are illustrated through simulations and an experimental case. Theses new criteria are able to define a robust time-varying delay bound based on model information and uncertainty worst-case description. The robust stability can be recovered through the robustness filter during operation by adjusting the filter tuning. The criteria can be directly verified using well established computational mathematical tools. Moreover, there is no needs to assume any information about time-delay variation rate. Simulation and experimental results illustrate the usefulness of this approach as an alternative to traditional methods, which usually disregard the use of predictors and their impact on robustness margins and time-varying delay.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiii
Lista de Símbolos	xiv
Lista de Abreviaturas	xv
1 Introdução	1
1.1 Motivação	2
1.2 Justificativa	5
1.3 Objetivos	6
1.3.1 Objetivo geral	6
1.3.2 Objetivos específicos	6
1.4 Revisão Bibliográfica	6
1.5 Organização do documento	9
2 Estabilidade de sistemas com atraso	11
2.1 Estabilidade em sistemas sem atraso	11
2.1.1 Teorema de Lyapunov	11
2.2 Estabilidade de Sistemas com atraso	14
2.2.1 Equações diferenciais funcionais	15
2.2.2 Análise de Estabilidade	17
2.2.3 Método de Lyapunov-Krasovskii	18
2.2.4 Teorema do Pequeno Ganho	29
3 Estratégias de compensação do atraso	37
3.1 Sistemas com atraso	37
3.2 Preditor de Smith	40
3.3 Preditor de Smith filtrado	45
3.3.1 Análise de Robustez	47
3.4 Preditor de Artstein	52

4	Controle de sistemas com atraso variável baseado em preditores	54
4.1	Atraso variável com compensador de tempo morto	54
4.1.1	PSF com atraso variável	55
4.1.2	Critério de estabilidade estendido para o caso MIMO	59
4.1.3	Critério de estabilidade simplificado - PSF caso MIMO tempo contínuo	62
4.1.4	Preditor de Artstein com atraso variável	65
5	Controle robusto de sistemas com atraso variável	69
5.1	Descrição de incertezas	69
5.2	Critério de estabilidade de tempo contínuo	71
5.3	Critério de estabilidade em tempo discreto	75
5.4	Critério de estabilidade para o caso amostrado	75
5.5	Generalização da análise robusta: PSF multivariável	76
5.5.1	PSF multivariável baseado em redefinição de incertezas	79
5.6	Análise robusta: preditor de Artstein	80
5.6.1	Relação entre o PSF e o preditor de Artstein	81
5.6.2	Preditor de Artstein baseado em redefinição de incertezas	82
6	Controle robusto de sistemas de segunda ordem com atraso variável	85
6.1	Atraso variável em sistemas de segunda ordem	85
6.1.1	Atraso variável na entrada	88
6.1.2	Critério de estabilidade simplificado	90
6.2	Critério de estabilidade robusta para sistemas de segunda ordem	93
6.2.1	Estratégia IMC para melhoria na robustez	95
7	Estudo de Casos	100
7.1	Caso I: PSF - Processo estável em malha aberta SISO	100
7.2	Caso II: PSF - Processo SISO instável em malha aberta	103
7.3	Caso III: PSF - Sistema em cascata	107
7.3.1	Projeto de PID baseado em IMC	107
7.4	Caso IV: PSF - Processo instável em malha aberta com realimentação de estados	111
7.4.1	Cálculo do $S(z)$	112
7.5	Caso V: FSA - Processo MIMO Instável em Malha Aberta	115
7.6	Caso VI: Sistema vibratório com dois graus de liberdade	118
7.7	Caso VII: PSF - Controle de potência em um termoresistor (experi- mental)	120

8	Conclusões	125
8.1	Potenciais Contribuições	125
8.1.1	Lista de Publicações	126
8.2	Perspectivas de atividades futuras	127
	Referências Bibliográficas	128
A	Ganho dos subsistemas	141
A.1	Ganho H_{wv} PSF - Caso MIMO contínuo	141
A.2	Ganho H_{wv} Artstein	142
A.3	Ganho H_{wv} PSF - Caso MIMO discreto	143
A.3.1	Critério de Estabilidade Robusta	144
A.4	Ganho H_{wv} sistema de segunda ordem	145
A.4.1	Critério de Estabilidade Robusta	146

Lista de Figuras

1.1	Sistema controlado via rede - NCS.	3
1.2	Tanque aquecido e com tubulação longa. Fonte: NORMEY-RICO e CAMACHO (2007).	4
1.3	Escopo de estudo (cinza escuro).	10
2.1	Sistema de controle amostrado.	15
2.2	Conexão em malha fechada para análise de estabilidade através do Teorema do Pequeno Ganho.	30
2.3	Malhas com atraso variável.	32
2.4	Sistema linear invariante no tempo com atraso - Equivalente.	33
2.5	Sistema linear invariante no tempo com atraso (discreto) - Equivalente.	33
2.6	Sistema linear invariante no tempo com atraso (Amostrado) - Equivalente.	33
2.7	Resposta ao degrau do sistema de tanque de aquecimento para diferentes valores de atraso.	35
3.1	Sistema de controle com atraso.	38
3.2	Efeito do atraso na resposta em frequência de um sistema com controlador PI. ($MF1 \approx 5^\circ$ $L = 1,5$ $K_c = 1$), ($MF2 \approx 60^\circ$ $L = 1,5$ $K_c = 0,2$), ($MF3 \approx 70^\circ$ $L = 0$ $K_c = 1$).	41
3.3	Efeito do atraso na resposta no tempo de um sistema com controlador PI.	41
3.4	Preditor de Smith.	43
3.5	Preditor de Smith - Estrutura Equivalente.	43
3.6	Preditor de Smith Filtrado.	45
3.7	Preditor de Smith Filtrado Discreto - Forma Unificada.	48
3.8	Diagrama de Nyquist - $C(j\omega)P_n(j\omega)$ (linha cheia), $C(j\omega)(P_n(j\omega) + \Delta_a(j\omega))$ (linha tracejada) e $C(j\omega)\Delta_a(j\omega)$ (segmento cinza - A e B são pontos de mesma frequência) (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2007).	50

3.9	Incerteza no valor do atraso $L = 15$ e $L_n = 10$: Comparação entre PS e PSF na capacidade de atenuar o efeito da incerteza.	51
4.1	PSF com atraso variável.	55
4.2	Estrutura equivalente do PSF com atraso variável para aplicar o Teorema do Pequeno Ganho.	56
4.3	PSF equivalente para Teorema do Pequeno Ganho.	58
4.4	PSF equivalente contínuo MIMO com atraso variável.	64
4.5	Descrição do sistema de controle com o preditor de Artstein na presença de atraso variável.	65
4.6	Representação equivalente via decomposição do sistema: modelo nominal interconectado com dinâmica incerta.	66
4.7	Representação equivalente obtida através do método da redução. . . .	66
5.1	Incerteza aditiva.	70
5.2	PSF equivalente discreto MIMO com atraso variável.	78
6.1	Esquemático de um sistema linear de segunda ordem.	86
6.2	Esquema de Hardware utilizado para identificação de sistemas vibratórios (Fonte: INMAN (2014)).	87
6.3	Descrição em malha fechada do sistema de segunda ordem com atraso variável.	89
6.4	Descrição equivalente em malha fechada com atraso variável.	91
6.5	Descrição equivalente para Teorema do pequeno ganho.	93
6.6	Diagrama esquemático em malha fechada do sistema de controle com IMC e atraso variável.	96
6.7	Descrição equivalente para análise através do teorema do pequeno ganho.	98
7.1	Sistema de controle de fluxo de ar. (Fonte: Adaptado de NORMEY-RICO e CAMACHO (2008) pág. 158).	100
7.2	Pior caso de incerteza multiplicativa (linha tracejada), incertezas de modelo aleatórias baseadas em 500 plantas distribuídas uniformemente (linhas sólidas).	101
7.3	Análise de sintonias do filtro de robustez (caso estável de malha aberta).	102
7.4	Respostas de malha fechada com atrasos variáveis: $L(t) = 8,5 + 2sen(\omega t)$ (caso estável).	103
7.5	Pior caso de incerteza multiplicativa (linha tracejada), incertezas de modelo aleatórias baseadas em 500 plantas distribuídas uniformemente (linhas sólidas) - caso instável em malha aberta.	105

7.6	Análise de filtro de robustez (caso instável em malha aberta).	106
7.7	Controle em malha fechada com atraso variável: $L(t) = 20 + 2\text{sen}(2t)$ (caso instável em malha aberta).	106
7.8	Sistema de controle em cascata.	107
7.9	Sistema de controle em cascata IMC.	107
7.10	Sistema de controle em cascata IMC com controlador equivalente. . .	108
7.11	$\mu(\omega)$ para diferentes valores de τ	111
7.12	Respostas da variável de saída e de controle sem filtro de robustez ($F_r(s) = 1$) e com filtro ($F_r(s) = 1/(69s + 1)$).	111
7.13	Recuperação da estabilidade chaveando a constante de tempo do filtro de $\tau = 0$ para $\tau = 69$ em $t=700$ s.	112
7.14	Condição de estabilidade simplificada (MIMO).	114
7.15	Caso V: Comparação de rejeição de perturbação.	115
7.16	Resposta ao degrau do RPA - Controlador K_1	117
7.17	Resposta ao degrau do RPA com o preditor - Controlador K_2	117
7.18	Caso IV: Sistema massa mola amortecedor.	119
7.19	Modelagem de incerteza para o pior caso com $\pm 2\%$ na massa m_1 e $\pm 1\%$ na massa m_2	119
7.20	Caso VI: Critério de estabilidade robusta (6.1.1) (nominal), (A.62) (pior caso de perturbação na massa) e (6.31) (IMC).	120
7.21	Simulação no tempo para uma condição inicial dada por $\mathbf{x}(0) =$ $[1 \ 2]^T$: caso nominal com atraso variável $\delta(t) = 0,0167 + 0,0042\text{sen}(t)$ (Linha sólida preta); e $\delta(t) = 0,0167 + 0,0042\text{sen}(t)$ com o pior caso de incerteza na matriz de massas (linha tracejada em vermelho). . . .	121
7.22	Simulação no tempo para uma condição inicial dada por $\mathbf{x}(0) =$ $[1 \ 2]^T$: caso nominal com atraso variável $\delta(t) = 0,0167 + 0,0042\text{sen}(t)$ (Linha sólida preta); e $\delta(t) = 0,0167 + 0,0042$ (máximo valor de atraso) com o pior caso de incerteza na matriz de massas e a es- tratégia IMC (linha tracejada em vermelho).	121
7.23	Caso VII: Sistema de Controle de Temperatura.	122
7.24	Caso VII: Resposta de um sistema com atraso variável experimental amostrado.	123

Lista de Tabelas

7.1	Valores de δ_{max} e $\bar{L} + \delta_{max}$ com ($\bar{L} = 110 \cdot 10^{-3}$) e sem compensação ($\bar{L} = 0$).	116
-----	--	-----

Lista de Símbolos

L	Representação de atraso fixo, p. 15
$\Delta_P(s)$	Incerteza multiplicativa, p. 49
$\Delta_a(s)$	Incerteza aditiva, p. 49
δ	Função que descreve o atraso variável, p. 15
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais, p. 12
h	período de amostragem, p. 32
s	Variável complexa da transformada de Laplace, p. 14
$x(t)$	condição inicial de uma EDF, p. 16
$\mathcal{K}$	Matriz de rigidez, p. 86
$\mathcal{C}$	Matriz de amortecimento, p. 86

Lista de Abreviaturas

CT-DT	Sistema misto contínuo no tempo e discreto no tempo, p. 33
CTM	Compensador de Tempo Morto, p. 1
EDF	Equação Diferencial Funcional, p. 16
EDN	Equação Diferencial Neutra, p. 16
EDR	Equação Diferencial Retardada, p. 16
FOPDT	Do inglês <i>First order plus deadtime</i> , p. 45
FSA	Do inglês <i>Finite Spectrum Assignment</i> , p. 7
IMC	Do inglês, <i>Internal Model Control</i> , p. 107
IoT	Do inglês - <i>Internet of Things</i> , p. 2
L-K	Lyapunov-Krasovskii, p. 5
LMI	Do inglês <i>Linear Matrix Inequality</i> , p. 5
MF	margem de fase, p. 39
MIMO	Do inglês <i>Multiples Inputs Multiples Outputs</i> , p. 7
NCS	Do inglês <i>Networked Control System</i> , p. 2
NPC	Do inglês <i>Networked Predictive Control</i> , p. 9
PID	Proporcional Integral Derivativo, p. 42
PI	Proporcional Integral, p. 42
PSF	Preditor de Smith Filtrado, p. 45
PS	Preditor de Smith, p. 2
QoC	Do inglês <i>Quality of Control</i> , p. 2

QoS	Do inglês <i>Quality of Service</i> , p. 2
SOPDT	Do inglês <i>Second order plus deadtime</i> , p. 45
ZOH	Do inglês <i>Zero order hold</i> , p. 14

Capítulo 1

Introdução

O atraso de transporte, também conhecido como tempo morto ou atraso entrada-saída, está presente em muitos sistemas de engenharia reais, podendo aparecer tanto na entrada de sistemas, quanto nas medições. A sua origem pode ser atribuída a (i) transporte de massa de um local a outro, (ii) transferência de energia ou informação, (iii) processamento computacional, (iv) redes de comunicação, (v) representação simplificada de sistemas, (vi) sistema formado por diversos modelos simples em cascata (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2007).

O tempo morto torna o controle do sistema mais difícil quando comparado ao caso sem atraso, pois o sinal de controle atual só terá ação efetiva após o transcorrer do atraso o que reduz a margem de fase. O efeito imediato causado por este atraso nos sistemas de controle são os seguintes (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2007, 2009; PALMOR, 1996):

- perturbações são percebidas somente após transcorrido o tempo do atraso;
- a ação de controle não é percebida de imediato na variável controlada;
- a ação de controle atua para corrigir um efeito que já passou.

Os sistemas com tempo morto maior do que a constante de tempo são ditos de atraso dominante (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2007). Quando o atraso é dominante, seu efeito é mais notório, dificultando em muitos casos, um desempenho adequado com a utilização de controladores convencionais (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2007). As estratégias baseadas em preditores são empregadas para mitigar os efeitos nocivos do atraso (DÍAZ, 2018). A utilização de sistemas de predição para compensação de atraso deu origem aos CTMs - compensadores de tempo morto (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2008; SMITH, 1957).

O primeiro CTM foi apresentado por Smith SMITH (1957) tendo como principal vantagem a eliminação do atraso da equação característica nominal do sistema em malha fechada. Esta propriedade permite projetar o controlador considerando que

o sistema não possui atraso. Apesar das vantagens, é conhecimento comum que o preditor de Smith (PS) apresenta problemas ao lidar com plantas instáveis e integradoras (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2008; PALMOR, 1996) ou com plantas que apresentam erros de modelagem significativos na estimação do atraso (MICHIELS e NICULESCU, 2003).

Diante das limitações do PS, diversas iniciativas surgiram com vistas a estender sua aplicação a plantas instáveis e integradoras, a melhorar o seu desempenho regulatório na presença de perturbações, melhorar a robustez e a oferta de procedimentos sistemáticos de sintonia em aplicações na indústria (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015; NORMEY-RICO e CAMACHO, 2008; SANTOS *et al.*, 2018b; TORRICO *et al.*, 2013).

O desempenho regulatório é de importância crucial em processos industriais para garantir as especificações dos produtos, a segurança operacional e o avanço dos processos produtivos. Essa necessidade fez emergir propostas de estruturas de predição modificadas com o intuito de melhorar o desempenho de rejeição de perturbação (MATAUŠEK e RIBIĆ, 2009; NORMEY-RICO e CAMACHO, 2008; SANTOS *et al.*, 2017).

Não se pode deixar de considerar o interesse por propostas simplificadas para alcançar o objetivo de controle. Cabe ressaltar que esta é uma demanda prática com o intuito de reduzir o tempo de ajuste e comissionamento de malhas, bem como reduzir o potencial de falha humana

1.1 Motivação

As tendências trazidas pela indústria 4.0 e IoT estão impulsionando a implantação de redes ethernet industriais (principalmente Ethernet/IP, EtherCAT e PROFINET IRT) associadas a malhas de controle de processos. As diferentes formas de empacotamento, esquemas de acesso ao meio entre outros, fazem com que estes protocolos apresentem comportamentos de tempo real deteriorados, que podem afetar o desempenho dos sistemas de controle (WU e XIE, 2019). O desempenho de um NCS (*Networked Control System*) pode ser medido pelo QoC (*Quality of Control*) que é afetado significativamente pelo QoS da rede.

Diferentemente das redes de comunicação convencionais, nos NCSs (Fig. 1.1) há uma ligação em rede a um processo físico que precisa ser controlado em tempo real, exigindo assim, um alto grau de determinismo, consistência temporal e transferência de dados em tempo real (GALLOWAY e HANCKE, 2013). A escolha do protocolo de comunicação adequado pode evitar retrabalho a nível de sistema ao se verificar que os requisitos de controle não foram atendidos devido a atraso ponta-a-ponta, principalmente em sistemas de grande porte.

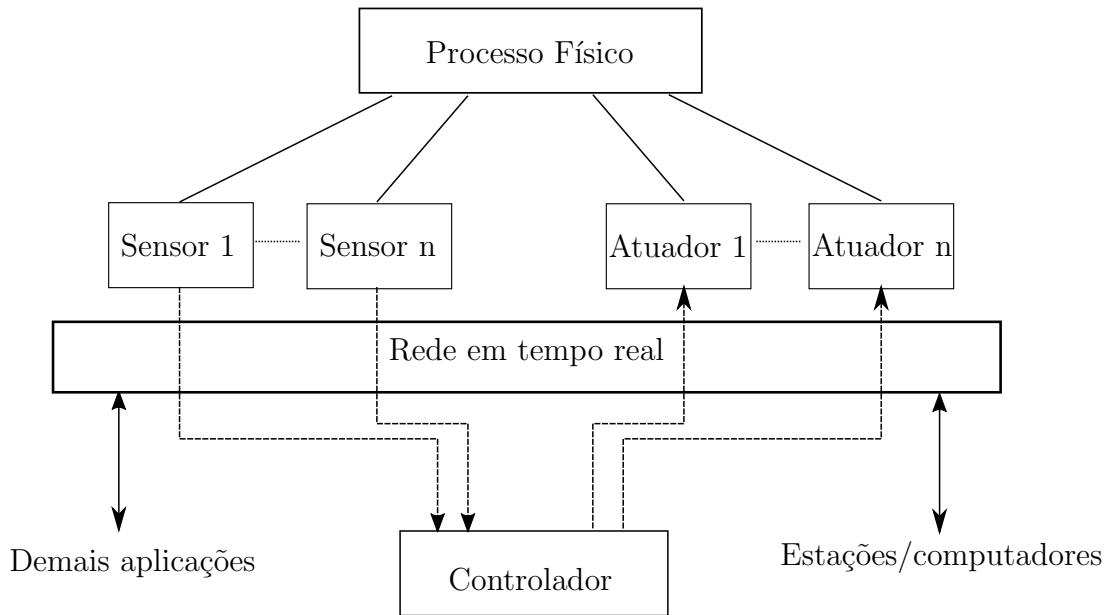


Figura 1.1: Sistema controlado via rede - NCS.

Em seu recente trabalho, WU e XIE (2019) fornecem um guia básico de escolha desses protocolos. As redes industriais precisam garantir a troca de informação entre sensor-controlador-atuador com consistência temporal. Além disso, verifica-se através de exemplos simulados que o protocolo Ethernet/IP, apesar de exigir um custo menor com implantação equipamentos, pode ser utilizado satisfatoriamente em processos com dinâmica lenta. Já os protocolos ethernet modificados, EtherCAT e PROFINET IRT, conseguem estabelecer comunicação não só rápida, mas também determinística. EtherCAT demonstra ser ideal para comunicação em tempo real principalmente em controle de movimentos.

As redes industriais combinam o tráfego de dados de monitoramento de variáveis que apresentam menor requisito de tempo real com sinais necessários à manutenção das malhas de controle. Ou seja, as redes industriais compartilham sinais com prioridades diferentes em relação à consistência temporal com exceção das informações de segurança dos processos que precisam trafegar em uma rede separada.

Diferentemente dos sistemas tradicionais onde cada sensor/atuador possui um cabo dedicado, nos NCSs as informações entre os elementos são trocadas através de uma rede de comunicação que está sujeita a uma série de problemas. A seguir alguns dos problemas envolvidos em NCSs (FRIDMAN, 2014b):

- intervalos de amostragem variáveis;
- atrasos de comunicação fixos ou variáveis;
- perdas de pacote;

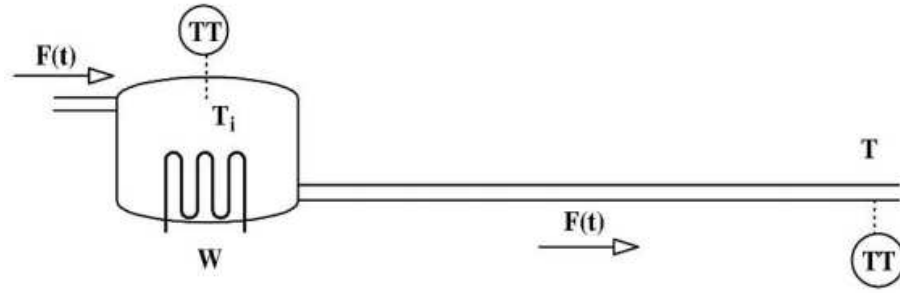


Figura 1.2: Tanque aquecido e com tubulação longa. Fonte: NORMEY-RICO e CAMACHO (2007).

- erros de quantização nos sinais transmitidos;
- restrições impostas pela rede em função do compartilhamento de recursos com diversos outros elementos da rede;
- perda de sincronismo.

Em um típico NCS existe o atraso de comunicação do controlador para o atuador e um outro do sensor com o controlador. Podendo ocorrer também atraso no processamento (algoritmo) da ação de controle, durante amostragem do sinal medido e o atraso intrínseco do processo a ser controlado. A soma de todos esses atrasos gera o atraso ponta-a-ponta que irá afetar a malha de controle.

Um exemplo que ilustra o atraso causado por transporte de massa e energia pode ser verificado em um sistema de controle de temperatura na saída de uma tubulação longa conectada a um tanque de aquecimento conforme Fig. 1.2. Neste sistema, as alterações na variável de controle W levam tempo para serem percebidas pelo transmissor de temperatura (TT) ao final da tubulação e isto se deve ao atraso na propagação do calor e da massa até o final da tubulação.

Em FRIDMAN (2014b), são relacionados outros exemplos de sistemas com atraso juntamente com a sua modelagem: i) Gerenciamento ativo de filas (AQM - *Active Queue Management*); ii) fluxo de tráfego de veículos; iii) processamento em redes neurais; iv) dinâmica de crescimento populacional em função da comida disponível e v) dinâmica de propagação e eliminação de epidemias.

Embora a suposição de atraso fixo seja geralmente válida em muitas aplicações, cada vez mais problemas surgem em razão da variação do atraso. A análise e o projeto de CTMs, em muitos casos, considera apenas o atraso fixo, mesmo admitindo alguma incerteza na estimação do atraso. Entretanto, algumas malhas de controle, como aquelas que fazem uso de controladores via rede, exibem atraso variável, aumentando ainda mais a complexidade da análise (NORMEY-RICO *et al.*, 2012a).

Além disso, a dificuldade de projeto aumenta significativamente à medida que o atraso se torna mais longo (YUE e HAN, 2005).

Com o atraso variável, a garantia de estabilidade robusta convencional se torna insuficiente, uma vez que o sistema deixa de ser invariante no tempo e o conceito de autovalores não pode ser utilizado.

Em virtude da relevância de sistemas com atraso variável no contexto dos problemas de controle atuais e tendo em vista a limitação das abordagens baseadas em preditores para este tipo de aplicação, este trabalho é dedicado ao estudo de critérios de estabilidade simplificados para o controle de sistemas com atraso variável baseado em preditores.

1.2 Justificativa

Para compensar o atraso fixo na entrada é necessário que a predição seja calculada considerando uma janela de tempo com o tamanho do atraso. Já para o caso variável, essa janela é indefinida e seria necessário prever o valor futuro do atraso. Em alguns casos, esta previsão pode acontecer quando se dispõe do comportamento temporal do atraso, entretanto, existem problemas nos quais essa variação não é determinística e, nestes casos, a análise de robustez convencional tem alcance limitado devido a variação do atraso no tempo (DÍAZ, 2018; FRIDMAN, 2014b; RICHARD, 2003).

Tal dificuldade conduziu a propostas de critérios de estabilidade baseados no método direto de Lyapunov e evoluindo em seguida para Lyapunov-Krasovskii (L-K) para sistemas de tempo contínuo (CHEN *et al.*, 2018; DING *et al.*, 2017; LEE *et al.*, 2018; LEE e PARK, 2018; PARK *et al.*, 2018; ZHANG *et al.*, 2015) e também para sistemas de tempo discreto (GONZÁLEZ *et al.*, 2013; WU *et al.*, 2017; ZUO *et al.*, 2013). Basicamente a análise de estabilidade na presença de atraso variável possui inúmeras condições de estabilidade disponíveis e o foco atual é reduzir o conservadorismo dessas condições utilizando os métodos diretos de Lyapunov (LI e GAO, 2011).

Muitos trabalhos utilizam os métodos baseados no Teorema de L-K e a solução de LMIs para obter condições com garantia de estabilidade. Em NORMEY-RICO *et al.* (2012a), é apresentada uma condição de estabilidade robusta baseada em L-K para o preditor de Smith, porém assume-se que o atraso varia de forma discreta. Este é um dos principais motivadores do presente trabalho, na medida em que o atraso provocado por uma rede de comunicação dificilmente será múltiplo do período de amostragem. Em NORMEY-RICO *et al.* (2012a), toda análise de estabilidade é realizada em tempo-discreto, o que limita o universo de possibilidades de atraso variável. Não obstante, este é um dos poucos trabalhos que consideram o efeito do preditor na estabilidade robusta da malha com atraso variável.

Nesse campo é que reside uma das principais contribuições deste trabalho, pois notou-se uma carência de resultados que combinem CTMs com garantia de estabilidade na presença de atraso variável.

Em particular, observou-se a ausência de trabalhos que permitissem concluir a respeito da robustez de sistemas controlados por compensadores baseados no PS na presença de atrasos variáveis limitados e com variação arbitrária, a exemplo de valores não múltiplos do período de amostragem. Além do exposto, pretende-se explorar a abordagem frequencial baseada em incertezas não estruturadas pela conveniência de utilização em problemas específicos, além da relevância dessa ferramenta analítica no contexto de compensadores sem atraso.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo geral

Este trabalho tem o objetivo de apresentar um conjunto de critérios de estabilidade robusta com formulação frequencial, baseados no Teorema do Pequeno Ganho, para sistemas com atraso variável baseados em preditores.

1.3.2 Objetivos específicos

Dentre os objetivos específicos consideram-se:

- propor critérios de estabilidade simplificados baseados no teorema do pequeno ganho para sistemas lineares com atraso variável utilizando os preditores de Smith e Artstein;
- estender os resultados do preditor de Smith para o caso multivariável;
- estender os critérios contemplando incertezas de modelagem;
- propor regras de sintonia direta baseadas no teorema do pequeno ganho;
- estender os resultados para sistemas vibratórios baseados em modelos de segunda ordem pelo método das receptâncias.

1.4 Revisão Bibliográfica

Desde o primeiro CTM de Smith o controle de sistemas com atraso conseguiu avanços relevantes nas áreas da indústria de processos, robótica e controle de congestão em internet (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2008).

Na década de 1980, a atribuição de espectro finito (FSA - *Finite Spectrum Assignment*) (KWON e PEARSON, 1980) e o método de redução de modelo conhecido como redução de Artstein (ARTSTEIN, 1982) estendeu o uso de preditores para sistemas MIMO e instáveis em malha aberta.

O interesse por preditores e seus efeitos em malha fechada pode ser observado em LÉCHAPPÉ *et al.* (2015), trabalho no qual é proposto um novo esquema de predição baseado no preditor de Artstein para atenuar o efeito de perturbações desconhecidas.

Para melhorar a rejeição de perturbações mensuráveis e não mensuráveis SANTOS *et al.* (2018b) propõem uma lei de controle para preditores de Artstein, usando estratégia *feedforward* com resultados superiores quando comparado ao esquema apresentado em LÉCHAPPÉ *et al.* (2015) na rejeição de perturbações casadas ou não. TORRICO *et al.* (2019) propõe um PSF baseado no FSA e demonstra a equivalência entre os dois preditores.

Para permitir o ajuste da rejeição de perturbação e sem esquecer da sintonia do CTM voltada para o desempenho ao seguir sinais de referência, NORMEY-RICO e CAMACHO (2008) propõem um CTM baseado no PS com dois graus de liberdade, um deles foca na sintonia do controlador primário para rejeição de perturbação e o outro utiliza um filtro de referência para melhorar o desempenho de seguimento de referência em malha fechada.

CTMs voltados para o controle de plantas instáveis e integradoras têm sido analisados em diversos trabalhos. Para plantas integradoras, ASTROM *et al.* (1994) propõem um PS modificado e em MATAUŠEK e MICIC (1996, 1999) é apresentada uma simples proposta com poucos parâmetros de sintonia. Estratégias de controle com dois graus de liberdade são descritas em NORMEY-RICO e CAMACHO (2002) para o controle de plantas estáveis e integradoras. O preditor de Smith filtrado proposto em NORMEY-RICO e CAMACHO (2008) possui dois graus de liberdade com um filtro de robustez para atenuar incertezas de modelagem. Sua versão em tempo discreto unificada é proposta em NORMEY-RICO e CAMACHO (2009) para permitir implementação no controle de plantas integradoras e instáveis em malha aberta mantendo a estabilidade interna. Outras abordagens baseadas em observadores de perturbação estão presentes em ZHONG e REES (2004), SANZ *et al.* (2016), ZHONG (2003); ZHONG e NORMEY-RICO (2002). Outros trabalhos voltados para plantas instáveis seguem tratamento semelhante em GARCIA *et al.* (2006); LIU *et al.* (2014); SANTOS *et al.* (2010); TORRICO *et al.* (2013).

Discussões que tratam do caso de sistemas multivariáveis podem ser verificadas em JEROME e RAY (1979); OGUNNAIKE e RAY (1979); RAO e CHIDAMBARAM (2006); SANTOS *et al.* (2017)

Em TORRICO *et al.* (2018) novas regras de sintonia para ajuste simultâneo

de robustez e atenuação de ruído são propostas para plantas com atraso estáveis, instáveis e integradoras voltadas para o ambiente industrial. Regras simples de sintonia de um CTM com dois graus de liberdade baseado no PS aplicado a uma planta piloto de aquecimento com dois tanques e atraso longo são apresentados em KIRTANIA e CHOUDHURY (2012).

O problema de controle considerando atraso fixo presente em sistemas de segunda ordem é apresentado em ARAÚJO e SANTOS (2018). Neste caso utiliza-se a abordagem de receptância para obter o modelo utilizado no preditor de Smith para compensar o atraso fixo. A filtragem do erro de predição é utilizada para ajustar desempenho e robustez. Em SANTOS *et al.* (2018b), considerando sistemas de segunda ordem, propõem-se condições de estabilidade robusta na presença de atraso variável.

A industrialização moderna aliada às tendências 4.0 e IoT tem requerido sistemas cada vez mais complexos e conectados. Quando se propõe uma malha de controle estabelecida por meio de uma rede de comunicação em tempo real, conforme ilustrado na Fig. 1.1, está posto um dos principais desafios de sistemas de controle da atualidade. As principais vantagens de um NCS é o cabeamento reduzido ou até mesmo a ausência de cabeamento, facilidade na manutenção, diagnóstico e uma capacidade de ampliação mais rápida. Estas vantagens fazem os NCSs se destacarem em aplicações nas plantas de manufatura, veículos, aviões e espaçonaves (QIU *et al.*, 2016; WALSH *et al.*, 2002; ZHANG *et al.*, 2001). O problema de controle via redes tem motivado o desenvolvimento de diversos trabalhos voltados para o controle de sistemas com atraso variável e tem recebido muita atenção nos últimos anos (ZHANG *et al.*, 2001).

Sistemas controlados através de uma rede de comunicação de dados convivem com imperfeições induzidas pela rede, como por exemplo: atrasos induzidos tanto na medição quanto na atuação e perda de pacotes (ZHANG *et al.*, 2001). Uma aplicação em controle a distância de robôs móveis usando o preditor de Smith filtrado foi discutida em SANTOS *et al.* (2018a). Em ZHANG *et al.* (2005), é proposto um novo método para estabilizar sistemas controlados via rede com atrasos aleatórios do sensor para o controlador e do controlador para o sensor, de tal maneira que o sistema em malha fechada pode ser caracterizado por duas cadeias de Markov.

Em BRESCH-PIETRI *et al.* (2018), é proposto um compensador que estima de maneira aproximada a variação do atraso, testando seu resultado a um sistema sujeito a saltos no valor do atraso, algo muito comum em redes e protocolos de comunicação.

Quando se conhece o modelo do atraso é possível prever o valor futuro do atraso como em BEKIARIS-LIBERIS e KRSTIC (2011). Entretanto, em muitos casos, o modelo do atraso não está disponível e nem é possível prever o seu valor futuro.

O NPC - *Networked Predictive Control* (Controle Preditivo em rede) possui resultados efetivos na compensação do atraso na transmissão e perda de pacotes em NCSs (SUN *et al.*, 2014). Ainda em SUN *et al.* (2014), é apresentada uma condição de estabilidade limitada pela maior taxa de amostragem admissível, utilizando a teoria de sistemas chaveados e o teorema do pequeno ganho.

Quando se trata de análise de estabilidade robusta na presença de atraso variável a maioria dos trabalhos recorrem a uma das duas soluções baseadas no método direto de Lyapunov (FRIDMAN, 2014b):

- Lyapunov - Razumikhin;
- Lyapunov - Krasovskii.

Além da formulação dos funcionais de Lyapunov, esses métodos exigem solução de um problema de otimização baseado em LMIs para verificar a estabilidade (GONZÁLEZ *et al.*, 2013; KARAFYLLIS e KRSTIC, 2013; KRSTIC, 2010, 2008; NORMEY-RICO *et al.*, 2012a; YUE e HAN, 2005).

Por outro lado, tipicamente estes trabalhos ou assumem atraso fixo ou utilizam abordagens robustas para atraso variável baseadas em estratégias de controle sem compensação de atraso. Neste trabalho, o preditor é utilizado com vistas a melhorar o comportamento robusto de sistemas com atraso variável usando o teorema do pequeno ganho como proposto em KAO e LINCOLN (2004). Para tanto, deve-se generalizar o resultado considerando o efeito dos preditores, estender para o caso de múltiplas entradas e incorporar na análise os erros de modelagem. O caminho a ser investigado está ilustrado na Fig. 1.3 com destaque em cinza para as áreas de maior estudo.

1.5 Organização do documento

O restante do documento está dividido em 7 capítulos. No Capítulo 2, apresentam-se os problemas de estabilidade gerais para os sistemas com atraso destacando as principais diferenças na representação matemática em relação aos sistemas sem atraso. Apresentam-se também algumas noções de estabilidade assintótica para sistemas com atraso dando ênfase ao critério de L-K e teorema do pequeno ganho. O Capítulo 3 aborda os métodos de compensação de atraso baseados em preditores destacando o preditor de Smith, a sua versão filtrada e o preditor de Artstein. Baseado no teorema do pequeno ganho, o Capítulo 4 apresenta critérios de garantia de estabilidade na presença do atraso variável utilizando compensação de atraso fixo e também os critérios para sistemas de segunda ordem. Os critérios de estabilidade apresentados no Capítulo 4 são generalizados no Capítulo 5 com a inclusão de incertezas de

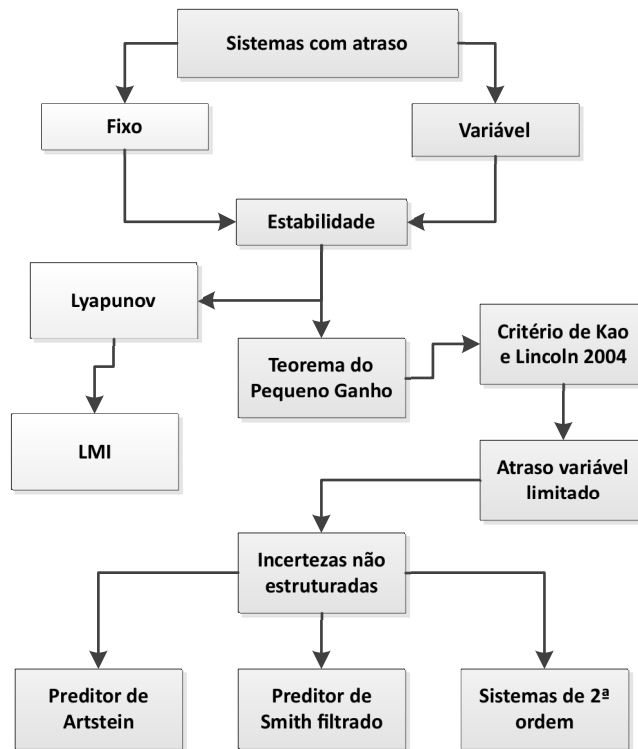


Figura 1.3: Escopo de estudo (cinza escuro).

modelo. O controle robusto de sistemas de segunda ordem com atraso variável é apresentado no 6. No Capítulo 7, alguns exemplos de simulação e um caso experimental são discutidos para ilustrar a viabilidade das propostas. No Capítulo 8, são apresentadas as potenciais contribuições deste trabalho.

Capítulo 2

Estabilidade de sistemas com atraso

Neste capítulo, é apresentado o problema de estabilidade no contexto de sistemas sem atraso, atraso fixo e atraso variável.

2.1 Estabilidade em sistemas sem atraso

A Estabilidade possui um papel fundamental na teoria de sistemas e na engenharia. Diferentes tipos podem surgir, todavia dois são mais comuns:

- Estabilidade a estado zero - Em condições iniciais nulas entradas limitadas levam a saídas limitadas. Conhecida também como BIBO (*Bounded input bounded output*) ou como estabilidade entrada-saída.
- Estabilidade a entrada zero (estabilidade interna) - Todo sistema sem ação de entrada possui um transitório que desaparece com o tempo qualquer que seja a condição inicial que o originou (TROFINO *et al.*, 2003). Ou também, um ponto de equilíbrio é dito estável se todas as soluções iniciando na vizinhança dele retornam a ele (KHALIL, 2001)

2.1.1 Teorema de Lyapunov

Grande parte das formulações de estabilidade para sistemas com atraso baseia-se no conceito de estabilidade segundo Lyapunov.

Inicialmente, considera-se o sistema sem atraso a seguir

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) = 0, \quad \forall t \in [0, \infty). \quad (2.1)$$

Sabendo-se que $x(t) = 0$ garante existência da solução trivial, considera-se portanto, o estudo da estabilidade em torno desse ponto. Se houver necessidade de analisar em

torno de uma solução não-trivial é suficiente aplicar uma mudança de coordenada. Partindo de determinada condição inicial o sistema irá perder energia e retornar para o estado $x(t)=0$. Este decaimento de retorno à origem pode ser descrito por diversas funções e o sistema que se comporta desta forma é dito estável. A estabilidade exponencial é um caso especial de estabilidade assintótica. A origem (ponto de equilíbrio) é exponencialmente estável, partindo de uma condição inicial $x(t_0)$, se existirem constantes positivas, c, k e λ tais que:

$$\|x(t)\| \leq k\|x(t_0)\|e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall x(t_0) < c \quad (2.2)$$

e é globalmente exponencialmente estável se (2.2) valer para qualquer $x(t_0)$.

Teorema 2.1.1 (Teorema de Lyapunov - Estabilidade Exponencial). *Considerando-se o sistema descrito pela Eq. (2.1) e que haja uma função $V : [0, \infty) \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ continuamente diferenciável tal que*

$$k_1\|x\|^a \leq V(t, x) \leq k_2\|x\|^a, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -k_3\|x\|^a, \quad \forall \mathcal{X} \in [0, \infty). \quad (2.4)$$

com a, k_1, k_2, k_3 sendo constantes positivas e $\mathcal{X}$ uma vizinhança da solução trivial. Então o equilíbrio $x = 0$ da Eq. (2.1) é exponencialmente estável. E é globalmente estável caso $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$

A análise de estabilidade segundo Lyapunov utiliza funções com propriedades importantes:

- $V(x)$ é definida positiva se $V(0) = 0$ e $V(x) > 0$ para $x \neq 0$. Se $V(x) \geq 0$ para $x \neq 0$ ela é dita semidefinida positiva;
- $V(x)$ é definida negativa se $-V(x)$ for definida positiva ou semidefinida negativa se $-V(x)$ for semidefinida positiva;
- se não se enquadrar em nenhum dos casos anteriores ela é dita indefinida.

Para aplicação do Teorema 2.1.1, deve haver uma função V crescente e limitada por cima e por baixo por duas funções crescentes dependentes da exponencial positiva da norma dos estados (positividade).

- $V(t, x)$ é conhecida como função de Lyapunov e precisa ser determinada.
- Conforme Eq. (2.4), se $\dot{V}(t, x) \leq 0$, o equilíbrio é estável. Se houver uma função semidefinida negativa sempre maior ou igual a $\dot{V}(t, x)$, o sistema é estável.

- Se $\dot{V}(t, x) < 0$, o equilíbrio é assintoticamente estável. Se houver uma função dependente dos estados definida negativa sempre maior que $\dot{V}(t, x)$ o sistema é estável.

As formas quadráticas para descrever as funções de Lyapunov permitem a verificação da positividade de forma simples como descrito a seguir.

Toda função do tipo $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$V(x) = x^T P x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad , \quad a_{ij}$$

com P real e simétrica poderá ter sua positividade verificada através do cálculo dos autovalores de P . $V(x)$ é definida positiva (semidefinida positiva) se todos os autovalores são positivos (não negativos). Se os menores principais líderes de P são positivos, pode-se dizer também que P é definida positiva ou $P > 0$ (KHALIL, 2001).

Considera-se o exemplo a seguir retirado de KHALIL (2001).

Exemplo 2.1.1. *Seja $V(x)$ dada por:*

$$\begin{aligned} V(x) &= ax_1^2 + 2x_1x_3 + ax_2^2 + 4x_2x_3 + ax_3^2 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x^T P x \end{aligned}$$

Os menores principais de P são a , a^2 e $a(a^2 - 5)$. Se $a > \sqrt{5}$ os determinantes menores principais de P são positivos, logo $P > 0$ se $a > \sqrt{5}$.

- $V(x) \geq 0$ se $a > \sqrt{5}$;
- $V(x) < 0$ se $-P > 0$, ou seja, $a < -\sqrt{5}$.

Exemplo 2.1.2. *Estabilidade de um sistema Linear.*

Analizando-se a condição de estabilidade segundo Lyapunov de um sistema descrito por

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{2.5}$$

tem-se uma função candidata de Lyapunov quadrática $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$. A primeira condição de Lyapunov é atendida com V quadrática se $P > 0$. Calculando sua derivada ao longo da Eq. (2.5)

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) \\
&= [Ax(t)]^T Px(t) + x^T(t)PAx(t) \\
&= x^T(t)[A^T P + PA]x(t),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

possibilita verificar a segunda condição reescrevendo como segue:

$$\dot{V}(x(t)) = x^T(t)[A^T P + PA]x(t) = -x^T(t)Qx(t) \tag{2.7}$$

sendo Q é uma matriz simétrica positiva definida e descrita como segue:

$$A^T P + PA = -Q. \tag{2.8}$$

Pelo teorema, se existir uma matriz Q definida positiva de acordo com (2.8), então a origem é assintoticamente estável. A Eq. (2.8) é conhecida como equação de Lyapunov. A condição de estabilidade então se resume a garantir que

$$P > 0, \tag{2.9}$$

$$A^T P + PA < 0. \tag{2.10}$$

A existência de P simétrica e definida positiva garante a estabilidade assintótica. Trata-se de uma desigualdade matricial linear (LMI) que pode ser tratada por meio de algoritmos de otimização convexa bastante eficientes.

2.2 Estabilidade de Sistemas com atraso

Atualmente a maioria dos sistemas de controle empregam soluções digitais para sua implementação. Neste contexto, os sistemas amostrados que envolvem tanto dinâmicas de tempo contínuo quanto discretas se fazem presentes em sua grande maioria e podem ser representados como na Fig. 2.1. Sendo $P(s)$ a representação do processo contínuo, S_h o amostrador, $C(z)$ o controlador discreto e ZOH o retentor de ordem zero.

Uma possível representação para este sistema pode ser feita da seguinte forma:

$$u(t) = Kx(t_k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \tag{2.11}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.12}$$

Durante a amostragem, os sistemas de controle amostrados sofrem com perdas de informação entre amostras durante a discretização. Este problema permitiu que a abordagem com atraso variável ganhasse atenção e fosse considerada em NCSs. Neste caso, o sistema pode ser substituído por um sistema contínuo com atraso (FRIDMAN, 2014b) e a Eq. (2.12) pode ser reescrita como:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - \delta(t)), \quad \delta(t) = t - t_k, t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (2.13)$$

Nesse caso, o atraso definido por $\delta(t) \geq 0$ é contínuo por partes sendo que $\dot{\delta} = 1$ para $t \neq t_k$. Posteriormente o produto BK poderá ser definido como A_1 para desenvolvimento das condições de estabilidade.

2.2.1 Equações diferenciais funcionais

Diferentemente dos sistemas descritos através de equações diferenciais ordinárias (EDO), os sistemas com atraso fazem parte de uma classe de equações diferenciais de dimensão infinita. Apesar de possuírem uma estrutura linear, eles apresentam infinitos polos tornando difícil a análise de estabilidade.

Um sistema genérico com atraso pode ser descrito da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t - L), \quad t \geq 0, \quad (2.14)$$

sendo L , um valor constante de atraso, $x \in \mathbb{R}^n$ e $A, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes constantes. É no cálculo da solução da Eq. (2.14) que reside uma diferença fundamental em relação às EDOs, pois, ao invés de exigir uma condição inicial $x(0)$ fixa a Eq. (2.14) requer uma função $x(\theta)$ como valor inicial e definida no intervalo $[-L, 0]$, ou seja, $x(\theta) = \phi(\theta), \forall \theta \in [-L, 0]$ para calcular a solução da Eq. (2.14) dentro de $[0, L]$.

Percebe-se que esse cálculo, está definido de $[0, L]$ porque assume-se um atraso constante. Em sistemas com atraso variável, este intervalo é indefinido e em alguns casos especiais pode até ser estimado conhecendo-se previamente a dinâmica de variação do atraso com o tempo, mas em outros casos essa estimação não é possível

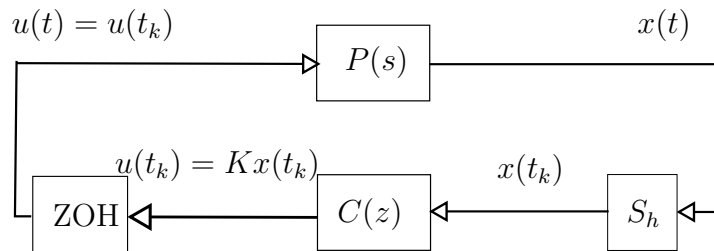


Figura 2.1: Sistema de controle amostrado.

e será necessário recorrer a uma outra abordagem.

O estado de um sistema com atraso pode então ser escrito como

$$x(t) : [-L, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n : \quad x(t)(\theta) = x(t + \theta), \forall \theta \in [-L, 0].$$

Esta condição evidencia a dimensão infinita dos sistemas com atraso. Percebe-se que, em sistemas sem atraso, $x(t)$ é necessário para obter a evolução de x com o tempo. Em sistemas com atraso o estado necessário é $x(t)$ no intervalo $[t - L, t]$, ou seja $x(t)$ (GU *et al.*, 2003).

Esta classe de sistemas pertence ao grupo de EDFs - Equações Diferenciais Funcionais (RICHARD, 2003). A solução da Eq. (2.14) no intervalo $[0, L]$ é obtida com $x_0(\theta) = \phi(\theta)$ e em seguida são obtidas as soluções para os intervalos subsequentes $t \in [L, 2L], t \in [2L, 3L]$, seguindo o mesmo processo (conhecido como método do passo) (DÍAZ, 2018; FRIDMAN, 2014b).

Para exemplificar, considera-se o seguinte sistema:

$$\dot{x}(t) = -x(t - L), \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad L > 0, t \geq 0. \quad (2.15)$$

Sistemas nos quais o atraso ocorre nos estados são conhecidos como EDR (Equação Diferencial Retardada) e aqueles nos quais o atraso ocorre na derivada dos estados de maior ordem são chamados de EDN (Equação Diferencial Neutra). A maioria dos sistemas físicos de interesse é do tipo EDR (FRIDMAN, 2014b).

O atraso pode estar presente tanto na atuação quanto na medição, aparecendo na entrada ou na saída. Uma representação em espaço de estados com atraso na entrada é descrita normalmente da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - L), \quad (2.16)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (2.17)$$

sendo A, B e C matrizes constantes. Uma representação considerando-se o atraso na medição é representada da seguinte forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2.18)$$

$$y(t) = Cx(t - L). \quad (2.19)$$

Os dois sistemas descritos pelas equações (2.16)-(2.19) são equivalentes da entrada para a saída. Este trabalho foca nos sistemas descritos com atraso na entrada por descrever o sistema típico de controle via redes, pois considera-se o ponto de vista

do processo (rede mais planta), ou seja, que o controlador digital não faz distinção de que o atraso é constituído de um atraso de envio mais o de recepção dos dados da rede de comunicação, mas sem perda de generalidade com relação à descrição com atraso na saída. O mesmo sistema pode ser descrito através da Transformada de Laplace, como:

$$Y(s) = G(s)e^{-Ls}U(s), \quad (2.20)$$

sendo $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ a parte do sistema sem atraso.

2.2.2 Análise de Estabilidade

Uma equação diferencial retardada pode ser escrita como:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \forall t \geq t_0, \quad (2.21)$$

sendo $f : \mathbb{R} \times \mathcal{C}[-L, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua nos dois argumentos, localmente Lipschitz no segundo argumento e $\mathcal{C}[-L, 0]$ representa o espaço de Banach de todas as funções contínuas pertencentes ao domínio que possuem a norma

$$\|x(t)\|_C = \max_{\theta \in [-L, 0]} |x(t)(t + \theta)|. \quad (2.22)$$

Para garantir a existência de solução trivial da Eq. (2.21) ($x(t) = 0$), assume-se que $f(t, 0) = 0$ (existência de solução trivial). Tal solução é (FRIDMAN, 2014b)

- *uniformemente estável* se $\forall t \in \mathbb{R}$ e $\forall \epsilon > 0$, existir um $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que $\|x(t)\|_C < \delta(\epsilon)$ implica que $|x(t)| < \epsilon$ para todo $t \geq t_0$; Ou seja, se existir uma vizinhança da solução trivial limitada por δ , de modo que o maior valor das possíveis funções de condição inicial $x(t)$ possa estar restrito ao interior dessa vizinhança, significa que a norma dos estados, com o passar do tempo, permanecerá dentro dessa vizinhança garantindo a estabilidade.
- *uniformemente assintoticamente estável* se for uniformemente estável e existir um $\delta_a > 0$ tal que para qualquer $\eta > 0$ exista um $T(\delta_a, \eta)$ tal que $\|x_{t_0}\|_C < \delta_a$ implica em $|x(t)| < \eta$ para todo $t \geq t_0 + T(\delta_a, \eta)$ e $t_0 \in \mathbb{R}$;
- *globalmente uniformemente assintoticamente estável* se δ_a puder ser um número finito arbitrariamente grande.

Para sistemas autônomos, o termo uniformemente pode ser removido. Apesar do atraso potencialmente afetar de forma negativa a estabilidade do sistema, existem casos nos quais o seu efeito é estabilizante. Um exemplo bastante conhecido é

representado por $\ddot{y}(t) + y(t) - y(t - L) = 0$. Este sistema é considerado instável para $L = 0$ e assintoticamente estável para $L = 1$ (RICHARD, 2003).

Uma maior dificuldade de se verificar as condições de estabilidade através de autovalores nas EDFs do que nas EDOs levou à investigação de inúmeras abordagens para analisar estabilidade. Esta dificuldade aumenta ainda mais se o atraso for variável e apresentar equações não lineares ou incertezas.

As condições de estabilidade podem ser independentes ou dependentes do atraso. Os critérios de estabilidade dependentes do atraso fornecem resultados melhores e menos conservadores, apesar de exigirem algum conhecimento a respeito das taxas e intervalos de variação do atraso. De certa forma, em problemas de engenharia, dispõe-se do intervalo de variação do atraso (RICHARD, 2003). A análise no domínio do tempo generalizando o método direto de Lyapunov para sistemas com atraso é conhecido como Teorema de Lyapunov-Krasovskii. Como este método apresenta as condições de estabilidade em termos de LMIs, cabe ao usuário encontrar tais desigualdades e tratar o problema de otimização convexo para analisar a estabilidade do sistema (DÍAZ, 2018).

Os métodos de Lyapunov podem ser aplicados a uma grande variedade de situações. Este trabalho está voltado ao estudo para o caso de sistemas lineares com atraso. Assim os métodos de L-K e Lyapunov-Razumikhin (L-R) são poderosos para esta categoria de sistemas, entretanto os métodos baseados em L-K podem ser aplicados a um número maior de problemas, além de oferecer condições de estabilidade menos conservadoras (DÍAZ, 2018; FRIDMAN, 2014b).

2.2.3 Método de Lyapunov-Krasovskii

A condição de estabilidade da solução trivial é obtida a partir do seguinte teorema:

Teorema 2.2.1 (L-K). *Supondo-se que $u, v, w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ são funções contínuas e não decrescentes, $u(\theta)$ e $v(\theta)$ são positivas para $\theta > 0$ e $u(0) = v(0) = 0$. A solução trivial da Eq. (2.21) será uniformemente estável se existir um funcional contínuo $V : \mathbb{R} \times \mathcal{C}[-L, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+$ que seja definido positivo, ou seja*

$$u(|x(t)|) \leq V(t, x(t)) \leq v(\|x(t)\|_c), \quad (2.23)$$

com $\|\phi\|_c = \max_{\theta \in [-L, 0]} |\phi(\theta)|$.

Vale lembrar que $|x(t)|$ representa a norma vetorial ou módulo de x . A derivada de $V(t, x(t))$ ao longo da Eq. (2.21) é não positiva no sentido que

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -w(|x(t)|). \quad (2.24)$$

Se $w(\theta) > 0$ para $\theta > 0$, então a solução trivial é uniformemente assintótica-

mente estável. Além de que, se $\lim_{\theta \rightarrow \infty} u(\theta) = \infty$, então será globalmente uniformemente assintoticamente estável.

É importante notar que, diferentemente dos casos de aplicação do teorema de Lyapunov para sistemas sem atraso, V depende de x e nos sistemas com atraso, V depende de $x(t)$. Para incluir a derivada de $x(t)$, considera-se o espaço de Banach $W[-L, 0]$ de funções absolutamente contínuas com a norma

$$\|x\|_W = \|x\|_C + \int_{-L}^0 |x(\theta)|^2 d\theta,$$

para que o Teorema 2.2.1 possa ser estendido para funcionais contínuos $V : \mathbb{R} \times W[-L, 0] \times L_2(-L, 0) \rightarrow \mathbb{R}_+$ da seguinte forma:

Teorema 2.2.2. *Supondo que $u, v, w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ são funções contínuas e não decrescentes, $u(\theta)$ e $v(\theta)$ são positivas para $\theta > 0$ e $u(0) = v(0) = 0$. A solução trivial da Eq. (2.21) será uniformemente estável se existir um funcional contínuo $V : \mathbb{R} \times W[-L, 0] \times L_2(-L, 0) \rightarrow \mathbb{R}_+$ que seja definido positivo, ou seja*

$$u(|x(t)|) \leq V(t, x(t), \dot{x}(t)) \leq v(\|x(t)\|_W) \quad (2.25)$$

tal que sua derivada ao longo da Eq. (2.21) é não positiva no sentido que

$$\dot{V}(t, x(t), \dot{x}(t)) \leq -w(|x(t)|). \quad (2.26)$$

Se $w(\theta) > 0$ para $\theta > 0$, então a solução trivial é uniformemente assintoticamente estável. Além de que, se $\lim_{\theta \rightarrow \infty} u(\theta) = \infty$, então será globalmente uniformemente assintoticamente estável.

Os Teoremas de L-K não orientam quanto à determinação das funções candidatas, entretanto, para a classe de sistemas lineares muitas maneiras de se obter funcionais eficientes são conhecidas.

Condições de estabilidade como LMIs

A primeira desigualdade matricial linear (LMI) conhecida foi apresentada quando Lyapunov desenvolveu sua teoria para garantir a estabilidade da seguinte equação diferencial (BOYD, 1994):

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (2.27)$$

Ele mostra que todas as trajetórias convergem para a origem se e somente se existir uma matriz definida positiva P tal que

$$A^T P + P A < 0, \quad P > 0. \quad (2.28)$$

A condição $A^T P + P A < 0$ é conhecida como desigualdade de Lyapunov em P. Esta condição é um exemplo de LMI.

O sinal “ $<$ ” significa que a matriz do lado esquerdo deve ser simétrica definida negativa se < 0 .

As condições de estabilidade obtidas através dos métodos de L-K geralmente são verificadas utilizando LMIs. É comum o uso de ferramentas computacionais e algoritmos para o tratamento de problemas de otimização convexa. Atualmente diversos algoritmos estão disponíveis para o tratamento dos problemas descritos na forma de LMIs, os exemplos utilizados neste trabalho foram executados usando o YALMIP LÖFBERG (2004) em conjunto com SEDUMI STURM (1999).

Em sistemas de controle as condições de estabilidade podem ser descritas na forma de um problema de otimização convexo, fazendo com que sejam facilmente tratadas através de métodos computacionais utilizando LMIs (BOYD, 1994)

A forma geral de uma LMI é descrita como:

$$F(x) = F_0 + \sum_i^m x_i F_i > 0 \quad (2.29)$$

em que x_i são as variáveis escalares de decisão a serem determinadas (se possível) e $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}, i = 0, \dots, m$, são matrizes simétricas conhecidas. Quando existe uma solução $F(x) > 0$ afirma-se que a LMI é factível.

A LMI Eq. (2.29) é considerada estrita e pode ser tratada como uma restrição convexa em x , ou seja, o conjunto definido por $\{x | F(x) > 0\}$ é convexo.

Uma outra possibilidade é que um conjunto de LMIs dê origem a uma LMI estendida na forma bloco diagonal. Quando as matrizes F_i são diagonais, a LMI $F(x) > 0$ é também um conjunto de desigualdades lineares.

As principais vantagens da abordagem via LMI em sistemas de controle podem ser resumidas a seguir (DUAN e YU, 2013):

- são convexas, logo possuem soluções ótimas globais;
- podem ser resolvidas numericamente de maneira eficiente;
- quase sempre podem ser solucionadas mesmo quando possuem tamanhos muito grandes;
- atendem de forma muito conveniente projetos de controle multiobjetivos;
- dispõe de pacotes de software bastante maduros como por exemplo: YALMIP, CVX e o toolbox de LMI do MATLAB®.

Complemento de Schur

Certas desigualdades não lineares podem ser convertidas para forma de LMI através dos complementos de Schur.

Lema 2.2.1. *Sendo M uma matriz particionada com $A = A^T$, B e $C = C^T$ matrizes de dimensões apropriadas, a seguinte relação é válida:*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0 \iff C > 0 \quad \& \quad A - BC^{-1}B^T > 0. \quad (2.30)$$

Demonstração. Este resultado pode ser mostrado através da transformação de congruência

$$\begin{bmatrix} I & -BC^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} I & 0 \\ -C^{-1}B^T & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BC^{-1}B^T & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

□

Exemplo 2.2.1. *Uma aplicação do complemento de Schur pode ser verificada para a seguinte desigualdade não linear $A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0$, quadrática em P , que é equivalente à seguinte LMI:*

$$\begin{bmatrix} -A^T P - PA - Q & PB \\ B^T P & R \end{bmatrix} > 0.$$

S-procedure

Em alguns casos podem ser encontradas restrições com alguma função quadrática negativa ou até com todas as funções negativas. Incertezas limitadas em norma são exemplos típicos destes casos (DÍAZ, 2018).

Lema 2.2.2. (YAKUBOVICH, 1977) *Considerando-se um $F_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $M_1, \dots, M_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se existirem escalares reais $\lambda_i \geq 0$, tais que*

$$F_0 - \sum_{i=1}^p \lambda_i M_i > 0,$$

então $x^T F_0 x > 0$ para todo $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ o que satisfaz $x^T M_i x > 0$ para todo $i = 1, \dots, p$.

Exemplo 2.2.2. *Considera-se o sistema $\dot{x}(t) = Ax(t) + g(x)$ onde $|g(x)|^2 \leq x^T M x$. A análise de Lyapunov com $V = x^T P x$ mostra que a estabilidade assintótica é garantida se houver uma matriz P tal que*

$$\begin{bmatrix} x & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ g \end{bmatrix} < 0.$$

no qual g satisfaz $g^T g \leq x^T M x$. Com a aplicação do S -procedure esta última é equivalente à existência de um $\lambda \geq 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + \lambda M & P B \\ B^T P & -\lambda I \end{bmatrix} < 0$$

Estabilidade de sistemas lineares com atrasos discretos

Diversos tipos de funcionais têm sido estudados baseados nas funções quadráticas de Lyapunov. Esta escolha é fundamental para obtenção das condições de estabilidade. Outros funcionais especiais (com mais informações) permitem obter condições que dependem ou não do atraso. Para descrever o procedimento será obtida a LMI como condição de estabilidade independente e dependente do atraso, como mostrado em (FRIDMAN, 2014a).

Condição de estabilidade independente do atraso

Considera-se o sistema descrito na forma

$$\dot{x}(t) = A x(t) + A_1 x(t - \delta(t)), \quad t \geq t_0, \quad (2.31)$$

com A e A_1 sendo matrizes $n \times n$ e $\delta(t) \in [0, L]$ e o funcional (função candidata de Lyapunov) a seguir:

$$V(t, x(t)) = x(t)^T P x(t) + \int_{t-\delta(t)}^t x(\theta)^T Q x(\theta) d\theta, \quad (2.32)$$

sendo P, Q matrizes definidas positivas ($P, Q > 0$). Assume-se também que o atraso varia lentamente, ou seja, é diferenciável em t com $\dot{\delta} \leq d \leq 1$. Percebe-se que V atende à condição de positividade $\beta |x(t)|^2 \leq V(t, x(t))$ (para algum $\beta > 0$).

analisando-se a derivada de V ao longo da Eq. (2.31), encontra-se

$$\dot{V}(t, x(t)) = 2x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)Qx(t) - (1 - \dot{\delta}(t))x^T(t - \delta(t))Qx(t - \delta(t)).$$

Inserindo-se a Eq. (2.31) no lado direito da equação anterior chega-se a

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq [x^T(t)x(t - \delta(t))]W \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \delta(t)) \end{bmatrix} \leq \epsilon |x(t)|^2$$

para algum $\epsilon \geq 0$ se

$$W = \begin{bmatrix} A^T P + P A + Q & P A_1 \\ A_1^T P & -(1 - d)Q \end{bmatrix} < 0. \quad (2.33)$$

Lembrando-se que d representa a taxa de variação do atraso. A factibilidade da LMI (2.33) implica em A e $A \pm A_1$ sendo Hurwitz o que já impediria a prova de estabilidade para o caso de uma planta instável em malha aberta com atraso na realimentação e, além disto, $A^{-1}A_1/\sqrt{1-d}$ é uma matriz de Schur, consequentemente com todos os autovalores no interior do círculo unitário (FRIDMAN, 2014a).

Condição de estabilidade dependente do atraso

Inicialmente as condições de estabilidade que dependem do atraso reescrevem o termo atrasado da Eq. (2.31) utilizando-se a seguinte relação:

$$x(t - \delta(t)) = x(t) - \int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}(\theta) d\theta.$$

Com isso o modelo da Eq. (2.31) é transformado de um sistema com atraso discreto para um sistema com atraso distribuído como segue.

$$\dot{x}(t) = (A + A_1)x(t) - A_1 \int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}(\theta) d\theta. \quad (2.34)$$

Com a substituição do termo $\dot{x}(t)$ na Eq. (2.34) obtém-se a amplamente utilizada Primeira Transformação de Modelo (DÍAZ, 2018; FRIDMAN, 2014a)

$$\dot{x}(t) = [A + A_1]x(t) - A_1 \int_{t-\delta(t)}^t [Ax(\theta) + A_1x(\theta - \delta(\theta))] d\theta. \quad (2.35)$$

Em termos de estabilidade, o sistema descrito pela Eqs. (2.35) e (2.31) são diferentes, resultando em uma condição conservadora. As primeiras condições dependentes do atraso tratavam apenas de sistemas com atraso variando lentamente e somente com a introdução da abordagem do descriptor foi possível analisar sistemas sujeitos a variações rápidas do atraso com o método de Krasovskii (FRIDMAN, 2014a; FRIDMAN e SHAKED, 2003).

A abordagem do descriptor

Descritores são sistemas descritos através de equações diferenciais e equações algébricas. A transformação proposta pela Eq. (2.34) é feita considerando-se que $\dot{x}(t) = y(t)$, resultando em

$$y(t) = (A + A_1)x(t) - A_1 \int_{t-\delta(t)}^t y(\theta) d\theta. \quad (2.36)$$

O sistema descriptor da Eq. (2.36) é equivalente à Eq. (2.31) em termos de estabilidade. Desta vez, no cálculo da derivada do funcional de L-K, o termo $\dot{x}(t)$ não é substituído pelo lado direito da Eq. (2.31), pois agora é considerado um novo estado do descriptor. A novidade da abordagem do descriptor não ocorre em V mas em $\dot{V}$.

O funcional proposto em FRIDMAN (2014a) é dado por:

$$V(x(t), \dot{x}(t)) = x^T(t)Px(t) + \underbrace{\int_{-L}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(\lambda)R\dot{x}(\lambda)d\lambda d\theta}_{V_2(\dot{x}(t))}, \quad R > 0. \quad (2.37)$$

Neste ponto, vale destacar que $V_2(\dot{x}(t))$ representa um dos mais importantes termos que compõem funcionais de L-K, pois sua derivada fornece condições de estabilidade que dependem de forma explícita do L (SEURET *et al.*, 2013). Reescrevendo-se $V_2(\dot{x}(t))$ de forma alternativa como

$$V_2(\dot{x}(t)) = \int_{-L}^0 (L + \lambda - t) \dot{x}^T(\lambda)R\dot{x}(\lambda)d\lambda.$$

Derivando-se, tem-se

$$\dot{V}_2(\dot{x}(t)) = L\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \int_{t-L}^t \dot{x}(\lambda)^T R\dot{x}(\lambda)d\lambda \quad (2.38)$$

$$= L\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}(\lambda)^T R\dot{x}(\lambda)d\lambda - \underbrace{\int_{t-L}^{t-\delta(t)} \dot{x}(\lambda)^T R\dot{x}(\lambda)d\lambda}_{\text{Termo que será ignorado}} \quad (2.39)$$

Considera-se a desigualdade de Jensen representada por:

$$\int_L^0 \phi^T(\lambda)R\phi(\lambda)d\lambda \geq \int_L^0 \phi(\lambda)d\lambda R \int_L^0 \phi(\lambda)d\lambda, \quad \forall \phi \in L_2[-L, 0], \forall R > 0. \quad (2.40)$$

Aplicando-se a desigualdade de Jensen para $\delta > 0$ na Eq. (2.38), obtém-se:

$$\begin{aligned} - \int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}(\lambda)^T R\dot{x}(\lambda) &\leq -\frac{1}{\delta(t)} \int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}^T(\lambda)d\lambda R \int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}(\lambda)d\lambda \\ &\leq -\frac{1}{L} \int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}^T(\lambda)d\lambda R \int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}(\lambda)d\lambda \end{aligned} \quad (2.41)$$

E considerando-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[x^T(t)Px(t)] &= 2x^T(t)P\dot{x}(t) \\ &+ 2[x^T(t)P_2^T + \dot{x}^T(t)P_3^T] \left[-\dot{x}(t) + (A + A_1)x(t) - A_1 \int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}(\theta)d\theta \right], \end{aligned} \quad (2.42)$$

O segundo termo pode ser adicionado uma vez que ele tem valor nulo, assim

obtem-se $\dot{V}(x(t), \dot{x}(t))$ adicionando-se o resultado obtido na Eq. (2.40) como:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x(t), \dot{x}(t)) = & 2x^T(t)P\dot{x}(t) \\ & + 2[x^T(t)P_2^T + \dot{x}^T(t)P_3^T] \left[-\dot{x}(t) + (A + A_1)x(t) - A_1 \int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}(\lambda)d\lambda \right] \\ & + L\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - \frac{1}{L} \int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}^T(\lambda)d\lambda R \int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}(\lambda)d\lambda, \end{aligned} \quad (2.43)$$

em que P_2 e $P_3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e são consideradas “variáveis de folga” (FRIDMAN, 2014b). A consequência da Eq. (2.43) é que $\dot{V} \leq -\epsilon(|x(t)|^2 + |\dot{x}(t)|^2)$, $\epsilon > 0$.

Definindo-se um novo vetor coluna

$$\eta(t) = \text{col}\{x(t), \dot{x}(t), \frac{1}{L} \int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}(\lambda)d\lambda\}$$

permite escrever

$$\dot{V}(t, x(t), \dot{x}(t)) \leq \eta^T(t)\Psi_d\eta(t) \leq -\alpha|x(t)|^2$$

para algum $\alpha > 0$ se (FRIDMAN, 2014b)

$$\Psi_d = \begin{bmatrix} P_2^T(A + A_1) + (A + A_1)^T P_2 & P - P_2^T + (A + A_1)^T P_3 & -LP_2^T A_1 \\ (*) & -P_3 - P_3^T + LR & -LP_3^T A_1 \\ (*) & (*) & -LR \end{bmatrix} < 0. \quad (2.44)$$

Esta condição conduz a resultados menos conservadores em sistemas incertos mesmo na ausência de atraso. O fato da matriz P não multiplicar a matriz do sistema permite a utilização de incertezas politópicas (DÍAZ, 2018). O sistema $\dot{x}(t) = -x(t - \delta(t))$ possui atraso máximo obtido de forma analítica igual a 1,5 mas a condição anterior não garante estabilidade para $L \geq 1$.

Condições melhoradas

As condições para o atraso variável devem considerar as diferenças entre $x(t - \delta(t))$ e $x(t - L)$ e o funcional de Lyapunov-Krasovskii amplamente utilizado é dependente da derivada dos estados e é dada por:

$$\begin{aligned} V(t, x(t), \dot{x}(t)) = & x^T(t)Px(t) + \int_{t-L}^t x^T(\lambda)Sx(\lambda)d\lambda + L \int_{-L}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(\lambda)R\dot{x}(\lambda)d\lambda d\theta \\ & + \int_{t-\delta(t)}^t x^T(\lambda)Qx(\lambda)d\lambda. \end{aligned} \quad (2.45)$$

em que $P > 0, S \geq 0, R \geq 0$ e $Q \geq 0$. Com $Q = 0$, obtém-se uma condição de estabilidade dependente do atraso com variação rápida. $R = S = 0$ leva ao critério independente do atraso com variação lenta coincidindo com a Eq. (2.32) (FRIDMAN, 2014b).

A derivada da Eq. (2.45) é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V \leq & 2x^T(t)P\dot{x}(t) + L^2\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) \\ & - L \int_{t-L}^t \dot{x}^T(\lambda)R\dot{x}(\lambda)d\lambda + x^T(t)[S + Q]x(t) \\ & - x^T(t-L)Sx(t-L) - (1-d)x^T(t-\delta(t))Qx(t-\delta(t)) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Decompondo-se o terceiro termo da Eq. (2.46)

$$-L \int_{t-L}^t \dot{x}^T(\lambda)R\dot{x}(\lambda)d\lambda = -L \int_{t-L}^{t-\delta(t)} \dot{x}^T(\lambda)R\dot{x}(\lambda)d\lambda - L \int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}^T(\lambda)R\dot{x}(\lambda)d\lambda \quad (2.47)$$

e fazendo uso da desigualdade de Jensen definida na Eq. (2.40) nos dois termos, resulta em:

$$\int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}^T(\lambda)R\dot{x}(\lambda)d\lambda \geq \frac{1}{L} \int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}^T(\lambda)d\lambda R \int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}(\lambda)d\lambda \quad (2.48)$$

$$\int_{t-L}^{t-\delta(t)} \dot{x}^T(\lambda)R\dot{x}(\lambda)d\lambda \geq \frac{1}{L} \int_{t-L}^{t-\delta(t)} \dot{x}^T(\lambda)d\lambda R \int_{t-L}^{t-\delta(t)} \dot{x}(\lambda)d\lambda. \quad (2.49)$$

O resultado da Eq. (2.47) reescrito na forma da Eqs. (2.48) e (2.49) podem então ser aplicados na Eq. (2.46) como segue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V \leq & 2x^T(t)P\dot{x}(t) + L^2\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) \\ & - \frac{1}{L} \int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}^T(\lambda)d\lambda R \int_{t-\delta(t)}^t \dot{x}(\lambda)d\lambda - \frac{1}{L} \int_{t-L}^{t-\delta(t)} \dot{x}^T(\lambda)d\lambda R \int_{t-L}^{t-\delta(t)} \dot{x}(\lambda)d\lambda \\ & + x^T(t)[S + Q]x(t) - x^T(t-L)Sx(t-L) - (1-d)x^T(t-\delta(t))Qx(t-\delta(t)). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Com a solução dos termos com integral tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V \leq & 2x^T(t)P\dot{x}(t) + L^2\dot{x}^T(t)R\dot{x}(t) - [x(t) - x(t - \delta(t))]^T R[x(t) - x(t - \delta(t))] \\ & - [x(t - \delta(t)) - x(t - L)]^T R[x(t - \delta(t)) - x(t - L)] \\ & + x^T(t)[S + Q]x(t) - x^T(t - L)Sx(t - L) - (1 - d)x^T(t - \delta(t))Qx(t - \delta(t)) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Inserindo-se a equação dinâmica do sistema descrito pela Eq. (2.31) na Eq. (2.51).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V \leq & 2x^T(t)P[Ax(t) + A_1x(t - \delta(t))] \\ & + L^2[Ax(t) + A_1x(t - \delta(t))]^T R[Ax(t) + A_1x(t - \delta(t))] \\ & - [x(t) - x(t - \delta(t))]^T R[x(t) - x(t - \delta(t))] \\ & - [x(t - \delta(t)) - x(t - L)]^T R[x(t - \delta(t)) - x(t - L)] \\ & + x^T(t)[S + Q]x(t) - x^T(t - L)Sx(t - L) - (1 - d)x^T(t - \delta(t))Qx(t - \delta(t)) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Com algumas manipulações, o segundo termo da Eq. (2.52) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} & [LAx(t) + LA_1x(t - \delta(t))]^T R R^{-1} R[LAx(t) + LA_1x(t - \delta(t))] \\ & [LRAx(t) + LRA_1x(t - \delta(t))]^T R^{-1} [LRAx(t) + LRA_1x(t - \delta(t))] \end{aligned}$$

conduzindo-se ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V \leq & 2x^T(t)PAx(t) + 2x^T(t)PA_1x(t - \delta(t)) \\ & + L^2[Ax(t) + A_1x(t - \delta(t))]^T R[Ax(t) + A_1x(t - \delta(t))] \\ & - [x(t) - x(t - \delta(t))]^T R[x(t) - x(t - \delta(t))] \\ & - [x(t - \delta(t)) - x(t - L)]^T R[x(t - \delta(t)) - x(t - L)] \\ & + x^T(t)[S + Q]x(t) - x^T(t - L)Sx(t - L) - (1 - d)x^T(t - \delta(t))Qx(t - \delta(t)) \\ & = \eta^T(t)\Phi\eta(t) + \eta^T(t) \begin{bmatrix} LRA & 0 & LRA_1 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} LRA & 0 & LRA_1 \end{bmatrix}^T \eta(t) \end{aligned} \quad (2.53)$$

sendo

$$\eta(t) = \text{col}\{x(t), x(t - L), x(t - \delta(t))\}$$

e considerando-se

$$W = \begin{bmatrix} LRA & 0 & LRA_1 \end{bmatrix}$$

é possível escrever a condição em uma forma mais compacta como sendo:

$$\frac{d}{dt}V \leq \eta^T(t)[\Phi + WR^{-1}W^T]\eta(t). \quad (2.54)$$

Entretanto, ainda é necessário aplicar o complemento de Schur para obter uma condição na forma de LMI, ou seja:

$$\frac{d}{dt}V \leq \eta^T(t) \begin{bmatrix} \Phi & W^T \\ W & -R \end{bmatrix} \eta(t) \quad (2.55)$$

que permite escrever que $\frac{d}{dt}V \leq -\alpha|x(t)|^2$ para algum $\alpha > 0$ se a seguinte LMI for factível (FRIDMAN, 2014a):

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + S + Q - R & 0 & PA_1 + R & LA^T R \\ * & -S - R & R & 0 \\ * & * & -(1-d)Q - 2R & LA_1^T R \\ * & * & * & -R \end{bmatrix} < 0. \quad (2.56)$$

Esta LMI é dependente do atraso e, além disto, é importante destacar que se ela for factível com $Q = 0$ ou com $d = 1$, ela garante estabilidade assintótica em sistemas com atrasos de variação rápida contidos no intervalo $[0, L]$ (FRIDMAN, 2014b). Ainda é possível reduzir o conservadorismo das condições apresentadas na LMI (2.56) usando a abordagem reciprocamente convexa apresentada em PARK *et al.* (2011).

Um aspecto limitante dessas condições é que consideram apenas atrasos pequenos $\delta(t) \in [0, L]$ enquanto em muitas aplicações o atraso é maior e pode variar dentro de um intervalo $\delta(t) \in [L_0, L_1]$ com $L_0 > 0$. A solução, neste caso, de acordo com FRIDMAN (2014b) é utilizar um funcional composto de duas partes um para o sistema considerando atraso fixo $[0, L_0]$ e outro que considera o efeito variável de L_0 até L_1 semelhante a Eq. (2.45).

As abordagens de L-K são gerais e valem para sistemas não lineares e variantes no tempo. Apesar da análise de estabilidade assintótica envolvendo LMI e funcionais de L-K ser poderosa a busca por condições menos conservadoras por meio da escolha de funcionais mais elaboradas e com mais informações vem acompanhada de uma maior complexidade na descrição via LMI e consequente aumento do número de variáveis de decisão DE OLIVEIRA e SOUZA (2020). Particularizar a análise para sistemas lineares invariantes usando o teorema do pequeno ganho permite atender a um grande número de problemas consolidados cuja modelagem é feita por meio da resposta em frequência como por exemplo os sistemas descritos por meio das

receptâncias e conversores eletrônicos de potência.

2.2.4 Teorema do Pequeno Ganho

Nesta seção, é apresentado brevemente o teorema do pequeno ganho que permite estudar, de forma alternativa, a estabilidade por meio da resposta em frequência. Os critérios definidos por KAO e LINCOLN (2004), que serão utilizados para obter as condições de estabilidade na presença de atraso variável e compensação de parte do atraso fixo através do preditor de Artstein e PSF serão apresentados.

O estudo de sistemas dinâmicos envolve a conexões de pelo menos dois subsistemas. Além disso, na maioria das vezes a descrição de incertezas é feita com base em um modelo (subsistema) nominal conectado a um subsistema que representa a incerteza como uma perturbação. Esta interpretação é importante por descrever de maneira formal a estabilidade entrada-saída de dois subsistemas conectados considerando-se seus ganhos ou atenuações aos sinais aplicados (KHALIL, 2001).

Nesta seção, é apresentada a versão L_2 do teorema do pequeno ganho (KHALIL, 2001, Capítulo 5). O objetivo desta abordagem é obter uma análise robusta da interconexão de dois subsistemas considerando-se o pior caso de seus respectivos ganhos em malha fechada.

A norma L_2 de um sinal $w(t)$ é definida como:

$$\|w(t)\|_{L_2} = \sqrt{\int_{t=0}^{\infty} w(t)^T w(t) dt}. \quad (2.57)$$

Em um sistema linear estável representado por $P(s)$ sendo $Z(s) = P(s)U(s)$, o ganho L_2 é definido pela seguinte relação (KHALIL, 2001, Capítulo 5):

$$\|z(t)\|_{L_2}^2 \leq \left(\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|P(j\omega)\|_2 \right)^2 \|u(t)\|_{L_2}^2. \quad (2.58)$$

E este ganho L_2 pode também ser descrito como:

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|P(j\omega)\|_2 = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(P(j\omega)), \quad (2.59)$$

em que $\bar{\sigma}(P(j\omega))$ corresponde ao máximo valor singular da matriz $P(j\omega)$ (KHALIL, 2001, Capítulo 5). Este ganho L_2 é também conhecido como a norma H_∞ de um sistema linear invariante no tempo, ou seja, $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(P(j\omega)) = \|P(j\omega)\|_\infty$.

Considera-se a conexão em realimentação dos dois subsistemas como mostra a Fig. 2.2 em que Δ_u é um sistema desconhecido e $H_n(s)$ é um sistema linear invariante no tempo. Portanto, assume-se que Δ_u e $H_n(s)$ são sistemas cujas relações entrada-saída apresentam estabilidade e possuem os respectivos ganhos L_2 dados por γ_Δ e

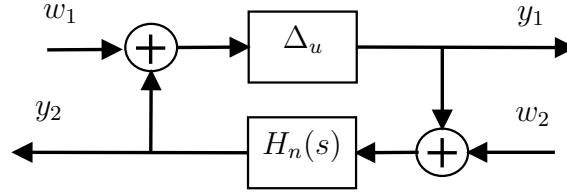


Figura 2.2: Conexão em malha fechada para análise de estabilidade através do Teorema do Pequeno Ganho.

γ_H . O sistema global representado na Fig. 2.2 é estável da entrada para saída se $\gamma_\Delta \gamma_H < 1$, que é conhecido como Teorema do Pequeno Ganho. Este resultado é importante porque γ_Δ não precisa ser conhecido, mas seu valor precisa ser limitado por $\gamma_\Delta < 1/\gamma_H$ para garantir a estabilidade robusta da entrada para saída.

A prova é direta, pois o ganho global em malha fechada é menor que um em qualquer frequência. Este teorema fornece uma interpretação particular para muitos resultados de robustez de sistemas dinâmicos realimentados obtidos a partir da teoria de Lyapunov. A prova detalhada pode ser encontrada em KHALIL (2001).

Critério de KAO, C.-Y., LINCOLN, B.(2004)

O critério de estabilidade baseado no teorema do pequeno ganho presente em KAO e LINCOLN (2004) é utilizado neste trabalho.

Considera-se o sistema mostrado nas Figs. 2.3a e 2.3b sendo C o controlador, P o processo e Δ representa o atraso variável e os argumentos são omitidos para simplificar a apresentação. Assume-se que:

- i) as raízes de $1 + P(s)C(s)$ estão estritamente dentro do semiplano esquerdo ou, para o caso discreto, as raízes de $1 + P(z)C(z)$ estão estritamente dentro do ciclo unitário;
- ii) não há cancelamento de polo instável com zero em malha aberta (devido à necessidade de garantir estabilidade interna).

Considerando-se as Figs. 2.3a e 2.3b, aplica-se o desacoplamento da parcela variante no tempo da parcela invariante transformando o efeito do atraso variável em uma perturbação aditiva resultando nas Figs. 2.4, 2.5 e 2.6. Deseja-se encontrar os ganhos L2 dos dois subsistemas Δ_F e G_{wv} (função de transferência de w para v conforme indicado nas Figs. 2.4, 2.5 e 2.6.) para cada caso. O ganho de Δ_F presente em KAO e LINCOLN (2004) é apresentado a seguir.

Definindo-se os operadores Δ e Δ_F da seguinte forma:

$$\Delta(v) = v(t - \delta(t)), \quad (2.60)$$

$$\Delta_F(v) = \int_{t-\delta(t)}^t v(\theta) d\theta, \quad (2.61)$$

sendo $\delta(t)$ uma função que representa o atraso variante no tempo, $\delta \in [0, \delta_{\max}]$ e $w(t) = -\Delta_F(v)$.

Para obtenção da norma induzida de $w(t)$ é necessário desenvolver o seguinte produto:

$$w(t)^2 = \left[- \int_{t-\delta(t)}^t v(\theta) d\theta \right]^2. \quad (2.62)$$

Através da desigualdade de Jensen é possível escrever:

$$w(t)^2 \leq \delta(t) \left[\int_{t-\delta(t)}^t v^2(\theta) d\theta \right], \quad (2.63)$$

$$\leq \delta_{\max} \int_{t-\delta_{\max}}^t v(\theta)^2 d\theta. \quad (2.64)$$

E em seguida substitui-se o resultado anterior na Eq. (2.57) para obter o máximo ganho L_2 de $w(t)$ e $t < 0$:

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{L_2}^2 &\leq \int_0^\infty \delta_{\max} \int_{t-\delta_{\max}}^t v(\theta)^2 d\theta dt \\ &= \delta_{\max} \int_0^\infty \int_{-\delta_{\max}}^0 v(t+s)^2 ds dt \\ &= \delta_{\max} \int_{-\delta_{\max}}^0 \int_0^\infty v(t+s)^2 dt ds \\ &= \delta_{\max} \int_{-\delta_{\max}}^0 \int_0^\infty v(t)^2 dt ds \\ &= \delta_{\max} \int_{-\delta_{\max}}^0 \|v(t)\|_{L_2}^2 ds \\ &= \delta_{\max} \|v(t)\|_{L_2}^2 \int_{-\delta_{\max}}^0 ds \\ &= \delta_{\max}^2 \|v(t)\|_{L_2}^2. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Assim, conclui-se que o ganho Δ_F é limitado por $\delta_{\max}$ e a condição de estabilidade passa a depender da topologia que resulta em G_{wv} pois pelo teorema do pequeno ganho, se as suposições iniciais apresentadas no início da seção forem atendidas a

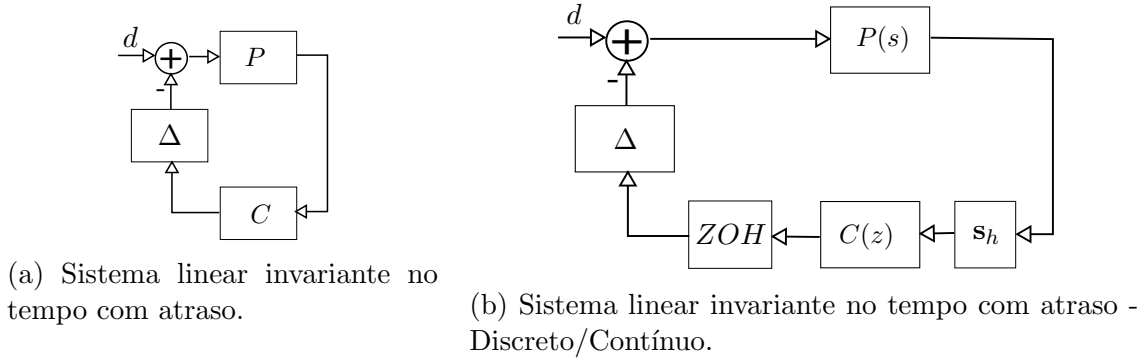


Figura 2.3: Malhas com atraso variável.

interconexão dos sistemas das Figs. 2.3a (contínuo e discreto) e 2.3b serão estáveis se

$$\|G_{wv}(t)\|_{L_2} \|G_{vw}(t)\|_{L_2} < 1,$$

$$\|G_{wv}(t)\|_{L_2} \|\Delta_F\|_{L_2} < 1,$$

$$\|G_{wv}(t)\|_{L_2} \delta_{\max} < 1.$$

Assim como na maioria dos compensadores de tempo morto (DTC), a principal vantagem desta abordagem advém da utilização de métodos baseados em frequência na análise de robustez. Sua interpretação é direta e simples (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2007). Em KAO e LINCOLN (2004), são apresentados três teoremas para a análise de estabilidade robusta em malha fechada de sistemas com atraso variável: i) caso de tempo contínuo, ii) caso de tempo discreto, e iii) caso amostrado (misto contínuo-discreto). Estes teoremas são apresentados brevemente.

Teorema 2.2.3. *Para o caso contínuo, considerando que $C = C(s)$ e $P = P(s)$, o sistema mostrado na Fig. 2.3a é estável para qualquer atraso variável definido por $\Delta(v) = v(t - \delta(t))$ com $0 \leq \delta(t) \leq \delta_{\max}$ se*

$$\left| \frac{P(j\omega)C(j\omega)}{1 + P(j\omega)C(j\omega)} \right| < \frac{1}{\delta_{\max}\omega}, \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (2.66)$$

Teorema 2.2.4. *Para o caso discreto, considerando que $C = C(z)$, $P = P(z)$ e um período de amostragem h , o sistema mostrado na Fig. 2.3a é estável para qualquer atraso variável múltiplo do período de amostragem limitado (considerando-se um número de intervalos de amostragem máximo inteiro N) definido por $\Delta(v) = v(k - \delta(k))$ com $0 \leq \delta(k) \leq Nh$ se*

$$\left| \frac{P(e^{j\omega})C(e^{j\omega})}{1 + P(e^{j\omega})C(e^{j\omega})} \right| < \frac{1}{N|e^{j\omega} - 1|}, \quad \forall \omega \in [0, \pi]. \quad (2.67)$$

Apesar de $z = e^{j\omega h}$ com $\omega \in [0, \pi/h]$, cabe destacar que ao longo desta tese as funções de tempo discreto no domínio da frequência utilizarão o argumento $e^{j\omega}$ ao

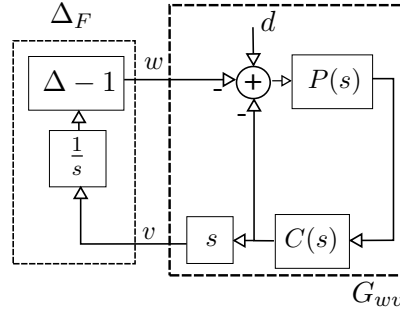


Figura 2.4: Sistema linear invariante no tempo com atraso - Equivalente.

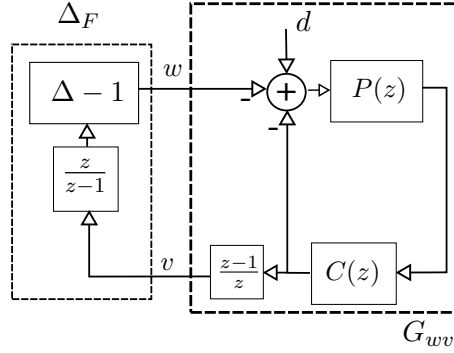


Figura 2.5: Sistema linear invariante no tempo com atraso (discreto) - Equivalente.

invés de $e^{j\omega h}$ uma vez que será adotado $\omega \in [0, \pi]$.

Teorema 2.2.5. *Para o caso de tempo contínuo e tempo discreto (CT-DT), $P = P(s)$ é uma planta de tempo contínuo, estritamente própria e estável, considerando-se $C = C(z)$, tempo de amostragem h , o sistema mostrado na Fig. 2.3b é estável para qualquer atraso variável definido por $\Delta(v) = v(t - \delta(t))$ com $0 \leq \delta(t) \leq Nh$ para algum inteiro N se*

$$\left| \frac{P_{alias}(\omega)C(e^{j\omega})}{1 + P_{ZOH}(e^{j\omega})C(e^{j\omega})} \right| < \frac{1}{N|e^{j\omega} - 1|}, \quad \forall \omega \in [0, \infty]. \quad (2.68)$$

Neste caso, $P_{ZOH}(z)$ é a versão discretizada de $P(s)$ usando um ZOH enquanto

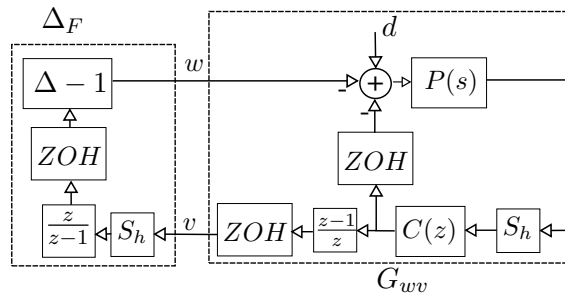


Figura 2.6: Sistema linear invariante no tempo com atraso (Amostrado) - Equivalente.

$P_{alias}(\omega)$ é uma versão aproximada de $P(s)$ dada por:

$$P_{alias}(\omega) = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| P\left(j(\omega + 2\pi k)\frac{1}{h}\right) \right|^2}. \quad (2.69)$$

O cálculo do ganho do subsistema Δ_F (Fig. 2.6) é mais complicado do que para o caso contínuo e o caso discreto devido à presença de subsistemas contínuos e discretos simultaneamente, portanto, é recomendável utilizar o resultado de YAMAMOTO e ARAKI (1994) para obtê-lo conforme descrito em KAO e LINCOLN (2004).

O Teorema 2.2.5 serve para encontrar um dado valor de N inteiro que limita o máximo valor em Nh segundos para o atraso variável máximo com garantia de estabilidade. O corolário a seguir relaxa o valor de N possibilitando que este seja real.

Corolário 2.2.1. *Seja N um número real e considera-se o sistema misto CT-DT descrito no Teorema 2.2.5. Então o sistema de controle é estável para todos os atrasos $0 \leq \delta(t) \leq Nh$ se a seguinte desigualdade*

$$\left| \frac{P_{alias}(\omega)C(e^{j\omega})}{1 + P_{ZOH}(e^{j\omega})C(e^{j\omega})} \right| < \frac{1}{\tilde{N}|e^{j\omega} - 1|}, \quad \forall \omega \in [0, \infty], \quad (2.70)$$

é satisfeita sendo¹ $\tilde{N} = \sqrt{[N]^2 - 2g[N] + g}$ e $g = N - [N]$.

Perceba que $\tilde{N} \leq N$ e que $\tilde{N} = N$ quando N é um inteiro. Com relação ao Teorema 2.2.5 e Corolário 2.2.1, vale ressaltar que, conforme apontado em KAO e LINCOLN (2004), $P_{alias}(\omega) \approx P(e^{j\omega})$ com um período de amostragem adequado (suficientemente pequeno).

Além disso, nota-se que o Teorema 2.2.3 apresenta um critério de estabilidade simplificado para o problema de tempo contínuo. O Teorema 2.2.4 é o equivalente de tempo discreto, e o Teorema 2.2.5 é aplicado ao problema CT-DT visto que o comportamento entre os instantes de amostragem devem ser considerados. O Corolário 2.2.1 estende o resultado do Teorema 2.2.5 a fim de considerar um limite máximo para o atraso que não seja múltiplo do período de amostragem. De fato, o Teorema 2.2.4 poderia ser aplicado ao caso misto CT-DT se a estabilidade robusta fosse verificada apenas nos instantes de amostragem (comportamento entre amostras desconsiderado) e se for admitido que o atraso é múltiplo do período de amostragem. Entretanto, este tipo de suposição para atraso variável é muito restritiva para a maioria dos problemas práticos com atraso variável.

Para ilustrar a aplicação do critério, considera-se o exemplo retirado de (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2007, Exemplo 4.1) onde é representado um sistema de controle

¹A operação $[x]$ denota o maior inteiro menor que x .

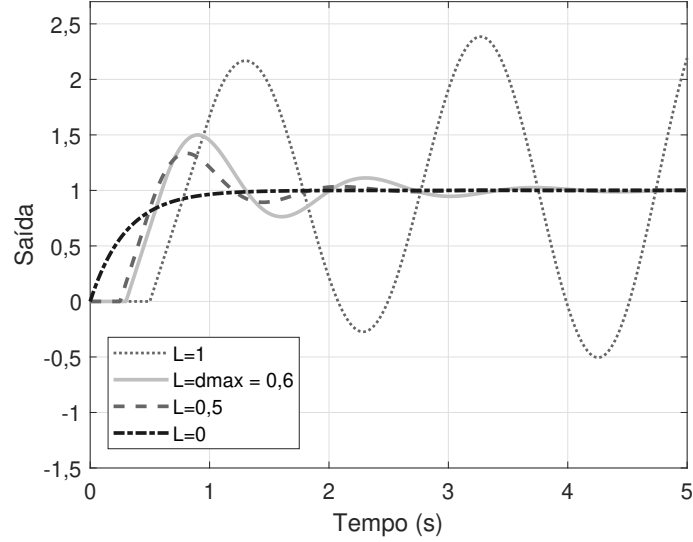


Figura 2.7: Resposta ao degrau do sistema de tanque de aquecimento para diferentes valores de atraso.

da temperatura de saída de um tanque de aquecimento que pode ser medida em diferentes pontos da tubulação. Considera-se o sistema representado pelo seguinte modelo:

$$G(s) = \frac{1}{1,5s + 1},$$

sujeito a uma entrada $u(t - L(t))$ com $0 \leq L(t) \leq \delta_{max}$ e controlador PI $C(s) = K_c(1 + \frac{1}{T_i s})$, com $K_c = 2,5$ e $T_i = 1,5$.

Embora o sistema seja estável para alguns valores de δ entre 1 e $\delta_{max} = 0,6$ a garantia de estabilidade só obtida para valores menores que δ_{max} para atender o critério apresentado no Teorema 2.2.3. A Fig. 2.7 apresenta diversas curvas de resposta ao degrau do sistema para diferentes valores de atraso. Nota-se que, ao desrespeitar a condição de estabilidade robusta ($\delta = 1$) o sistema entra na região instável. Além disso, este exemplo ilustra a degradação no desempenho causada pelo atraso.

O desenvolvimento dos critérios de estabilidade por meio da análise frequencial traz vantagens em problemas que já são naturalmente identificados por meio da resposta em frequência como por exemplo os sistemas vibracionais baseados em receptâncias de segunda ordem. A abordagem frequencial também é bastante utilizada no controle linear de conversores eletrônicos de potência chaveados. Além disso, por mais que o modelo não esteja disponível é possível arbitrar uma faixa de segurança estável por meio da análise via resposta em frequência

Deve-se destacar que a condição de estabilidade robusta com atraso é necessariamente mais conservadora do que a margem de atraso obtida com um atraso fixo, pois o atraso variável induz um comportamento dinâmico arbitrário para o atraso.

Ou seja, o atraso variável pode modificar o sinal de controle efetivo de forma arbitrária dentro do universo de valores definidos pelo intervalo máximo do atraso variável. Este comportamento é particularmente visível em redes de computadores cujo sinal de controle pode ser roteado em caminhos diversos, invertendo-se a ordem de entrega ou até descartando-se pacotes.

No presente trabalho são propostos critérios que permitem avaliar o papel de preditores e dos erros de modelagem no máximo atraso variável por meio da generalização do critério de KAO e LINCOLN (2004).

Capítulo 3

Estratégias de compensação do atraso

Os sistemas com atraso atraíram o interesse de pesquisadores de sistemas de controle nas últimas décadas e diversas contribuições de impacto foram alcançadas, de modo que o início do século 21 pode ser caracterizado como “*time-delay boom*” (FRIDMAN, 2014b). Neste capítulo, são discutidas estratégias para minimizar os efeitos negativos do atraso com o uso dos preditores de Smith e Artstein no contexto de atraso fixo.

3.1 Sistemas com atraso

A abordagem para compensação de atraso baseada na utilização do modelo (controle preditivo) desponta com resultados relevantes, fazendo deste, um dos focos principais deste trabalho. As estruturas dos preditores compensam o tempo morto de maneira que o controlador possa ser sintonizado considerando-se o sistema livre de atraso.

A equação de síntese do controlador pressupõe a necessidade de se obter um controlador a partir de uma resposta em malha fechada desejada para um dado sistema. Em algumas estratégias de síntese direta, a exemplo da técnica de Dahlin (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2007), a relação referência saída é dada por:

$$G_d(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)},$$

ao reescrever para obter a fórmula de síntese do controlador resulta em:

$$C(s) = \frac{1}{G(s)} \frac{G_d(s)}{1 - G_d(s)}.$$

Vale destacar que se trata de uma técnica limitada e que só funciona em casos específicos (não vale para sistemas instáveis em malha aberta) pois envolve o

cancelamento de polos e zeros. A título de exemplo considera-se:

$$G_d(s) = \frac{1}{\tau_c s + 1}$$

garantindo o ajuste da sintonia a partir de τ_c (CORRIPIO e SMITH, 1997). Porém, os sistemas com atraso necessitam que a resposta de malha fechada possua um termo referente ao atraso, ou seja,

$$G_d(s) = \frac{e^{-Ls}}{\tau_c s + 1}$$

que, ao ser substituído na fórmula de síntese, resulta no seguinte controlador:

$$C(s) = \frac{\tau s + 1}{K e^{-Ls}} \frac{\frac{e^{-Ls}}{\tau_c s + 1}}{1 - \frac{e^{-Ls}}{\tau_c s + 1}} = \frac{\tau s + 1}{K e^{-Ls}} \frac{e^{-Ls}}{\tau_c s + 1 - e^{-Ls}}$$

$$C(s) = \frac{\tau s + 1}{K} \frac{1}{\tau_c s + 1 - e^{-Ls}}$$

O termo transcendental referente ao atraso e^{-Ls} inviabiliza a implementação analógica desse controlador, contudo, a sua implementação discreta é possível através de sistemas computacionais. Os controladores capazes de implementar este termo são conhecidos como compensadores de tempo morto ou preditores (CORRIPIO e SMITH, 1997).

De forma geral, o sistema de controle com preditor possui um estágio de predição que utiliza o modelo do processo para estimar o comportamento futuro do sistema. E a saída do preditor é combinada com a saída real da planta, para então, calcular a ação de controle (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2008; PALMOR, 1996).

A estrutura clássica para sistemas de controle realimentados com atraso da Fig. 3.1 permite extrair as seguintes funções de transferência:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)G(s)e^{-sL}}{1 + C(s)G(s)e^{-sL}},$$

$$\frac{Y(s)}{Q(s)} = \frac{G(s)e^{-sL}}{1 + C(s)G(s)e^{-sL}}.$$

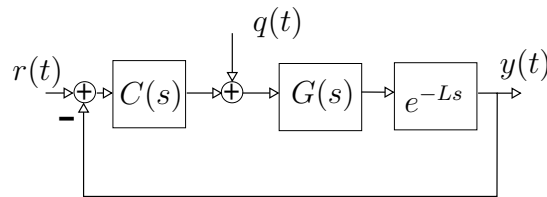


Figura 3.1: Sistema de controle com atraso.

A presença do atraso reduz a margem de fase do sistema e consequentemente a possibilidade de um desempenho melhor. Lembrando que não é suficiente que o sistema seja apenas estável, é importante que apresente margens de estabilidade consistentes. As margens de ganho e de fase são indicadores clássicos de robustez. Particularmente, a margem de fase tem efeito no desempenho transitório de sistemas. Tipicamente é recomendável adotar, para grande parte dos sistemas industriais, margem de fase $\geq 45^\circ$ e margem de ganho $\geq 2 \text{ dB}$ (CORRIPIO e SMITH, 1997).

Para ilustrar o efeito do atraso na estabilidade, o exemplo 2.8 estudado em NORMEY-RICO e CAMACHO (2007) é revisitado. Trata-se de um sistema de aquecimento de tanque abastecido por uma longa tubulação. Este sistema pode ser modelado pela seguinte equação:

$$P(s) = \frac{1}{(1,5s + 1)(0,4s + 1)} e^{-Ls},$$

e controlado por um PI dado por:

$$C(s) = k_c \frac{(sT_i + 1)}{sT_i}.$$

Considerando-se que o sistema não possui atraso, propõe-se $k_c = 1$ e $T_i = 1,2$ resultando em uma margem de fase $MF = 70^\circ$ e uma frequência de cruzamento de ganho $w_{cg} = 0,7 \text{ rad/s}$. Entretanto, a partir do momento que o sistema apresenta um atraso $L = 1,5$ esta margem de fase cai para $MF = 5^\circ$ resultando em um coeficiente de amortecimento ruim. Tal efeito pode ser percebido na Fig. 3.2, pois apresenta o comportamento do sistema para diferentes valores de atraso considerando o controlador PI com dois valores de k_c .

Para alcançar um desempenho em malha fechada adequado reduziu-se o valor de k_c até alcançar margem de fase de 60° . Essa redução do ganho provocou uma redução na frequência de cruzamento do ganho para $w_c = 0,25 \text{ rad/s}$ e, consequentemente, tornou a resposta significativamente mais lenta.

O efeito no domínio do tempo, para este exemplo, está ilustrado na Fig. 3.3 demonstrando uma redução no amortecimento da resposta com aproximação da região instável. Além disso, observa-se que a análise frequencial guarda uma correspondência com a resposta temporal.

Em sistemas com atraso é útil definir a margem de atraso como o máximo valor de atraso admissível em um sistema para que ele não instabilize. Considerando-se que o diagrama de Nyquist de um sistema possui margens de fase ϕ_i associada a frequências ω_i correspondentes para diferentes valores de atraso, define-se a margem de atraso como:

$$D_m = \min_i \left[\frac{\phi_i}{\omega_i} \right].$$

Do ponto de vista teórico é insuficiente considerar apenas as margens de estabilidade de ganho e fase pois dependendo da constante de tempo alguns sistemas podem se instabilizar com margem de ganho e fase suficientemente adequadas quando submetidos a um valor de atraso pequeno (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2007). O exemplo seguinte discutido em NORMEY-RICO e CAMACHO (2007) ilustra este problema. Considera-se a seguinte função de transferência com $n=1,2$:

$$P_n(s) = \frac{K_n}{s(1 + sT_n)}.$$

Deseja-se obter na frequência $\omega_n = 1/T_n$ uma margem de fase $45^\circ(\pi/4)$ e margem de ganho ∞ através da sintonia do K_n . O ganho adequado é obtido como segue

$$|P_n(j\omega_n)| = \frac{|K_n|}{|j\omega_n(1 + j\omega_n T_n)|} = \frac{K_n}{\omega_n|(1 + j1)|} = \frac{K_n}{\omega_n\sqrt{2}} = 1.$$

Este ganho é definido por:

$$K_n = \omega_n\sqrt{2}.$$

Partindo da suposição de que se trata de dois sistemas com índice $n = 1, 2$. Sabe-se que ambos possuem as mesmas margens de fase e ganho. Adicionalmente supõe-se que há um atraso nestes sistemas que não foi considerado. Aplicando-se a definição de margem de atraso chega-se ao seguinte resultado:

$$D_m = \frac{\pi}{4}T_n$$

Analisando-se esta margem de atraso percebe-se que os sistemas com constante de tempo pequenas (ou larguras de banda altas) estão muito mais vulneráveis ao efeito do atraso mesmo possuindo uma margem de atraso razoável.

3.2 Preditor de Smith

Para aplicação de controladores PID em sistemas com atraso a literatura disponibiliza regras de sintonia (Ziegler-Nichols, Cohen-Coon, IAE, ITAE, IMC, S-IMC) para diversos casos e apresenta suas respectivas limitações principalmente para sistemas com atraso dominante. Ainda assim, é possível alcançar uma resposta de malha fechada satisfatória se o atraso for o dobro da constante de tempo do processo ($L = 2T_0$) com a sintonia do PID obtida adequadamente (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2007).

O preditor de Smith representado na Fig. 3.4b foi apresentado inicialmente na década de 1950 (SMITH, 1957). É composto do controlador primário $C(s)$ e da estrutura de predição que inclui o modelo nominal da planta. Sistemas com atraso

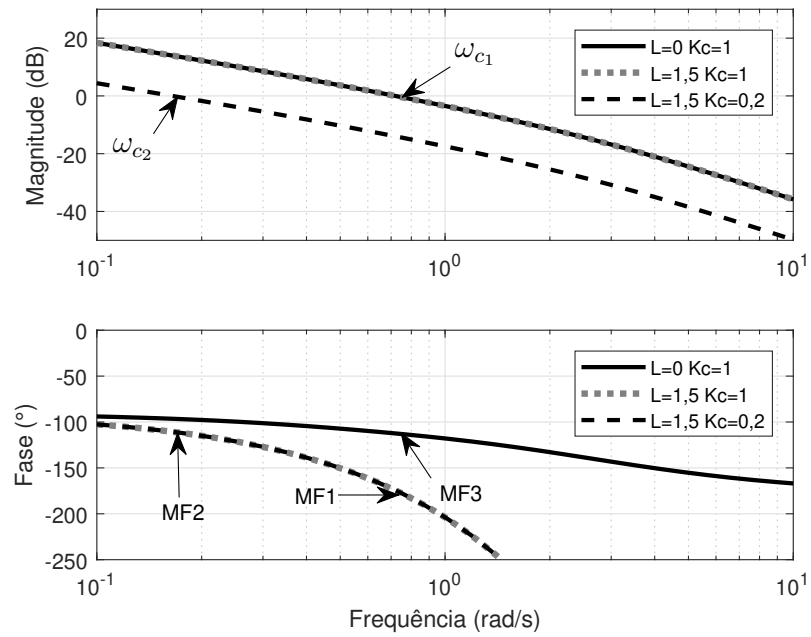


Figura 3.2: Efeito do atraso na resposta em frequência de um sistema com controlador PI. ($MF1 \approx 5^\circ$ $L = 1,5$ $K_c = 1$), ($MF2 \approx 60^\circ$ $L = 1,5$ $K_c = 0,2$), ($MF3 \approx 70^\circ$ $L = 0$ $K_c = 1$).

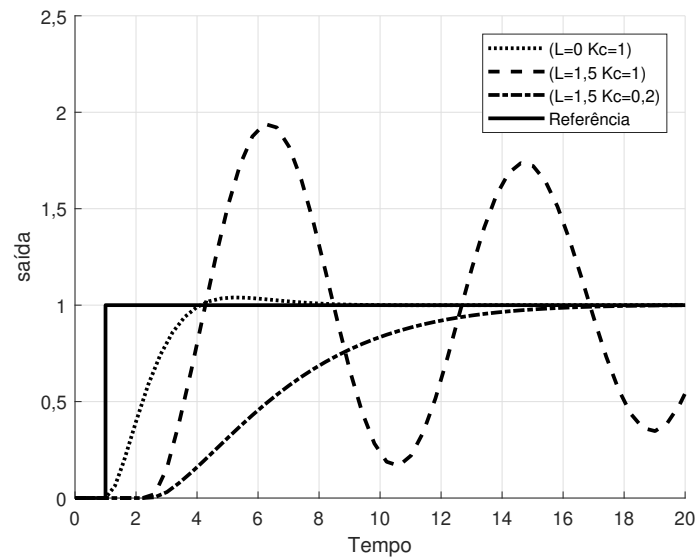


Figura 3.3: Efeito do atraso na resposta no tempo de um sistema com controlador PI.

do tipo SISO (*Single-Input Single-Output*) são representados por $P(s) = G(s)e^{-Ls}$, e o modelo nominal é descrito por $P_n(s) = G_n(s)e^{-L_n s}$ como consequência.

$G_n(s)$ é conhecido como modelo do sistema sem atraso (ou modelo rápido). O atraso nominal é representado por $e^{-L_n s}$. Se for considerada a ausência de erros de modelagem e de perturbação, o erro ($e_p(s)$) entre a saída e o modelo da planta será nulo. Desta forma, na condição nominal, a equação característica que descreve o denominador da função de transferência de malha fechada $Y(s)/R(s)$ não será afetada pelo atraso, fazendo com que o uso do preditor se aproxime da solução ideal.

Uma das grandes vantagens desta formulação é permitir que a sintonia do controlador seja feita utilizando o modelo sem atraso, pois ele elimina o atraso da equação característica. Este é considerado o primeiro CTM e é muito utilizado para melhorar o desempenho de controladores clássicos PI e PID. A simplicidade e facilidade de sintonia fizeram com que o preditor de Smith e suas derivações estejam presentes em grande parte dos sistemas de controle industriais no que se refere a problemas com atraso (DA SILVA *et al.*, 2020; NORMEY-RICO e CAMACHO, 2007, 2008).

A função de transferência do PS da entrada para saída ($Y(s)/R(s)$) é dada por:

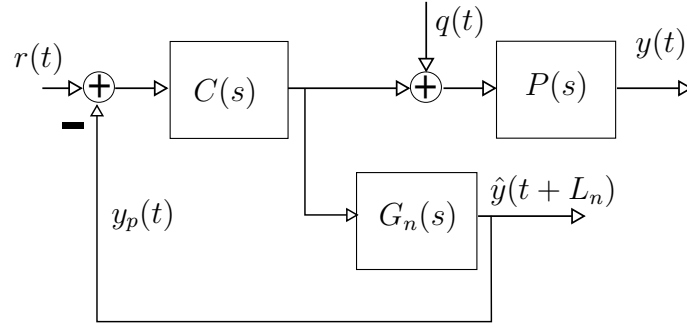
$$H_r(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(s)P_n(s)}{1 + C(s)G_n(s)}. \quad (3.1)$$

E da perturbação para a saída:

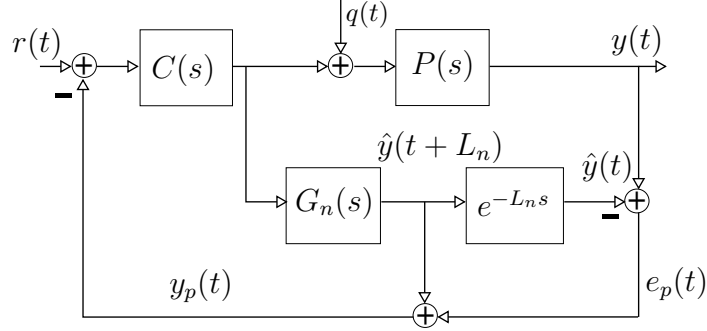
$$\begin{aligned} H_q(s) &= \frac{Y(s)}{Q(s)} = P_n(s) \left[1 - \frac{C(s)P_n(s)}{1 + C(s)G_n(s)} \right] \\ &= P_n(s) \left[\frac{1 + C(s)(G_n(s) - P_n(s))}{1 + C(s)G_n(s)} \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Nesta estrutura, os polos de malha aberta estão presentes na resposta à perturbação ($H_q(s)$) em malha fechada, o que pode ser observado na Eq. (3.2) por conta da presença de $P_n(s)$ fora do colchete. Devido a essa característica, o comportamento da rejeição de perturbação terá que lidar com os efeitos dos polos de malha aberta, implicando em uma resposta à perturbação em malha fechada que não pode ser mais rápida que a de malha aberta.

Infelizmente, sintonizar $C(s)$ para definir a dinâmica da rejeição de perturbação não garante liberdade para obter uma resposta à referência desejada. Isto não é um problema exclusivo do PS, pois trata-se de um problema típico de sistemas com apenas um grau de liberdade. Definir $C(s)$ para uma rápida rejeição de perturbação implica em uma resposta à referência comprometida pela presença de zeros em $H_r(s)$. Um filtro de referência $F(s)$ (de modo a adicionar mais um grau de liberdade ao CTM) pode ser utilizado para atenuar o efeito desses zeros pois eles não aparecem



(a) Malha aberta.



(b) Malha fechada.

Figura 3.4: Preditor de Smith.

em $H_q(s)$ (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2008).

O preditor de Smith possui as seguintes propriedades fundamentais:

- i) **Compensação do atraso** - O atraso não aparece na equação característica de malha fechada $1 + C(s)G(s) = 0$. Desta forma não há interferência na margem de fase;
- ii) **Predição** - Analisando-se as Figs. 3.4a e 3.4b, percebe-se que $y_p(t)$ é uma estimativa de $y(t + L)$;

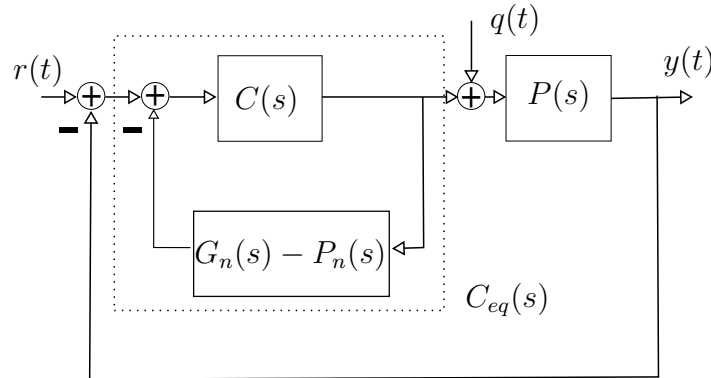


Figura 3.5: Preditor de Smith - Estrutura Equivalente.

iii) **Compensação dinâmica ideal** - considerando-se que o controlador ideal seja

$$\frac{C(s)}{1 + C(s)G_n(s)} = G_n(s)^{-1},$$

verifica-se que a saída é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= r(t - L) + G(s)e^{-Ls}[q(t) - q(t - L)] \\ &= r(t - L) + G(s)e^{-Ls}[1 - e^{-Ls}]q(t), \end{aligned}$$

resultando-se em uma resposta à perturbação com um atraso de $2L$. Esta propriedade é útil para estabelecer um limite teórico de desempenho mesmo adotando um preditor e um controlador ideais.

Como apresentado anteriormente, observa-se que a Eq. (3.1) não tem o efeito do atraso na equação característica. Entretanto, na Eq. (3.2), nota-se que os polos instáveis de $P_n(s)$ (caso existam) não podem ser removidos de $H_q(s)$, de maneira que a formulação original do PS não pode ser usada para controle de plantas instáveis pois esta característica faz com que o sistema seja internamente instável, por consequência da lei de controle que estabelece uma estratégia por cancelamento.

Por outro lado, se o polo estiver na origem (sistema integrador), ou seja, $P_n(s)$ tiver um polo em zero, significa que o termo $P_n(s)[1 - e^{-Lns}]$ não o terá, uma vez que $[1 - e^{-Lns}]$ é zero para $s = 0$, o que cancelaria o polo de $P_n(s)$. A conclusão é que os polos instáveis não podem ser removidos de $H_q(s)$ mas o polo integrador $s = 0$ pode ser retirado. Apesar de permitir o controle de plantas integradoras, este cancelamento irá impor dificuldades na rejeição de perturbação.

Para compreender a limitação do PS para rejeitar perturbações em relação a plantas integradoras é necessário analisar a estrutura equivalente obtida da Fig. 3.4b e representada pela Fig. 3.5 que apresenta um controlador equivalente dado por:

$$C_{eq}(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)(G_n(s) - P_n(s))}.$$

O problema existe porque mesmo que $C(s)$ possua uma ação integral, esta é incapaz de rejeitar perturbações constantes, pois o controlador equivalente $C_{eq}(s)$ não possui esta ação integral.

Apesar de poder ser aplicado em muitas situações reais, as desvantagens da formulação original do preditor de Smith limitam sua aplicação mais ampla servindo de estímulo a modificações em sua estrutura que visam basicamente (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2007):

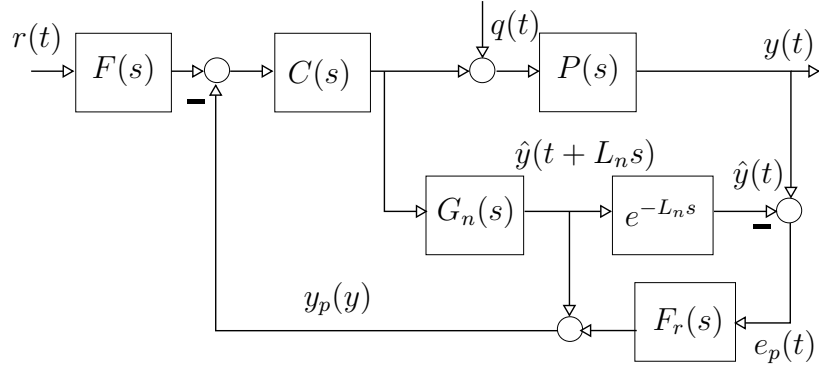


Figura 3.6: Preditor de Smith Filtrado.

- a) melhorar o desempenho regulatório na presença de perturbações;
- b) utilizá-lo no controle de plantas instáveis;
- c) melhorar seu desempenho robusto;
- d) facilitar a sintonia em estruturas com dois graus de liberdade.

Muitas dessas estruturas propostas são complexas ou são voltadas para casos mais particulares como FOPDT - *First order plus deadtime* (primeira ordem mais atraso) ou SOPDT - *Second order plus deadtime* (segunda ordem mais atraso) ou plantas integradoras ou plantas instáveis.

A modificação no PS proposta na seção seguinte permite minimizar os efeitos dos erros de modelagem e controlar plantas instáveis/integradoras (em malha aberta) desde que utilize a abordagem discreta unificada.

3.3 Preditor de Smith filtrado

Uma das modificações propostas em NORMEY-RICO e CAMACHO (2007) está representada na Fig. 3.6 contando com a presença de dois elementos adicionais: um filtro de robustez $F_r(s)$ e um filtro de referência $F(s)$. Este é conhecido como PSF - Preditor de Smith Filtrado. Esta versão do PS é discutida em maiores detalhes nesta seção pois terá papel fundamental no desenvolvimento dos resultados deste trabalho.

É na presença de incertezas de modelagem que o filtro de robustez ($F_r(s)$) se faz importante, pois age para atenuar os efeitos do erro de predição, melhorando o desempenho global. Esta robustez alcançada via $F_r(s)$ é benéfica ao sistema, porém pode tornar a resposta mais lenta, cabendo ao projetista buscar a melhor relação de compromisso entre robustez e desempenho através da sintonia do $F_r(s)$ (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2009, 2008). O filtro de referência $F(s)$ é utilizado para conferir mais um grau de liberdade ao PSF para melhorar o desempenho servo.

No caso contínuo, a eliminação dos polos indesejáveis de $H_q(s)$ pode não ser efetiva, de modo que a aplicação do PSF somente é possível em uma estrutura de controle discreta que será apresentada adiante. Portanto, a estrutura representada na Fig. 3.6 só pode ser utilizada para plantas estáveis (NORMEY-RICO *et al.*, 2012a). No caso discreto, o controle de plantas instáveis é possível desde que o o filtro de robustez seja sintonizado de maneira a eliminar o polo instável na função de transferência da perturbação para a saída. Neste caso, o controlador deve ser projetado para atender as especificações do seguimento de referência.

Além das propriedades intrínsecas do PS que já foram mencionadas, duas propriedades importantes do PSF merecem destaque:

- i) a relação de compromisso entre robustez e desempenho na rejeição de perturbação pode ser definida pelo filtro $F_r(s)$ sem afetar a resposta nominal de seguimento de referência;
- ii) este filtro pode ser aplicado para garantir a estabilidade interna de plantas integradoras ou instáveis na presença de atraso, quando adotada a formulação discreta (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2009).

A estrutura de análise do PSF é apresentada na Fig. 3.6, sua versão amostrada está representada na Fig. 3.7a, e a estrutura de implementação prática é exibida na Fig. 3.7b. A versão amostrada exibida na Fig. 3.7a possui elementos similares ao caso contínuo e a interconexão entre a parte contínua e discreta é feita através de um ZOH.

Com base na estrutura de análise de tempo discreto da Fig. 3.7a, as seguintes relações são válidas no caso nominal ($P(z) = P_n(z)$):

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = F(z) \frac{C(z)P_n(z)}{1 + C(z)G_n(z)}, \quad (3.3)$$

$$\frac{Y(z)}{Q(z)} = P_q(z) \left[1 - F_r(z) \frac{C(z)P_n(z)}{1 + C(z)G_n(z)} \right], \quad (3.4)$$

$$\frac{Y(z)}{N(z)} = 1 - F_r(z) \frac{C(z)P_n(z)}{1 + C(z)G_n(z)}, \quad (3.5)$$

em que $P_q(z) = P(z)$ e $N(z)$ é a transformada Z de $n(t)$. Assim como no caso contínuo, o filtro de robustez modifica a resposta de rejeição de perturbação, mas não afeta a resposta nominal à referência. Esta propriedade é interessante e pode ser utilizada para lidar com atrasos variáveis discretos conforme verificado em NORMEY-RICO *et al.* (2012b).

Como na prática apenas os CTMs de tempo discretos são utilizados, a estrutura unificada proposta em NORMEY-RICO e CAMACHO (2009) e representada na Fig. 3.7b é recomendada pois é necessária no controle de plantas instáveis.

A estrutura de implementação discreta unificada é utilizada para garantir a estabilidade interna caso o sistema seja integrador ou instável em malha aberta. Esta estabilidade interna é obtida se o filtro de robustez garantir que $S(z) = [1 - z^{-d_n} F_r(z)] G_n(z)$ seja um filtro estável (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2009). Em resumo, $F_r(z)$ deve ser definido de modo que os polos instáveis de $G_n(z)$ sejam eliminados de $S(z)$.

Considerando-se que:

$$G_n(z) = \frac{N_n(z)}{D_n(z)}; \quad F_r(z) = \frac{N_r(z)}{D_r(z)},$$

$S(z)$ pode ser escrita como

$$S(z) = \frac{N_n(z)}{D_n(z)D_r(z)} [D_r(z) - N_r(z)z^{-d_n}],$$

$$S(z) = \frac{N_n(z)}{z^{d_n} D_n(z) D_r(z)} [z^{d_n} D_r(z) - N_r(z)].$$

O projeto de $N_r(z)$ é feito para garantir

$$[D_r(z) - N_r(z)z^{-d_n}] = 0, \quad \forall z^* : D_n(z^*) = 0, |z^*| > 1,$$

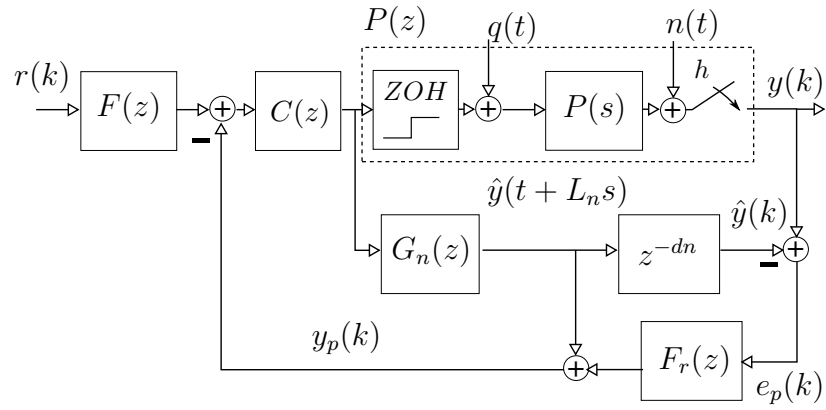
sendo z^* utilizado para representar polos de malha aberta localizados fora do círculo unitário.

O cancelamento de polos com zeros é resolvido através da divisão de polinômios $[D_r(z) - N_r(z)z^{-d_n}]$ e $D_n(z)$. Além disto, para rejeitar perturbação em degrau é necessário que o quociente tenha uma raiz em $z = 1$, já para rejeitar perturbação em rampa é necessário que tenha duas raízes em $z = 1$ (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2009).

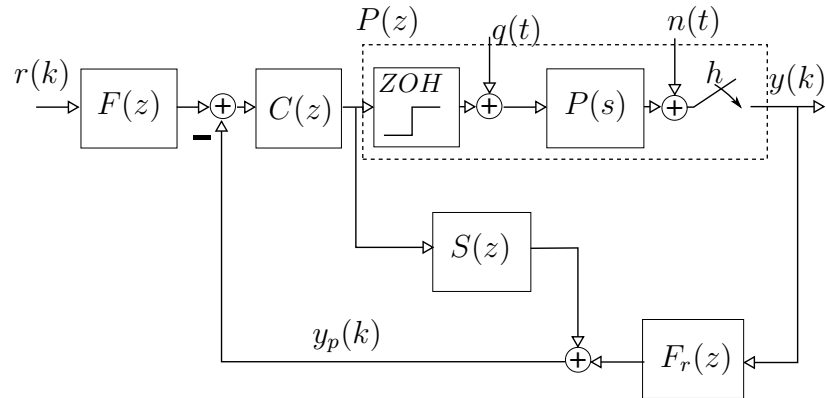
3.3.1 Análise de Robustez

A presença de incertezas de modelagem faz com que o erro de predição decorrente de incerteza de atraso seja realimentado para o controlador de forma periódica. E a ação de controle para uma mudança de referência aplicada em $t = t_0$ resultará em um erro nulo até $t = t_0 + x$ sendo $x = \min(L_n, L)$. Este sinal de erro será realimentado e seu efeito somente será percebido após x segundos. Apesar da necessidade de realimentação deste erro atrasado para garantir a rejeição de perturbação ele pode causar instabilidade em malha fechada.

Importante notar que o erro de modelagem do atraso pode ser assumido como uma perturbação periódica com período aproximadamente igual a $x = \min(L_n, L)$. A filtragem deste erro fornece uma forma de ampliar a faixa de atraso fixo tolerável



(a) Preditor de Smith Filtrado - Tempo discreto.



(b) Preditor de Smith Filtrado Discreto - Forma Unificada.

Figura 3.7: Preditor de Smith Filtrado Discreto - Forma Unificada.

pelo sistema (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2009).

Para iniciar a análise de robustez é necessário compreender que a função que descreve o processo contém incertezas. Uma ferramenta poderosa e elegante de se verificar os efeitos dessas incertezas é o diagrama de Nyquist. De modo que $P(s)$ pertence a uma família de funções descritas como segue:

$$P(s) = P_n(s) + \Delta_a(s) = P_n(s)(1 + \Delta_P(s)).$$

As seguintes suposições são assumidas:

- i) Todas as plantas possuem o mesmo número de polos no semi plano direito;
- ii) $\overline{\Delta_P}(s)$ e $\overline{\Delta_a}(s)$ definem o limitante de incerteza multiplicativa e aditiva, respectivamente.

Sabe-se que o controlador $C(s)$ estabiliza $P_n(s)$ de modo que a curva (nominal) $C(j\omega)P_n(j\omega)$ não envolve o círculo unitário no diagrama de Nyquist, desta forma a distância da curva de $C(j\omega)P_n(j\omega)$ para o ponto -1 estabelece uma margem de robustez. Assumindo que $\Delta_a(j\omega)$ também é conhecido, uma curva semelhante (real) pode ser obtida para $C(j\omega)(P_n(j\omega) + \Delta_a(j\omega))$ conforme Fig. 3.8. A distância entre a curva nominal e a curva real representada pelo segmento AB é obtida conforme a seguir:

$$|C(j\omega)(P_n(j\omega) + \Delta_a(j\omega)) - C(j\omega)P_n(j\omega)| = |C(j\omega)\Delta_a(j\omega)|.$$

Além disto sabe-se que para cada frequência a distância entre a curva nominal e o ponto -1 é dada por:

$$|(-1 - C(j\omega)P_n(j\omega))| = |(1 + C(j\omega)P_n(j\omega))|,$$

de modo que a seguinte condição pode ser escrita

$$|C(j\omega)\Delta_a(j\omega)| < |(1 + C(j\omega)P_n(j\omega))|, \quad \forall \omega > 0.$$

definindo-se assim, o maior valor de incerteza (maior distância $\Delta_a(j\omega)$ entre a curva real e nominal) que garante a estabilidade robusta como sendo

$$|\Delta_a(j\omega)| < \frac{|(1 + C(j\omega)P_n(j\omega))|}{|C(j\omega)|}, \quad \forall \omega > 0,$$

ou também

$$|\Delta_P(j\omega)| < \frac{|(1 + C(j\omega)P_n(j\omega))|}{|C(j\omega)P_n(j\omega)|}, \quad \forall \omega > 0.$$

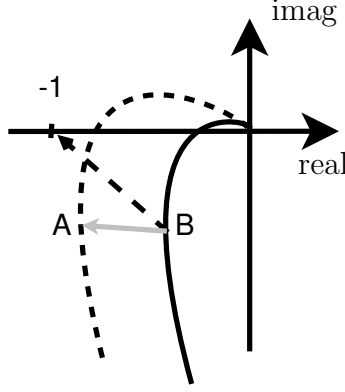


Figura 3.8: Diagrama de Nyquist - $C(j\omega)P_n(j\omega)$ (linha cheia), $C(j\omega)(P_n(j\omega) + \Delta_a(j\omega))$ (linha tracejada) e $C(j\omega)\Delta_a(j\omega)$ (segmento cinza - A e B são pontos de mesma frequência) (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2007).

Lembrando-se que isso precisa ser respeitado para toda a família de curvas possíveis, ou seja,

$$|\overline{\Delta_a(j\omega)}| < \frac{|(1 + C(j\omega)P_n(j\omega))|}{|C(j\omega)|}, \quad \forall \omega > 0. \quad (3.6)$$

$$|\overline{\Delta_P(j\omega)}| < \frac{|(1 + C(j\omega)P_n(j\omega))|}{|C(j\omega)P_n(j\omega)|}, \quad \forall \omega > 0. \quad (3.7)$$

Neste caso, o filtro de robustez $F_r(s)$ com ganho estático unitário, passa-baixas, é uma solução simples, pois pode atenuar as oscilações naquelas frequências onde a incerteza é mais significativa e ainda atenuar ruídos causados pela medição.

Adota-se $dP_{PS}(\omega)$ e $dP_{PSF}(\omega)$, respectivamente, como sendo os índices de robustez do PS e do PSF. A condição de estabilidade robusta para o PS é dada por:

$$\overline{\Delta_P}(\omega) < dP_{PS}(\omega) = \frac{|1 + C(j\omega)G_n(j\omega)|}{|C(j\omega)G_n(j\omega)|}, \quad \forall \omega > 0. \quad (3.8)$$

Para a nova estrutura, considerando-se o PSF, a condição se torna:

$$\overline{\Delta_P}(\omega) < dP_{PSF}(\omega) = \frac{|1 + C(j\omega)G_n(j\omega)|}{|C(j\omega)G_n(j\omega)F_r(j\omega)|}, \quad \forall \omega > 0, \quad (3.9)$$

Comparando-se as Eqs.(3.8) e (3.9), nota-se que:

$$dP_{PSF}(\omega) = \frac{dP_{PS}(\omega)}{|F_r(j\omega)|},$$

de tal maneira que $F_r(j\omega)$, sendo passa-baixas e com ganho estático unitário, pode atenuar o índice de robustez em frequências específicas. De forma alternativa a Eq. (3.9) pode ser reescrita para mostrar de forma explícita o papel do $F_r(s)$ em termos de robustez da seguinte forma:

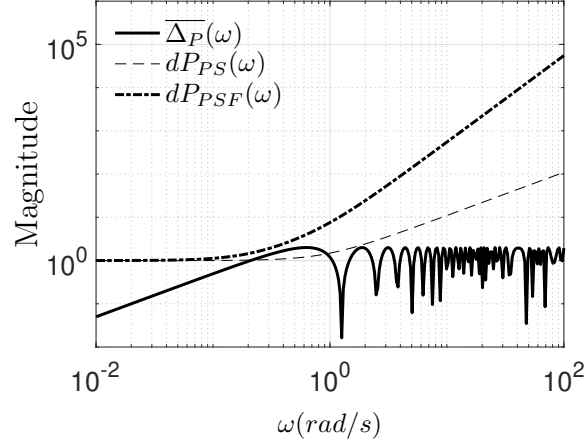


Figura 3.9: Incerteza no valor do atraso $L = 15$ e $L_n = 10$: Comparação entre PS e PSF na capacidade de atenuar o efeito da incerteza.

$$|F_r(j\omega)| < \frac{1}{\overline{\Delta_P}(\omega)} \frac{|1 + C(j\omega)G_n(j\omega)|}{|C(j\omega)G_n(j\omega)|} = \overline{\Omega}(\omega). \quad (3.10)$$

Neste caso, $F_r(\omega)$ pode ser sintonizado considerando $\overline{\Omega}(\omega)$ como uma fronteira de robustez.

O exemplo a seguir, adaptado de NORMEY-RICO e CAMACHO (2007), demonstra o processo de análise de robustez comparando o índice de robustez do PS e PSF. Considera-se a planta com erro de estimação do atraso, na constante de tempo e no ganho estático:

$$P(s) = \frac{1}{s + 0,833} e^{-15s}, \quad P_n(s) = \frac{0,9091}{s + 0,9091} e^{-10s},$$

com controlador PI com $K_p = 1$ e $T_i = 1,1$.

Para ilustrar o ganho de robustez, considera-se o filtro $F_r(s) = \frac{1}{sT_f + 1}$ sendo $T_f = 0,5L_n$.

Na Fig. 3.9, nota-se que para uma determinada faixa de frequência $\overline{\Delta_P}(\omega) > dP_{PS}(\omega)$, de modo que a condição de estabilidade da Eq. (3.8) não é atendida nessa faixa, enquanto que $\overline{\Delta_P}(\omega) < dP_{PSF}(\omega)$ para todas as frequências, mantendo a estabilidade robusta. Pode ser verificado em NORMEY-RICO e CAMACHO (2008) que incertezas de modelagem no atraso contribuem mais para conduzir sistemas com atraso dominante para instabilidade do que outros parâmetros da planta como constante de tempo e ganho estático.

Em controle de processos, é comum usar filtros passa-baixas com apenas um parâmetro de sintonia para ajustar o controlador para atender aos requisitos de malha fechada como robustez, sensibilidade a ruído entre outros (SANTOS *et al.*, 2010).

Os estudos de caso descritos nas Seções 7.1, 7.2, 7.3, 7.4 e 7.7 apresentam os be-

nefícios da utilização do F_r na recuperação da estabilidade robusta. A análise contempla sistemas lineares invariantes no tempo incertos. Neste trabalho, será avaliado o papel do filtro de robustez na presença de atraso variável e incertezas de modelo.

3.4 Preditor de Artstein

O preditor de Artstein permite ampliar a capacidade de compensação de atraso do preditor de Smith para sistemas MIMO e instáveis em malha aberta. Este é baseado na alocação de espectro finito (FSA) (MANITIUS e OLBROT, 1979) e no método de redução de Artstein (ARTSTEIN, 1982). Sua topologia permite o controle de plantas instáveis sem qualquer modificação na estrutura de predição. Apresenta as vantagens da representação em espaço de estados em contraponto à descrição entrada-saída do PS.

Diversas propostas têm sido apresentadas para melhorar o desempenho do preditor de Artstein nos últimos anos em razão de sua facilidade em lidar com plantas instáveis (FRANKLIN e SANTOS, 2018; LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015; SANTOS *et al.*, 2018b; SANTOS, 2016; SANZ *et al.*, 2016). Para simplificar o problema, considera-se apenas atraso na entrada e ausência de atraso nos estados. Além disso, este trabalho irá considerar que os estados estão acessíveis.

Considera-se o sistema contínuo no tempo e com atraso $L(t) = \bar{L} + \delta(t)$ na entrada:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - L(t)) + d(t), \quad (3.11)$$

$$x(0) = x_0, \quad (3.12)$$

sendo $d(t)$ uma perturbação.

Premissa 3.4.1. *A e B são matrizes constantes e conhecidas e o par (A, B) é controlável.*

Premissa 3.4.2. *$L(t) > 0$ é limitado.*

Premissa 3.4.3. *O sistema será estabilizado através de um ganho/matriz de realimentação de estados K.*

Neste problema, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa o vetor de estados, $u(t) \in \mathbb{R}^q$ o vetor do sinal de controle e $d(t)$ uma perturbação. Para fins de discussão, assume-se inicialmente que $\delta(t) = 0$ tal que $L(t) = \bar{L}$.

O vetor de estados predito do sistema dado pela Eq. (3.11) em relação ao instante $t + \bar{L}$ obtido no instante t , também conhecido como $x_p(t)$ é dado por:

$$x_p(t) = e^{A\bar{L}}x(t) + \int_{t-\bar{L}}^t e^{A(t-\lambda)}[Bu(\lambda) + d(\lambda + \bar{L})]d\lambda, \quad \forall \quad t \geq 0. \quad (3.13)$$

Cabe notar que $x_p(t) = x(t + \bar{L})$. No entanto, não se conhece o valor de $d(t + \bar{L})$ no instante t , o que inviabiliza o cálculo do valor exato de $x_p(t)$ no instante corrente (t) . Uma possibilidade é eliminar a perturbação da equação de predição obtendo-se uma predição aproximada:

$$x_{\hat{p}}(t) = e^{A\bar{L}}x(t) + \int_{t-\bar{L}}^t e^{A(t-\lambda)}Bu(\lambda)d\lambda \quad \forall \quad t \geq 0. \quad (3.14)$$

A transformação de Artstein (ARTSTEIN, 1982) permite obter um sistema livre de atraso a partir do sistema com atraso na entrada.

A equação de estado livre de atraso usando a redução de Artstein (ARTSTEIN, 1982; LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015; SANTOS, 2016) pode então ser escrita como:

$$\dot{x}_{\hat{p}}(t) = Ax_{\hat{p}} + Bu(t) + e^{A\bar{L}}d(t), \quad (3.15)$$

sendo esta última recomendada para análise de rejeição de perturbação (LÉCHAPPÉ *et al.*, 2015). Na hipótese de ausência de perturbação ($d(t) = 0$), estabilizar $x_{\hat{p}}$ equivale a estabilizar $x(t)$. Entretanto, em sistemas com perturbação, isto não será mais verdade. Percebe-se que na sua formulação original o preditor de Artstein não teve como interesse atenuar ou rejeitar perturbações. Em LÉCHAPPÉ *et al.* (2015), um novo esquema de predição foi proposto para atenuar o efeito de perturbações desconhecidas. Apesar de não poder prever as perturbações desconhecidas de maneira exata ele se mostra efetivo na eliminação de perturbações constantes em regime permanente e ainda é capaz de atenuar o efeito de outros tipos de distúrbios (SANTOS, 2016).

Recentemente, uma generalização para compensação de perturbações constantes foi proposta em SANTOS (2016) para sistemas com atraso e perturbações desconhecidas e que também pode ser utilizada para rejeitar perturbações senoidais com erro nulo. Para o caso de perturbações suficientemente lentas, SANZ *et al.* (2016) apresentam uma proposta de predição utilizando estimativas e derivadas da perturbação. Em SANTOS e FRANKLIN (2018b), é proposta uma estrutura de controle *feedforward* generalizada de duas camadas para atenuar o efeito de perturbações casadas e não casadas. A equivalência entre os preditores de Artstein e PSF foi evidenciada em TORRICO *et al.* (2019) e será rediscutida nas Seções 5.6.1 e 5.6.2.

Capítulo 4

Controle de sistemas com atraso variável baseado em preditores

Como alguns sistemas estão sujeitos a atrasos que variam no tempo, seu efeito, por muitas vezes, pode causar uma dinâmica significativamente diferente daquela para o caso considerando-se atraso constante. Esta variação no tempo impossibilita a análise utilizando a noção de polos e autovalores fazendo com que as soluções envolvendo funcionais de L-K, L-R e solução de LMIs sejam consideradas. Algumas aplicações apresentam atraso variável como comportamento característico do sistema (SEGUY *et al.*, 2010) enquanto em outras é consequência da comunicação em rede (SANTOS *et al.*, 2018b; YU *et al.*, 2015; ZHANG *et al.*, 2005). Poucos trabalhos combinam o uso de preditores com atraso variável. Aproveitar o uso de preditores para compensar parte do atraso incerto pode estender a faixa admissível do atraso (GONZÁLEZ *et al.*, 2011). Neste capítulo, são desenvolvidos critérios para garantia de estabilidade baseados no teorema do pequeno ganho com a utilização do PSF e preditor de Artstein na presença de atraso variável.

4.1 Atraso variável com compensador de tempo morto

Em FRANKLIN e SANTOS (2018, 2020c), foram usados preditores para compensar parte do atraso e nas Seções 4.1.1 e 4.1.4 são apresentados critérios de estabilidade simplificados considerando o preditor de Artstein e PSF. Utilizando-se raciocínio semelhante, verifica-se na Seção 7.3 e em FRANKLIN *et al.* (2020) que os sistemas em cascata com atraso podem se beneficiar do PSF na presença de atraso variável. Em NORMEY-RICO *et al.* (2012a), o PSF é utilizado na presença de atraso variável para o caso discreto e a garantia de estabilidade é obtida considerando-se intervalos discretos de variação do atraso. A estabilidade é baseada no teorema do pequeno

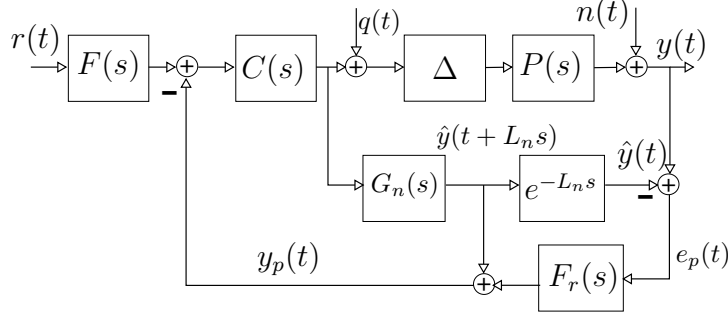


Figura 4.1: PSF com atraso variável.

ganho escalado mas apenas o problema com atrasos múltiplos do período de amostragem foram considerados. Outra abordagem decorre da estimação *online* do atraso variável para ajustar o preditor (HERRERA e IBEAS, 2012; LÉCHAPPÉ *et al.*, 2016; LIU *et al.*, 2017).

4.1.1 PSF com atraso variável

Os resultados de estabilidade robusta simplificada são aplicados no contexto do preditor de Smith filtrado. O objetivo inicial é analisar o efeito do filtro de robustez na presença de atraso variável utilizando-se a interpretação de pequeno ganho.

Neste trabalho, é verificado que $F_r(s)$ ou $F_r(z)$ podem ser usados diretamente para forçar estabilidade robusta na presença de atraso variável por considerar o critério de estabilidade simplificado baseado na resposta em frequência. Assume-se que o atraso é limitado, mas não há restrição quanto ao tipo de variação do atraso. Assim, diferentemente de NORMEY-RICO *et al.* (2012b), o atraso variável não precisa ser múltiplo do período de amostragem. Além disso, uma família de regras de projeto é obtida como consequência do critério de estabilidade proposto.

Caso de tempo contínuo

Para obter a condição de estabilidade do caso contínuo, adota-se a configuração ilustrada pela Fig. 4.1 que servirá para obter a estrutura equivalente para aplicação do teorema do pequeno ganho. Através do desacoplamento obtém-se a figura 4.2 na qual deseja-se encontrar a função de transferência de $w(t)$ para $v(t)$ dada por:

$$H_{wv}(s) = \frac{sF_r(s)P(s)C(s)}{1 + G_n(s)C(s) + F_r(s)[P(s)C(s) - P_n(s)C(s)]}. \quad (4.1)$$

Assim, a partir da Eq. 4.1, define-se o índice $\|H_{wv}(j\omega)\|_\infty = \mu$ que é o ganho L_2 máximo para este caso SISO, que pode ser escrito como:

$$\mu = \sup_{\omega \in [0, \infty)} \left| \frac{j\omega F_r(j\omega)P(j\omega)C(j\omega)}{1 + G_n(j\omega)C(j\omega) + F_r(j\omega)[P(j\omega) - P_n(j\omega)]C(j\omega)} \right|. \quad (4.2)$$

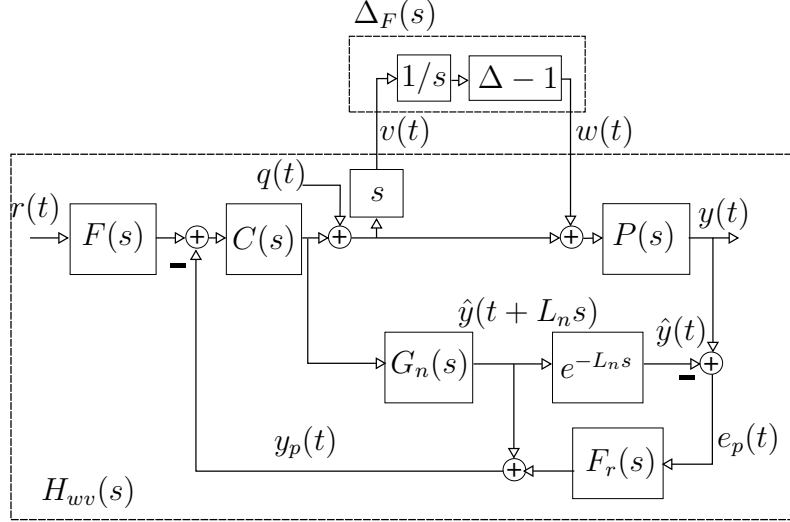


Figura 4.2: Estrutura equivalente do PSF com atraso variável para aplicar o Teorema do Pequeno Ganho.

Então, o critério de estabilidade com atraso variável limitado pode ser definido como segue:

$$\left\| \frac{j\omega F_r(j\omega)P(j\omega)C(j\omega)}{1 + G_n(j\omega)C(j\omega) + F_r(j\omega)(P(j\omega) - P_n(j\omega))C(j\omega)} \right\|_{\infty} < \frac{1}{\delta_{max}}, \quad (4.3)$$

ou de forma alternativa

$$\left| \frac{\omega F_r(j\omega)P(j\omega)C(j\omega)}{1 + G_n(j\omega)C(j\omega) + F_r(j\omega)(P(j\omega) - P_n(j\omega))C(j\omega)} \right| < \frac{1}{\delta_{max}}, \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (4.4)$$

Se há interesse pela análise nominal ($P(s) = P_n(s)$), a condição é dada por

$$\left| \frac{\omega \delta_{max} F_r(j\omega)G_n(j\omega)C(j\omega)}{1 + G_n(j\omega)C(j\omega)} \right| < 1, \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (4.5)$$

uma vez que $|G_n(j\omega)| = |P_n(j\omega)|$. Este resultado é útil no contexto do preditor de Smith filtrado pois $F_r(s)$ pode ser aplicado diretamente para mitigar o pior caso do efeito do atraso variável dado por $\omega \delta_{max}$. Por exemplo, um filtro de robustez bi-próprio devido ao ganho imposto $sF_r(s)$ nas altas frequências.

Caso de tempo discreto

O caso discreto é análogo ao problema do caso contínuo com $\Delta(v(k)) = v(k - \delta(k))$. Considerando-se passos similares, foi mostrado em KAO e LINCOLN (2004) que o ganho máximo da incerteza variante no tempo pode ser limitado por:

$$\|w\|_{L_2}^2 \leq N^2 \|v\|_{L_2}^2, \quad (4.6)$$

sendo $\|w\|_{l_2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} w(k)^2$ e N um inteiro.

A representação equivalente em tempo discreto para análise é exibida na Figura 4.3a. De forma semelhante ao caso contínuo, a condição de estabilidade é obtida como segue:

$$\left\| \frac{(1 - e^{-j\omega})F_r(e^{j\omega})P(e^{j\omega})C(e^{j\omega})}{1 + G_n(e^{j\omega})C(e^{j\omega}) + F_r(e^{j\omega})(P(e^{j\omega}) - P_n(e^{j\omega}))C(e^{j\omega})} \right\|_{\infty} < \frac{1}{N}. \quad (4.7)$$

Nota-se que na ausência de erro de modelagem ($P(e^{j\omega}) = P_n(e^{j\omega})$) e considerando-se que $|P_n(e^{j\omega})| = |G_n(e^{j\omega})|$, o critério pode ser particularizado como segue:

$$\left\| \frac{(1 - e^{-j\omega})F_r(e^{j\omega})G_n(e^{j\omega})C(e^{j\omega})}{1 + G_n(e^{j\omega})C(e^{j\omega})} \right\|_{\infty} < \frac{1}{N}. \quad (4.8)$$

Caso amostrado (misto entre o caso contínuo e discreto)

O caso amostrado possui dois detalhes adicionais em relação ao caso discreto: i) o comportamento entre amostras deve ser levado em consideração com relação ao ganho da parte invariante, e ii) atrasos que não são múltiplos do período de amostragem devem ser considerados. A estrutura de análise equivalente é mostrada na Figura 4.3b.

Assume-se que a interconexão de controle é feita com um retentor de ordem zero (ZOH). Ademais a saída é amostrada regularmente com intervalo de amostragem h .

A fim de completar a condição de estabilidade para o caso contínuo-discreto, o limite superior do ganho $H_{wv}(s)$ é necessário. Então, o resultado apresentado em YAMAMOTO e ARAKI (1994) e KAO e LINCOLN (2004) é aplicado assumindo-se um sistema estável em malha aberta estritamente próprio. Assim, a norma L_2 -induzida pode ser obtida:

$$\left\| \frac{(1 - e^{-j\omega})F_r(e^{j\omega})P_{alias}(\omega)C(e^{j\omega})}{1 + G_n(e^{j\omega})C(e^{j\omega}) + F_r(e^{j\omega})(P_{ZOH}(e^{j\omega}) - P_n(e^{j\omega}))C(e^{j\omega})} \right\|_{\infty} < \frac{1}{N}, \quad (4.9)$$

sendo

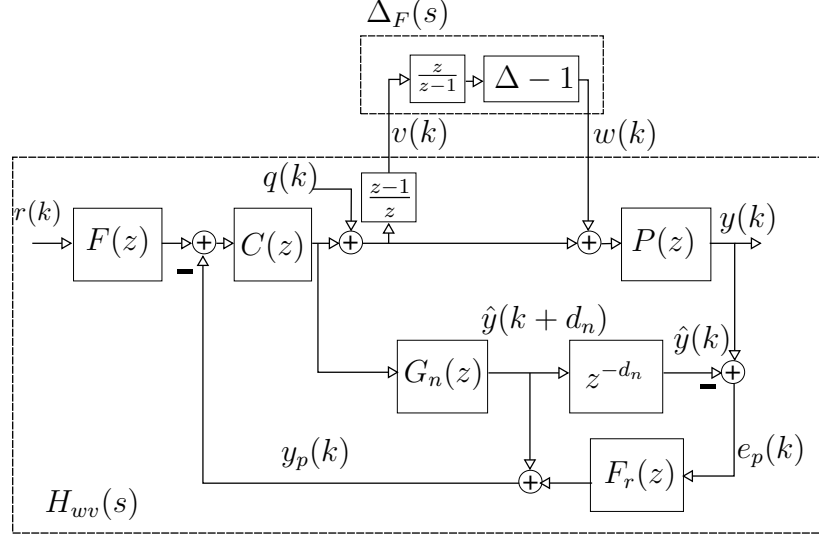
$$P_{alias}(\omega) = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| P\left(j\omega + j2\pi k \frac{1}{h}\right) \right|^2}. \quad (4.10)$$

Para o caso nominal o resultado pode ser particularizado assumindo $P(e^{j\omega}) = P_n(e^{j\omega})$:

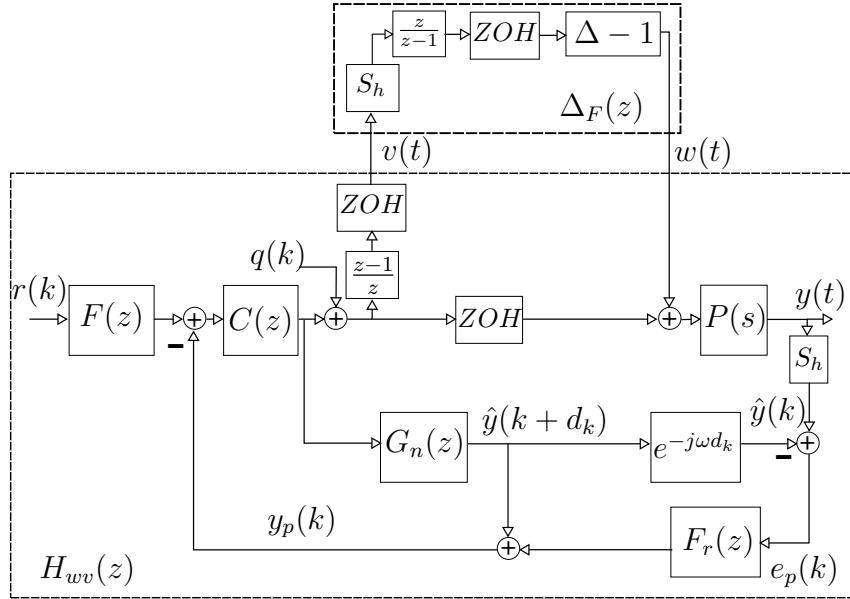
$$\left\| \frac{(1 - e^{-j\omega})F_r(e^{j\omega})P_{alias}(\omega)C(e^{j\omega})}{1 + G_n(e^{j\omega})C(e^{j\omega})} \right\|_{\infty} < \frac{1}{N}. \quad (4.11)$$

Da mesma maneira que na seção 2.2.4, se o período de amostragem for suficientemente pequeno, $P(e^{j\omega})$ pode ser substituído por $P_{alias}(\omega)$ visto que o ganho entre amostras é desprezível (KAO e LINCOLN, 2004). Neste caso, processos instáveis em

malha aberta podem ser analisados usando o critério simplificado. Esta suposição é implicitamente assumida em NORMEY-RICO *et al.* (2012b) e GONZALEZ *et al.* (2012), por exemplo, uma vez que estabilidade robusta é garantida para sistemas de tempo discreto.



(a) Caso discreto.



(b) Caso amostrado.

Figura 4.3: PSF equivalente para Teorema do Pequeno Ganho.

Comentário 4.1.1. Note que os intervalos de atraso são, respectivamente, dados por $[L, L + \delta_{max}]$ (CT), $[d, d + N]$ (DT), e $[L, L + Nh]$ (caso amostrado). Na prática, $L = L_n$ e $d = d_n$ podem ser assumidos com $[L_n, L_n + \delta_{max}]$ (CT), $[d_n, d_n + N]$ (DT), e $[L_n, L_n + Nh]$ (CT-DT) de modo que L_n ou d_n definem o limite inferior do atraso e a incerteza do atraso pode ser manipulada pelo intervalo admissível. O caso geral com $L \neq L_n$ e $d \neq d_n$ será tratado no Capítulo 5.

4.1.2 Critério de estabilidade estendido para o caso MIMO

O PSF discutido anteriormente traz limitações no contexto de sistemas de múltiplas entradas pois sua formulação é voltada para sistemas SISO. A extensão do critério de estabilidade baseado no teorema do pequeno ganho para o caso MIMO foi apresentada em SANTOS *et al.* (2018b) e é demonstrada a seguir.

Extensão caso contínuo

Definem-se os operadores Δ e Δ_f da seguinte forma:

$$\Delta(\mathbf{v}) = \mathbf{v}(t - \delta(t)), \quad (4.12)$$

$$\Delta_f(\mathbf{v}) = \int_{t-\delta(t)}^t \mathbf{v}(\theta) d\theta, \quad (4.13)$$

sendo $\delta(t)$ uma função que representa o atraso variante no tempo, $\delta(t) \in [0, \delta_{\max}]$ e $\mathbf{w}(t) = -\Delta_f(\mathbf{v})$.

Verifica-se também que, por se tratar de múltiplas entradas, $\mathbf{v}(t)$ pode ser escrito como $\mathbf{v}(t) = [v_1(t) \ v_2(t) \ \dots \ v_p(t)]^T$.

Para obtenção da norma induzida de $\mathbf{w}(t)$ é necessário desenvolver o seguinte produto:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t)^T \mathbf{w}(t) &= \left[\int_{t-\delta(t)}^t \mathbf{v}(\theta) d\theta \right]^T \left[\int_{t-\delta(t)}^t \mathbf{v}(\tau) d\tau \right] \\ &= \sum_{j=1}^p \left\{ \left[\int_{t-\delta(t)}^t v_j(\theta) d\theta \right] \left[\int_{t-\delta(t)}^t v_j(\tau) d\tau \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Através da desigualdade de Jensen é possível escrever:

$$\mathbf{w}(t)^T \mathbf{w}(t) \leq \delta(t) \sum_{j=1}^p \left[\int_{t-\delta(t)}^t v_j^2(\theta) d\theta \right]. \quad (4.15)$$

Com a inequação (4.15) encontra-se o limite de $\mathbf{w}(t)^T \mathbf{w}(t)$

$$\mathbf{w}(t)^T \mathbf{w}(t) \leq \delta(t) \int_{t-\delta(t)}^t \mathbf{v}(\theta)^T \mathbf{v}(\theta) d\theta \quad (4.16)$$

$$\leq \delta_{\max} \int_{t-\delta_{\max}}^t \mathbf{v}(\theta)^T \mathbf{v}(\theta) d\theta. \quad (4.17)$$

E em seguida substitui-se o resultado anterior na Eq. (2.57) para obter o máximo

ganho L_2 com $\mathbf{v}(t) \equiv 0_{p,1}$ e $t < 0$:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{w}(t)\|_{L_2}^2 &\leq \int_0^\infty \delta_{\max} \int_{t-\delta_{\max}}^t \mathbf{v}(\theta)^T \mathbf{v}(\theta) d\theta dt \\
&= \int_0^\infty \delta_{\max} \int_{-\delta_{\max}}^0 \mathbf{v}(t+s)^T \mathbf{v}(t+s) ds dt \\
&= \delta_{\max} \int_{-\delta_{\max}}^0 \int_0^\infty \mathbf{v}(t+s)^T \mathbf{v}(t+s) dt ds \\
&= \delta_{\max} \int_{-\delta_{\max}}^0 \int_0^\infty \mathbf{v}(t)^T \mathbf{v}(t) dt ds \\
&= \delta_{\max} \int_{-\delta_{\max}}^0 \|\mathbf{v}(t)\|_{L_2}^2 ds \\
&= \delta_{\max} \|\mathbf{v}(t)\|_{L_2}^2 \int_{-\delta_{\max}}^0 ds \\
&= \delta_{\max}^2 \|\mathbf{v}(t)\|_{L_2}^2,
\end{aligned} \tag{4.18}$$

isto finaliza a obtenção do ganho L_2 para múltiplas entradas.

Aproveitando-se a definição de norma L_2 induzida chega-se à condição de estabilidade para o caso MIMO:

$$\|\mathbf{H}_{vw}(j\omega)\|_\infty = \sup_{\mathbf{v}(t) \neq 0} \frac{\|\mathbf{w}(t)\|_{L_2}}{\|\mathbf{v}(t)\|_{L_2}} \leq \delta_{\max}. \tag{4.19}$$

Observa-se ainda que o limitante da norma de $v(t)$ é dado por:

$$\|\Delta_f(\mathbf{v})\|_{L_2}^2 \leq \delta_{\max}^2 \|\mathbf{v}(t)\|_{L_2}^2, \tag{4.20}$$

uma vez que $\|\Delta_f(\mathbf{v})\| = \|w(t)\|$ é válido para qualquer norma. O limite definido pela Eq. (4.20) pode ser representado de uma forma mais compacta através de (SANTOS *et al.*, 2018b):

$$\|\Delta_f\|_{L_2} \leq \delta_{\max}. \tag{4.21}$$

Extensão caso discreto

Esta seção demonstra que o resultado para o caso contínuo permanece válido para o caso discreto e se mantém para o caso com múltiplos atrasos (FRANKLIN e SANTOS, 2020b).

Neste caso, os operadores Δ e Δ_F são definidos como segue:

$$\Delta(\mathbf{v}) = \mathbf{v}(k - \delta(k)), \quad (4.22)$$

$$\Delta_f(\mathbf{v}) := (\Delta - 1) \frac{z}{z - 1}. \quad (4.23)$$

em que $\delta(k)$ representa uma função que descreve o atraso variável no tempo, $\delta(k) \in [0, 1 \dots, N]$ e $\mathbf{w}(k) = \Delta_f(\mathbf{v})$. Nota-se também que $\mathbf{v}(k)$ pode ser representado através de $\mathbf{v}(k) = [v_1(k) \ v_2(k) \ \dots \ v_m(k)]^T$

$$\mathbf{w}(k) = \sum_{i=0}^{k-\delta(k)} \mathbf{v}(i) - \sum_{i=0}^k \mathbf{v}(i) = - \sum_{i=k-\delta(k)+1}^k \mathbf{v}(i), \quad (4.24)$$

e $\mathbf{w}(k)^T \mathbf{w}(k)$ é descrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k)^T \mathbf{w}(k) &= \left[\sum_{i=k-\delta(k)+1}^k \mathbf{v}(i) \right]^T \left[\sum_{i=k-\delta(k)+1}^k \mathbf{v}(i) \right], \\ &= \sum_{j=1}^m \left\{ \left[\sum_{i=k-\delta(k)+1}^k v_j(i) \right] \left[\sum_{i=k-\delta(k)+1}^k v_j(i) \right] \right\}, \end{aligned}$$

através da desigualdade de Cauchy-Schwarz a seguinte condição pode ser definida:

$$\mathbf{w}(k)^T \mathbf{w}(k) \leq N \sum_{j=1}^m \left[\sum_{i=k-N+1}^k v_j^2(i) \right]. \quad (4.25)$$

Invertendo-se a ordem do somatório, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(k)^T \mathbf{w}(k) &\leq N \sum_{i=k-N+1}^k \left[\sum_{j=1}^m v_j^2(i) \right], \\ &\leq N \sum_{i=k-N+1}^k \mathbf{v}(i)^T \mathbf{v}(i). \end{aligned}$$

Uma vez que $\|\mathbf{w}(k)\|_{L_2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{w}(k)^T \mathbf{w}(k)$, o máximo ganho L_2 com $\mathbf{v}(k) \equiv 0_{m,1}$

para $k < 0$ é dado por:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{w}\|_{L_2}^2 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} N \sum_{i=k-N+1}^k \mathbf{v}(i)^T \mathbf{v}(i) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} N \sum_{i=1-N}^0 \mathbf{v}(i+k)^T \mathbf{v}(i+k) \\
&\leq N \sum_{i=1-N}^0 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{v}(k)^T \mathbf{v}(k)}_{\|\mathbf{v}\|_{L_2}^2} \\
&\leq N \|\mathbf{v}\|_{L_2}^2 \sum_{i=1-N}^0 1 \\
&\leq N^2 \|\mathbf{v}\|_{L_2}^2
\end{aligned}$$

completando a generalização do ganho L_2 .

4.1.3 Critério de estabilidade simplificado - PSF caso MIMO tempo contínuo

Os problemas de controle de sistemas multivariáveis também podem fazer uso do PSF para lidar com atraso variável. A estrutura para utilização do teorema do pequeno ganho está descrita na Fig. 4.4. São poucas as diferenças em relação ao caso SISO apresentado anteriormente. Aqui foi incluída a descrição em negrito para representação matricial e algumas definições para direcionar a estratégia de compensação como $\mathbf{S}_{\bullet}(s) = \mathbf{G}_{\bullet}(s) - \mathbf{F}_r(s)\mathbf{P}_n(s)$, em que $\mathbf{G}_{\bullet}(s)$ vai definir o modelo rápido adotado para o compensador.

Considera-se uma matriz (de funções) de transferência MIMO $n \times m$ cujos elementos são definidos como $P_{ik}(s) = G_{ik}(s)e^{-sd_{ik}}$ em que cada um relaciona a k -ésima entrada com a i -ésima saída. G_{ik} representa uma função de transferência sem atraso e d_{ik} representa os atrasos parciais. Portanto, o modelo nominal é apresentado como:

$$\mathbf{P}_n(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s)e^{-sd_{11}} & G_{12}(s)e^{-sd_{12}} & \dots & G_{1m}(s)e^{-sd_{1m}} \\ G_{21}(s)e^{-sd_{21}} & G_{22}(s)e^{-sd_{22}} & \dots & G_{2m}(s)e^{-sd_{2m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(s)e^{-sd_{n1}} & G_{n2}(s)e^{-sd_{n2}} & \dots & G_{nm}(s)e^{-sd_{nm}} \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Nos sistemas MIMO com múltiplos atrasos a forma de predição é definida pensando-se em propriedades de compensação especificamente desejadas. Basicamente são três as propriedades tratadas para o preditor de Smith original (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2007; SANTOS *et al.*, 2016): i) predição da saída, ii) equação carac-

terística livre de atraso, e iii) compensação dinâmica ideal. No caso MIMO podem ser considerados diferentes modelos rápidos para o compensador ou DTC dependendo da estratégia desejada.

Para obter a predição da saída o modelo rápido do DTC é definido como em JEROME e RAY (1979):

$$\mathbf{G}_o(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s)e^{-s(d_{11}-d_1)} & G_{12}(s)e^{-s(d_{12}-d_1)} & \dots & G_{1m}(s)e^{-s(d_{1m}-d_1)} \\ G_{21}(s)e^{-s(d_{21}-d_2)} & G_{22}(s)e^{-s(d_{22}-d_2)} & \dots & G_{2m}(s)e^{-s(d_{2m}-d_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(s)e^{-s(d_{n1}-d_n)} & G_{n2}(s)e^{-s(d_{n2}-d_n)} & \dots & G_{nm}(s)e^{-s(d_{nm}-d_n)} \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Adotando-se $d_i = \min_{k=1,\dots,m} d_{ik}$ para $i = 1, \dots, n$. O atraso da saída MIMO efetivo é dado por

$$\mathbf{L}(s) = \begin{bmatrix} e^{-sd_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-sd_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-sd_n} \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

de modo que o modelo nominal pode ser decomposto como segue:

$$\mathbf{P}_n(s) = \mathbf{L}(s)\mathbf{G}_o(s) \rightarrow \mathbf{G}_o(s) = \mathbf{L}(s)^{-1}\mathbf{P}_n(s).$$

Nota-se que para o caso nominal ($\mathbf{P}_n(s) = \mathbf{P}(s)$) a predição nominal $\mathbf{Y}_p(s)$, para a saída do processo $\mathbf{Y}(s)$, pode ser obtida como:

$$\mathbf{Y}_p(s) = \mathbf{G}_o(s)\mathbf{U}(s) = \mathbf{L}(s)^{-1}\mathbf{P}(s)\mathbf{U}(s) = \mathbf{L}(s)^{-1}\mathbf{Y}(s)$$

Percebe-se que, neste caso, o modelo rápido para compensação de saída relaciona a saída predita com a entrada sem atraso, removendo o atraso de saída efetivo da descrição entrada-saída.

Por outro lado, a equação característica completamente livre de atraso pode ser obtida por meio do modelo rápido para o compensador completo que é dado por:

$$\mathbf{G}_f(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(s) & G_{n2}(s) & \dots & G_{nm}(s) \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Neste caso, a equação característica de malha fechada não terá atraso (OGUNNAIKE e RAY, 1979; RAO e CHIDAMBARAM, 2006). Nota-se também que $\mathbf{Y}_p(s) = \mathbf{G}_f(s)\mathbf{U}(s)$ não é uma predição de $\mathbf{Y}_p(s)$ (SANTOS *et al.*, 2014).

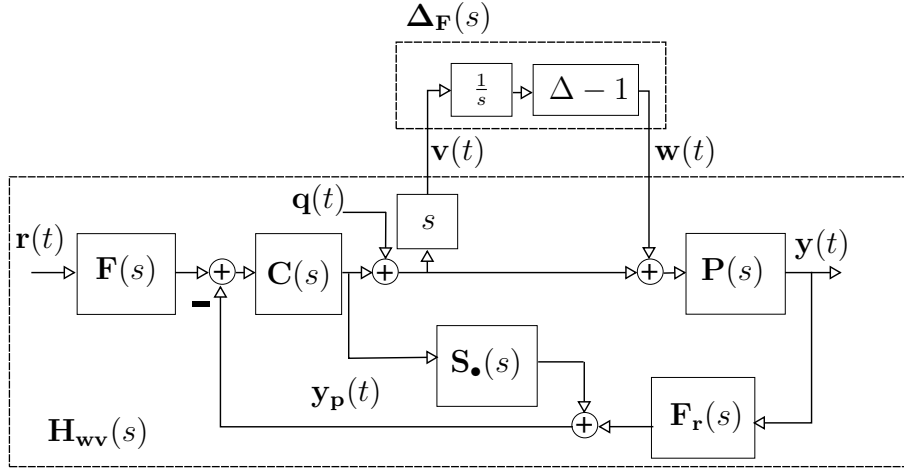


Figura 4.4: PSF equivalente contínuo MIMO com atraso variável.

Para finalizar a descrição, $\mathbf{G}_\bullet(s)$ é usada para representar ou o modelo rápido do compensador de saída ($\mathbf{G}_o(s)$) ou o modelo para o compensador completo ($\mathbf{G}_f(s)$). Considerando-se a presença de perturbações e atraso variável, a saída MIMO $\mathbf{Y}(s)$ a partir da Fig. 4.4 será definida como:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{P}(s) [\mathbf{U}(s) + \mathbf{Q}(s) + \mathbf{W}(s)], \quad (4.30)$$

em que $\mathbf{U}(s) \in \mathbb{R}^m$ representa a entrada de controle MIMO no domínio s , $\mathbf{Y}(s) \in \mathbb{R}^n$ é a saída do processo $\mathbf{P}(s)$, $\mathbf{Q}(s) \in \mathbb{R}^n$ é uma perturbação externa, $\mathbf{W}(s) \in \mathbb{R}^m$ representa o efeito do atraso variável.

A estrutura equivalente para análise via Teorema do pequeno ganho é apresentada na Fig. 4.4 em que $\Delta(v(t)) = v(t - \delta(t))$ com $v(t) \in \mathbb{R}^m$.

Teorema 4.1.1 (Estabilidade baseada no PSF - caso MIMO). *O sistema multi-variável representado pela Fig. 4.4 é estável da entrada para saída para qualquer par entrada-saída se:*

$$\delta_{max} \left\| j\omega \mathbf{M}_\bullet(j\omega)^{-1} \mathbf{C}(j\omega) \mathbf{F}_r(j\omega) \mathbf{P}(j\omega) \right\|_\infty \leq 1. \quad (4.31)$$

sendo $\mathbf{M}_\bullet(s) = [I + \mathbf{C}(s) \mathbf{S}_\bullet(s) + \mathbf{C}(s) \mathbf{F}_r(s) \mathbf{P}(s)]$.

A prova está detalhada no Apêndice A.1. Reescrevendo-se (4.31) para o caso nominal ($\mathbf{P}(s) = \mathbf{P}_n(s)$) e considerando-se que $|P_n(s)| = |G_n(s)|$:

$$\delta_{max} \left\| j\omega \mathbf{M}_\bullet(j\omega)^{-1} \mathbf{C}(j\omega) \mathbf{F}_r(j\omega) \mathbf{G}_n(j\omega) \right\|_\infty \leq 1, \quad (4.32)$$

em que

$$\mathbf{M}_\bullet(s) = [I + \mathbf{C}(s) \mathbf{G}_\bullet(s)]. \quad (4.33)$$

Este resultado pode ser utilizado para estender o resultado de KAO e LINCOLN

(2004) para sistemas MIMO, o que é particularmente útil para utilização em sistemas baseados no preditor de Artstein no caso de sistemas vibratórios de segunda ordem, que são naturalmente multivariáveis como discutido em SANTOS *et al.* (2018b).

4.1.4 Preditor de Artstein com atraso variável

Nesta seção, é apresentado um critério de estabilidade simplificado utilizando o método de compensação do atraso descrito na Seção 3.4 combinado com o teorema do pequeno ganho devido à simplicidade de utilização no contexto de sistemas incertos. O critério proposto em KAO e LINCOLN (2004) não pode ser aplicado diretamente nesta configuração pois ele é válido somente para o caso SISO e sua extensão para o caso de múltiplas entradas apresentado na seção 4.1.2 é necessária.

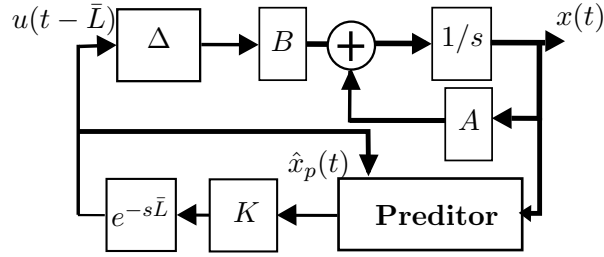


Figura 4.5: Descrição do sistema de controle com o preditor de Artstein na presença de atraso variável.

Neste problema, um rearranjo de malha pode ser utilizado para decompor o sistema da Fig. 4.5 em uma partição nominal e outra partição incerta que decorre da variação do atraso conforme indicado na Fig. 4.6. Deve-se observar que $H_{uv}(s)$ representa o sistema nominal em malha fechada enquanto $\Delta_F(s)$ descreve o efeito do atraso. A interconexão do sistema nominal com o efeito das incertezas se manifesta nos sinais $w(t)$ e $v(t)$.

O termo $w(t)$ é uma perturbação equivalente causada pela variação do atraso. Nota-se que o efeito do atraso fixo permanece na Eq. 3.11 e na Fig. 4.6. Entretanto, a representação equivalente do preditor apresentada na Fig. 4.7 é mais conveniente para eliminar a componente $\bar{L}$ da malha de controle e obter a função de transferência $H_{uv}(s)$. Esta representação possui a seguinte equação dinâmica:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_p(t) = & A_n \hat{x}_p(t) + B_n u(t) \\ & + e^{A_n \bar{L}} B_n [u(t - \bar{L} - \delta(t)) - u(t - \bar{L})], \end{aligned} \quad (4.34)$$

sendo $\hat{x}_p(t)$ o vetor de predição e $e^{A_n \bar{L}} B_n [u(t - \bar{L} - \delta(t)) - u(t - \bar{L})]$ a perturbação equivalente obtida pelo método da redução (SANTOS, 2016).

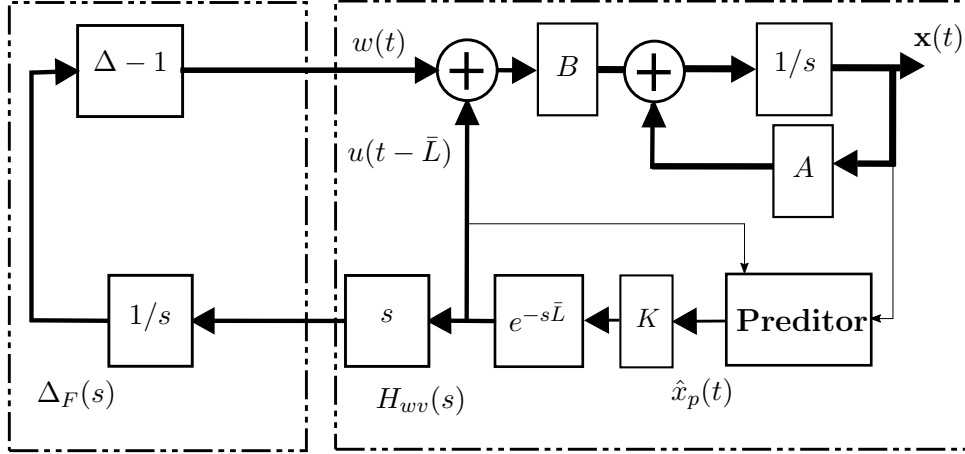


Figura 4.6: Representação equivalente via decomposição do sistema: modelo nominal interconectado com dinâmica incerta.

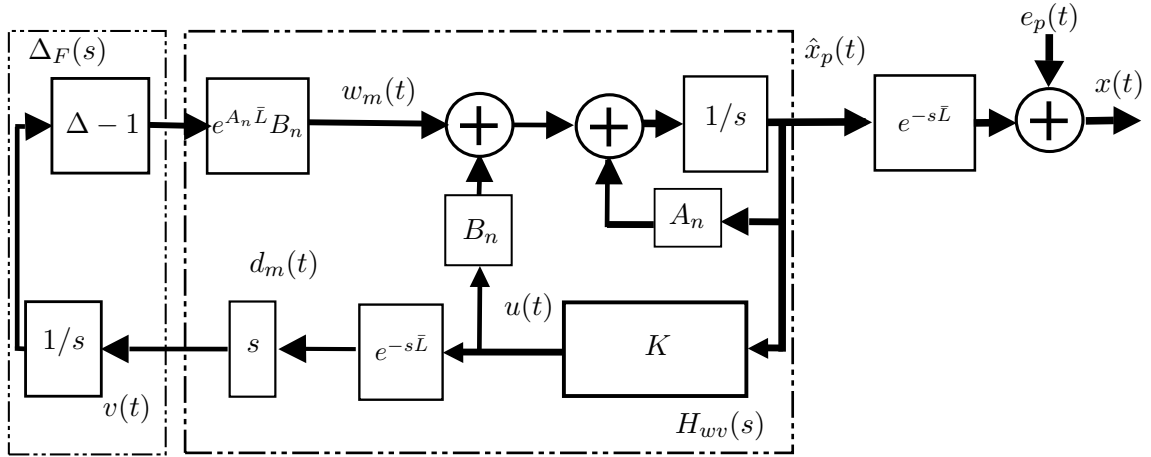


Figura 4.7: Representação equivalente obtida através do método da redução.

De maneira mais ampla, o método da redução pode ser descrito por:

$$\dot{\hat{x}}_p(t) = A_n \hat{x}_p(t) + B_n u(t) + w_m(t), \quad (4.35)$$

$$w_m(t) = e^{A_n \bar{L}} B_n [u(t - \bar{L} - \delta(t)) - u(t - \bar{L})], \quad (4.36)$$

$$x(t) = \hat{x}_p(t - \bar{L}) + e_p(t), \quad (4.37)$$

$$e_p(t) = \int_{t-\bar{L}}^{t-2\bar{L}} e^{A_n(t-\bar{L}-\tau)} w(\tau + \bar{L}) d\tau. \quad (4.38)$$

Desta forma, a função de transferência $H_{wv}(s)$ passa a representar a descrição nominal, a qual não depende da incerteza. Assim, o método da redução permite que o sistema de controle se encarregue de estabilizar $\hat{x}_p(t)$, o que consequentemente levará à estabilização de $x(t)$ desde que as condições de estabilidade robusta sejam asseguradas. Nota-se que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}_p(t)\| = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|w(t)\| = 0$ de tal ma-

neira que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}_p(t)\| = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|w_m(t)\| = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{x}_p(t)\| = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \|e_p(t)\| = 0$.

Teorema 4.1.2 (Condição de estabilidade). *Assumindo-se que :*

- i) a matriz $A_n + B_n K$ possui todos os autovalores no semi-plano esquerdo;
- ii) o atraso total é $L(t) = \bar{L} + \delta(t)$;
- iii) $0 \leq \delta(t) \leq \delta_{max}$.

O sistema de controle da Figura 4.5 será internamente estável se

$$\|j\omega e^{-j\omega \bar{L}} K(j\omega I - A_n - B_n K)^{-1} e^{A_n \bar{L}} B_n\|_{\infty} \delta_{max} \leq 1. \quad (4.39)$$

Sabendo-se que $|je^{-j\omega \bar{L}}| = 1$, conclui-se com

$$\|\omega K(j\omega I - A_n - B_n K)^{-1} e^{A_n \bar{L}} B_n\|_{\infty} \delta_{max} \leq 1. \quad (4.40)$$

A interpretação deste resultado é baseada no teorema do pequeno ganho conforme a Figura 4.7. Observe que o sistema equivalente invariante no tempo definido por $H_{wv}(s)$ é perturbado pelo sistema variante no tempo $\Delta_F(s)$.

Comentário 4.1.2. *Este resultado foi inspirado em KAO e LINCOLN (2004), o qual tratava de um sistema com apenas uma entrada e uma saída sem compensação de atraso. Neste trabalho, o efeito do preditor de Artstein será incorporado ao estudo. Inicialmente observa-se que a norma L_2 de um sinal $w(t)$ foi definida por 2.57. Em um sistema linear invariante no tempo representado por uma matriz de transferência $P(s)$ em que $Z(s) = P(s)U(s)$, o ganho L_2 é definido pela seguinte relação (KHALIL, 2001, Capítulo 5):*

$$\|z(t)\|_{L_2}^2 \leq \left(\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|P(j\omega)\|_2 \right)^2 \|u(t)\|_{L_2}^2. \quad (4.41)$$

Além disso, o ganho L_2 pode ser descrito também da seguinte forma:

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|P(j\omega)\|_2 = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(P(j\omega)), \quad (4.42)$$

em que $\bar{\sigma}(P(j\omega))$ representa o valor singular máximo da matriz $P(j\omega)$ (KHALIL, 2001, Capítulo 5). Este ganho L_2 também é denominado norma H_{∞} de um sistema linear invariante no tempo, ou seja, $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(P(j\omega)) = \|P(j\omega)\|_{\infty}$. Por simplicidade de apresentação, os detalhes da prova são apresentados no Apêndice A.2. De maneira resumida, demonstra-se que o ganho do subsistema

$\|H_{wv}(j\omega)\|_{\infty} \leq \sup_{\omega \in [0, \infty]} \bar{\sigma}(j\omega e^{A \bar{L}} B K [j\omega I - A - B K]^{-1})$ ao passo que $\Delta_F(j\omega) \leq \delta_{max}$.

O teorema do pequeno ganho fornece uma condição apenas suficiente e, portanto, conservadora. Este é um resultado esperado, uma vez que a natureza da variação do atraso é desconhecida. Por outro lado, como discutido em KAO e LINCOLN (2004), este conservadorismo não é excessivo em diversos casos. Essa característica desejável foi verificada em casos sem compensação de atraso apresentados recentemente em SANTOS *et al.* (2018b). Uma das vantagens desse critério advém do fato de que não se faz qualquer suposição a respeito da taxa de variação de $\delta(t)$.

Comentário 4.1.3. *O método proposto requer apenas o cálculo da norma de $H_{wv}(j\omega)$, o que pode ser obtido diretamente de programas de matemática computacional convencionais. Assim, a abordagem apresentada é sistemática.*

Comentário 4.1.4. *O valor exato do atraso mínimo não precisa ser conhecido, apenas um limitante inferior. Deve-se notar que toda a discussão é válida caso $u(t - \bar{L} - \tilde{L} - \tilde{\delta}(t))$ com $\delta(t) = \tilde{L} + \tilde{\delta}(t)$ e $\tilde{L} > 0$.*

Capítulo 5

Controle robusto de sistemas com atraso variável

Este capítulo apresenta os resultados obtidos para o caso nominal incluindo incertezas não estruturadas em sua descrição. Ao contrário do critério de KAO e LINCOLN (2004), que assume o modelo exato conhecido, será considerado o efeito do erro de modelagem. Desta maneira evita-se a superestimação do atraso variável máximo em decorrência do erro de modelagem.

5.1 Descrição de incertezas

A modelagem de sistemas físicos convive com incertezas de diversas origens sendo consideradas como erros genéricos nos modelos projetados levando a uma discrepância entre a resposta do modelo e a realidade que ele representa. Um bom modelo precisa ser simples o suficiente para permitir um bom projeto e complexo o bastante para oferecer segurança ao projetista que o utiliza (o modelo baseado na planta real). As fontes dessas discrepâncias, de maneira geral, residem em dinâmicas não modeladas, não linearidades desprezadas, efeitos da redução da ordem dos modelos e variações nos parâmetros do sistema (GU *et al.*, 2013; ZHOU e DOYLE, 1997).

Neste contexto, é papel do projetista obter, pelo menos, um conjunto de modelos que se aproxime de forma suficiente da planta real, pois é impossível alcançar um conjunto de modelos capaz de representar o universo de possibilidades que a planta real está sujeita. Além disto, em grande parte dos casos, um simples modelo fixo não consegue representar completamente o comportamento do sistema físico (ZHOU e DOYLE, 1997).

Muitos sistemas de controle industriais apresentam erros de modelagem causados por incertezas na descrição de seus elementos físicos como desgaste dos componentes da planta, mudança nos pontos de operação etc. Estes efeitos geralmente são

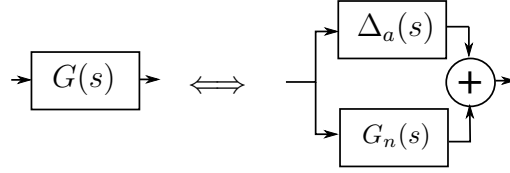


Figura 5.1: Incerteza aditiva.

representados por variações nos valores dos parâmetros físicos do sistema, como inércia, viscosidade, resistência, massa etc. O conhecimento desta incerteza leva a uma modelagem mais precisa e é conhecida como incerteza paramétrica.

As incertezas podem ser classificadas em duas categorias principais quanto ao seu efeito nos parâmetros do modelo:

- Estruturadas - Quando se conhece os efeitos das incertezas nos parâmetros do modelo como polos e zeros, ou elementos das matrizes de estado por exemplo. Aqui a estrutura do modelo é conhecida inclusive a ordem do sistema.
- Não estruturadas - Quando não se sabe como cada parâmetro incerto afeta o modelo. Neste caso, é comum apenas admitir que a incerteza é limitada em norma. Aqui as fontes de incertezas são combinadas em uma perturbação.

A representação de uma incerteza não estruturada pode ser feita utilizando um simples bloco de perturbação Δ_a ou Δ_P de duas formas considerando $G(s)$ e o modelo nominal $G_n(s)$ como segue:

$$G(s) = G_n(s) + \Delta_a(s), \quad (5.1)$$

$$G(s) = G_n(s)[I + \Delta_P(s)]. \quad (5.2)$$

Esta representação fornece a descrição de incerteza aditiva Eq. (5.1) (Fig. 5.1) e multiplicativa Eq. (5.2).

Assume-se que $G(s)$ é então representada por uma família de funções de transferência de maneira que seu módulo e fase podem variar em um disco de raio $\overline{\Delta}_P(s)$ definido como limitante de incerteza. Com isso, as descrições podem ser feitas no domínio da frequência como (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2008)

$$G(j\omega) = G_n(j\omega) + \Delta_a(j\omega), \quad |\Delta_a(j\omega)| \leq \overline{\Delta}_a(j\omega) \quad \forall \omega \geq 0, \quad (5.3)$$

ou de maneira equivalente

$$G(j\omega) = G_n(j\omega)(1 + \Delta_P(j\omega)), \quad |\Delta_P(j\omega)| \leq \overline{\Delta}_P(j\omega) \quad \forall \omega \geq 0, \quad (5.4)$$

a relação entre os dois tipos de incerteza pode ser obtida como segue

$$\Delta_P(j\omega) = \frac{\Delta_a(j\omega)}{G_n(j\omega)}, \quad \overline{\Delta}_P(j\omega) = \frac{\overline{\Delta}_a(j\omega)}{|G_n(j\omega)|} \quad \forall \omega \geq 0. \quad (5.5)$$

Desta maneira, $\overline{\Delta}_a(j\omega)$ e $\overline{\Delta}_P(j\omega)$ são definidos como os limitantes das incertezas aditivas e multiplicativas. Percebe-se que com esta definição que considera os discos para representar os limites de incerteza da planta contempla uma série de outras plantas que poderiam não estar na família de plantas original (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2008).

Nesta tese, a maior parte dos problemas utiliza a descrição baseada em incertezas não estruturadas utilizando o domínio da frequência. Embora a forma das incertezas descritas anteriormente seja útil para descrever dinâmicas não modeladas ou desprezadas, elas podem não levar em consideração atrasos, acoplamentos parasitas, histerese e outras não linearidades (GU *et al.*, 2013).

Neste trabalho, assume-se que esta incerteza é limitada para definir uma fronteira clara de robustez. Na ausência de incerteza de modelagem, as margens de robustez são inteiramente dedicadas às incertezas oriundas do atraso variável. Como as incertezas de modelagem presentes em outros parâmetros estão presentes na prática, os erros de modelagem serão reescritos a fim de definir uma conexão entre os critérios de estabilidade propostos no Capítulo 4 e as ferramentas de estabilidade robusta convencionais.

5.2 Critério de estabilidade de tempo contínuo

Nesta seção, é desenvolvido o critério de estabilidade robusta para o sistema descrito por $P(s)$ baseado no modelo $P_n(s)$ e no limitante de incerteza $\overline{\Delta}_P(\omega)$, uma vez que $P(s)$ é desconhecido. Primeiramente, considera-se a descrição incerteza multiplicativa da seguinte forma:

$$P(s) = P_n(s)[1 + \Delta_P(s)]. \quad (5.6)$$

Reescrevendo-se de forma alternativa a Eq. (4.4), $\forall \omega \in [0, \infty)$, como sendo:

$$\left| \frac{1 + G_n(j\omega)C(j\omega) + F_r(j\omega)(P(j\omega) - P_n(j\omega))C(j\omega)}{\omega F_r(j\omega)P_n(j\omega)C(j\omega)[P(j\omega)/P_n(j\omega)]} \right| > \delta_{max}, \quad (5.7)$$

ou também

$$\left| \frac{1 + G_n(j\omega)C(j\omega)}{F_r(j\omega)P_n(j\omega)C(j\omega)} + \frac{P(j\omega) - P_n(j\omega)}{P_n(j\omega)} \right| > \omega \left| \frac{P(j\omega)}{P_n(j\omega)} \right| \delta_{max}, \quad (5.8)$$

$$\left| \frac{1 + G_n(j\omega)C(j\omega)}{F_r(j\omega)P_n(j\omega)C(j\omega)} + \Delta_P(\omega) \right| > \omega \left| \frac{P(j\omega)}{P_n(j\omega)} \right| \delta_{max}. \quad (5.9)$$

Separando o erro de modelagem a condição é descrita como:

$$\left| \frac{1 + G_n(j\omega)C(j\omega)}{F_r(j\omega)P_n(j\omega)C(j\omega)} \right| - |\Delta_P(\omega)| > \omega \left| \frac{P(j\omega)}{P_n(j\omega)} \right| \delta_{max}, \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (5.10)$$

Comentário 5.2.1. *Sabe-se que:*

$$|\Delta_P(\omega)| \geq |[P(j\omega) - P_n(j\omega)]/P_n(j\omega)|,$$

então

$$|\Delta_P(\omega)| \geq \left| \frac{P(j\omega)}{P_n(j\omega)} - 1 \right| \geq \left| \frac{P(j\omega)}{P_n(j\omega)} \right| - 1, \quad \forall \omega \in [0, \infty).$$

Por consequência

$$|\Delta_P(\omega)| + 1 \geq \left| \frac{P(j\omega)}{P_n(j\omega)} - 1 \right| + 1 \geq \left| \frac{P(j\omega)}{P_n(j\omega)} \right|, \quad \forall \omega \in [0, \infty).$$

Portanto se

$$|\Delta_P(\omega)| + 1 \geq \left| \frac{P(j\omega)}{P_n(j\omega)} \right|, \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (5.11)$$

a condição (5.10) pode ser simplificada usando este resultado como segue:

$$\left| \frac{1 + G_n(j\omega)C(j\omega)}{F_r(j\omega)P_n(j\omega)C(j\omega)} \right| - |\Delta_P(\omega)| > \omega \delta_{max} (|\Delta_P(\omega)| + 1), \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (5.12)$$

Assumindo-se que esta incerteza $|\Delta_P(\omega)|$ possui um limitante $\overline{\Delta}_P(\omega)$ (definido previamente), ou seja

$$\overline{\Delta}_P(\omega) \geq |\Delta_P(j\omega)|, \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (5.13)$$

a condição (5.12) pode ser relaxada com consequente aumento do conservadorismo por meio da inclusão do limitante de incerteza $\overline{\Delta}_P(\omega)$ que pode ser definido previamente. Como vantagem, elimina-se o termo desconhecido $|\Delta_P(\omega)|$ do critério de estabilidade.

Teorema 5.2.1 (Critério de Estabilidade Robusta - Caso contínuo SISO). *O sistema de malha fechada apresentado na Fig. 4.1 com $\overline{\Delta}_P(\omega) \geq |[P(j\omega) - P_n(j\omega)]/P_n(j\omega)|$, $\forall \omega \in [0, \infty)$, definido previamente, será estável para qualquer atraso variável definido por $\Delta(v) = v(t - \delta(t))$, $0 \leq \delta(t) \leq \delta_{max}$ se o sistema de malha fechada for estável com $\delta(t) = 0, \forall t$ e*

$$\left| \frac{1 + G_n(j\omega)C(j\omega)}{F_r(j\omega)P_n(j\omega)C(j\omega)} \right| > \overline{\Delta}_P(\omega) + (1 + \overline{\Delta}_P(\omega))\omega \delta_{max}, \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (5.14)$$

Observando-se o lado direito da condição de estabilidade percebe-se que $\omega\delta_{max}$ descreve o efeito do atraso variável, $\overline{\Delta}_P(\omega)$ representa um limitante superior para a incerteza de modelagem, e $\omega\delta_{max}\overline{\Delta}_P(\omega)$ é fruto da interconexão entre a variação do atraso e a incerteza modelo.

Comentário 5.2.2. *Esta condição de estabilidade robusta é uma extensão do critério de estabilidade robusta padrão com $\delta_{max} \neq 0$. Se $\delta_{max} = 0$, o critério proposto é simplesmente*

$$\overline{\Delta}_P(\omega) < \left| \frac{1 + G_n(j\omega)C(j\omega)}{F_r(j\omega)P_n(j\omega)C(j\omega)} \right|, \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (5.15)$$

que é a condição de estabilidade robusta padrão do PSF (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2009).

Comentário 5.2.3. *O filtro de robustez $F_r(s)$ pode ser usado diretamente para atenuar, de forma conjunta, a incerteza de modelagem e de atraso variável. Nota-se que a condição (5.9) pode ser reescrita como segue $\forall \omega \in [0, \infty)$:*

$$\left| \frac{1 + G_n(j\omega)C(j\omega)}{P_n(j\omega)C(j\omega)} \right| - |F_r(j\omega)|\overline{\Delta}_P(\omega) > |F_r(j\omega)j\omega|\delta_{max}(1 + \overline{\Delta}_P(\omega)). \quad (5.16)$$

Como já esperado, $F_r(s)$ pode ser usado para atenuar a incerteza de modelagem como mostra $|F_r(j\omega)|\overline{\Delta}_P(\omega)$. Além do mais, o efeito do atraso variável pode ser atenuado diretamente pelo filtro de robustez observando o termo $|F_r(j\omega)j\omega|\delta_{max}$.

Comentário 5.2.4. *Se o filtro de robustez for definido por $F_r(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$ com $\tau > 0$, então $|F_r(j\omega)j\omega|\delta_{max} \leq \delta_{max}/\tau$ uma vez que $\|F_r(j\omega)j\omega\|_\infty = 1/\tau$.*

O comentário 5.2.4 mostra que um filtro estritamente próprio é útil para atenuar o efeito de alta frequência causado pela variação do atraso. Na realidade, o pior caso do atraso pode ser limitado por um filtro estritamente próprio.

Corolário 5.2.1. *Seja $P(s)$ uma função de transferência estável e $P_n(s)$ definido de maneira que $\sup_{\omega \in [0, \infty)} \Delta_P(\omega) < \infty$ (garantido para qualquer planta/modelo estável se a partes real dos zeros não for nula). Considera-se um controlador $C(s)$ que estabiliza a planta e um filtro de robustez $F_r^0(s)$ tal que a seguinte condição padrão se mantém:*

$$\left| \frac{1 + G_n(j\omega)C(j\omega)}{F_r^0(j\omega)P_n(j\omega)C(j\omega)} \right| > \overline{\Delta}_P(\omega). \quad (5.17)$$

Consequentemente, o filtro $F_r(s) = \frac{1}{\tau s + 1}F_r^0(s)$ com $\tau > 0$ pode sempre ser definido de modo que o seguinte critério permanece válido:

$$\left| \frac{1 + G_n(j\omega)C(j\omega)}{F_r(j\omega)P_n(j\omega)C(j\omega)} \right| - \overline{\Delta}_P(\omega) > \delta_{max}\omega(1 + \overline{\Delta}_P(\omega)). \quad (5.18)$$

Demonstração. A prova é uma consequência direta da condição de estabilidade robusta padrão com o Comentário 5.2.4. Inicialmente deve-se observar que $|1/(j\omega\tau + 1)| < 1$, $\forall \omega \in [0, \infty)$ e $|\omega/(j\omega\tau + 1)| < 1/\tau$, $\forall \omega \in [0, \infty)$. Assume-se um filtro estável descrito por:

$$F_r(s) = F_r^0(s) \frac{1}{\tau s + 1}. \quad (5.19)$$

A condição de estabilidade robusta é definida por:

$$\left| \frac{1 + G_n(j\omega)C(j\omega)}{F_r(j\omega)P_n(j\omega)C(j\omega)} \right| - \overline{\Delta}_P(\omega) > \omega \delta_{\max}(1 + \overline{\Delta}_P(\omega)), \forall \omega \in [0, \infty). \quad (5.20)$$

Alternativamente,

$$\left| \frac{1 + G_n(j\omega)C(j\omega)}{F_r^0(j\omega)P_n(j\omega)C(j\omega)} \right| - \frac{\overline{\Delta}_P(\omega)}{|j\omega\tau + 1|} > \frac{\delta_{\max}\omega}{|j\omega\tau + 1|}(1 + \overline{\Delta}_P(\omega)). \quad (5.21)$$

Considerando-se a propriedade dada por $|\omega/(j\omega\tau + 1)| < 1/\tau$, $\forall \omega \in [0, \infty)$, verifica-se, $\forall \omega \in [0, \infty)$, a seguinte desigualdade:

$$\left| \frac{1 + G_n(j\omega)C(j\omega)}{F_r^0(j\omega)P_n(j\omega)C(j\omega)} \right| - \frac{\overline{\Delta}_P(\omega)}{|\tau j\omega + 1|} \geq \left| \frac{1 + G_n(j\omega)C(j\omega)}{F_r^0(j\omega)P_n(j\omega)C(j\omega)} \right| - \overline{\Delta}_P(\omega) \quad (5.22)$$

$$> \frac{\delta_{\max}}{\tau}(1 + \overline{\Delta}_P(\omega)) \quad (5.23)$$

$$\geq \frac{\omega \delta_{\max}}{|\tau j\omega + 1|}(1 + \overline{\Delta}_P(\omega)). \quad (5.24)$$

Então, a condição a seguir é suficiente para garantir a Eq. (5.18)

$$\left| \frac{1 + G_n(j\omega)C(j\omega)}{F_r^0(j\omega)P_n(j\omega)C(j\omega)} \right| - \overline{\Delta}_P(\omega) > \frac{\delta_{\max}}{\tau}(1 + \overline{\Delta}_P(\omega)), \forall \omega \in [0, \infty). \quad (5.25)$$

Sejam μ^0 e γ dados respectivamente por

$$\mu^0 = \inf_{\omega \in [0, \infty)} \left| \frac{1 + G_n(j\omega)C(j\omega)}{F_r^0(j\omega)P_n(j\omega)C(j\omega)} \right| - \overline{\Delta}_P(\omega), \quad (5.26)$$

$$\gamma = \sup_{\omega \in [0, \infty)} (1 + \overline{\Delta}_P(\omega)), \quad (5.27)$$

caso $\mu^0 > 0$, então $\tau > \gamma \delta_{\max}/\mu^0$ assegura que a Eq. (5.18) será respeitada. A condição $\mu^0 > 0$ corresponde ao critério de estabilidade para o caso sem atraso variável utilizando o filtro $F_r^0(s)$. Observa-se também que $1/|j\omega\tau + 1| \leq 1$, $\forall \omega$. Assim, o critério pode ser substituído por $\mu^0 > \frac{\delta_{\max}\omega}{|j\omega\tau + 1|}(1 + \overline{\Delta}_P(\omega))$ em que μ^0 é obtido a partir do lado esquerdo da Eq. (5.21) com $\tau = 0$. Finalmente, uma vez que $(1 + \overline{\Delta}_P(\omega))$ é limitado e $\frac{\delta_{\max}\omega}{|j\omega\tau + 1|} \leq \delta_{\max}/\tau$, $\forall \omega \in [0, \infty]$, então a condição de estabilidade robusta é reforçada para qualquer $\tau > [1 + \sup_{\omega \in [0, \infty]} \overline{\Delta}_P(\omega)]\delta_{\max}/\mu^0$ e

isto completa a prova. $\square$

Um aspecto importante é que o filtro de robustez pode ser re-sintonizado para recuperar a estabilidade robusta na presença de atraso variável. Além do mais, este filtro pode ser adaptado durante a operação se o atraso variável real for maior do que o atraso estimado. Então, na prática, o limite exato de δ_{max} não é exigido, uma vez que a largura de banda do filtro pode ser corrigida durante a operação. Entretanto terá que lidar com a degradação do desempenho em relação à rejeição de perturbação.

5.3 Critério de estabilidade em tempo discreto

O critério de tempo discreto pode ser obtido seguindo os mesmos passos do caso contínuo. Por uma questão de simplicidade o teorema é apresentado diretamente.

Teorema 5.3.1 (Critério de Estabilidade Robusta - Caso de tempo discreto SISO). *O sistema de malha fechada da Fig. 4.3a com $\overline{\Delta}_P(e^{j\omega}) \geq |[P(e^{j\omega}) - P_n(e^{j\omega})]/P_n(e^{j\omega})|$, $\forall \omega \in [0, \pi]$, é estável para qualquer atraso variável definido por $\Delta(v) = v(k - \delta(k))$, $\delta(k) \in \{0, 1, \dots, N\}$ se a malha for estável com $\delta(k) = 0$ e*

$$\left| \frac{1 + G_n(e^{j\omega})C(e^{j\omega})}{F_r(e^{j\omega})P_n(e^{j\omega})C(e^{j\omega})} \right| > \overline{\Delta}_P(e^{j\omega}) + (1 + \overline{\Delta}_P(e^{j\omega}))N|1 - e^{j\omega}|, \quad \forall \omega \in [0, \pi]. \quad (5.28)$$

De maneira similar ao caso contínuo: i) este resultado é também uma generalização da condição de estabilidade robusta padrão com atraso variável (NORMEY-RICO e CAMACHO, 2009), ii) o filtro de robustez pode ser usado diretamente para atenuar o efeito do atraso variável, e ii) $\|(1 - e^{j\omega})F_r(e^{j\omega})\|_\infty = 2(1 - \alpha)/(1 + \alpha)$ se $F_r(z) = \frac{(1-\alpha)z}{z-\alpha}$ com $1 > \alpha > 0$. Então, se o processo for estável em malha aberta, um filtro passa baixa pode ser usado para reforçar a estabilidade robusta considerando qualquer limite para o atraso variável como $\|(1 - e^{j\omega})F_r(e^{j\omega})\|_\infty \rightarrow 0$ à medida que $\alpha \rightarrow 1$.

5.4 Critério de estabilidade para o caso amostrado

Finalmente, a condição de estabilidade robusta pode ser encontrada para o caso amostrado. Tanto o efeito entre amostras e quanto a possibilidade de atrasos não múltiplos do tempo de amostragem são contempladas neste novo teorema.

Teorema 5.4.1 (Critério de Estabilidade Robusta - Caso com controle amostrado SISO). *O sistema de malha fechada mostrado na Fig. 4.3b com $P(s)$ estável e estritamente próprio, $P(z)$ sendo obtido através da discretização com um retentor de ordem zero, $\overline{\Delta}_P(e^{j\omega}) \geq |[P(e^{j\omega}) - P_n(e^{j\omega})]/P_n(e^{j\omega})|$, $\forall \omega \in [0, \pi]$, $\overline{\Delta}_{Pa}(e^{j\omega}) \geq |[P_{alias}(\omega) - P_n(e^{j\omega})]/P_n(e^{j\omega})|$, $\forall \omega \in [0, \infty)$ é estável para qualquer atraso variável definido por $\Delta(v) = v(t - \delta(t))$, $0 \leq \delta(t) \leq Nh$ se a malha fechada é estável com $\delta(t) = 0, \forall t$ e*

$$\left| \frac{1 + G_n(e^{j\omega})C(e^{j\omega})}{F_r(e^{j\omega})P_n(e^{j\omega})C(e^{j\omega})} \right| > \overline{\Delta}_P(e^{j\omega}) + (1 + \overline{\Delta}_{Pa}(e^{j\omega}))\tilde{N}|1 - e^{j\omega}|, \forall \omega \in [0, \infty), \quad (5.29)$$

onde $\tilde{N} = \sqrt{\lfloor N \rfloor^2 - 2g\lfloor N \rfloor + g}$ e $g = N - \lfloor N \rfloor$. Sabendo que $\lfloor N \rfloor$ define o maior inteiro que é menor ou igual a N . Nota-se também que g é uma fração de N e que geralmente $\tilde{N} \leq N$, além disto eles são iguais quando N é inteiro levando à condição de tempo discreto dada pela Eq. (5.28) (KAO e LINCOLN, 2004).

Observa-se que as propriedades do filtro são similares ao caso discreto e que, se o período de amostragem for definido adequadamente, então $P_{alias}(\omega)$ pode ser aproximado por $P(e^{j\omega})$ e este teorema vale para sistemas instáveis em malha aberta.

5.5 Generalização da análise robusta: PSF multi-variável

O critério de estabilidade MIMO para o caso contínuo já foi desenvolvido na Seção 4.1.3 e esta seção é direcionada para o caso discreto para permitir a comparação do resultado com NORMEY-RICO *et al.* (2012b) porém sem perda de generalidade como em SANTOS *et al.* (2014). Além disto, para permitir a utilização em plantas instáveis em malha aberta, se faz necessário adotar a implementação discreta.

Considera-se uma matriz (de funções) de transferência $n \times m$ cujos elementos são definidos como $P_{ij}(z) = G_{ij}(z)z^{-d_{ij}}$ em que cada elemento relaciona a j -ésima entrada com a i -ésima saída. G_{ij} representa uma função de transferência sem atraso e d_{ij} representa os atrasos parciais. Portanto, o modelo nominal é apresentado como:

$$\mathbf{P}_n(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z)z^{-d_{11}} & G_{12}(z)z^{-d_{12}} & \dots & G_{1m}(z)z^{-d_{1m}} \\ G_{21}(z)z^{-d_{21}} & G_{22}(z)z^{-d_{22}} & \dots & G_{2m}(z)z^{-d_{2m}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(z)z^{-d_{n1}} & G_{n2}(z)z^{-d_{n2}} & \dots & G_{nm}(z)z^{-d_{nm}} \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

Seguindo-se os mesmos passos apresentados na Seção 4.1.3, o modelo rápido do CTM

para predição da saída é definido como em JEROME e RAY (1979):

$$\mathbf{G}_o(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z)z^{-(d_{11}-d_1)} & G_{12}(z)z^{-(d_{12}-d_1)} & \dots & G_{1m}(z)z^{-(d_{1m}-d_1)} \\ G_{21}(z)z^{-(d_{21}-d_2)} & G_{22}(z)z^{-(d_{22}-d_2)} & \dots & G_{2m}(z)z^{-(d_{2m}-d_2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(z)z^{-(d_{n1}-d_n)} & G_{n2}(z)z^{-(d_{n2}-d_n)} & \dots & G_{nm}(z)z^{-(d_{nm}-d_n)} \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Adotando-se $d_i = \min_{k=1,\dots,m} d_{ik}$ para $i = 1, \dots, n$, é possível escrever o atraso da saída efetivo como:

$$\mathbf{L}(z) = \begin{bmatrix} z^{-d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z^{-d_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z^{-d_n} \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

e assim decompor o modelo nominal da seguinte maneira

$$\mathbf{P}_n(z) = \mathbf{L}(z)\mathbf{G}_o(z) \rightarrow \mathbf{G}_o(z) = \mathbf{L}(z)^{-1}\mathbf{P}_n(z).$$

O modelo rápido do compensador completo é dado por:

$$\mathbf{G}_f(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) & \dots & G_{1m}(z) \\ G_{21}(z) & G_{22}(z) & \dots & G_{2m}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1}(z) & G_{n2}(z) & \dots & G_{nm}(z) \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

Assim como no caso contínuo, com esse modelo rápido a equação característica não terá atraso (OGUNNAIKE e RAY, 1979; RAO e CHIDAMBARAM, 2006). De maneira geral $\mathbf{G}_\bullet(z)$ será usado para representar ou o modelo rápido para o compensador de saída ou o modelo rápido para o compensador completo. De modo semelhante à forma unificada de implementação para o PSF caso SISO, se o sistema é instável em malha aberta, a estabilização do modelo rápido garante a estabilidade interna se $\mathbf{S}_\bullet(z) = \mathbf{G}_\bullet(z) - \mathbf{F}_r(z)\mathbf{P}_n(z)$ for implementado com um filtro estável (SANTOS *et al.*, 2014).

Na presença de incerteza de modelo, perturbações e atraso variável, a saída MIMO será definida como:

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{P}(z) [\mathbf{U}(z) + \mathbf{Q}(z) + \mathbf{W}(z)], \quad (5.34)$$

em que $\mathbf{U}(z) \in \mathbb{R}^m$ representa a entrada de controle MIMO no domínio z , $\mathbf{Y}(z) \in \mathbb{R}^n$ é a saída MIMO do processo, $\mathbf{Q}(z) \in \mathbb{R}^n$ é uma perturbação externa, $\mathbf{W}(z) \in \mathbb{R}^m$

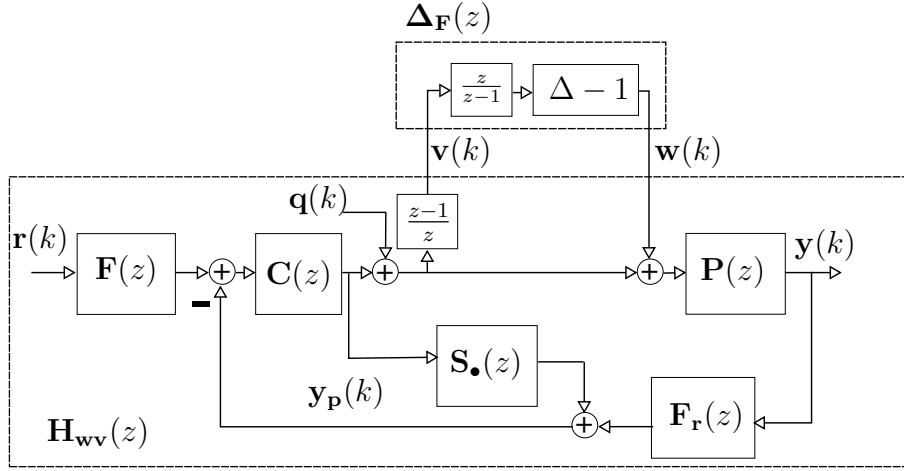


Figura 5.2: PSF equivalente discreto MIMO com atraso variável.

representa o efeito do atraso variável, $\mathbf{P}(z) \neq \mathbf{P}_n(z)$ é usado para descrever o erro de modelagem.

A estrutura equivalente para análise via Teorema do pequeno ganho é apresentada diretamente na Fig. 5.2 em que $\Delta(v(k)) = v(k - \delta(k))$ com $v(k) \in \mathbb{R}^m$. Percebe-se que, como mostrado na Seção 4.1.2, o ganho do pior caso considerando-se o problema MIMO permanece válido:

$$\|\mathbf{w}\|_{L_2}^2 \leq N^2 \|\mathbf{v}\|_{L_2}^2. \quad (5.35)$$

A partir do teorema do pequeno ganho, a estabilidade robusta pode enfim ser verificada e estendida para o caso MIMO por meio da condição dada pelo Teorema a seguir.

Teorema 5.5.1 (Condição de estabilidade simplificada - Caso MIMO tempo discreto). *O sistema representado pela Figura 5.2 é estável da entrada para saída para cada par entrada-saída se:*

$$N \left\| (1 - e^{-j\omega}) \mathbf{M}_\bullet(e^{j\omega})^{-1} \mathbf{C}(e^{j\omega}) \mathbf{F}_r(e^{j\omega}) \mathbf{P}(e^{j\omega}) \right\|_\infty < 1, \quad (5.36)$$

em que $\mathbf{M}_\bullet(z) = [\mathbf{I} + \mathbf{C}(z) \mathbf{S}_\bullet(z) + \mathbf{C}(z) \mathbf{F}_r(z) \mathbf{P}(z)]$.

Sabe-se que $\mathbf{P}(z)$ é desconhecido, mas se $\mathbf{P}(z) \in \Pi_{\mathbf{P}_n(z), \bar{\Delta}_\Pi}$ em que

$$\Pi_{\mathbf{P}_n(z), \bar{\Delta}_\Pi} = \{\mathbf{P}_j(z) : \bar{\sigma}(\mathbf{P}_j(e^{j\omega}) - \mathbf{P}_n(e^{j\omega})) < \Delta_\Pi(e^{j\omega}), \forall \omega \in [0, \pi]\},$$

então a condição de estabilidade pode ser obtida considerando o pior ganho fornecido por alguma planta $\mathbf{P}(z)$ presente no conjunto.

A condição para o caso nominal $\mathbf{P}_j(e^{j\omega}) = \mathbf{P}_n(e^{j\omega})$ é obtida com

$$\mathbf{M}_\bullet(z) = [I + \mathbf{C}(z)\mathbf{G}_\bullet(z)], \quad (5.37)$$

e, por consequência

$$\| [I + \mathbf{C}(e^{j\omega})\mathbf{G}_\bullet(e^{j\omega})]^{-1}\mathbf{C}(e^{j\omega})\mathbf{F}_r(e^{j\omega})\mathbf{P}(e^{j\omega}) \|_\infty \leq \frac{1}{N(1 - e^{-j\omega})}. \quad (5.38)$$

A condição (5.36) combinada com $\mathbf{P}_j(z)$ pode ser usada para avaliar a robustez do preditor de Smith multivariável desde que o teste seja realizado com as matrizes $\mathbf{P}(z)$ que pertencem a uma família de modelos. Por outro lado, este resultado não separa os fatores nominais e incertos de maneira explícita, o que dificulta a análise do problema na presença de incertezas. Na próxima seção, o efeito do erro de modelagem do preditor de Smith filtrado em tempo-discreto será obtido por meio de um critério reformulado de maneira análoga ao caso SISO, separando o efeito das incertezas da malha de controle nominal.

5.5.1 PSF multivariável baseado em redefinição de incertezas

Com vista a reformular a descrição do erro de modelagem no caso multivariável, considera-se o critério obtido a partir de Eq. (5.36) descrito por:

$$N\bar{\sigma}((1 - e^{-j\omega})\mathbf{M}_\bullet(e^{j\omega})^{-1}\mathbf{C}(e^{j\omega})\mathbf{F}_r(e^{j\omega})\mathbf{P}(e^{j\omega})) < 1, \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (5.39)$$

Por simplicidade de notação, serão utilizadas as seguintes definições:

$$\mathbf{L}(e^{j\omega}) = \mathbf{C}(e^{j\omega})\mathbf{P}(e^{j\omega}), \quad (5.40)$$

$$\mathbf{L}_n(e^{j\omega}) = \mathbf{C}(e^{j\omega})\mathbf{P}_n(e^{j\omega}), \quad (5.41)$$

$$\Delta_m(e^{j\omega}) = (\mathbf{L}(e^{j\omega}) - \mathbf{L}_n(e^{j\omega}))\mathbf{L}_n(e^{j\omega})^{-1}. \quad (5.42)$$

De maneira preliminar, cabe destacar um conjunto particular de propriedades matriciais. Consideram-se um escalar α e as matrizes A , $\bar{A}$, e B de dimensões apropriadas, então as seguintes propriedades valem (FRANKLIN *et al.*, 2021):

- i) $\bar{\sigma}(A^{-1}) = 1/\underline{\sigma}(A)$, se $\det(A) \neq 0$,
- ii) $\bar{\sigma}(A + \bar{A}) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(\bar{A})$,
- iii) $\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B)$,
- iv) $\bar{\sigma}(\alpha A) = |\alpha|\bar{\sigma}(A)$,

$$v) \underline{\sigma}(A + \bar{A}) \geq \underline{\sigma}(A) - \bar{\sigma}(\bar{A}).$$

Neste trabalho, é utilizado um filtro de robustez diagonal tal que $\mathbf{F}_r(z) = F_r(z)I$, sendo $F_r(z)$ um filtro escalar estável, o que simplifica o procedimento de análise e sintonia de $\mathbf{F}_r(z)$ assim como ocorre em trabalhos relacionados ARAÚJO e SANTOS (2018); FRANKLIN *et al.* (2021); SANTOS *et al.* (2018a, 2016).

O Teorema a seguir descreve o critério robusto.

Teorema 5.5.2 (Critério de Estabilidade Robusta - Caso MIMO de Tempo Discreto).

$$\Pi(\omega)\bar{\sigma}([I + \mathbf{C}(e^{j\omega})\mathbf{G}_\bullet(e^{j\omega})]^{-1}\mathbf{C}(e^{j\omega})\mathbf{P}_n(e^{j\omega})) < \frac{1}{N|1 - e^{-j\omega}|}, \forall \omega \in [0, \infty), \quad (5.43)$$

sendo

$$\Pi(\omega) = \bar{\sigma}(\mathbf{L}_n(e^{j\omega})^{-1}\mathbf{L}(e^{j\omega})\mathbf{F}_r(e^{j\omega})) + \bar{\sigma}(\Delta_m(e^{j\omega})\mathbf{F}_r(e^{j\omega})) \quad (5.44)$$

o efeito do erro de modelagem, o qual foi separado do ganho de malha nominal.

Comentário 5.5.1. Deve-se observar que, na ausência de erro de modelagem, as seguintes consequências são asseguradas: (i) $\mathbf{L}_n(e^{j\omega}) = \mathbf{L}(e^{j\omega})$, (ii) $\Delta_m(e^{j\omega}) = 0$ e (iii) $\Pi(\omega) = \bar{\sigma}(\mathbf{F}_r(e^{j\omega}))$. Fazendo-se com que (5.43), para o caso nominal, coincida com (5.38). Assim, o critério proposto é uma generalização da formulação sem incerteza no qual o efeito do erro de modelagem é descrito pelo ganho $\Pi(\omega) \geq 1$. Como já era esperado, quanto maior a incerteza, menor o máximo atraso tolerável descrito por $N_{\max}h$, sendo $N_{\max}$ o atraso máximo tolerável em tempo-discreto.

Comentário 5.5.2. Apesar do índice $\Pi(\omega)$ ser incerto seu efeito sofre influência direta do filtro de robustez permitindo atenuação de efeitos indesejáveis. Assim como no caso SISO, um desenvolvimento análogo pode ser feito com as representações de tempo-contínuo ou mesmo o caso de controle amostrado.

Comentário 5.5.3. Cabe ainda enfatizar que $\bar{\sigma}(\mathbf{L}_n(e^{j\omega})^{-1}\mathbf{L}(e^{j\omega})) \leq 1 + \bar{\sigma}(\Delta_m(e^{j\omega}))$. Conforme verificado com o caso SISO, o efeito de $\Pi(\omega)$ pode ser mitigado diretamente pelo filtro de robustez de forma a recuperar a estabilidade a despeito da presença de um atraso variável. O caso contínuo e o caso amostrado podem ser deduzidos de forma análoga.

5.6 Análise robusta: preditor de Artstein

O critério de estabilidade para sistemas com atraso variável controlados pelo preditor de Artstein foi estabelecido através do método da redução, o qual transforma o

sistema original com atraso e preditor num sistema equivalente. Caso assumamos que o modelo de predição não corresponde ao sistema controlado, o método da redução apresenta dificuldades adicionais para obtenção do modelo equivalente. Uma alternativa é explorar a equivalência do preditor de Artstein com o preditor de Smith filtrado com o objetivo de realizar a análise de robustez por meio das ferramentas desenvolvidas para o preditor de Smith filtrado.

5.6.1 Relação entre o PSF e o preditor de Artstein

Para um determinado valor de filtro pode ser demonstrada a equivalência entre o preditor de Artstein e o PSF. Resgatando-se a equação de predição para o PSF

$$\mathbf{X}_p(s) = \mathbf{F}_r(s)\mathbf{X}(s) + (\mathbf{I} - \mathbf{F}_r(s)e^{-s\bar{L}})\mathbf{G}_n(s)\mathbf{U}(s), \quad (5.45)$$

sendo $\mathbf{G}_n(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_n)^{-1}\mathbf{B}_n$. Considerando-se que $\mathbf{X}_p(s)$ é uma predição para $\mathbf{X}(s)e^{s\bar{L}}$. A predição para o preditor de Arstein pode ser apresentada como

$$\begin{aligned} x_p(t) &= e^{A_n\bar{L}}x(t) + \int_{t-\bar{L}}^t e^{A_n(t-\tau)}B_nu(\tau)d\tau, \\ &= e^{A_n\bar{L}}x(t) + \int_0^t e^{A_n(t-\tau)}B_nu(\tau)d\tau - \int_0^{t-\bar{L}} e^{A_n(t-\tau)}B_nu(\tau)d\tau, \\ &= e^{A_n\bar{L}}x(t) + \int_0^t e^{A_n(t-\tau)}B_nu(\tau)d\tau - e^{A_n\bar{L}} \int_0^{t-\bar{L}} e^{A_n(t-\bar{L}-\tau)}B_nu(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Lembrando que

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t e^{A_n(t-\tau)}B_nu(\tau)d\tau \right] = \mathbf{G}_n(s)\mathbf{U}(s),$$

e sua versão atrasada

$$\mathcal{L} \left[\int_0^{t-\bar{L}} e^{A_n(t-\bar{L}-\tau)}B_nu(\tau)d\tau \right] = \mathbf{G}_n(s)e^{-\bar{L}s}\mathbf{U}(s),$$

após as devidas substituições resulta em:

$$\mathbf{X}_p(s) = e^{A_n\bar{L}}\mathbf{X}(s) + \mathbf{G}_n(s)\mathbf{U}(s) + e^{A_n\bar{L}}e^{-\bar{L}s}\mathbf{G}_n(s)\mathbf{U}(s). \quad (5.47)$$

Ou, alternativamente, tem-se que:

$$\mathbf{X}_p(s) = e^{A_n\bar{L}}\mathbf{X}(s) + (\mathbf{I} - e^{A_n\bar{L}}e^{-s\bar{L}})\mathbf{G}_n(s)\mathbf{U}(s). \quad (5.48)$$

É importante destacar a equivalência entre (5.48) e (5.45), desde que $\mathbf{F}_r(s) = e^{A_n\bar{L}}$. O PSF é mais utilizado com sistemas representados na forma de função (matriz)

de transferência enquanto que o preditor de Artstein utiliza o modelo descrito na forma de espaço de estados. Destaca-se a simplicidade do preditor de Artstein em lidar com plantas instáveis em malha aberta através de uma simples realimentação de estado, todavia não dispõe do filtro de robustez presente no PSF para ajustes do desempenho regulatório versus robustez.

Para desenvolvimento da análise de robustez, deve-se observar o conjunto de equivalências dado por:

- $\mathbf{F}_r(s) = e^{A_n \bar{L}}$;
- $\mathbf{G}_n(s) = (sI - A_n)^{-1} B_n$;
- $\mathbf{P}_n(s) = (sI - A_n)^{-1} B_n e^{-s \bar{L}}$;
- $\mathbf{C}(s) = -K$.

Assim, de maneira análoga à Eq. (5.36), chega-se a:

$$\left\| \delta_{\max} \omega [I - K \mathbf{G}_n(j\omega) - K e^{A_n \bar{L}} (\mathbf{P}(j\omega) - \mathbf{P}_n(j\omega))]^{-1} K e^{A_n \bar{L}} \mathbf{P}(e^{j\omega}) \right\|_{\infty} < 1. \quad (5.49)$$

Contudo este resultado engloba a incerteza na malha de realimentação o que dificulta a utilização de limitantes de incertezas multiplicativas. A análise com desacoplamento de incertezas será discutida na próxima seção.

5.6.2 Preditor de Artstein baseado em redefinição de incertezas

A análise da estabilidade robusta com preditor de Artstein é obtida considerando-se um filtro $\mathbf{F}_r(s) = e^{A_n \bar{L}}$, o qual não é diagonal. Assim, a propriedade de comutatividade não é válida, de tal maneira que os ganhos de malha são redefinidos por:

$$\mathbf{L}(j\omega) = K e^{A_n \bar{L}} \mathbf{P}(j\omega), \quad (5.50)$$

$$\mathbf{L}_n(j\omega) = K e^{A_n \bar{L}} \mathbf{P}_n(j\omega), \quad (5.51)$$

sendo a definição da incerteza multiplicativa preservada como indicado na seção anterior pela Eq. (5.42), isto é, $\Delta_m(\omega) = (\mathbf{L}(j\omega) - \mathbf{L}_n(j\omega)) \mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}$.

Partindo-se da Eq. (5.49), deve-se garantir

$$\bar{\sigma}([I - K \mathbf{G}_n(j\omega) - K e^{A_n \bar{L}} (\mathbf{P}(j\omega) - \mathbf{P}_n(j\omega))]^{-1} K e^{A_n \bar{L}} \mathbf{P}(j\omega)) < \frac{1}{\delta_{\max} |\omega|}. \quad (5.52)$$

De maneira alternativa, a condição (5.49) pode ser descrita por:

$$\bar{\sigma}([I - K \mathbf{G}_n(j\omega) + (\mathbf{L}_n(j\omega) - \mathbf{L}(j\omega))]^{-1} K e^{A_n \bar{L}} \mathbf{P}(j\omega)) < \frac{1}{\delta_{\max} |\omega|}. \quad (5.53)$$

Portanto, usando-se os mesmos passos do PSF multivariável em tempo discreto obtém-se o seguinte teorema.

Teorema 5.6.1 (Condição de Estabilidade Robusta - Artstein em Tempo Contínuo). *O sistema representado na Figura 4.6 é estável da entrada para saída para cada par entrada saída se:*

$$\Pi(\omega) \bar{\sigma}([I - K \mathbf{G}_n(j\omega)]^{-1} K e^{A_n \bar{L}} \mathbf{P}_n(j\omega)) < \frac{1}{\delta_{\max}|\omega|}, \quad (5.54)$$

sendo

$$\Pi(\omega) = \bar{\sigma}(\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1} \mathbf{L}(j\omega)) + \bar{\sigma}(\Delta_m(\omega)) \quad (5.55)$$

$$\text{e } \mathbf{G}_n(j\omega) = (j\omega I - A_n)^{-1} B_n$$

Comentário 5.6.1. *A grande diferença desta abordagem é que o filtro não é livre e não se aplica a propriedade de comutatividade. Assim, o filtro fixo, $e^{A_n \bar{L}}$ está embutido no efeito das incertezas por meio de $\mathbf{L}(j\omega)$ e $\mathbf{L}_n(j\omega)$. Por outro lado, as principais conclusões são equivalentes às do preditor de Smith filtrado. Na ausência de incertezas, $\Pi(\omega) = \bar{\sigma}(\mathbf{F}_r(e^{j\omega}))$, como discutido anteriormente.*

Na próxima seção, é demonstrado que o caso nominal retorna um resultado equivalente ao critério obtido na seção 4.1.4 via método da redução.

Particularização para o caso nominal

A análise do caso nominal pode ser reestabelecida partindo de (5.54) com $\mathbf{L}_n(j\omega) = \mathbf{L}(j\omega)$. Desta maneira, obtém-se a seguinte condição em particular:

$$\bar{\sigma}(\underbrace{[I - K \mathbf{G}_n(j\omega)]^{-1} K}_{K[I - \mathbf{G}_n(j\omega)K]^{-1}} e^{A_n \bar{L}} \mathbf{P}_n(j\omega)) < \frac{1}{\delta_{\max}|\omega|}, \quad (5.56)$$

ou

$$\bar{\sigma}(K[I - \mathbf{G}_n(j\omega)K]^{-1} K e^{A_n \bar{L}} \mathbf{G}_n(j\omega)) < \frac{1}{\delta_{\max}|\omega|}, \quad (5.57)$$

já que $\mathbf{P}_n(j\omega) = \mathbf{G}_n(j\omega) e^{-j\omega \bar{L}}$ e $P(I + QP)^{-1} = (I + PQ)^{-1}P$. Outra propriedade útil advém do fato que $Ae^{Ah} = e^{Ah}A$ e, por consequência, verifica-se a identidade dada por¹ $e^{Ah}(sI - A)^{-1} = (sI - A)^{-1}e^{Ah}$. Logo, partindo da expressão (5.57), obtém-se:

$$\bar{\sigma}(K \underbrace{[I - (j\omega I - A_n)^{-1} B_n K]^{-1}}_{\mathbf{G}_n(j\omega)} \underbrace{(j\omega I - A_n)^{-1} B_n}_{\mathbf{G}_n(j\omega)} e^{A_n \bar{L}}) < \frac{1}{\delta_{\max}|\omega|}. \quad (5.58)$$

¹ A propriedade $e^{Ah}(sI - A)^{-1} = (sI - A)^{-1}e^{Ah}$ pode ser verificada expandindo $(sI - A)^{-1}$ em série de potência ou simplesmente notando-se que $e^{Ah}e^{At} = e^{At}e^{Ah}$ e $(sI - A)^{-1} = \mathcal{L}\{e^{At}\}$.

Mais uma vez, substituindo $I = (j\omega I - A)^{-1}(j\omega I - A)$, verifica-se a condição dada por:

$$\bar{\sigma}(K[(j\omega I - A_n)^{-1}(j\omega I - A_n) - (j\omega I - A_n)^{-1}B_n K]^{-1}(j\omega I - A_n)^{-1}e^{A_n \bar{L}}B_n) < \frac{1}{\delta_{\max}|\omega|}. \quad (5.59)$$

$$\bar{\sigma}(K[j\omega I - A_n - B_n K]^{-1}(j\omega I - A_n)(j\omega I - A_n)^{-1}e^{A_n \bar{L}}B_n) < \frac{1}{\delta_{\max}|\omega|}. \quad (5.60)$$

$$\bar{\sigma}(\delta_{\max}\omega K(j\omega I - A_n - B_n K)^{-1}e^{A_n \bar{L}}B_n) < 1, \forall \omega \in [0, \infty). \quad (5.61)$$

Finalmente, chega-se à seguinte condição de estabilidade robusta para sistemas com erro de modelagem controlados com realimentação de estados e preditor de Artstein:

$$||\delta_{\max}\omega K(j\omega I - A_n - B_n K)^{-1}e^{A_n \bar{L}}B_n)||_{\infty} < 1. \quad (5.62)$$

Este resultado é equivalente ao critério sem erro de modelagem com atraso variável obtido através do método da redução descrito pela condição (4.40) indicando a compatibilidade das análises propostas. Apesar dessa equivalência, os dois critérios apresentam suas particularidades. O preditor de Artstein não necessita de ajuste para garantir a estabilidade interna ao lidar com plantas instáveis em malha aberta, porém, não dispõe da mesma liberdade que o PSF para ajuste do filtro de robustez. De qualquer forma os principais benefícios do PSF MIMO foram preservados.

Capítulo 6

Controle robusto de sistemas de segunda ordem com atraso variável

Este capítulo inclui no estudo os sistemas de segunda ordem vibracionais sujeitos ao atraso variável. Critérios de estabilidade robusta são desenvolvidos e um método baseado em IMC é proposto para melhoria de desempenho.

6.1 Atraso variável em sistemas de segunda ordem

Os sistemas de controle que utilizam modelos de segunda ordem possuem importante aplicação prática. Na indústria automobilística e aeronáutica, a absorção de vibrações tem impacto direto na satisfação dos clientes. Em um helicóptero, desconectar o assento do piloto do restante da estrutura através do controle ativo de vibração é um dos maiores desafios nessa área (MOTTERSHEAD e RAM, 2006). Praticamente tudo que se movimenta gera algum tipo de vibração que pode ser minimizada ou refazendo o projeto do sistema com inclusão de absorvedores ou através do controle ativo da vibração.

Alguns trabalhos relevantes demonstram os benefícios da abordagem baseada em modelos de segunda ordem (DATTA, 2003; MOTTERSHEAD e RAM, 2006, 2007).

O controle ativo de vibrações mecânicas, de oscilações em redes elétricas, fenômenos de vibrações acústicas entre outros, são naturalmente caracterizados através de sistemas de segunda ordem (FULLER, 2008; GUDARZI, 2015; MISRIKHANOV e RYABCHENKO, 2006; PALAZZOLO, 2016). O controle em malha fechada para este tipo de sistema é implementado utilizando-se os estados e suas derivadas de maneira a obter propriedades importantes tanto para análise quanto para síntese (ABDELAZIZ, 2016, 2013; ARAÚJO *et al.*, 2016; DATTA *et al.*, 1997, 2000; OUYANG, 2010; ZHANG *et al.*, 2017).

Um sistema de segunda ordem de vibração forçada com uma entrada pode ser descrito como segue:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathcal{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathcal{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (6.1)$$

sendo que $\mathbf{M}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}$ são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e de rigidez, as três de ordem n , $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de deslocamento da posição e sua dimensão representa o número de graus de liberdade, $\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ representa a força externa associada à configuração dos atuadores e $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$. A resposta natural da Eq. (6.1) é conhecida na literatura como problema do autovalor quadrático (MOTTERSHEAD e RAM, 2006).

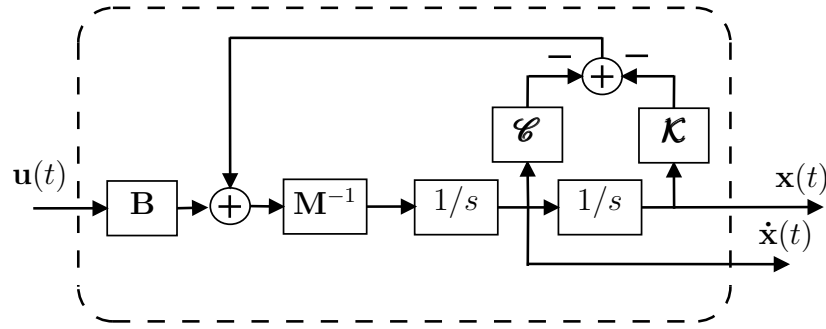


Figura 6.1: Esquemático de um sistema linear de segunda ordem.

O esquemático em diagrama de blocos do sistema de segunda ordem descrito na Eq. (6.1) é mostrado na Fig. 6.1 em que $\mathbf{x}(t)$ e $\dot{\mathbf{x}}(t)$ são variáveis disponíveis para o controle em malha fechada. Perceba que, mesmo que $\mathbf{x}(t)$ tenha apenas uma dimensão o sistema já é tratado como multivariável pelo fato de realimentar $\dot{\mathbf{x}}$.

Nesses sistemas, a massa e a rigidez geralmente são consideradas grandezas fáceis de se medir através de procedimentos estáticos. A frequência natural (período da vibração) pode ser obtida utilizando-se um cronômetro, porém muitas vibrações possuem amplitudes baixas ou de curta duração exigindo dispositivos cada vez mais sofisticados. O coeficiente de amortecimento é uma grandeza que requer o uso de métodos dinâmicos para ser obtido (INMAN, 2014). A estrutura forçada indicada pela Eq. (6.1) é vantajosa para caracterizar muitos sistemas vibracionais pois em alguns casos é difícil medir o decaimento de uma oscilação através de uma excitação que não seja sustentada (INMAN, 2014).

Experimentos que estimulam um sistema vibratório são amplamente conhecidos no ramo da engenharia elétrica e têm sido usados para obter modelos baseados na resposta em frequência. A função de transferência do sistema é obtida a partir de medições na saída causadas por sinais na entrada. Uma faixa de sinais senoidais de entrada acionam um *shaker* que induz vibrações na estrutura e as medidas das

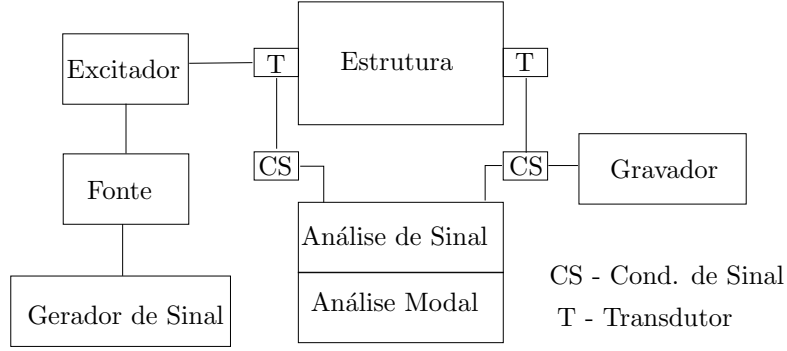


Figura 6.2: Esquema de Hardware utilizado para identificação de sistemas vibratórios (Fonte: INMAN (2014)).

amplitudes são coletadas simultaneamente (INMAN, 2014). Um esquema comum utilizado para efetuar estas medições é exibido na Fig. 6.2

Se a grandeza medida for o deslocamento $x(t)$, a função de transferência obtida a partir da relação entre $X(s)/F(s)$, sendo $F(s) = BU(s)$, é conhecida como rigidez dinâmica e sua inversa é conhecida como receptância $R(s)$ (INMAN, 2014).

Neste contexto, o projeto baseado na receptância (INMAN, 2014; MOTTERSHEAD e RAM, 2006, 2007) é bastante útil, uma vez que não requer o conhecimento ou cálculo das matrizes $\mathbf{M}$, $\mathcal{C}$ e $\mathbf{K}$ no processo de identificação do modelo (MOTTERSHEAD e RAM, 2006, 2007; TEHRANI e MOTTERSHEAD, 2012). Além disso, a identificação baseada na resposta em frequência pode ser obtida diretamente de dados experimentais, tornando o processo de identificação mais simples (MOTTERSHEAD e RAM, 2006, 2007; TEHRANI e MOTTERSHEAD, 2012). O método das receptâncias simplifica o problema a tal ponto que permite descrevê-lo como um sistema linear de equações (RAM *et al.*, 2009).

A receptância de malha aberta (ou receptância) é representada por:

$$\mathbf{R}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathcal{C}s + \mathbf{K})^{-1}, \quad (6.2)$$

sendo s a variável complexa de Laplace.

Esta matriz de transferência possui uma relação importante com o método de projeto baseado em dados experimentais que permitem obter o modelo para um sistema de segunda ordem de forma direta.

Além disso, a lei de controle pode ser definida a partir da informação da receptância que é útil para sistemas de ordem elevada, uma vez que, a descrição via espaço de estados aumentada não é necessária. Para efeito de apresentação, perceba que o modelo de segunda ordem sem atraso pode ser descrito de forma alternativa,

a partir da receptância, por:

$$\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(s)\mathbf{B} \\ s\mathbf{R}(s)\mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

adotando-se $\mathbf{z}(t) = [\mathbf{x}(t)^T \dot{\mathbf{x}}(t)^T]^T$, permite-se definir $\mathbf{Z}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{z}(t)\}$, $\mathbf{U}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{u}(t)\}$, $\mathbf{Z}(s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{U}(s)$ sabendo-se que $\mathcal{L}\{\cdot\}$ representa a transformada de Laplace de um dado sinal.

De maneira geral, se $\dot{\mathbf{x}}(t)$ e $\mathbf{x}(t)$ são mensuráveis, a lei de controle é definida como:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}\mathbf{x}(t), \quad (6.4)$$

de maneira que $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ sejam matrizes de ganho da realimentação.

Alternativamente, se $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}(t)$ e $\mathbf{y}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t)$ são variáveis mensuráveis então

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_y\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{G}_y\mathbf{y}(t) \quad (6.5)$$

em que $\mathbf{F} = \mathbf{F}_y\mathbf{T}$ e $\mathbf{G} = \mathbf{G}_y\mathbf{T}$ para garantir a generalidade da Eq. (6.4).

Embora os projetos de controle em malha fechada de sistemas de segunda ordem já possuam resultados consolidados, a presença de tempo morto pode causar perda de desempenho e até mesmo instabilidade (AGRAWAL e YANG, 2000; DU e ZHANG, 2008; JINWU *et al.*, 2016; UDWADIA *et al.*, 2003).

A definição das matrizes $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ é tratada em diversos artigos, mas em sua maioria não consideram a análise de estabilidade na presença de atraso na entrada.

De qualquer forma, a análise dos autovalores de malha fechada e da estabilidade somente pode ser feita assumindo-se atraso constante (ARAÚJO, 2018; BAI *et al.*, 2016a; RAM *et al.*, 2009, 2011; SINGH e OUYANG, 2013; SINGH *et al.*, 2014). Desta maneira a análise de robustez é considerada um problema aberto para sistemas de segunda ordem na presença de atraso variável, uma vez que a abordagem usando autovalores não pode ser utilizada diretamente para o caso de sistemas variantes no tempo. Vale lembrar que um fator relevante do uso das receptâncias é que seu modelo é obtido tipicamente por meio da resposta em frequência.

6.1.1 Atraso variável na entrada

Nesta seção, é considerado o sistema de segunda ordem com atraso variável na entrada descrito como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathcal{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t - \delta(t)), \quad (6.6)$$

o atraso variável é limitado de modo que $\delta(t) \in [0, \delta_{max}]$ e as condições iniciais

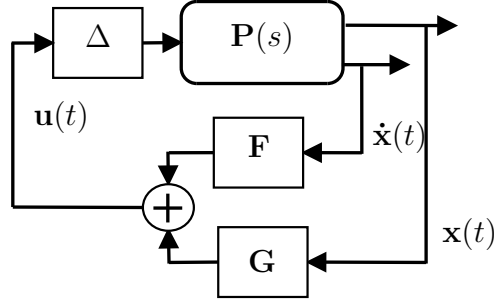


Figura 6.3: Descrição em malha fechada do sistema de segunda ordem com atraso variável.

são definidas por $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}'_0$ e ainda $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{0}_{p,1}$, $t < 0$ em que $\mathbf{0}_{l,m}$ representa uma matriz (nula) de zeros l linhas e m colunas.

A representação simplificada do problema com atraso variável está representada pela Fig. 6.3 onde Δ representa o efeito do atraso variável e seu modelo é baseado nas receptâncias.

Uma extensão do artigo de receptâncias foi apresentado em FRANKLIN e SANTOS (2020b) incluindo incertezas de modelo não estruturadas que será tratado na Seção 6.2. Caso a receptância apresente incerteza significativa, a faixa de atraso máximo admissível pode ser subestimada ou superestimada. É naturalmente indesejável que esta faixa de atraso máximo seja superestimada, pois do ponto de vista prático pode ser verificado uma instabilidade que não foi prevista pela garantia de estabilidade teórica.

Incerteza nas receptâncias é um tema importante do ponto de vista prático (ADAMSON *et al.*, 2019, 2020a,b; BAI *et al.*, 2016b; LIANG *et al.*, 2017; TEHRANI *et al.*, 2011).

A incerteza de modelo tem diversas origens como, por exemplo, erros de medição; distorção de resposta em frequência causada por dinâmicas não lineares (TEHRANI *et al.*, 2013); variabilidade na velocidade de vibração, resultante da variação do material e da constituição de materiais compósitos (ADAMSON *et al.*, 2020b); e variação paramétrica (LIANG *et al.*, 2017).

Uma consequência direta deste erro de modelagem é um descasamento entre as respostas de malha fechada teórica e prática. Para evitar resultados inesperados se faz necessário o uso de ferramentas de projeto e análise robusta. As formas convencionais de assegurar estabilidade na presença de atraso variável são baseados em funcionais de L-K e L-R, os quais exigem uma descrição em espaço de estados de ordem aumentada para lidar com sistemas de segunda ordem (SANTOS *et al.*, 2018b). Entretanto, representações aumentadas são indesejáveis principalmente no controle de sistemas com dimensões elevadas.

Em razão disto, a abordagem utilizando o teorema do pequeno ganho é uma

alternativa interessante por conta de sua simplicidade. Esta solução foi utilizada em KAO e LINCOLN (2004) para o caso SISO. Para o controle de sistemas de segunda ordem é necessária a realimentação de $\mathbf{x}(t)$ e $\dot{\mathbf{x}}(t)$ impondo, de antemão, uma abordagem multivariável. Em SANTOS *et al.* (2018b), o resultado de KAO e LINCOLN (2004) foi estendido para o caso MIMO e re-apresentado na seção 4.1.2.

6.1.2 Critério de estabilidade simplificado

O critério para estabilidade para sistemas de segunda ordem com atraso variável é apresentado nesta seção.

Considera-se inicialmente o sistema descrito pela Fig. 6.3 em que o efeito do atraso variável é representado por:

$$\Delta(\mathbf{u}) = \mathbf{u}(t - \delta(t)), \quad (6.7)$$

com delta limitado, ou seja, $\delta(t) \in [0, \delta_{\max}]$.

Considera-se que $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ são ganhos estabilizantes sem qualquer cancelamento polo-zero instável (condição para estabilidade interna). Neste caso, a seguinte hipótese é assumida

Hipótese 6.1.1.

i) a receptância de malha fechada é dada por

$$\mathbf{H}(s) = [\mathbf{M}s^2 + (\mathcal{C} - \mathbf{B}\mathbf{F})s + \mathbf{K} - \mathbf{B}\mathbf{G}]^{-1};$$

ii) os polos de $\mathbf{H}(s)$ estão estritamente dentro do semiplano esquerdo;

iii) a matriz de função de transferência $\mathbf{R}(s)\mathbf{B}(s\mathbf{F} + \mathbf{G})$ é definida sem cancelamento polo-zero instável;

iv) o atraso variável é definido de modo que $\delta(t) \in [0, \delta_{\max}]$.

Percebe-se que esta hipótese é utilizada para formalizar condições de estabilidade convencionais e suas principais definições. Hipótese 6.1.1 (i) define a condição de receptância de malha fechada sem atraso (ii) exige a estabilidade de malha fechada, (iii) expõe de forma explícita que não pode haver cancelamento polo-zero de $\mathbf{R}(s)\mathbf{B}$ por meio de $s\mathbf{F} + \mathbf{G}$ para garantir estabilidade interna ¹ (iv) define o intervalo de variação do atraso.

¹Observe também que se $\mathbf{F}$ e $\mathbf{G}$ forem definidos de modo que os polos instáveis de $\mathbf{R}(s)\mathbf{B}$ sejam cancelados por $s\mathbf{F} + \mathbf{G}$, então estes modos indesejáveis seriam polos da função de transferência de malha fechada da perturbação na entrada para $\mathbf{x}(t)$. Consequentemente, a condição de estabilidade interna é necessária para garantir uma relação estável entre qualquer par entrada-saída.

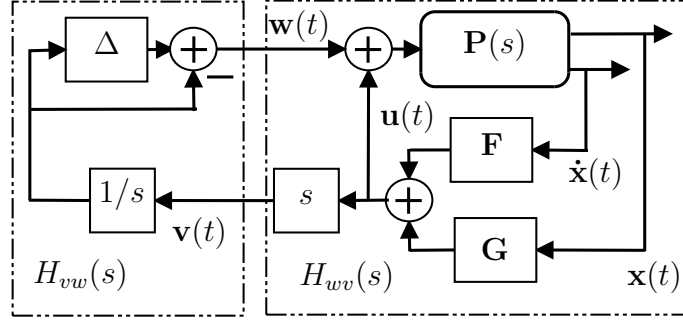


Figura 6.4: Descrição equivalente em malha fechada com atraso variável.

Assim, o teorema de estabilidade para sistemas de segunda ordem com atraso variável é apresentado a seguir.

Teorema 6.1.1 (Estabilidade simplificada para sistemas de 2ª ordem). *Assumindo que a Hipótese 6.1.1 é válida, então, o sistema de malha fechada da Fig. 6.3, será internamente estável se*

$$\|j\omega(j\omega\mathbf{F} + \mathbf{G})\mathbf{H}(j\omega)\mathbf{B}\|_{\infty}\delta_{max} < 1. \quad (6.8)$$

Este resultado é fruto da combinação entre um sistema invariante no tempo sem atraso ($\mathbf{H}_{wv}(s)$) e uma perturbação desconhecida causada pelo atraso variável ($\mathbf{H}_{vw}(s)$). A representação da Fig. 6.4 demonstra essa combinação.

A prova detalhada é apresentada no Apêndice A.4 e lá se verifica que $\|\mathbf{H}_{wv}\|_{\infty} = \|j\omega[j\omega\mathbf{F} + \mathbf{G}]\mathbf{H}(j\omega)\mathbf{B}\|_{\infty}$ completando a prova do Teorema do Pequeno Ganho.

Percebe-se que este resultado não impõe qualquer limitação em relação à taxa de variação do atraso. Ainda assim, o ganho desta variação do atraso é pequeno (KAO e LINCOLN, 2004) evitando conservadorismo desnecessário.

Mais uma vez o conceito de receptância é importante, pois $\mathbf{R}(s)$ pode ser obtido diretamente sem a necessidade de se obter as matrizes $\mathbf{M}$, $\mathcal{C}$ e $\mathbf{K}$ individualmente.

O Lema da Inversão de Matriz permite relacionar diretamente a receptância de malha fechada sem atraso com a receptância de malha aberta da seguinte maneira:

$$\mathbf{H}(s) = \{\mathbf{R}(s)^{-1} - \mathbf{B}[\mathbf{sF} + \mathbf{G}]\}^{-1} \quad (6.9)$$

$$= \mathbf{R}(s) + \mathbf{R}(s)\mathbf{B}\{\mathbf{I} - [\mathbf{sF} + \mathbf{G}]\mathbf{R}(s)\mathbf{B}\}^{-1}[\mathbf{sF} + \mathbf{G}]\mathbf{R}(s), \quad (6.10)$$

o que equivale à fórmula de Sherman-Morrison com múltiplas entradas, mas sem atraso.

Esta abordagem possui uma vantagem importante por conta da dimensão de $\{\mathbf{I} - [\mathbf{sF} + \mathbf{G}]\mathbf{R}(s)\mathbf{B}\}^{-1}$ ser definida pelo número de entradas (p) ao invés da dimensão dos estados (n) de maneira que pode ser muito menor que a dimensão do sistema.

Esta é uma vantagem relevante desta abordagem para sistemas com altas dimensões uma vez que: i) o cálculo de matriz inversa é feito com dimensões reduzidas (ou até mesmo uma função de transferência escalar) e ii) o critério de estabilidade pode ser aplicado diretamente a partir do modelo de receptância de malha aberta.

Além disso, a análise de estabilidade pode ser executada diretamente usando o máximo valor singular da matriz $s[s\mathbf{F} + \mathbf{G}]\mathbf{H}(s)\mathbf{B}$ com $s = j\omega$ sendo também algo importante.

E percebe-se que o critério de estabilidade pode ser calculado de forma alternativa considerando-se a malha $\mathbf{L}(s)$ através de:

$$s[s\mathbf{F} + \mathbf{G}]\mathbf{H}(s)\mathbf{B} = s\mathbf{L}(s)[\mathbf{I} - \mathbf{L}(s)]^{-1}, \quad (6.11)$$

em que $\mathbf{L}(s) = [s\mathbf{F} + \mathbf{G}]\mathbf{R}(s)\mathbf{B}$.

Prova: Substituindo (6.10) no lado direito de (6.11) resulta em

$$\begin{aligned} s[s\mathbf{F} + \mathbf{G}]\mathbf{H}(s)\mathbf{B} &= \\ &= s[s\mathbf{F} + \mathbf{G}]\mathbf{R}(s) + \mathbf{R}(s)\mathbf{B}\{\mathbf{I} - [s\mathbf{F} + \mathbf{G}]\mathbf{R}(s)\mathbf{B}\}^{-1}[s\mathbf{F} + \mathbf{G}]\mathbf{R}(s)\mathbf{B} \\ &= s[s\mathbf{F} + \mathbf{F}]\mathbf{R}(s)\mathbf{B} + s[s\mathbf{F} + \mathbf{F}]\mathbf{R}(s)\mathbf{B} + \{\mathbf{I} - [s\mathbf{F} + \mathbf{G}]\mathbf{R}(s)\mathbf{B}\}^{-1}[s\mathbf{F} + \mathbf{G}]\mathbf{R}(s)\mathbf{B} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Adotando $\mathbf{L}(s) = [s\mathbf{F} + \mathbf{G}]\mathbf{R}(s)\mathbf{B}$ e aplicando em (6.12) obtém-se:

$$s[s\mathbf{F} + \mathbf{G}]\mathbf{H}(s)\mathbf{B} = s\mathbf{L}(s) + s\mathbf{L}(s)\{\mathbf{I} - \mathbf{L}(s)\}^{-1}\mathbf{L}(s) \quad (6.13)$$

Pós multiplicando o primeiro termo do lado direito de (6.13) por $\{\mathbf{I} - \mathbf{L}(s)\}^{-1}\{\mathbf{I} - \mathbf{L}(s)\}$ e colocando em evidência $s\mathbf{L}(s)\{\mathbf{I} - \mathbf{L}(s)\}^{-1}$ completa a prova. $\square$

Por consequência, uma condição de estabilidade simplificada é dada pelo seguinte corolário.

Corolário 6.1.1 (Condição de estabilidade simplificada). *Assumindo que a Hipótese 6.1.1 permanece válida e que $\mathbf{L}(j\omega) = [j\omega\mathbf{F} + \mathbf{G}]\mathbf{R}(j\omega)\mathbf{B}$. Para o sistema em malha fechada representado pela Fig. 6.4, o sistema será internamente estável se*

$$\|j\omega\mathbf{L}(j\omega)[\mathbf{I} - \mathbf{L}(j\omega)]^{-1}\|_{\infty}\delta_{max} < 1. \quad (6.14)$$

Nota-se que $\mathbf{L}(s) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ enquanto que $\mathbf{R}(s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se o problema tem apenas uma entrada simples ($p = 1$), por exemplo, toda operação pode ser realizada utilizando uma função escalar $\mathbf{L}(j\omega)$ que, de forma significativa, simplifica a complexidade computacional, visto que $\|j\omega\mathbf{L}(j\omega)[\mathbf{I} - \mathbf{L}(j\omega)]^{-1}\|_{\infty} = \sup_{\omega \in [0, \infty)} \omega |\mathbf{L}(j\omega)/[\mathbf{I} - \mathbf{L}(j\omega)]|$. Além de que, $\mathbf{L}(s)$ é a matriz de transferência de malha aberta de $\mathbf{w}(t)$ para $\mathbf{u}(t)$, e tal fato generaliza o resultado de KAO e LINCOLN (2004) com o objetivo

de considerar sistemas de segunda ordem com uma ou múltiplas entradas.

Comentário 6.1.1. *Note que se $\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_y \dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{G}_y \mathbf{y}(t)$ então todos os resultados são válidos com $\mathbf{F} = \mathbf{F}_y \mathbf{T}$ e $\mathbf{G} = \mathbf{G}_y \mathbf{T}$.*

Na seção 6.2, os critérios simplificados para garantir estabilidade robusta na presença de incerteza de modelo e atraso variável serão apresentados.

6.2 Critério de estabilidade robusta para sistemas de segunda ordem

A descrição da incerteza não estruturada considerando-se o pior caso é utilizada para obter o critério de estabilidade robusta. O limitante da incerteza é definido de forma a obter o limite de incerteza admissível. Considera-se a descrição de incerteza aditiva definida como

$$\Delta_a(s) = \mathbf{R}(s)\mathbf{B} - \mathbf{R}_n(s)\mathbf{B}_n, \quad (6.15)$$

sendo $\mathbf{P}_n(s) = \mathbf{R}_n(s)\mathbf{B}_n$ a matriz de transferência utilizada para projeto e $\mathbf{P}(s) = \mathbf{R}(s)\mathbf{B}$ descreve o sistema dinâmico de $\mathbf{u}(s)$ para $\mathbf{x}(s)$. A Fig. 6.5 demonstra o diagrama de malha fechada considerando a incerteza.

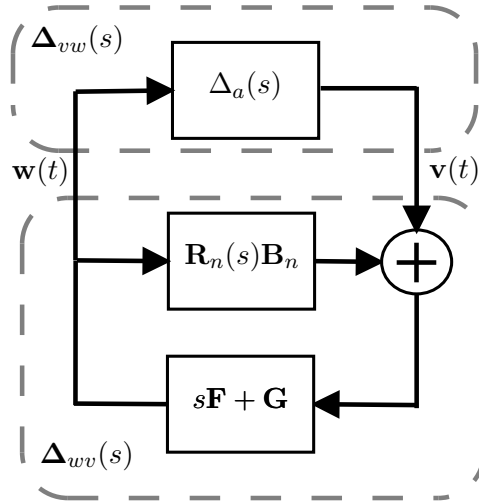


Figura 6.5: Descrição equivalente para Teorema do pequeno ganho.

Embora $\Delta_a(s)$ seja claramente desconhecido é possível estabelecer um limitante superior para este erro de descrição como

$$\overline{\Delta}_a(\omega) \geq \overline{\sigma}(\mathbf{R}(j\omega)\mathbf{B} - \mathbf{R}_n(j\omega)\mathbf{B}_n), \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (6.16)$$

sendo $\bar{\sigma}(\cdot)$ e $\underline{\sigma}(\cdot)$ o máximo e o mínimo valor singular de uma matriz, respectivamente.

Além disso, as seguintes incertezas são definidas considerando-se a malha da Fig. 6.5:

$$\bar{\Delta}_\ell(\omega) \geq \bar{\sigma}(\mathbf{L}(j\omega) - \mathbf{L}_n(j\omega)), \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (6.17)$$

$$\bar{\Delta}_m(\omega) \geq \bar{\sigma}(\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}[\mathbf{L}(j\omega) - \mathbf{L}_n(j\omega)]), \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (6.18)$$

$$\bar{\Delta}_i(\omega) \geq \bar{\sigma}(\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}\mathbf{L}(j\omega)), \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (6.19)$$

com $\mathbf{L}(s) = (s\mathbf{F} + \mathbf{G})\mathbf{R}(s)\mathbf{B}$ e $\mathbf{L}_n(s) = (s\mathbf{F} + \mathbf{G})\mathbf{R}_n(s)\mathbf{B}_n$. O limitante $\bar{\Delta}_i(\omega)$ é incomum na literatura de controle robusto mas pode ser superestimado a partir de $\bar{\Delta}_m(\omega)$ diretamente, uma vez que

$$\bar{\sigma}(\Delta_i(j\omega)) = \bar{\sigma}(\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}\mathbf{L}(j\omega) - \mathbf{I} + \mathbf{I}) = \bar{\sigma}(\Delta_m(j\omega) - \mathbf{I}) \leq \bar{\Delta}_m(\omega) + 1$$

pois se verifica que $\bar{\Delta}_i(\omega) = \bar{\Delta}_m(\omega) + 1$.

Assim como foi feito nas seções anteriores considerando o PSF, agora com base na Fig. 6.5 e em (KHALIL, 2001, Capítulo 5) um critério de estabilidade robusto pode ser definido a partir do teorema do pequeno ganho da seguinte maneira:

$$\bar{\sigma}(\Delta_{vw}(j\omega))\bar{\sigma}(\Delta_{wv}(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (6.20)$$

se ambos subsistemas $\Delta_{vw}(s)$ e $\Delta_{wv}(s)$ forem estáveis. A Eq. (6.20) é respeitada se a seguinte condição, que considera o pior caso, for atendida

$$\bar{\sigma}([\mathbf{I} - (j\omega\mathbf{F} + \mathbf{G})\mathbf{R}_n(j\omega)\mathbf{B}_n]^{-1}(j\omega\mathbf{F} + \mathbf{G}))\bar{\Delta}_a(\omega) < 1, \quad \forall \omega \in [0, \infty). \quad (6.21)$$

Esta condição de estabilidade foi apresentada em FRANKLIN e SANTOS (2020b) e estende o resultado de SANTOS e FRANKLIN (2018a) com a inclusão de incertezas de modelo. As hipóteses seguintes e o desenvolvimento detalhado em FRANKLIN e SANTOS (2020b) permitem obter a condição de estabilidade robusta contemplando os efeitos de incertezas de modelo e do atraso variável.

Hipótese 6.2.1.

- i) *Considera-se que as raízes de $\det(\mathbf{I} - (s\mathbf{F} + \mathbf{G})\mathbf{R}_n(s)\mathbf{B}_n) = 0$ estão estritamente no semiplano esquerdo;*
- ii) *A matriz de transferência $\mathbf{L}_n(s) = (s\mathbf{F} + \mathbf{G})\mathbf{R}_n(s)\mathbf{B}_n$ é definida sem cancelamentos de polos instáveis;*
- iii) *O atraso variável é definido como $\delta(t) \in [0, \delta_{\max}]$;*

iv) A incerteza não estruturada é definida como

$$\overline{\Delta}_m(\omega) \geq \overline{\sigma}(\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}[\mathbf{L}(j\omega) - \mathbf{L}_n(j\omega)]), \forall \omega \in [0, \infty).$$

Teorema 6.2.1 (Condição de Estabilidade Robusta). *Assumindo-se a validade das hipóteses 6.2.1, o sistema de malha fechada da Fig. 6.3 é estável da entrada para saída se para qualquer par entrada-saída*

$$\overline{\sigma}([\mathbf{I} - \mathbf{L}_n(j\omega)]^{-1}\mathbf{L}_n(j\omega))(\omega\delta_{\max} + (\omega\delta_{\max} + 1)\overline{\Delta}_m(\omega)) < 1, \forall \omega \in [0, \infty). \quad (6.22)$$

Comentário 6.2.1. *A prova do Teorema segue o mesmo procedimento dos teoremas anteriores e está detalhada em FRANKLIN et al. (2021) e no Anexo A.4.1.*

Comentário 6.2.2. *Os limitantes de incerteza $\overline{\Delta}_\ell(\omega)$, $\overline{\Delta}_m(\omega)$ podem ser obtidos através de identificação experimental ou simulações. Sua simplicidade permite a análise de sistemas de segunda ordem com atrasos incertos porém constantes (FRANKLIN et al., 2021).*

6.2.1 Estratégia IMC para melhoria na robustez

Como forma de melhorar o desempenho robusto de sistemas de segunda ordem na presença de atraso variável esta seção apresenta um controlador IMC (MORARI e ZAFIRIOU, 1989) baseado em receptância discutido em FRANKLIN et al. (2021). De modo semelhante ao PSF, onde se busca preservar o comportamento nominal na presença de atraso constante enquanto se busca um melhor desempenho robusto através da resposta mais lenta à rejeição de perturbação ou menor atenuação da perturbação.

Partindo de um filtro diagonal MIMO definido como

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \phi(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \phi(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \phi(s) \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

em que $\phi(s)$ é um filtro SISO estável e $\Phi(s) = \phi(s)\mathbf{I}$. A estratégia usando IMC com base na receptância é implementada conforme ilustrado na Fig. 6.6 (FRANKLIN et al., 2021) de onde percebe-se que a equação característica livre de atraso é definida por:

$$\det(\mathbf{I} - (s\mathbf{F} + \mathbf{G})\Phi(s)\mathbf{R}(s)\mathbf{B} + (s\mathbf{F} + \mathbf{G})\mathbf{R}_n(s)\mathbf{B}_n(\mathbf{I} - \Phi(s))) = 0, \quad (6.24)$$

sendo $\mathbf{R}_n(s)\mathbf{B}_n\Phi(s) = \Phi(s)\mathbf{R}_n(s)\mathbf{B}_n$ porque $\Phi(s) = \phi(s)\mathbf{I}$. Logo, se $\mathbf{R}_n(s)\mathbf{B}_n = \mathbf{R}(s)\mathbf{B}$, a equação característica é dada simplesmente por:

$$\det(\mathbf{I} - (s\mathbf{F} + \mathbf{G})\mathbf{R}_n(s)\mathbf{B}_n) = 0,$$

ou seja, a equação característica nominal padrão na ausência de incertezas.

Comentário 6.2.3. Para garantir a estabilidade interna é necessário garantir a BIBO estabilidade de $\Gamma(s) = s\mathbf{R}_n(s)\mathbf{B}_n(1 - \phi(s))$.

Se algum polo de $\mathbf{R}_n(s)\mathbf{B}_n$ não estiver estritamente dentro do semiplano esquerdo, então: (i) o numerador de $\phi(s)$ deve ser definido de modo que os polos de malha aberta instáveis ou marginalmente instáveis sejam zeros de $(1 - \phi(s))$, e (ii) $s\mathbf{R}_n(s)$, $\mathbf{B}_n$, $(1 - \phi(s))$ devem ser agrupados e implementados como uma realização estável mínima definida por $\Gamma(s) = s\mathbf{R}_n(s)\mathbf{B}_n(1 - \phi(s))$.

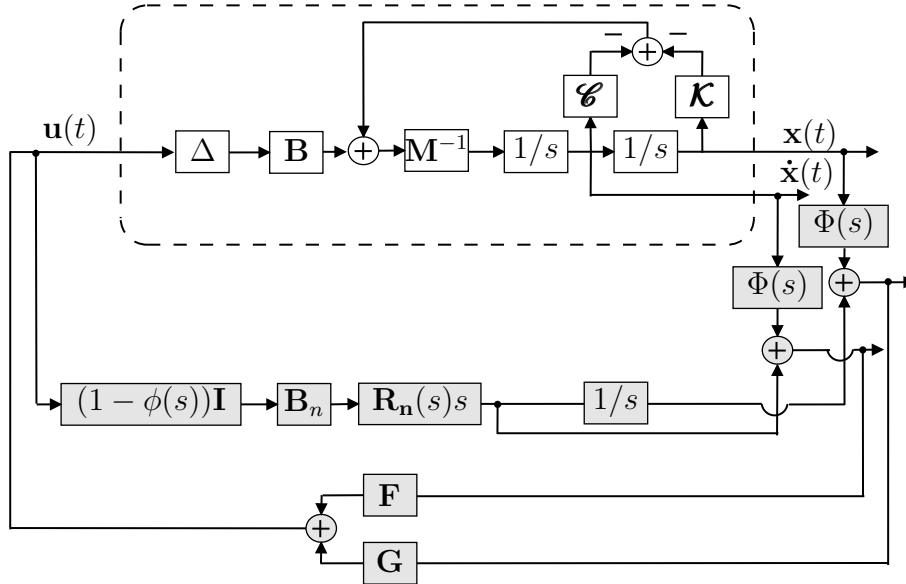


Figura 6.6: Diagrama esquemático em malha fechada do sistema de controle com IMC e atraso variável.

A consideração de atraso variável foi tratada inicialmente em SANTOS e FRANKLIN (2018a). Para aplicação do teorema do pequeno ganho considera-se o sistema de malha fechada equivalente mostrado na Fig. 6.7. Seguindo-se a demonstração do Apêndice A.4 (KAO e LINCOLN, 2004; SANTOS e FRANKLIN, 2018a), o pior caso para o ganho L_2 do subsistema Δ_{vw} é dado por $\delta_{\max}$. Resta encontrar Δ_{vw} para poder aplicar o teorema do pequeno ganho. Sabe-se que $\mathbf{W}(s) = s\mathbf{U}(s)$. A partir da

Fig. 6.7 são obtidas as seguintes relações em que $\mathbf{P}(s) = \mathbf{R}(s)\mathbf{B}$ e $\mathbf{P}_n(s) = \mathbf{R}_n(s)\mathbf{B}_n$:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(s) = & (s\mathbf{F} + \mathbf{G})\Phi(s)\mathbf{R}(s)\mathbf{B}\mathbf{V}(s) + (s\mathbf{F} + \mathbf{G})\Phi(s)\mathbf{R}(s)\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ & + (s\mathbf{F} + \mathbf{G})\mathbf{R}_n(s)\mathbf{B}_n(1 - \phi(s))\mathbf{U}(s).\end{aligned}\quad (6.25)$$

Verifica-se anteriormente que $(s\mathbf{F} + \mathbf{G})\Phi(s) = \Phi(s)(s\mathbf{F} + \mathbf{G})$, logo, $\Delta_{wv}(s)$ é definido como:

$$\Delta_{wv}(s) = s[\mathbf{L}_n(s) + \Phi(s)(\mathbf{L}(s) - \mathbf{L}_n(s))]^{-1}\Phi(s)\mathbf{L}(s). \quad (6.26)$$

Considerando-se a relação de $\mathbf{V}(s)$ para $\mathbf{W}(s)$, o critério de estabilidade para a abordagem IMC baseada na receptância é dada por:

$$\bar{\sigma}([\mathbf{L}_n(j\omega) + \Phi(j\omega)(\mathbf{L}(j\omega) - \mathbf{L}_n(j\omega))]^{-1}\Phi(j\omega)\mathbf{L}(j\omega))\omega\delta_{\max} < 1, \forall \omega \in [0, \infty). \quad (6.27)$$

Nota-se que este critério exige $\mathbf{L}(j\omega)$, claramente desconhecido, portanto, considerando esta dificuldade, um critério robusto pode ser apresentado a partir da descrição de incertezas não estruturadas de $\mathbf{L}(j\omega)$. Assim, com a inclusão de $\mathbf{L}_n(s)\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}$ na Eq. (6.27), a seguinte condição permanece válida

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}([\mathbf{L}_n(j\omega) + \Phi(j\omega)(\mathbf{L}(j\omega) - \mathbf{L}_n(j\omega))]^{-1}\mathbf{L}_n(s)\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}\Phi(j\omega)\mathbf{L}(j\omega)) \leq \\ \bar{\sigma}(\Phi(j\omega)\Delta_i(j\omega))\bar{\sigma}([\mathbf{L}_n(j\omega) + \Phi(j\omega)\Delta_a(j\omega)]^{-1}\mathbf{L}_n(j\omega)).\end{aligned}\quad (6.28)$$

Desta maneira, o critério apresentado pela Eq. (6.27) também é garantido se a condição seguinte for respeitada

$$\bar{\sigma}(\Phi(j\omega)\Delta_i(j\omega))\delta_{\max} < \underline{\sigma}(\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}[\mathbf{L}_n(j\omega) + \Phi(j\omega)\Delta_a(j\omega)]). \quad (6.29)$$

Utilizando-se as mesmas operações anteriores o critério para IMC é obtido de forma mais simples como sendo

$$\bar{\sigma}([\mathbf{I} - \mathbf{L}_n(j\omega)]^{-1}\mathbf{L}_n(j\omega))\bar{\sigma}(\phi(j\omega)[\bar{\Delta}_i(\omega)\omega\delta_{\max} + \bar{\Delta}_m(\omega)]) < 1, \forall \omega \in [0, \infty). \quad (6.30)$$

Nota-se que o filtro $\phi(j\omega)$ não interfere no desempenho nominal embora possa ser utilizado para atenuar o efeito da incerteza de modelo diretamente. Considerando-se mais uma vez que $\bar{\Delta}_i(\omega)$ pode ser substituído por $1 + \bar{\Delta}_m(\omega)$ a condição de estabilidade robusta com IMC é dada em seguida.

Teorema 6.2.2 (Condição de Estabilidade Robusta - IMC). *Se o conjunto de suposições 6.2.1 forem válidas, o sistema da Fig. 6.3 é estável da entrada para saída*

para qualquer par entrada-saída se

$$\overline{\sigma}([\mathbf{I} - \mathbf{L}_n(j\omega)]^{-1}\mathbf{L}_n(j\omega))\overline{\sigma}(\phi(j\omega)[\omega\delta_{\max} + (\omega\delta_{\max} + 1)\overline{\Delta}_m(\omega)]) < 1, \forall \omega \in [0, \infty). \quad (6.31)$$

Observa-se que $\phi(s)$ multiplica os termos definidos por $\Delta_i(\omega)$ e $\Delta_m(\omega)$ conforme Eq. (6.30) e (6.31). Apesar do principal objetivo ser encontrar um critério de estabilidade baseado em receptância para sistemas de segunda ordem com atraso variável, ocorre que é interessante, como consequência, descrever um procedimento para projeto robusto baseado no controlador IMC.

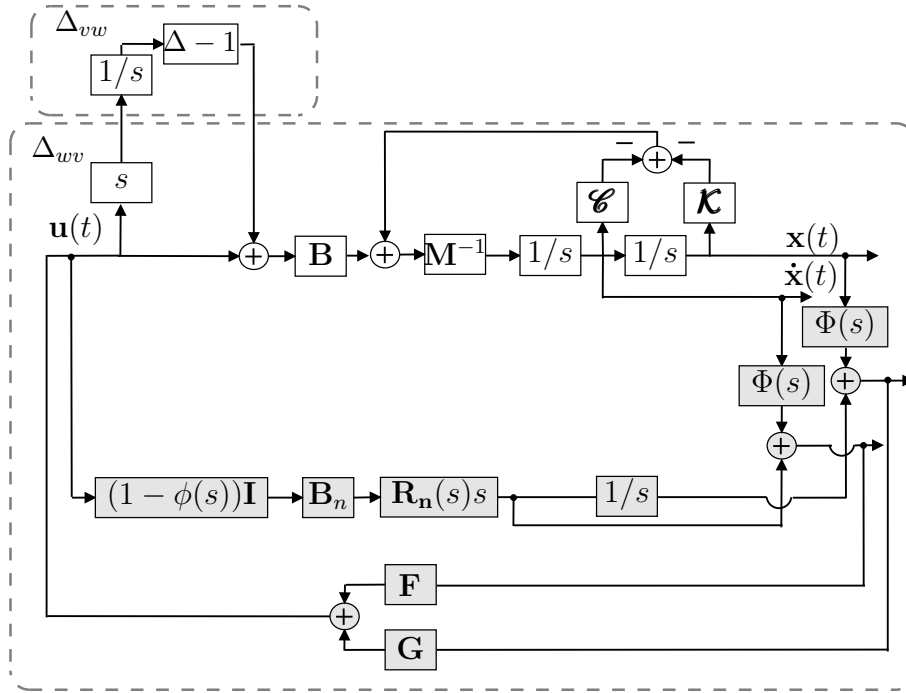


Figura 6.7: Descrição equivalente para análise através do teorema do pequeno ganho.

Se o sistema possui somente polos estáveis, um filtro passa baixas definido como $\phi(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)^m}$ pode ser projetado para forçar estabilidade robusta para um dado limite de atraso $\delta_{\max}$ e uma determinada incerteza não estruturada $\overline{\Delta}_m(\omega)$.

A partir da definição do seguinte índice de frequência

$$\mu(\omega) = \bar{\sigma}([\mathbf{I} - \mathbf{L}_n(j\omega)]^{-1} \mathbf{L}_n(j\omega))(\omega\delta_{\max} + (\omega\delta_{\max} + 1)\bar{\Delta}_m(\omega)), \quad (6.32)$$

a condição para forçar a estabilidade robusta com o filtro passa baixas é simplesmente $\mu(\omega)/[(\sqrt{(\tau\omega)^2 + 1})^m] < 1$. Com base neste limitante, a condição de projeto

é definida como $\tau \geq \tau_c$ em que τ_c possui valor real² calculado da seguinte forma

$$\tau_c = \sup_{s.a. \ \omega \in [0, \infty)} \frac{\sqrt{\mu(\omega)^{2/m} - 1}}{\omega}. \quad (6.33)$$

Mais uma vez um filtro passa baixas é projetado para respeitar a condição de estabilidade e o compromisso com desempenho e robustez deve ser considerado. Uma constante de tempo τ elevada reduz a frequência de corte enquanto a ordem do filtro m reduz a banda de transição. De qualquer maneira, filtros de primeira e segunda ordem oferecem respostas razoáveis (FRANKLIN *et al.*, 2021).

Como forma de consolidar o projeto para sistemas de segunda ordem com incertezas, em FRANKLIN *et al.* (2021) apresenta-se uma análise semelhante ao que foi feito com o PSF utilizando IMC, pois em ambos os casos é necessário fazer uso do modelo da planta. Assim como no PSF, verificou-se que é possível aumentar a margem de robustez em troca de perda no desempenho em relação à rejeição de perturbação. Esta técnica é semelhante ao PSF mas deve ser usada quando não há um atraso mínimo ou seu valor é desconhecido. Esta abordagem foi usada em sistemas de segunda ordem mas pode ser aplicada para os casos dos capítulos anteriores na medida em que o conceito é similar ao preditor de Smith.

²Valores Complexos não são considerados uma vez que a condição de estabilidade é assegurada em uma dada frequência para algum valor de τ mesmo quando um valor complexo é encontrado.

Capítulo 7

Estudo de Casos

Para ilustrar os resultados deste trabalho seis simulações e um resultado experimental são apresentados. Na Seção 7.1, o PSF é utilizado em um caso SISO estável em malha aberta e na Seção 7.2 considera-se a aplicação do PSF para um sistema SISO instável em malha aberta. Na Seção 7.3, considera-se a aplicação do PSF no contexto de sistemas em cascata. A Seção 7.4 trata de um caso instável em malha aberta controlado por realimentação de estados. A simulação da Seção 7.5 envolve o caso multivariável com preditor de Artstein aplicado a um RPA - Reator Perfeitamente Agitado (instável em malha aberta). Em seguida o caso baseado em sistemas de segunda ordem que utiliza a estratégia do IMC é analisado na Seção 7.6. Os resultados finalizam com um caso experimental de controle de temperatura de um termoresistor na Seção 7.7.

7.1 Caso I: PSF - Processo estável em malha aberta SISO

O estudo de caso inicial considerado no ambiente contínuo como proposto originalmente em NORMEY-RICO e CAMACHO (2007). O problema representa um sistema de controle de fluxo de ar onde o fluxo de ar da saída no final de um tubo é controlado variando a velocidade angular de um ventilador do outro lado do tubo.

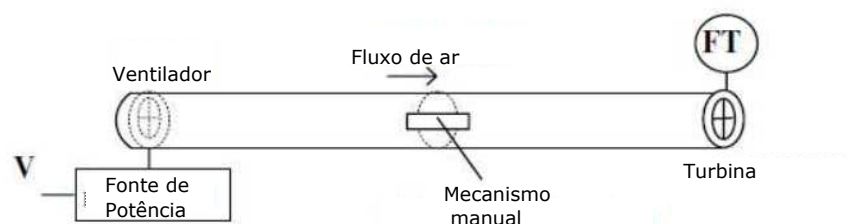


Figura 7.1: Sistema de controle de fluxo de ar. (Fonte: Adaptado de NORMEY-RICO e CAMACHO (2008) pág. 158).

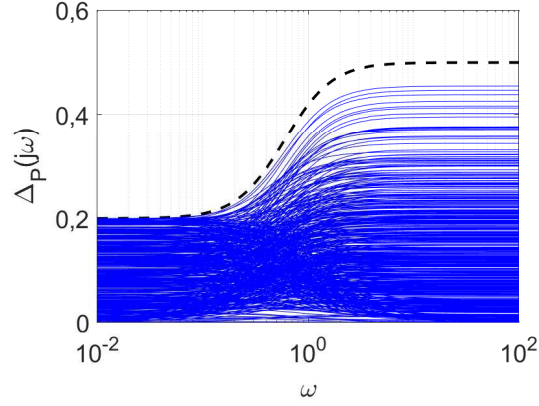


Figura 7.2: Pior caso de incerteza multiplicativa (linha tracejada), incertezas de modelo aleatórias baseadas em 500 plantas distribuídas uniformemente (linhas sólidas).

Observa-se que neste processo, o atraso variável é de natureza contínua (função contínua com o tempo). Assim como em NORMEY-RICO e CAMACHO (2007), o modelo rápido do processo é dado por:

$$G_n(s) = \frac{1}{1,7s + 1}. \quad (7.1)$$

Por conta do efeito variável do atraso, assume-se uma variação de 30% em torno de $L = 8,2$ como proposto em NORMEY-RICO e CAMACHO (2007), com este sendo descrito como uma incerteza variável no tempo ao invés de um erro de modelagem fixo.

O modelo nominal completo é definido como

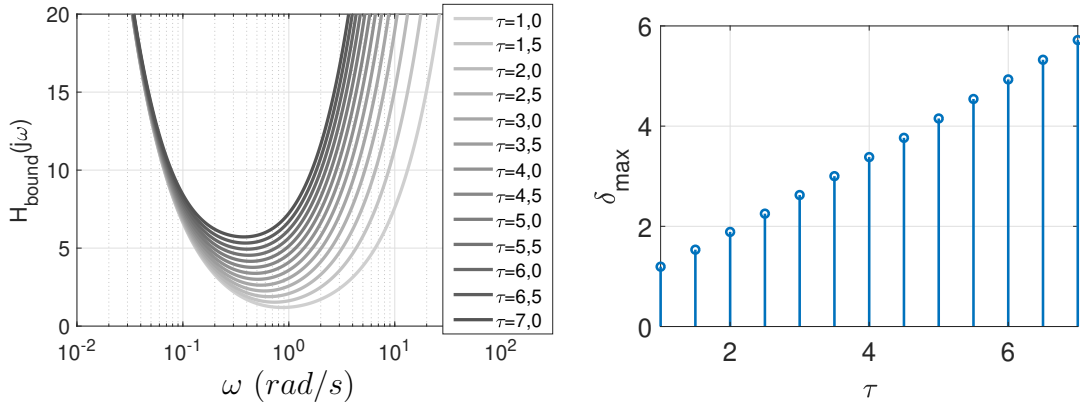
$$P_n(s) = \frac{e^{-5,74s}}{1,7s + 1}, \quad (7.2)$$

onde $L(t) \in [5, 74; 10, 66]$ e $\delta_{max} \geq 4,92$ de maneira que possa ser considerado 30% de variação em torno de $L = 8,2$. Além do mais, assume-se um limite máximo de 20% de erro de modelagem do ganho e da constante de tempo. Neste caso, $\bar{\Delta}_P(\omega)$ resulta diretamente de

$$P^1(s) = \frac{1,2e^{-5,74s}}{1,2 \cdot 1,7s + 1}, P^2(s) = \frac{0,8e^{-5,74s}}{0,8 \cdot 1,7s + 1},$$

$$P^3(s) = \frac{1,2e^{-5,74s}}{0,8 \cdot 1,7s + 1}, P^4(s) = \frac{0,8e^{-5,74s}}{1,2 \cdot 1,7s + 1},$$

em que $\Delta_P^j(\omega) = |P_n(\omega) - P^j(\omega)|/|P_n(\omega)|$ é um vértice de incerteza dado e $\bar{\Delta}_P(\omega) = \max(\Delta_P^1(\omega), \Delta_P^2(\omega), \Delta_P^3(\omega), \Delta_P^4(\omega))$. O limitante de incerteza $\bar{\Delta}_P(\omega)$ e 500 incertezas multiplicativas de plantas aleatórias distribuídas uniformemente são mostradas na Fig. 7.2.



(a) Limites de atraso variável para múltiplos valores de filtros. (b) Limite máximo de atraso variável tolerável (δ_{max} para múltiplos filtros).

Figura 7.3: Análise de sintonias do filtro de robustez (caso estável de malha aberta).

Um simples controlador PI é definido por

$$C(s) = \frac{1,5(1 + 1,7s)}{1,7s}.$$

Baseado no controlador do PSF, o efeito de um filtro de primeira ordem ($F_r(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$) é estudado. Uma vez que $\delta_{\text{max}} > 4,92$ é exigido, os limites definidos por

$$H_{\text{Bound}}(j\omega) = \frac{\left[\left| \frac{1+G_n(j\omega)C(j\omega)}{G_n(j\omega)C(j\omega)} \right| - |F_r(j\omega)| \overline{\Delta}_P(\omega) \right]}{|F_r(j\omega)\omega|(1 + \overline{\Delta}_P(\omega))} > \delta_{\text{max}}, \quad \forall \omega \in [0, \infty),$$

são obtidos com interesse de projeto. Os limites com múltiplos valores de τ são mostrados na Fig. 7.3a para ilustrar. O atraso variável máximo para cada filtro é exposto também na Fig. 7.3b. Se $\tau = 6$ for usado, então $\delta_{\text{max}} = 4,93$ o qual respeita a faixa de atraso desejada [5, 74; 10, 67]. De modo evidente, a constante de tempo do filtro pode ser usada para suavizar o efeito do atraso ampliando o intervalo de atraso tolerável.

Para efeito de simulação, o atraso global é considerado como $L(t) = 8,5 + 2\text{sen}(\omega t)$ e o seguinte processo é adotado:

$$P(s) = \frac{1,2e^{-8,5s}}{1,36s + 1}. \quad (7.3)$$

Uma perturbação em degrau na entrada com 0,2 de amplitude é aplicado em $t = 90$ s. São utilizados dois filtros, $F_r(s) = \frac{1}{s+1}$ e $F_r(s) = \frac{1}{6s+1}$. A saída e o sinal de controle são apresentados nas Figs. 7.4a e 7.4b, respectivamente. Observe que a abordagem proposta pode ser usada em um sistema de controle de tempo contínuo a fim de lidar com atraso contínuo e nenhuma informação adicional é ne-

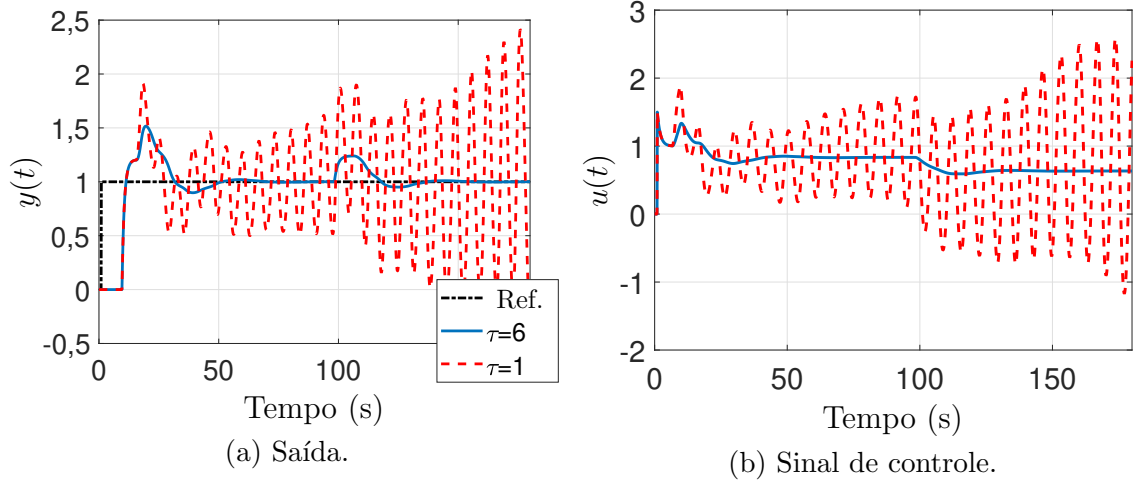


Figura 7.4: Respostas de malha fechada com atrasos variáveis: $L(t) = 8, 5 + 2\sin(\omega t)$ (caso estável).

cessária se comparado com Teorema do pequeno ganho padrão. Como já esperado, τ pode resultar diretamente de $H_{\text{Bound}}(j\omega)$ já que este necessita apenas do limite de incerteza multiplicativa convencional. Em resumo, a complexidade da proposta é equivalente ao caso invariante usual.

7.2 Caso II: PSF - Processo SISO instável em malha aberta

O controle de concentração de um reator instável é apresentado em NORMEY-RICO e CAMACHO (2009) e considerado neste caso. O modelo linearizado no ponto de operação desejado é dado pela seguinte função de transferência:

$$P_m(s) = \frac{3,443e^{-20s}}{103,1s - 1}.$$

O controlador e o filtro de referência apresentados em NORMEY-RICO e CAMACHO (2009) são dados por:

$$C(s) = \frac{3,29(43,87s + 1)}{43,87s}; \quad F(s) = \frac{(20s + 1)}{(43,87s + 1)}.$$

Nota-se que a estrutura de implementação unificada de tempo discreto do PSF é exigida a fim de garantir a estabilidade interna. O Teorema 2.2.5 requer um modelo estável de malha aberta devido ao cálculo do $P_{alias}(\omega)$. Entretanto, como mostrado em YAMAMOTO e ARAKI (1994), a resposta em frequência de um sistema instável em malha aberta amostrado pode ser obtida se o sistema de malha fechada é estável. Além do mais, $P_{alias}(\omega)$ pode ser aproximado por $P(z)|_{z=e^{j\omega}}$ se o comportamento

entre amostras for desprezível (h for suficientemente pequeno) (KAO e LINCOLN, 2004). Neste exemplo, $h = 0,5$ s a fim de que $P(z)|_{z=e^{j\omega}} \approx P_{alias}(\omega)$ e o Teorema 2.2.5 possa ser aplicado diretamente.

Dado que sistemas reais são afetados por incertezas, a condição dada pela Eq. (5.29) é usada. Mais uma vez, será considerado 20% de incerteza na estimação da constante de tempo e ganho estático. Para o limite do atraso variável é considerado 10% de variação máxima. Assim, os modelos nominais contínuo e discreto com atraso fixo são dados respectivamente por:

$$P_n(s) = \frac{3,443e^{-18s}}{103,1s - 1},$$

$$P_n(z) = \frac{0,01669z^{-36}}{z - 1,005}.$$

Pra efeito de simulação, assume-se que o processo sem o efeito do atraso é dado por:

$$P(s) = \frac{3,787}{92,79s - 1},$$

de modo que o atraso global é limitado a $L(t) \in [19, 21]$. Então, $\bar{\Delta}_P(e^{j\omega})$ pode ser obtido diretamente de

$$P^1(s) = \frac{1,2 \cdot 3,443}{1,2 \cdot 103,1s + 1}, \quad P^2(s) = \frac{0,8 \cdot 3,443}{0,8 \cdot 103,1s + 1},$$

$$P^3(s) = \frac{1,2 \cdot 3,443}{0,8 \cdot 103,1s + 1}, \quad P^4(s) = \frac{0,8 \cdot 3,443}{1,2 \cdot 103,1s + 1},$$

em que

$$\Delta_P^j(e^{j\omega}) = |P_n(e^{j\omega}) - P^j(e^{j\omega})|/|P_n(e^{j\omega})|$$

é um dado vértice de incerteza e o pior caso da incerteza multiplicativa é dada por

$$\bar{\Delta}_P(e^{j\omega}) = \max(\Delta_P^1(e^{j\omega}), \Delta_P^2(e^{j\omega}), \Delta_P^3(e^{j\omega}), \Delta_P^4(e^{j\omega})).$$

O limitante de incerteza $\bar{\Delta}_P(e^{j\omega})$ e 500 incertezas multiplicativas de plantas aleatórias distribuídas uniformemente são mostradas na Fig. 7.5.

O filtro de robustez é definido como:

$$F_r(z) = \frac{a_0z + a_1}{(z - z_f)^2}$$

em que z_f define os polos do filtro e a_0 e a_1 são usados para garantir um $S(z)$ estável. Além disso, $\bar{\Delta}_P(e^{j\omega}) \approx \bar{\Delta}_{P_a}(e^{j\omega})$ por conta do tempo de amostragem usado neste exemplo.

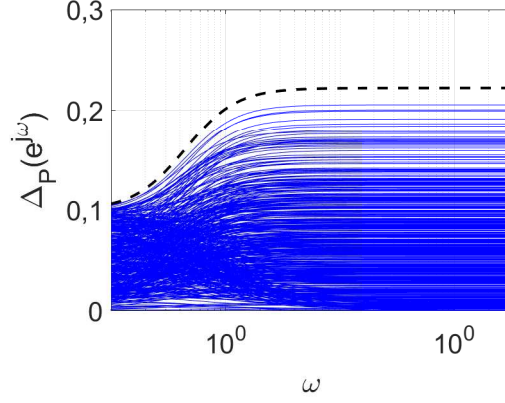


Figura 7.5: Pior caso de incerteza multiplicativa (linha tracejada), incertezas de modelo aleatórias baseadas em 500 plantas distribuídas uniformemente (linhas sólidas) - caso instável em malha aberta.

Para o caso misto, o limite do ganho é dado por:

$$H_{Bound}(e^{j\omega}) = \frac{\left| \frac{1+G_n(e^{j\omega})C(e^{j\omega})}{P_n(e^{j\omega})C(e^{j\omega})} \right| - |F_r(e^{j\omega})| \bar{\Delta}_P(e^{j\omega})}{|F_r(e^{j\omega})(1 - e^{j\omega})|(1 + \bar{\Delta}_{Pa}(e^{j\omega}))} > \tilde{N}, \quad \forall \omega \in [0, \infty), \quad (7.4)$$

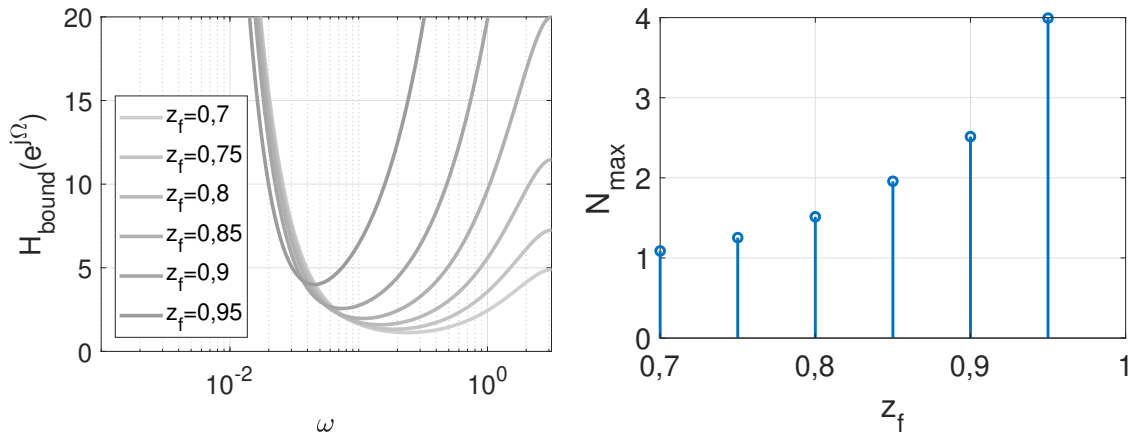
em que

$$N = \frac{\tilde{N}^2 + \lfloor \tilde{N} \rfloor^2 + \lfloor \tilde{N} \rfloor}{2\lfloor \tilde{N} \rfloor + 1},$$

pode ser usado diretamente para obter N a partir de $\tilde{N}$.

O efeito da sintonia do filtro de robustez está ilustrado na Fig. 7.6a enquanto que o atraso variável máximo para cada filtro é exibido na Fig. 7.6b. Perceba que a margem de atraso variável é afetada por z_f , mas a relação não é direta como no caso estável em malha aberta uma vez que os zeros do filtro são usados para garantir estabilidade robusta. De qualquer maneira a estratégia com o PSF pode ser facilmente projetada para garantir estabilidade robusta, visto que a interpretação através da resposta em frequência pode ser aplicada diretamente. Neste problema, $\delta_{max} = 8,2 \cdot h$ o que garante estabilidade robusta para $18 \leq L(t) \leq 22,1$.

As respostas de malha fechada para seguimento de referência com uma perturbação em degrau na entrada com 0,5 de amplitude em 330 s são mostradas nas Figs. 7.7a e 7.7b sendo $L(t) = 20 + 2\text{sen}(2t)$. Perceba que, como já esperado, a estratégia proposta é capaz de atenuar o efeito indesejável do atraso variável. Mesmo para o caso instável, a sintonia do filtro de robustez pode ser facilmente alcançada usando o critério de estabilidade proposto. Como previsto, a resposta de malha fechada é estável com $z_f = 0,98$. Além disso, o resultado é não conservador em excesso visto que a instabilidade é percebida com $z_f = 0,85$.



(a) Limites de atraso variável múltiplos valores de filtros. (b) Limite máximo de atraso variável admissível (N_{max}) para múltiplos filtros.

Figura 7.6: Análise de filtro de robustez (caso instável em malha aberta).

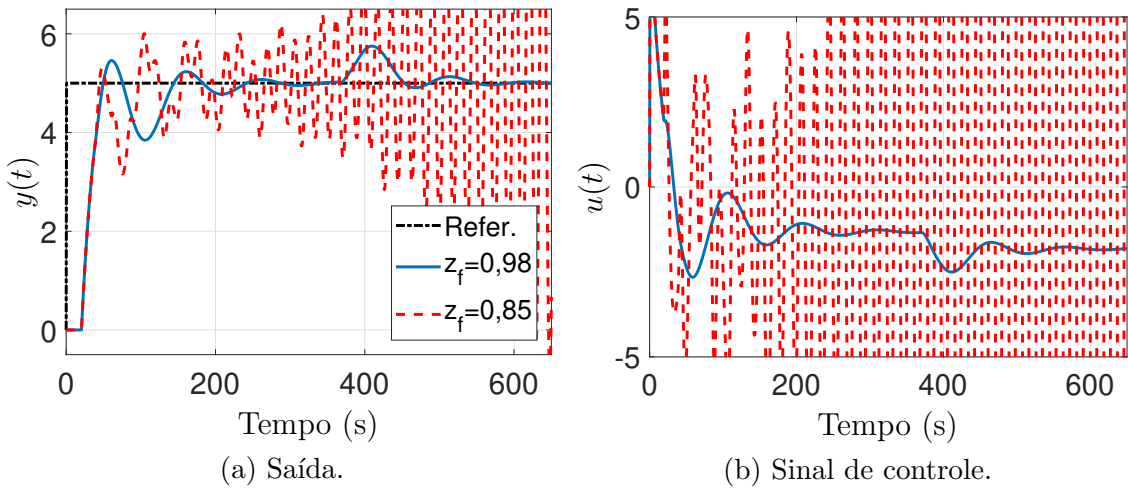


Figura 7.7: Controle em malha fechada com atraso variável: $L(t) = 20 + 2\text{sen}(2t)$ (caso instável em malha aberta).

7.3 Caso III: PSF - Sistema em cascata

Considerando o sistema de controle em cascata apresentado na Fig. 7.8, assume-se uma estrutura com controlador local no qual os sinais de medição e atuação trafegam via meios de comunicação dedicados. Esta hipótese é tipicamente imposta por razões de segurança tanto em malhas industriais, quanto em robótica móvel. Enquanto que a malha de controle externa é configurada com um controlador mais afastado compartilhando um rede de comunicação.

O problema do controle em cascata de sistemas com atraso é um tema relevante, uma vez que este tipo de estratégia é usualmente empregada em processos industriais e robótica móvel (GARCIA *et al.*, 2010; SANTOS *et al.*, 2018a). A título de exemplo, robôs móveis costumam apresentar um controlador local para regular a velocidade das rodas e um controlador externo para controlar uma trajetória. No campo da indústria de processo, costuma-se utilizar controladores locais para agir sobre a dinâmica de atuadores e os controladores mestres são empregados para regular a variável de processo de interesse. Com o avanço das redes de comunicação no contexto do chão de fábrica e da robótica móvel, novos desafios têm surgido.

7.3.1 Projeto de PID baseado em IMC

A malha (rápida) interna constituída por C_2 e P_2 é sintonizada usando a estrutura IMC para obter um PID equivalente utilizando um modelo G_{n2} de P_2 conforme Fig. 7.9. As perturbações estão representadas em q .

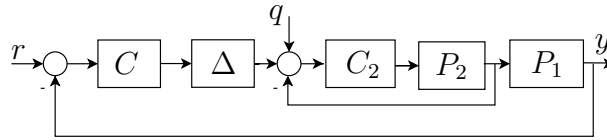


Figura 7.8: Sistema de controle em cascata.

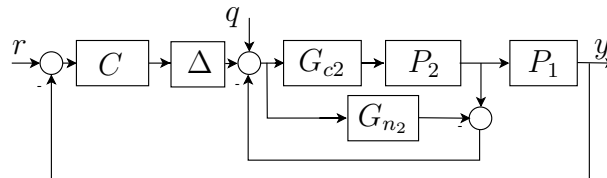


Figura 7.9: Sistema de controle em cascata IMC.

Considerando-se que a malha interna pode ser aproximada por uma planta de primeira ordem com atraso tem-se que:

$$P_{n2}(s) = \frac{K_m}{\tau_m s + 1} e^{-L_{n2}}, \quad (7.5)$$

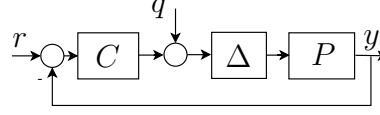


Figura 7.10: Sistema de controle em cascata IMC com controlador equivalente.

e utilizando-se a aproximação de Padé de primeira ordem para aproximar o termo correspondente ao atraso de transporte, obtém-se o modelo aproximado de $P_{n2}(s)$ como

$$P_{n2} = \frac{K_{m2}}{\tau_m s + 1} \frac{(1 - s \frac{L_{n2}}{2})}{(1 + s \frac{L_{n2}}{2})}. \quad (7.6)$$

Semelhante ao desenvolvimento apresentado em BEQUETTE (2002), considera-se a função G_{c2} como:

$$G_{c2} = \frac{(\tau_m s + 1)(1 + s \frac{L_{n2}}{2})}{K_{m2}(\tau_0 s + 1)}. \quad (7.7)$$

O controlador de malha fechada $C_2(s)$ para a malha interna pode ser obtido como segue (BEQUETTE, 2002):

$$\begin{aligned} C_2(s) &= \frac{G_{c2}}{1 - G_{c2}P_{n2}} \\ &= \frac{1}{K_{m2}} \left(\frac{(0,5\tau_m L_{n2}s^2 + (\tau_m + 0,5L_{n2})s + 1)}{(\tau_0 - \frac{L_{n2}}{2})s} \right). \end{aligned} \quad (7.8)$$

Resta então, multiplicar o último termo da Eq. (7.9a) por $\frac{\tau_m + 0,5L_{n2}}{\tau_m + 0,5L_{n2}}$ para obter os parâmetros do controlador PID $C_2(s)$:

$$K_c = \frac{(\tau_m + 0,5L_{n2})}{K_m(\tau_0 + 0,5L_{n2})}, \quad (7.9a)$$

$$T_i = (\tau_m + 0,5L_{n2}), \quad (7.9b)$$

$$T_d = \frac{\tau_m L_{n2}}{2\tau_m + L_{n2}}. \quad (7.9c)$$

Vale lembrar que a aproximação de Padé provoca um erro que deve ser levado em conta. Uma alternativa é respeitar a regra $\tau_0 > 0,8L_{n2}$ conforme apontado em BEQUETTE (2002). No entanto, cabe ressaltar que o erro de aproximação será levado em consideração no critério de estabilidade robusta com atraso variável.

Em FRANKLIN e SANTOS (2020a) foi verificado que um filtro passa-baixas poderia assegurar estabilidade robusta para qualquer atraso máximo desde que o

sistema seja estável em malha aberta. Apesar da degradação do desempenho da resposta de rejeição de perturbação, este resultado indica que o filtro de robustez pode ser adaptado durante a operação da malha com vistas a recuperar a estabilidade robusta caso o atraso máximo seja subestimado. Isto faz com que, na prática, não seja necessário conhecer o valor exato de δ_{max} , uma vez que a redução online da largura de banda do filtro de robustez permite recuperar a estabilidade robusta.

Nesta seção, é proposta uma técnica de sintonia exata para o um filtro passa baixas descrito como

$$F_r(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)^m}, \quad (7.10)$$

sendo $\tau > 0$ e m parâmetros com liberdade de ajuste. Então, a condição (5.18) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$|F_r(j\omega)|\mu(\omega) < 1. \quad (7.11)$$

sendo

$$\mu(\omega) = |\mathcal{C}(j\omega)| (\bar{\Delta}_P(\omega) + \delta_{max}\omega(1 + \bar{\Delta}_P(\omega))),$$

com $\mathcal{C}(j\omega) = \frac{G_n(j\omega)C(j\omega)}{1+G_n(j\omega)C(j\omega)}$. Vale lembrar que $|P_n(j\omega)| = |G_n(j\omega)|$.

Neste problema de projeto, considere a necessidade de se estabelecer a menor constante de tempo crítica τ_c para que o filtro possa garantir a estabilidade robusta. Reescrevendo a condição (7.11) demonstra-se que:

$$\tau \geq \tau_c = \frac{\sqrt{\mu(\omega)^{2/m} - 1}}{\omega}. \quad (7.12)$$

É necessário levar em consideração a relação de compromisso entre a rejeição de perturbação e a robustez na definição da largura de banda do filtro. Desta forma, é possível encontrar o τ_c de forma exata com vistas a assegurar estabilidade robusta com atraso variável e erro de modelagem numa estratégia em cascata, sendo um PID local o regulador da malha interna.

Em algumas aplicações, pode ser necessário utilizar um filtro de robustez que elimine o polo de malha aberta da função de transferência da perturbação para a saída. Neste tipo de problema, o procedimento de síntese do filtro pode ser realizada por meio do método de bissecção, conforme discutido em DE LIMA e SANTOS (2015).

Considera-se um processo cuja dinâmica sofre com termos de ordem superior e de fase não-mínima. Este processo foi discutido em JENG e LEE (2012) e as funções de transferência são descritas em seguida:

$$P_1(s) = \frac{10(1 - 5s)}{(30s + 1)^3(10s + 1)^2} e^{-5s}, \quad (7.13)$$

$$P_2(s) = \frac{3}{(13, 3s + 1)} e^{-3s}. \quad (7.14)$$

O modelo da planta interna adotado é definido como:

$$P_{n2}(s) = \frac{2,972}{(12, 970s + 1)} e^{-3,053s}. \quad (7.15)$$

Para a definição da malha interna de controle, utilizou-se o método do IMC descrito na seção 7.3.1 para obter o controlador equivalente da malha interna. O conjunto de Eqs. (7.9) foi utilizado para obter G_{c2} com os seguintes parâmetros: $K_{c2} = 0,822$, $\tau_{I2} = 14,8$, $\tau_{D2} = 1,348$.

O modelo da planta vista pelo controlador primário, considerando o fechamento da malha interna, é , através de identificação como sendo

$$P_n(s) = \frac{9,979}{(1922, 3s^2 + 81, 11s + 1)} e^{-43,77s}. \quad (7.16)$$

O controlador primário do PSF é sintonizado considerando o modelo rápido de $P_n(s)$, ou seja, $G_n(s)$, e o atraso de 43,77 será compensado. Adotando o seguinte controlador primário

$$C(s) = 25 \frac{(s + 0,117)(s + 0,005)}{s(s + 1,636)}. \quad (7.17)$$

Assume-se que:

- i) a planta está submetida a um atraso variável $L(t) = 27 + \delta(t)$ com $\delta \in [-5, 5]$ sendo $\delta(t) = 5\sin(t)$;
- ii) há uma mudança de referência em degrau unitário em $t = 0$;
- iii) Ocorre uma perturbação dada por $q(t) = 0,5u(t - 700)$.

A título ilustrativo, apenas o erro causado pela aproximação da malha interna e o efeito do atraso variável foram considerados, sem erro de modelagem adicional. O principal objetivo é ilustrar a importância da análise de estabilidade robusta mesmo em situações com erros de modelagem teoricamente desprezíveis.

Para o exemplo em análise, a condição de estabilidade robusta para diferentes valores de τ pode ser verificada observando as curvas da Fig. 7.11, onde as curvas de $\mu(\omega)$ para diferentes filtros de robustez permitem demonstrar a possibilidade de se obter um filtro que garanta a estabilidade robusta para um dado valor de atraso variável. O valor limite imposto pela condição da Eq. (7.12) é $\tau \geq 68,9$ e é exibido na Fig. 7.11 como a curva tracejada.

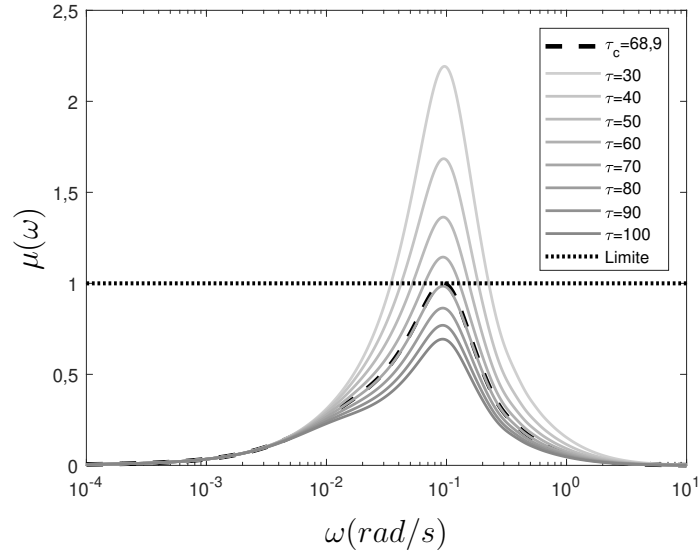


Figura 7.11: $\mu(\omega)$ para diferentes valores de τ .

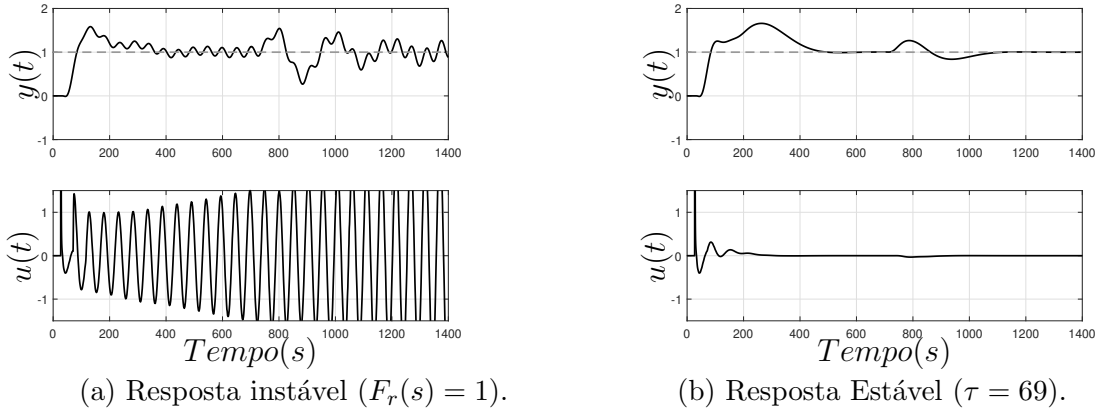


Figura 7.12: Respostas da variável de saída e de controle sem filtro de robustez ($F_r(s) = 1$) e com filtro ($F_r(s) = 1/(69s + 1)$).

O resultado da simulação com ausência do filtro de robustez é mostrado na Fig. 7.12a de modo que o efeito da incerteza de modelo e do atraso é evidenciado no comportamento instável exibido. Aplicando o filtro que respeite a condição de estabilidade, chega-se à resposta apresentada na Fig. 7.12b. Na Fig. 7.13 é feita a troca do parâmetro do filtro durante a simulação e este resultado demonstra a utilidade do filtro de robustez na recuperação da estabilidade comprometida pelo atraso sem necessidade de interromper o processo.

7.4 Caso IV: PSF - Processo instável em malha aberta com realimentação de estados

Neste exemplo, um sistema controlado por rede apresentado em HU *et al.* (2007) e discutido em NORMEY-RICO *et al.* (2012a) é utilizado para enfatizar os benefícios

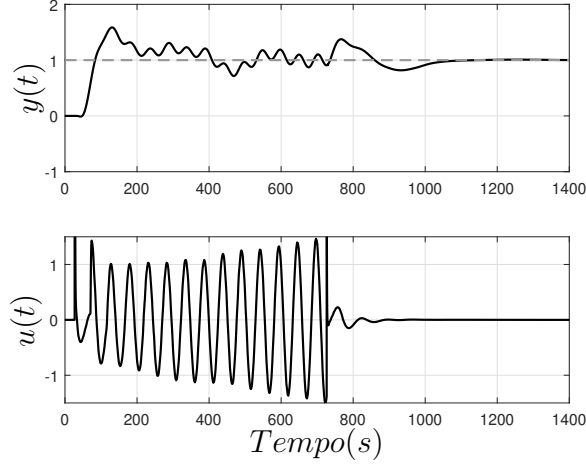


Figura 7.13: Recuperação da estabilidade chaveando a constante de tempo do filtro de $\tau = 0$ para $\tau = 69$ em $t=700$ s.

da condição simplificada proposta. Agora considere o modelo discreto dado por

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0,6693 & -0,0042 \\ 0,4231 & 1,0501 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0,1647 \\ 0,0960 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = [1 \ 0] x_k$$

O PI multivariável proposto em NORMEY-RICO *et al.* (2012a) na forma de espaço de estados pode ser reescrito como $\mathbf{C}(z) = K_a[-I \frac{0,5}{z-1}[1 \ 0]]$ com K_a sendo definido para posicionar os autovalores de malha fechada em $\{0,7020 \ 0,7020 \ 0,95\}$. O filtro de robustez diagonal (por simplicidade) é definido como

$$\mathbf{F}_r(z) = \begin{bmatrix} F_r(z) & 0 \\ 0 & F_r(z) \end{bmatrix},$$

com $F_r(z)$ usado para garantir estabilidade interna ($\mathbf{S}(z)$ é estável).

7.4.1 Cálculo do $S(z)$

Lembrando-se das condições que precisam ser atendidas:

- a) $F_r(1) = 1$;
- b) Polos indesejáveis de G_n precisam ser zeros de $[1 - F_r(z)]z^{-d}$. Neste caso, o polo indesejado é a .

Logo, seguindo o método apresentado em SANTOS (2011), considera-se que $F_r(z)$ pode ser escrito como o produto de dois filtros

$$F_r(z) = F_p(z)F_c(z),$$

sendo $F_p(z)$ um filtro primário e $F_c(z)$ um filtro de cancelamento.

Definindo $F_p(z) = \frac{1}{z-z_f}$ e $F_c(z) = bc_1z + bc_0$ e considerando a primeira condição de $S(z)$ escreve-se:

$$F_r(1) = F_p(1)[bc_1z + bc_0] \Big|_{z=1} = 1,$$

resultando em:

$$F_p(1)[bc_1 + bc_0] = 1. \quad (7.18)$$

Para a outra condição de $S(z)$

$$[1 - Fr(z)]z^{-d} \Big|_{z=a} = 0 \rightarrow Fr(z)z^{-d} \Big|_{z=a} = 1$$

Para definir F_r NORMEY-RICO *et al.* (2012a) considera-se a compensação de uma amostra fixa de atraso, logo $d = 1$.

$$F_c(z)z^{-1} \Big|_{z=a} = \frac{1}{F_p(z)} \Big|_{z=a}$$

$$[bc_1z + bc_0]z^{-1} \Big|_{z=a} = \frac{1}{F_p(z)} \Big|_{z=a}$$

Reescrevendo-se e substituindo a no lado esquerdo:

$$[bc_1a + bc_0]a^{-1} = \frac{1}{F_p(z)} \Big|_{z=a} \quad (7.19)$$

As condições impostas por Eqs. 7.18 e 7.19 resultam no seguinte sistemas de equações:

$$\begin{cases} bc_1 + bc_0 = F_p(1)^{-1}, \\ bc_1a + bc_0 = aF_p(a)^{-1}. \end{cases}$$

Neste problema não é considerado erros de modelagem, uma vez que apenas atraso variável é assumido em NORMEY-RICO *et al.* (2012a). O filtro proposto em NORMEY-RICO *et al.* (2012a) também precisa atender às condições de $S(z)$. Como lá é considerado que $F_p(z) = \frac{1}{z-\beta}$ com $\beta = 0.8$ é possível obter o $F_r(z)$ utilizado em NORMEY-RICO *et al.* (2012a) como:

$$F_{r1}(z) = \frac{1,245(z - 1,045)}{(z - 0,8)},$$

neste caso o atraso variável admissível, segundo o critério apresentado em NORMEY-RICO *et al.* (2012a), é dado por $\delta[n] \in [1, 3]$. Todavia, este filtro não é estritamente próprio permitindo ganhos indesejados em altas frequências. De fato, uma sintonia fina pode ser facilmente usada para aumentar a faixa de atraso admissível pois

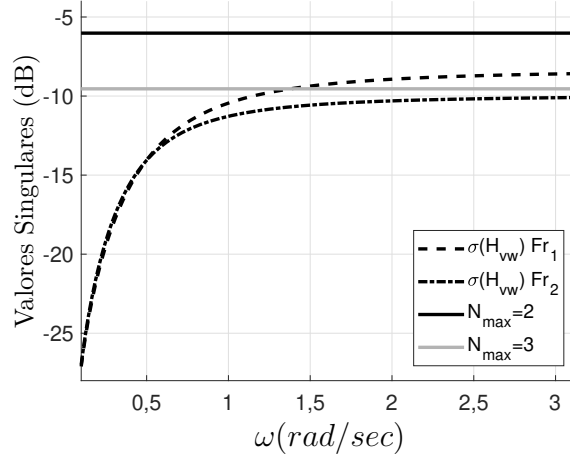


Figura 7.14: Condição de estabilidade simplificada (MIMO).

a análise via resposta em frequência oferece uma interpretação gráfica clara para ajuste deste filtro.

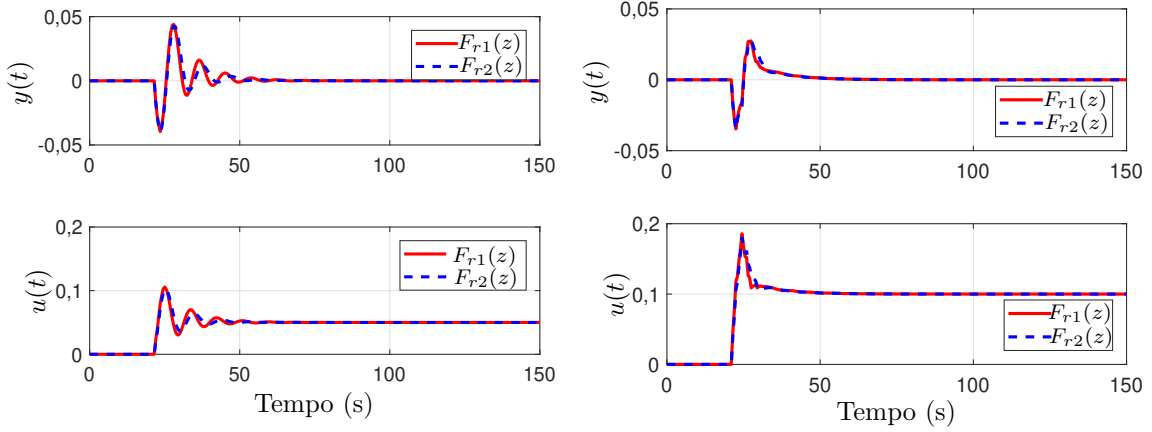
Um novo filtro estritamente próprio é definido por

$$F_{r2}(z) = \frac{1,9978(z - 0,8763)(z - 0,7)}{(z - 0,8)^2},$$

onde os valores singulares H_{uv} considerando ambos os filtros são apresentados na Fig. 7.14. Como destacado previamente, $F_{r1}(z)$ viola, por pouco, o limite superior definido por $N_{max} = 3$, enquanto que $F_{r2}(z)$ é capaz de aumentar a faixa de variação do atraso. Esta análise qualitativa é uma vantagem da abordagem do Teorema do pequeno ganho. Além disso, o desempenho de rejeição de perturbação obtido com $F_{r1}(z)$ e $F_{r2}(z)$ são similares como observado na Fig. 7.15a, apesar da faixa de variação do atraso máximo admissível ser 50% maior ($N_{max} = 2$ versus $N_{max} = 3$). Note que $N_{max} = 2$ foi obtida com o critério definido em NORMEY-RICO *et al.* (2012a) ¹.

Respostas comparativas à rejeição de perturbação com atraso fixo e atraso variável são apresentadas nas Fig. 7.15a e 7.15b respectivamente. Como pode ser verificado no resultado de malha fechada, $N_{max} = 2$ é muito conservador caracterizando uma limitação intrínseca da abordagem proposta em NORMEY-RICO *et al.* (2012a) visto que N_{max} é assumidamente um inteiro. Por outro lado, $N_{max} = 3$ pode ser facilmente obtido com uma resposta a rejeição de perturbação similar usando o método de reposta em frequência proposto.

¹Os exemplos que utilizaram métodos baseados em LMI utilizaram a biblioteca YALMIP para os cálculos computacionais (LÖFBERG, 2004; STURM, 1999)



(a) Rejeição de perturbação com atraso fixo ($\delta[n] = 3$).

(b) Rejeição de perturbação com atraso variável na entrada $\delta[n] \in [1, 4]$.

Figura 7.15: Caso V: Comparação de rejeição de perturbação.

7.5 Caso V: FSA - Processo MIMO Instável em Malha Aberta

Um RPA realiza uma transformação irreversível de $A \rightarrow B$ em que podem ocorrer múltiplos tipos de atrasos. Outros processos industriais possuem o comportamento dinâmico semelhante ao modelo do RPA. Reatores catalíticos e reações de hidrólise são alguns exemplos de utilização (ALBERTOS e GARCÍA, 2012).

Neste exemplo, é possível ilustrar a estratégia proposta aplicada a um sistema de duas entradas e duas saídas, instável em malha aberta e com a presença de atraso $L(t)$ como em ALBERTOS e GARCÍA (2012). Por simplicidade de discussão, será desprezado o efeito do atraso interno dos estados.

O modelo linearizado em torno de um ponto de equilíbrio é dado por ALBERTOS e GARCÍA (2012):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{C}_a(t) \\ \dot{T}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2,1779 & -0,30067 \\ 37,557 & 5,9545 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_a(t) - C_a^* \\ T(t) - T^* \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 3,6206 & 0 \\ -34,656 & -49,158 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(t - L(t)) - q^* \\ q_J(t - L(t)) - q_J^* \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

Neste caso, assume-se que o ponto de equilíbrio é formado por vazões de equilíbrio definidas como $q^* = q_J^* = 1,41 \text{ m}^3/\text{s}$, o que resultaria em:

$$C_a^* = 3,0577 \text{ kmolA/m}^3; \quad T^* = 340,17^\circ \text{K}.$$

O sistema possui como variáveis manipuladas as vazões q (vazão de saída) e q_J (vazão do líquido refrigerante) e como variáveis de processo a concentração do reagente A

Tabela 7.1: Valores de δ_{max} e $\bar{L} + \delta_{max}$ com ($\bar{L} = 110 \cdot 10^{-3}$) e sem compensação ($\bar{L} = 0$).

$\bar{L}$	0	110 ms
δ_{max}	21 ms	11 ms
$\delta_{max} + \bar{L}$	21 ms	121 ms

$C_a(t)$ e $T(t)$ a temperatura no reator. Assim, define-se:

$$x(t) = \begin{bmatrix} C_a(t) - C_a^* \\ T(t) - T^* \end{bmatrix},$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} q(t) - q^* \\ q_J(t) - q_J^* \end{bmatrix}.$$

O ganho de realimentação foi definido como

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0,0007 & 0,2037 \\ 0,8037 & 0,3728 \end{bmatrix},$$

sendo este obtido através da solução do LQR -*Linear-Quadratic Regulator* (Regulador Linear Quadrático), com objetivo de minimizar a função custo (7.21)

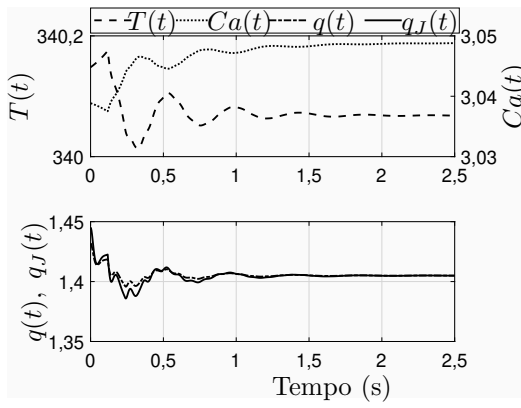
$$J = \int_0^\infty x(t)^T x(t) + u(t)^T \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} u(t) dt. \quad (7.21)$$

O atraso utilizado na compensação através do preditor de Artstein, assim como o limite teórico da componente variante no tempo segundo o critério proposto estão apresentados na Tabela 7.1. Para fins de compensação do atraso, assume-se $\bar{L} = 110$ ms. Nota-se que $\bar{L} = 0$ corresponde à estratégia sem compensação de atraso, sendo possível garantir estabilidade para qualquer variação de atraso entre 0 e 21 ms. A faixa tolerável de variação do atraso torna-se menor uma vez que a norma da matriz $e^{A\bar{L}}$ tende a aumentar com o crescimento de $\bar{L}$. Por outro lado, conforme esperado, o valor máximo de atraso aumenta de maneira significativa, uma vez que o preditor cumpre o papel de eliminar o atraso mínimo da malha. Neste exemplo, o atraso tolerável deve pertencer ao intervalo de 110 a 121 ms.

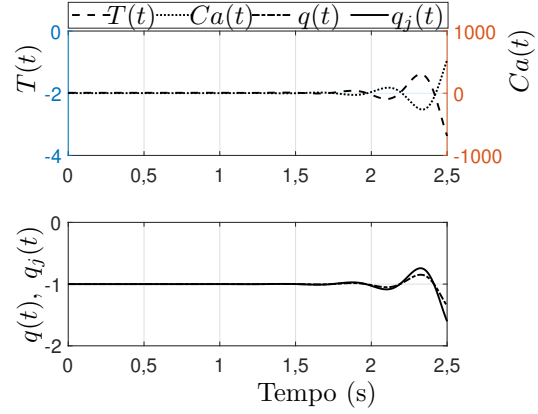
Nesta primeira simulação, utilizou-se um atraso variável dado por:

$$L(t) = [115 + 5\sin(1t)]ms. \quad (7.22)$$

O sistema parte da condição inicial $x_0 = [-0,02; 0,2]$ com $u(\tau) = 0$, $\tau < 0$. As respostas com preditor e sem preditor são exibidas nas Figs. 7.16a e 7.16b, respectivamente.

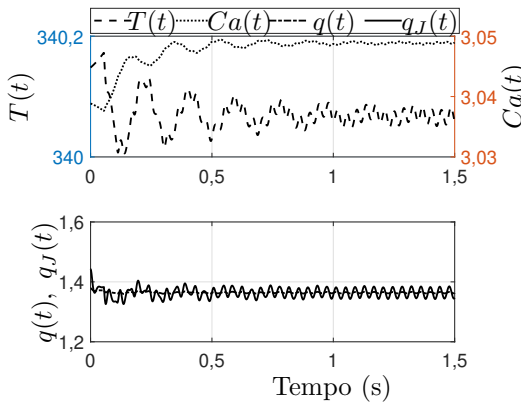


(a) Com preditor e atraso variável.

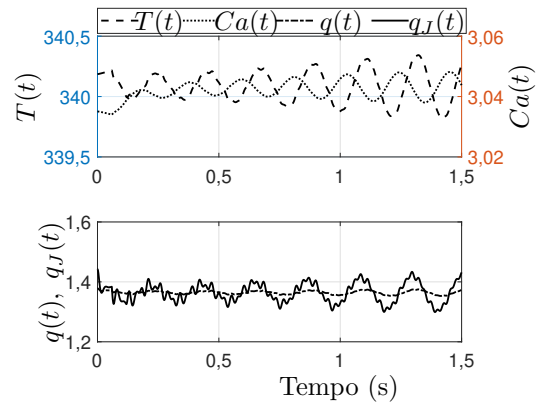


(b) Sem preditor e com atraso variável.

Figura 7.16: Resposta ao degrau do RPA - Controlador K_1 .



(a) $L(t) = 110 \text{ ms}$.



(b) $L(t) = (117,5 + 7.5\text{sen}(1t)) \text{ ms}$.

Figura 7.17: Resposta ao degrau do RPA com o preditor - Controlador K_2 .

Nota-se, como esperado, que o atraso variável não foi capaz de instabilizar a simulação com o preditor de Artstein, conforme indicado na Fig. 7.16a. Com relação à resposta sem preditor (Fig. 7.16b), a inexistência de compensação de atraso é suficiente para causar instabilidade, sendo esta a principal consequência indesejada da presença de tempo-morto numa malha de controle.

Para tornar mais clara a importância da utilização do critério foi aplicado o controlador definido como

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0,6297 & 0,083 \\ 1,2079 & 0,8511 \end{bmatrix}.$$

Para este controlador e com $\bar{L} = 110 \text{ ms}$, o valor máximo de atraso variável, atendendo ao critério, é $\delta_{max} = 8,8 \text{ ms}$.

Neste cenário, simula-se primeiramente o sistema com o controlador K_2 considerando somente a componente fixa do atraso e o resultado é apresentado na Fig. 7.17a. O sistema se mantém estável, uma vez que ainda há uma margem de

atraso de 8,8 *ms*. Em contrapartida, quando o sistema é submetido ao efeito da componente variável do atraso o resultado da simulação mostrado na Fig. 7.17b demonstra instabilidade. Este atraso é variável no intervalo [110, 125] *ms* excedendo o δ_{max} para o qual a estabilidade é garantida.

O resultado demonstrado pelas Figs. 7.17a e 7.17b reforça a importância de cuidar para que a sintonia do controlador leve em consideração o atraso variável máximo admissível. O critério proposto oferece uma forma simples de verificá-lo. Estes resultados ilustram o benefício da solução proposta no controle de sistemas com atraso variável, mitigando o efeito do atraso constante por meio do preditor de Artstein. Se comparado ao preditor de Smith, não há a necessidade de qualquer ajuste específico, o que simplifica o processo de síntese. Uma realimentação de estados convencional pode ser ajustada de tal maneira que a estabilidade é verificada com o critério proposto. Desta forma, o problema de síntese e compensação de tempo-morto na presença de atraso variável pode ser tratado de maneira similar a um sistema sem atraso. A única diferença decorre da verificação de estabilidade por meio de um critério simplificado baseado no teorema do pequeno ganho.

7.6 Caso VI: Sistema vibratório com dois graus de liberdade

Este estudo de caso foi apresentado inicialmente em RAM e MOTTERSHEAD (2007) e aplicado em FRANKLIN *et al.* (2021). Ele é importante para confirmar os resultados obtidos para sistemas de segunda ordem sujeitos ao atraso variável considerando-se incertezas de modelagem. A estrutura mecânica de referência é mostrada na Fig. 7.18 e as matrizes nominais do sistema são dadas por:

$$\mathbf{M}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_n = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Com isto, a receptância de malha aberta nominal do sistema é obtida a partir da Eq. (6.2) como sendo:

$$\mathbf{R}_n(s) = \frac{1}{s^4 + 1,5s^3 + 9,5s^2 + 2,5s + 7,5} \begin{bmatrix} s^2 + 0,5s + 1,5 & 0,5s + 1,5 \\ 0,5s + 1,5 & 0,5s^2 + 0,5s + 4 \end{bmatrix}.$$

Os polos de malha aberta são $\lambda_{1,2} = -0,6727 \pm 2,8190i$, $\lambda_{2,3} = -0,0773 \pm 0,9418i$ e os polos de malha fechada desejados são definidos por $\mu_1 = -2$, $\mu_2 = -3$, $\mu_{3,4} = -1 \pm 10i$. As matrizes de ganho do controlador via realimentação de estados na

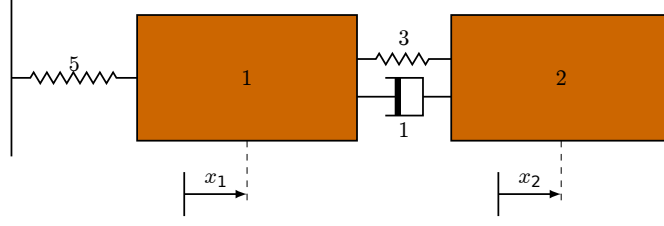


Figura 7.18: Caso IV: Sistema massa mola amortecedor.

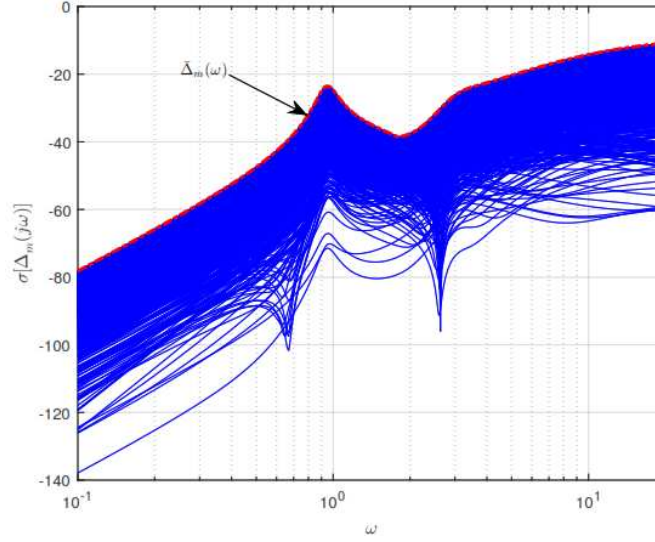


Figura 7.19: Modelagem de incerteza para o pior caso com $\pm 2\%$ na massa m_1 e $\pm 1\%$ na massa m_2 .

forma da Eq. (6.4) que posiciona os polos de malha fechada no local desejado é dado como:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 62,6750 & -68,1750 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -68,8750 & -30,3750 \end{bmatrix}.$$

A condição de estabilidade robusta foi verificada por meio de variação da diagonal da matriz de massas $\pm 2\%$ e $\pm 1\%$ respectivamente em m_{11} e m_{22} .

O pior caso do $\bar{\Delta}_m(\omega)$ resultante dessa variação foi exibido na Fig. 7.19. Mil tentativas de variações combinadas na matriz de massa foram executadas para encontrar a envoltória destacada em vermelho.

A Fig. 7.20 exibe a primeira parte da Eq. (6.14) representando o caso nominal, o caso com $\delta_{max} = 0,0209$, o pior caso com incerteza de modelo seguindo a Eq. (A.62) considerando o mesmo δ_{max} e por último a utilização da estratégia IMC.

Nota-se que a resposta de malha fechada é estável considerando o caso nominal, porém a estabilidade não pode mais ser assegurada quando o pior caso de variações na matriz de massas é simulado. As simulações das respostas de malha fechada no domínio do tempo observadas na Fig. 7.21 confirmam o resultado do critério. Perceba que, se nenhuma correção for aplicada uma resposta instável é obtida devido

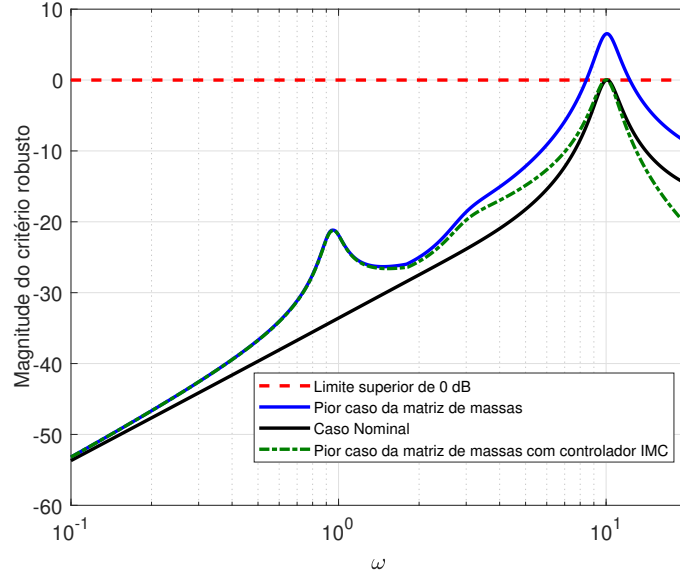


Figura 7.20: Caso VI: Critério de estabilidade robusta (6.1.1) (nominal), (A.62) (pior caso de perturbação na massa) e (6.31) (IMC).

ao erro de modelagem (SANTOS e FRANKLIN, 2018a).

O controlador IMC é implementado considerando a presença de incertezas adotando um simples filtro de primeira ordem $\phi(s) = \frac{1}{\tau_c s + 1}$ ajustado para reduzir o pico do pior caso de tal maneira que ele se mantenha abaixo da linha de 0 dB. Para uma atenuação exata desse pico ($(\omega_c, \mu_c) \approx (10; 6,538 \text{ dB})$), o ganho do filtro deve ser $|\phi(j\omega_c)| = -6,538 \text{ dB}$. Usando a condição dada pela Eq. (6.33) chega-se $\tau_c = 0,1858$. A Fig. 7.20 exibe, com o traçado em verde, o critério de estabilidade robusta com o IMC filtrado dado pela Eq. (6.31) enquanto que a resposta temporal com o pior caso de incerteza e o atraso máximo é exibido na Fig. 7.22 demonstrando o benefício da utilização do IMC.

7.7 Caso VII: PSF - Controle de potência em um termoresistor (experimental)

Nesta seção será apresentado um resultado experimental de um sistema com atraso variável mais compensação. Optou-se por um sistema de baixo custo com característica não linear do tipo SISO.

Este sistema está representado na Fig. 7.23. R_s é um termoresistor de $10k\Omega$ do tipo NTC - *Negative Temperature Coefficient* (coeficiente de temperatura negativo) e R é um resistor comum de $10k\Omega$. O amplificador é polarizado com 5 volts.

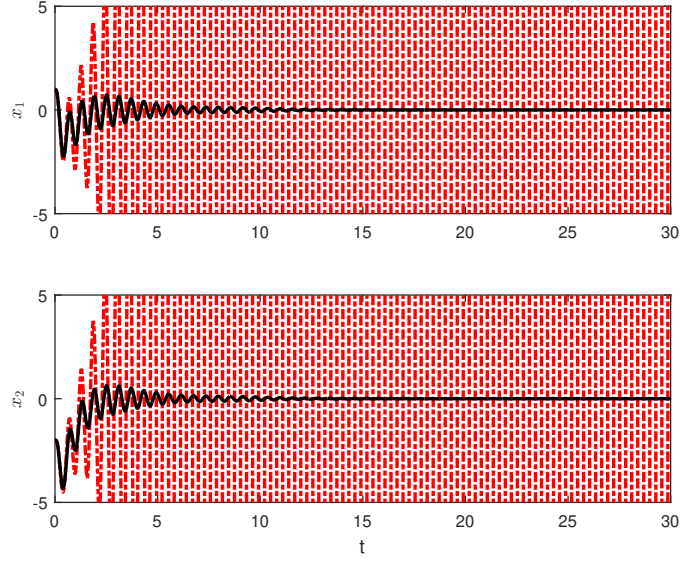


Figura 7.21: Simulação no tempo para uma condição inicial dada por $\mathbf{x}(0) = [1 \ 2]^T$: caso nominal com atraso variável $\delta(t) = 0,0167 + 0,0042\sin(t)$ (Linha sólida preta); e $\delta(t) = 0,0167 + 0,0042\sin(t)$ com o pior caso de incerteza na matriz de massas (linha tracejada em vermelho).

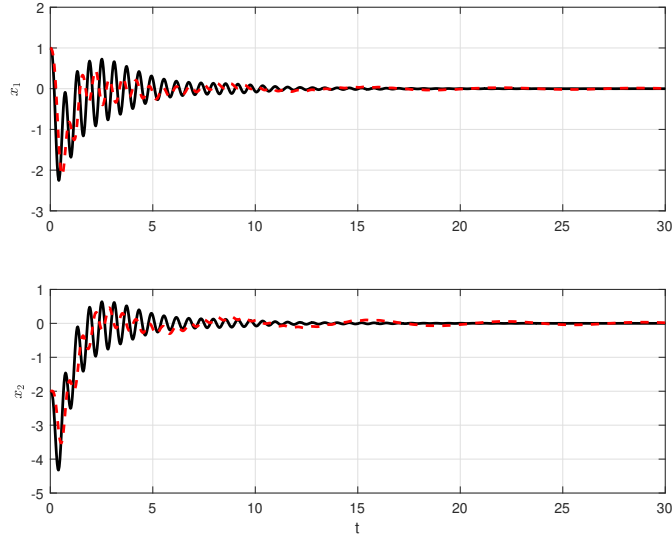


Figura 7.22: Simulação no tempo para uma condição inicial dada por $\mathbf{x}(0) = [1 \ 2]^T$: caso nominal com atraso variável $\delta(t) = 0,0167 + 0,0042\sin(t)$ (Linha sólida preta); e $\delta(t) = 0,0167 + 0,0042$ (máximo valor de atraso) com o pior caso de incerteza na matriz de massas e a estratégia IMC (linha tracejada em vermelho).

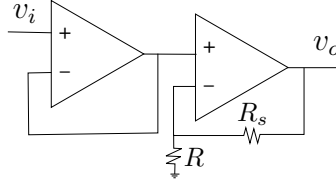


Figura 7.23: Caso VII: Sistema de Controle de Temperatura.

A tensão no NTC é obtida a partir da seguinte equação:

$$V_o = V_i \left(1 + \frac{R_s}{R}\right).$$

Neste caso, deseja-se que a potência dissipada no R_s seja a variável controlada de modo que a relação entrada-saída é obtida a seguir

$$\begin{aligned} I_s &= I_i = \frac{v_i}{R}, \\ P_s &= V_s I_s = R_s I_s^2 = \frac{(V_o - V_i)}{I_s} I_s^2 = (V_o - V_i) I_s, \\ P_s &= \frac{(V_o - V_i)}{R} V_i. \end{aligned}$$

O modelo linear do sistema é do tipo FOPDT cujos parâmetros foram obtidos a partir da curva de reação ao degrau:

$$P(s) = G_n e^{-Ls},$$

sendo

$$G_n(s) = \frac{K}{\tau s + 1},$$

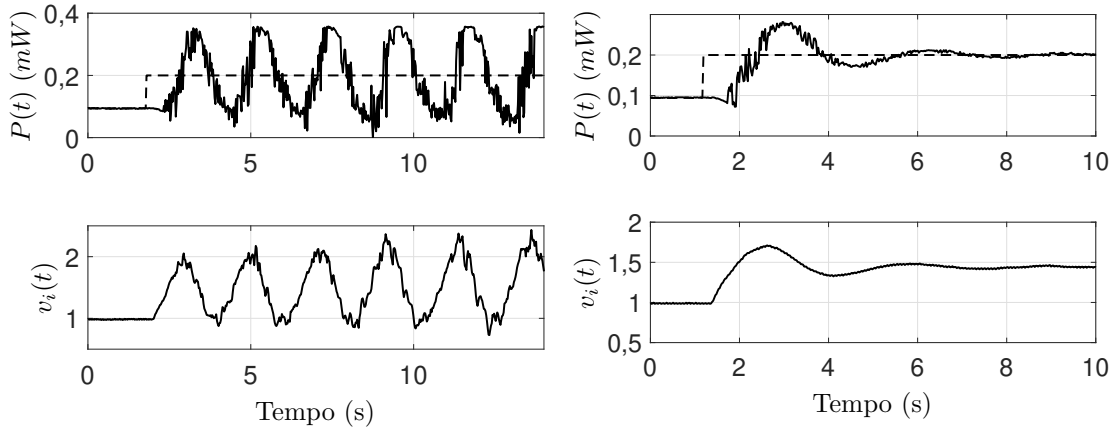
cujos parâmetros do modelo são $K = 0,19$ e $\tau = 0,17$ s.

Um computador é utilizado para controlar o sistema através de comunicação serial e o atraso variável é introduzido na entrada por meio de um buffer. A taxa de amostragem utilizada é de $h = 0,0177$ s.

Utiliza-se um PI como controlador primário. O polo desejado de malha fechada é $s_d = \frac{-1,05^2}{\tau}$ e os demais parâmetros do PI são obtidos da seguinte forma:

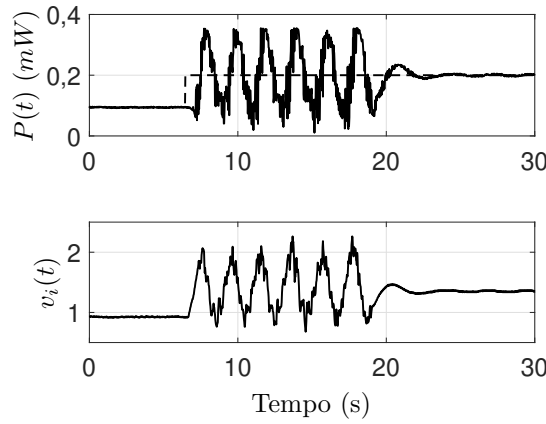
$$\begin{aligned} K_p &= \left[\frac{-(\tau s + 1)s}{K(s + \frac{1,05}{\tau})} \right]_{s=s_d}, \\ K_i &= K_p \frac{1,05}{\tau}, \end{aligned}$$

resultando em $K_p = 11,3$ e $K_i = 70$ definindo o seguinte controlador:



(a) Resposta ao degrau com $\alpha = 0, 1$.

(b) Resposta ao degrau com $\alpha = 0, 97$.



(c) Resposta ao degrau iniciando com $\alpha = 0, 1$ e finalizando com $\alpha = 0, 97$.

Figura 7.24: Caso VII: Resposta de um sistema com atraso variável experimental amostrado.

$$G_c(s) = 11,3 \frac{(s + 7)}{s}.$$

Um filtro de referência de primeira ordem é utilizado para atenuar o sobressinal causado pelo zero do controlador portanto ele é sintonizado de maneira a cancelar este o zero.

Uma vez que o sistema possui incertezas, utiliza-se o seguinte filtro de robustez para garantir estabilidade:

$$F_r(e^{j\omega}) = \frac{z(1 - \alpha)}{z - \alpha}. \quad (7.23)$$

Um tempo morto aleatório é adicionado na entrada do sistema limitado a $[10, 25]h$ e o preditor de Smith é utilizado para compensar $25 h$.

Um filtro $F_r(z)$ com extensa largura de banda resulta em um sistema instável conforme Fig. 7.24a utilizando-se a sintonia do PI apresentado. Este exemplo demonstra a importância de cuidar para que as incertezas na estimação do atraso não

levem o sistema para instabilidade

No segundo experimento a largura de banda de $F_r(z)$ é reduzida e a resposta ao degrau para $\alpha = 0,97$ na Fig. 7.24b mostra a efetividade do $F_r(z)$ para evitar instabilidade.

Uma situação típica pode ocorrer quando o operador propõe uma sintonia específica para o controlador mas, por conta de incertezas, o sistema se mostra instável, a partir daí ele pode ajustar a largura de banda do filtro recuperando o comportamento estável desejado. Este resultado pode ser notado na Fig. 7.24c.

Capítulo 8

Conclusões

Esta tese procurou apresentar critérios de garantia de estabilidade robusta para sistemas sujeitos a atraso variável utilizando-se uma abordagem baseada na resposta em frequência como alternativa à abordagem temporal que utiliza descrições por meio de funcionais de L-K e L-R. Parte dos critérios propostos utiliza compensadores de atraso e outra parte foi direcionada aos problemas de sistemas vibracionais de segunda ordem. Adicionalmente foi considerada a presença de incertezas de modelo não estruturadas.

Além disso, verificou-se a importância desta abordagem considerando-se especialmente o preditor de Smith filtrado e o preditor de Artstein (FSA). Os critérios baseados no PSF ou para sistemas de segunda ordem demonstraram a viabilidade de utilizá-los para recuperar a estabilidade robusta na presença de incertezas e atraso variável. No PSF o filtro de robustez pode ser ajustado durante a operação. Procurou mostrar também a viabilidade de se utilizar o PSF para sistemas de controle em cascata sujeitos a atraso variável.

8.1 Potenciais Contribuições

Este trabalho apresenta as seguintes contribuições principais:

- i) **Condições de estabilidade simplificadas para sistemas com atraso variável** com compensação de atraso usando preditores (PSF e de Artstein) baseadas no teorema do pequeno ganho para o caso de tempo contínuo, de tempo discreto e a dados amostrados;
- ii) **Regras de sintonia** para o filtro de robustez do PSF e do IMC em sistemas de segunda ordem para recuperação da estabilidade robusta na presença de atraso variável;

- iii) **Extensão do critério de KAO e LINCOLN (2004) para o caso MIMO** incluindo incertezas não estruturadas;
- iv) **Critério de estabilidade para sistemas de 2ª ordem na presença de atraso variável** com garantia de estabilidade robusta.

8.1.1 Lista de Publicações

Na forma de publicação, são relacionadas as seguintes contribuições no contexto do tema do doutorado proposto até o momento:

Periódicos aceitos

- SANTOS, T. L. M., FRANKLIN, T. S., “Enhanced Finite Spectrum Assignment with Disturbance Compensation for LTI Systems with Input Delay”, Journal of the Franklin Institute (2018)
- SANTOS, T. L., ARAÚJO, J. M., FRANKLIN, T. S., “Receptance-Based Stability Criterion for Second-Order Linear Systems with Time-Varying Delay”, Journal of Mechanical Systems and Signal Processing, 2018.
- FRANKLIN, T. S., SANTOS, T. L. M., “Robust filtered Smith predictor for processes with time-varying delay: a simplified stability approach.” European Journal of Control, 2020.
- FRANKLIN, T. S., ARAÚJO, J. M., SANTOS, T. L. M., “Receptance-Based Robust Stability Criteria for Second-Order Linear Systems with Time-Varying Delay and Structured Uncertainties”, Journal Mechanical Systems and Signal Processing, 2021.

Conferências aceitas

- FRANKLIN, T. S., SANTOS, T. L. M., “Critério de Estabilidade Simplificado para sistemas Lineares com Atraso Variável: Uma Abordagem via Preditor de Artstein”, Congresso Brasileiro de Automática, 2018.
- FRANKLIN, T. S., SANTOS, T. L. M., ARAÚJO, J. M. “Critério de estabilidade simplificado para sistemas lineares em cascata com atraso variável: uma abordagem via preditor de Smith Filtrado”, Congresso Brasileiro de Automática, 2020.

8.2 Perspectivas de atividades futuras

Como forma de dar continuidade a este trabalho, propõe-se:

- i) desenvolver critérios de estabilidade robusta menos conservadores na presença de atraso variável utilizando desigualdades mais aperfeiçoadas como Wirtinger e Bessel-Legendre como alternativas à desigualdade de Jensen;
- ii) tratar do problema com preditores e controladores distribuídos;
- iii) considerar o problema do preditor de Artstein e sistemas de 2^a ordem utilizando estimador de estados;
- iv) considerar o problema de variação do instante de amostragem e controle baseado em evento;
- v) explorar outras formas de representação de incertezas a exemplo de problemas com incertezas politópicas.

Referências Bibliográficas

- ABDELAZIZ, T., 2016, “Eigenstructure assignment by displacement-acceleration feedback for second-order systems”, *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, v. 138, n. 6.
- ABDELAZIZ, T., 2013, “Eigenstructure assignment for second-order systems using velocity-plus-acceleration feedback”, *Structural Control and Health Monitoring*, v. 20, n. 4, pp. 465–482.
- ADAMSON, L. J., FICHERA, S., MOKRANI, B., MOTTERSHEAD, J., 2019, “Pole placement in uncertain dynamic systems by variance minimisation”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 127, pp. 290–305.
- ADAMSON, L., FICHERA, S., MOTTERSHEAD, J., 2020a, “Receptance-based robust eigenstructure assignment”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 140, pp. 106697. ISSN: 0888-3270.
- ADAMSON, L., FICHERA, S., MOTTERSHEAD, J., 2020b, “Aeroelastic stability analysis using stochastic structural modifications”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 477, pp. 115333. ISSN: 0022-460X.
- AGRAWAL, A., YANG, J., 2000, “Compensation of time-delay for control of civil engineering structures”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v. 29, n. 1, pp. 37–62.
- ALBERTOS, P., GARCÍA, P., 2012, “Control of multi delayed plants: Recycling CSTR”, *Fourth International Conference on Computational Intelligence and Communication Networks*.
- ARAÚJO, J. M., DÓREA, C. E. T., GONÇALVES, L. M. G., DATTA, B. N., 2016, “State derivative feedback in second-order linear systems: A comparative analysis of perturbed eigenvalues under coefficient variation”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 76-77 (8), pp. 33–46.
- ARAÚJO, J. M., 2018, “Discussion on ‘State feedback control with time delay’”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 98, pp. 368 – 370.

- ARAÚJO, J. M., SANTOS, T. L. M., 2018, “Control of a class of second-order linear vibrating systems with time-delay: Smith predictor approach”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 108, pp. 173–187.
- ARTSTEIN, Z., 1982, “Linear systems with delayed controls: a reduction”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 27, n. 4, pp. 869–879.
- ASTROM, K., HANG, C., LIM, B., 1994, “A new Smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead-time”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n. 2, pp. 343 – 345.
- BAI, Z., YANG, J., DATTA, B. N., 2016a, “Robust partial quadratic eigenvalue assignment with time delay using the receptance and the system matrices”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 384, pp. 1–14.
- BAI, Z.-J., YANG, J.-K., DATTA, B. N., 2016b, “Robust partial quadratic eigenvalue assignment with time delay using the receptance and the system matrices”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 384, pp. 1 – 14. ISSN: 0022-460X.
- BEKIARIS-LIBERIS, N., KRSTIC, M., 2011, “Compensation of Time-Varying Input and State Delays for Nonlinear Systems”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v. 134, n. 1, pp. Paper 011009.
- BEQUETTE, B., 2002, *Process control: modeling, design, and simulation*. First ed. Upper Saddle River, NJ, USA, Prentice Hall Press. ISBN: 0-13-353640-8.
- BOYD, S., 1994, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- BRESCH-PIETRI, D., MAZENC, F., PETIT, N., 2018, “Robust compensation of a chattering time-varying input delay with jumps”, *Automatica*, v. 92, pp. 225–234.
- CHEN, J., PARK, J. H., XU, S., 2018, “Stability analysis of continuous-time systems with time-varying delay using new Lyapunov–Krasovskii functionals”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 355, n. 13, pp. 5957 – 5967.
- CORRIPIO, A. B., SMITH, C. A., 1997, *Principles and practice of automatic process control*. New York, Wiley. ISBN: 0471575887 9780471575887.
- DA SILVA, L. R., FLESCHE, R. C. C., NORMEY-RICO, J. E., 2020, “Controlling industrial dead-time systems: When to use a PID or an advanced controller”, *ISA Transactions*, v. 99, pp. 339 – 350. ISSN: 0019-0578.

- DATTA, B., 2003, *Numerical Methods for Linear Control Systems*. Online, Academic Press.
- DATTA, B. N., ELHAY, S., RAM, Y. M., 1997, “Orthogonality and partial pole assignment for the symmetric definite quadratic pencil”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 257, pp. 29 – 48.
- DATTA, B., ELHAY, S., RAM, Y., SARKISSIAN, D., 2000, “Partial eigenstructure assignment for the quadratic pencil”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 230, n. 1, pp. 101–110.
- DE LIMA, R. G., SANTOS, T. L. M., 2015, “Sintonia Automatizada do Filtro de Robustez para o Controle de Sistemas com Atraso”, *Anais do XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*, pp. 498–503.
- DE OLIVEIRA, F. S., SOUZA, F. O., 2020, “Further refinements in stability conditions for time-varying delay systems”, *Applied Mathematics and Computation*, v. 369, pp. 124866.
- DING, L., HE, Y., WU, M., ZHANG, Z., 2017, “A novel delay partitioning method for stability analysis of interval time-varying delay systems”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 354, n. 2, pp. 1209 – 1219.
- DU, H., ZHANG, N., 2008, “Active vibration control of structures subject to parameter uncertainties and actuator delay”, *Journal of Vibration and Control*, v. 14, n. 5, pp. 689–709.
- DUAN, G.-R., YU, H.-H., 2013, *LMIs in Control Systems - Analysis, Design and Applications*. Boca Raton, FL, CRC Press.
- DÍAZ, R. S., 2018, *Robust Control Strategies for Unstable Systems with Input/Output Delays*. Tese de Doutorado, Universitat Politècnica de València.
- FRANKLIN, T. S., SANTOS, T. L., 2020a, “Robust filtered Smith predictor for processes with time-varying delay: A simplified stability approach”, *European Journal of Control*. ISSN: 0947-3580.
- FRANKLIN, T. S., SANTOS, T. L., 2020b, “Robust filtered Smith predictor for processes with time-varying delay: A simplified stability approach”, *European Journal of Control*.
- FRANKLIN, T. S., SANTOS, T. L. M., 2018, “Critério de Estabilidade Simplificado para sistemas Lineares com Atraso Variável: Uma Abordagem via Preditor de Artstein”, *Congresso Brasileiro de Automática*.

- FRANKLIN, T. S., SANTOS, T. L. M., 2020c, “Robust filtered Smith predictor for processes with time-varying delay: a simplified stability approach”, *European Journal of Control*, v. 56, pp. 38–50.
- FRANKLIN, T. S., SANTOS, T. L. M., ARAÚJO, J. M., 2020, “Critério de estabilidade simplificado para sistemas lineares em cascata com atraso variável: uma abordagem via preditor de Smith Filtrado”, *Congresso Brasileiro de Automática*.
- FRANKLIN, T. S., ARAÚJO, J. M., SANTOS, T. L., 2021, “Receptance-Based Robust Stability Criteria for Second-Order Linear Systems with Time-Varying Delay and Unstructured Uncertainties”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 149.
- FRIDMAN, E., 2014a, “Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems”, *European Journal of Control*, v. 20, pp. 271–283.
- FRIDMAN, E., SHAKED, U., 2003, “Delay-dependent stability and H_∞ control: constant and time-varying delays”, *International Journal of Control*, v. 76, n. 1, pp. 48–60.
- FRIDMAN, E., 2014b, *Introduction to time-delay systems: Analysis and control*. New York, Springer.
- FULLER, C., 2008, “Active Vibration Control”. In: *Handbook of Noise and Vibration Control*, Wiley, cap. 65, pp. 770–784, Online.
- GALLOWAY, B., HANCKE, G. P., 2013, “Introduction to Industrial Control Networks”, *IEEE Communications Surveys Tutorials*, v. 15, n. 2 (Second), pp. 860–880. ISSN: 2373-745X. doi: 10.1109/SURV.2012.071812.00124.
- GARCIA, P., ALBERTOS, P., HÄGGLUND, T., 2006, “Control of unstable non-minimum-phase delayed systems”, *Journal of Process Control*, v. 16, n. 10, pp. 1099–1111.
- GARCIA, P., SANTOS, T., NORMEY-RICO, J. E., ALBERTOS, P., 2010, “Smith predictor-based control schemes for dead-time unstable cascade processes”, *Industrial & engineering chemistry research*, v. 49, n. 22, pp. 11471–11481.
- GONZALEZ, A., GARCIA, P., ALBERTOS, P., CASTILLO, P., LOZANO, R., 2012, “Robustness of a discrete-time predictor-based controller for time-varying measurement delay”, *Control Engineering Practice*, v. 20, n. 2, pp. 102 – 110. ISSN: 0967-0661.

- GONZÁLEZ, A., SALA, A., GARCIA, P., ALBERTOS, P., 2011, “Robustness analysis of discrete predictor-based controllers for input-delay systems”, *International Journal of System Science*, v. 44, n. 2, pp. 232–239.
- GONZÁLEZ, A., SALA, A., SANCHIS, R., 2013, “LK stability analysis of predictor-based controllers for discrete-time systems with time-varying actuator delay”, *Systems & Control Letters*, v. 62, n. 9 (9), pp. 764–769.
- GU, D.-W., PETKOV, P., KONSTANTINOV, M. M., 2013, *Robust Control Design with MATLAB*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. London, Springer.
- GU, K., KHARITONOV, V. L., CHEN, J., 2003, *Stability of time-delay systems*. Boston USA, Birkhauser Boston.
- GUDARZI, M., 2015, “ μ -Synthesis controller design for seismic alleviation of structures with parametric uncertainties”, *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, v. 34, n. 4, pp. 491–511.
- HERRERA, J., IBEAS, A., 2012, “On-line delay estimation for stable, unstable and integrating systems under step response”, *ISA transactions*, v. 51, pp. 351–361.
- HU, L., BAI, P., WU, Z., 2007, “Sampled-data control of networked linear control systems”, *Automatica*, v. 43, n. 5, pp. 903 – 911.
- INMAN, D., 2014, *Engineering Vibration*. Virginia Polytechnic Institute and State University, Pearson. ISBN: 9780132871693.
- JENG, J.-C., LEE, M.-W., 2012, “Simultaneous automatic tuning of cascade control systems from closed-loop step response data”, *Journal of Process Control*, v. 22, n. 6, pp. 1020 – 1033. ISSN: 0959-1524.
- JEROME, N. F., RAY, W. H., 1979, “High Performance Multivariable controll strategies for systems having time delays”, *AIChE Journal*, v. 32, n. 6, pp. 914–931.
- JINWU, X., CHONG, Z., DAOCHUN, L., 2016, “Partial pole assignment with time delay by the receptance method using multi-input control from measurement output feedback”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 66-67, n. Supplement C, pp. 743 – 755.
- KAO, C.-Y., LINCOLN, B., 2004, “Simple stability criteria for systems with time-varying delays”, *Automatica*, v. 40, n. 8, pp. 1429–1434.

- KARAFYLLIS, I., KRSTIC, M., 2013, “Delay-robustness of linear predictor feedback without restriction on delay rate”, *Automatica*, v. 49, n. 6, pp. 1761–1767.
- KHALIL, H., 2001, *Nonlinear Systems*. 3rd ed. Upper Saddle River, NJ, USA, Prentice Hall.
- KIRTANIA, K., CHOUDHURY, M. S., 2012, “A novel dead time compensator for stable processes with long dead times”, *Journal of Process Control*, v. 22, n. 3, pp. 612–625.
- KRSTIC, M., 2010, “Lyapunov Stability of Linear Predictor Feedback for Time-Varying Input Delay”, *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, v. 5, n. 2, pp. 554–559.
- KRSTIC, M., 2008, “Lyapunov tools for predictor feedbacks for delay systems: Inverse optimality and robustness to delay mismatch”, *Automatica*, v. 44, n. 11, pp. 2930–2935.
- KWON, W., PEARSON, A., 1980, “Feedback stabilization of linear systems with delayed control”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 25, n. 2, pp. 266–269.
- LÉCHAPPÉ, V., MOULAY, E., PLESTAN, F., GLUMINEAU, A., CHRIETTE, A., 2015, “New predictive scheme for the control of LTI systems with input delay and unknown disturbances”, *Automatica*, v. 52, pp. 179–184.
- LÉCHAPPÉ, V., ROUQUET, S., GONZÁLEZ, A., PLESTAN, F., LEÓN, J. D., MOULAY, E., A., G., 2016, “Delay Estimation and Predictive Control of Uncertain Systems With Input Delay: Application to a DC Motor”, *IEEE TRANSACTIONS ON INDUSTRIAL ELECTRONICS*, v. 63, pp. 5849–5857.
- LEE, S. Y., LEE, W. I., PARK, P., 2018, “Orthogonal-polynomials-based integral inequality and its applications to systems with additive time-varying delays”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 355, n. 1, pp. 421 – 435.
- LEE, T. H., PARK, J. H., 2018, “Improved stability conditions of time-varying delay systems based on new Lyapunov functionals”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 355, n. 3, pp. 1176 – 1191. ISSN: 0016-0032.
- LI, X., GAO, H., 2011, “A New Model Transformation of Discrete-Time Systems With Time-Varying Delay and Its Application to Stability Analysis”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 56, n. 9, pp. 2172 – 2178.

- LIANG, Y., YAMAURA, H., OUYANG, H., 2017, “Active assignment of eigenvalues and eigen-sensitivities for robust stabilization of friction-induced vibration”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 90, pp. 254 – 267. ISSN: 0888-3270.
- LIU, R.-J., LIU, G.-P., WU, M., NIE, Z.-Y., 2014, “Disturbance rejection for time-delay systems based on the equivalent-input-disturbance approach”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 351, n. 6, pp. 3364–3377.
- LIU, T., GIL, G., CHEN, Y., REN, X., P. ALBERTOS, SANZ, R., 2017, “New Predictor and 2DOF Control Scheme for Industrial Processes with Long Time Delay”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. PP, n. 99, pp. 1–1. ISSN: 0278-0046. doi: 10.1109/TIE.2017.2760839.
- LÖFBERG, J., 2004, “YALMIP : A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB”. In: *In Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan.
- MANITIUS, A. Z., OLBROT, A., 1979, “Finite spectrum assignment problem for systems with delays”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 24, n. 4, pp. 541–552.
- MATAUŠEK, M. R., MICIC, A. D., 1996, “A modified Smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead-time”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 8, pp. 1199 – 1203.
- MATAUŠEK, M. R., MICIC, A. D., 1999, “On the modified Smith predictor for controlling a process with an integrator and long dead-time”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, n. 8, pp. 1199 – 1203.
- MATAUŠEK, M. R., RIBIĆ, A. I., 2009, “Design and robust tuning of control scheme based on the PD controller plus Disturbance Observer and low-order integrating first-order plus dead-time model”, *ISA Transactions*, v. 48, n. 4, pp. 410–416.
- MICHIELS, W., NICULESCU, S.-I., 2003, “On the delay sensitivity of Smith Predictors”, *International Journal of System Science*, v. 34, n. 8-9, pp. 543–551.
- MISRIKHANOV, M. S., RYABCHENKO, V. N., 2006, “The quadratic eigenvalue problem in electric power systems”, *Automation and Remote Control*, v. 67, n. 5, pp. 698–720.
- MORARI, M., ZAFIRIOU, E., 1989, *Robust process control*. Michigan, Prentice Hall.

- MOTTERSHEAD, J. E., RAM, Y. M., 2006, “Inverse eigenvalue problems in vibration absorption: Passive modification and active control”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 20, n. 1, pp. 5–44.
- MOTTERSHEAD, J. E., RAM, Y. M., 2007, “Receptance Method in Active Vibration Control”, *AIAA Journal*, v. 45, n. 3 (mar.), pp. 562–567.
- NORMEY-RICO, J., CAMACHO, E., 2007, *Control of dead-time processes*. London, Springer.
- NORMEY-RICO, J., CAMACHO, E., 2002, “A unified approach to design dead-time compensators for stable and integrative processes with dead-time”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, n. 2, pp. 299 – 305.
- NORMEY-RICO, J., CAMACHO, E., 2009, “Unified approach for robust dead-time compensator design”, *Journal of Process Control*, v. 19, n. 1, pp. 38–47.
- NORMEY-RICO, J. E., CAMACHO, E. F., 2008, “Dead-time compensators: A survey”, *Control Engineering Practice*, v. 16, n. 4, pp. 407 – 428.
- NORMEY-RICO, J. E., GARCIA, P., GONZALEZ, A., 2012a, “Robust stability analysis of filtered Smith predictor for time-varying delay”, *Journal of Process Control*, v. 22, pp. 1975–1984.
- NORMEY-RICO, J. E., GARCIA, P., GONZALEZ, A., 2012b, “Robust stability analysis of filtered Smith predictor for time-varying delay processes”, *Journal of Process Control*, v. 22, n. 10, pp. 1975 – 1984.
- OGUNNAIKE, B. P., RAY, W. H., 1979, “Multivariable controller design for linear systems having multiple time delays”, *AIChE Journal*, v. 25, n. 6, pp. 1043–1060.
- OUYANG, H., 2010, “Pole assignment of friction-induced vibration for stabilisation through state-feedback control”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 329, n. 11, pp. 1985 – 1991.
- PALAZZOLO, A. B., 2016, “Active Vibration Control”. In: *Vibration Theory and Applications with Finite Elements and Active Vibration Control*, Wiley, cap. 12, pp. 867–925, Online.
- PALMOR, Z., 1996, “Time-delay compensation – Smith predictor and its modifications”. In: *The control handbook*, cap. 10.8, pp. 224–237, Online, CRC and IEEE press.

- PARK, M., KWON, O., RYU, J., 2018, “Advanced stability criteria for linear systems with time-varying delays”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 355, n. 1, pp. 520 – 543.
- PARK, P., KO, J. W., JEONG, C., 2011, “Reciprocally Convex Approach to Stability of Systems with Time-varying Delays”, *Automatica*, v. 47, n. 1 (jan.), pp. 235–238. ISSN: 0005-1098.
- QIU, L., YAO, F., XU, G., LI, S., XU, B., 2016, “Output Feedback Guaranteed Cost Control for Networked Control Systems With Random Packet Dropouts and Time Delays in Forward and Feedback Communication Links”, *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, v. 13, n. 1, pp. 284–295.
- RAM, Y. M., MOTTERSHEAD, J. E., 2007, “Receptance Method in Active Vibration Control”, *AIAA Journal*, v. 45, n. 3 (mar.), pp. 562–567.
- RAM, Y., SINGH, A., MOTTERSHEAD, J. E., 2009, “State feedback control with time delay”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 23, n. 6, pp. 1940 – 1945.
- RAM, Y., MOTTERSHEAD, J., TEHRANI, M., 2011, “Partial pole placement with time delay in structures using the receptance and the system matrices”, *Linear Algebra and Its Applications*, v. 434, n. 7, pp. 1689–1696.
- RAO, A. S., CHIDAMBARAM, M., 2006, “Smith delay compensator for multivariable non-square systems with multiple time delays.” *Computer & Chemical Engineering*, v. 30, n. 8, pp. 1243–1255.
- RICHARD, J.-P., 2003, “Time-Delay Systems: an overview of some recent advances and open problems”, *Automatica*, v. 39, pp. 1667 – 1694. ISSN: 0016-0032.
- SANTOS, J., CONCEIÇÃO, A., SANTOS, T., ARAÚJO, H., 2018a, “Remote control of an omnidirectional mobile robot with time-varying delay and noise attenuation”, *Mechatronics*, v. 52, pp. 7–21.
- SANTOS, T. L., FRANKLIN, T. S., 2018a, “Enhanced Finite Spectrum Assignment with Disturbance Compensation for LTI Systems with Input Delay”, *Journal of the Franklin Institute*. ISSN: 0016-0032.
- SANTOS, T. L., FRANKLIN, T. S., 2018b, “Enhanced Finite Spectrum Assignment with Disturbance Compensation for LTI Systems with Input Delay”, *Journal of The Franklin Institute*.

- SANTOS, T. L., FLESCH, R. C., NORMEY-RICO, J. E., 2014, “On the filtered Smith predictor for MIMO processes with multiple time delays”, *Journal of Process Control*, v. 24, n. 4, pp. 383 – 400.
- SANTOS, T. L. M., ARAÚJO, J. M., FRANKLIN, T. S., 2018b, “Receptance-based stability criterion for second-order linear systems with time-varying delay”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 110, pp. 428–441.
- SANTOS, T. L. M., 2011, *CONTRIBUIÇÕES PARA O CONTROLE PREDITIVO COM COMPENSAÇÃO DE ATRASO ROBUSTA*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina - Departamento de Automação e Sistemas.
- SANTOS, T., 2016, “Modified Artstein Predictor for LTI Systems with Dead Time and Unknown Disturbances”, *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, v. 27, n. 3, pp. 263–273.
- SANTOS, T., BOTURA, P., N.-R., J. E., 2010, “Dealing with noise in unstable dead-time process control”, *Journal of Process Control*, v. 20, n. 7, pp. 840–847.
- SANTOS, T., TORRICO, B., NORMEY-RICO, J., 2016, “Simplified filtered Smith predictor for MIMO processes with multiple time delays”, *ISA transactions*, v. 65, pp. 339–349.
- SANTOS, T., SILVA, B., UZÊDA, L., 2017, “Multivariable filtered Smith predictor for systems with sinusoidal disturbances”, *International Journal of Systems Science*, v. 48, n. 10, pp. 2182–2194.
- SANZ, R., GARCIA, P., ALBERTOS, P., 2016, “Enhanced disturbance rejection for a predictor-based control of LTI systems with input delay”, *Automatica*, v. 72, pp. 205–208.
- SEGUY, S., INSPERGER, T., ARNAUD, L., DESSEIN, G., PEIGNÉ, G., 2010, “On the stability of high-speed milling with spindle speed variation”, *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, v. 48, n. 9 (6), pp. 883–895.
- SEURET, A., GOUAISBAUT, F., FRIDMAN, E., 2013, “Stability of systems with fast-varying delay using improved Wirtinger’s inequality”, *52nd IEEE Conference on Decision and Control*.

- SINGH, K. V., OUYANG, H., 2013, “Pole assignment using state feedback with time delay in friction-induced vibration problems”, *Acta Mechanica*, v. 224, n. 3, pp. 645–656.
- SINGH, K., DEY, R., DATTA, B., 2014, “Partial eigenvalue assignment and its stability in a time delayed system”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 42, n. 1-2, pp. 247–257.
- SMITH, O., 1957, “Closer control of loops with dead time”, *Chemical Engineering Progress*, v. 53, n. 5, pp. 217–219.
- STURM, J., 1999, “Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones”, *Optimization Methods and Software*, v. 11–12, pp. 625–653. Version 1.05 available from <http://fewcal.kub.nl/sturm>.
- SUN, X.-M., WU, D., WEN, C., WANG, W., 2014, “A Novel Stability Analysis for Networked Predictive Control Systems”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, v. 61, n. 6, pp. 453 – 457.
- TEHRANI, M. G., MOTTERSHEAD, J., 2012, “An Overview of the Receptance Method in Active Vibration Control”, *IFAC Proceedings Volumes*, v. 45, n. 2, pp. 1174–1178.
- TEHRANI, M. G., MOTTERSHEAD, J. E., SHENTON, A. T., RAM, Y. M., 2011, “Robust pole placement in structures by the method of receptances”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 25, n. 1, pp. 112–122.
- TEHRANI, M. G., WILMSHURST, L., ELLIOTT, S. J., 2013, “Receptance method for active vibration control of a nonlinear system”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 332, n. 19, pp. 4440–4449.
- TORRICO, B., CAVALCANTE, M., BRAGA, A., NORMEY-RICO, J., ALBUQUERQUE, A., 2013, “Simple tuning rules for dead-time compensation of stable, integrative, and unstable first-order dead-time processes”, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 52, n. 33, pp. 11646–11654.
- TORRICO, B. C., FILHO, M. P. D. A., LIMA, T. A., FORTE, M. D. D. N., SÁ, R. C., NOGUEIRA, F. G., 2018, “Tuning of a dead-time compensator focusing on industrial processes”, *ISA Transactions*, v. 83, pp. 189–198.
- TORRICO, B. C., DE ALMEIDA FILHO, M. P., LIMA, T. A., SANTOS, T. L., NOGUEIRA, F. G., 2019, “New simple approach for enhanced rejection of unknown disturbances in LTI systems with input delay”, *ISA Transactions*, v. 94, pp. 316 – 325.

- TROFINO, A., COUTINHO, D., BARBOSA, K. A., 2003, *Sistemas Multi-variáveis: Uma abordagem via LMIs*. Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina.
- UDWADIA, F. E., VON BREMEN, H. F., KUMAR, R., HOSSEINI, M., 2003, “Time delayed control of structural systems”, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 32, n. 4, pp. 495–535.
- WALSH, G. C., YE, H., BUSHNELL, L. G., 2002, “Stability analysis of networked control systems”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 10, n. 2, pp. 438–446.
- WU, M., PENG, C., ZHANG, J., FEI, M., TIAN, Y., 2017, “Further results on delay-dependent stability criteria of discrete systems with an interval time-varying delay”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 354, n. 12, pp. 4955 – 4965.
- WU, X., XIE, L., 2019, “Performance evaluation of industrial Ethernet protocols for networked control application”, *Control Engineering Practice*, v. 84, pp. 208 – 217. ISSN: 0967-0661.
- YAKUBOVICH, V. A., 1977, “The S-procedure in nonlinear control theory”, *Vestnik Leningrad University Math*, pp. 73–93.
- YAMAMOTO, Y., ARAKI, M., 1994, “Frequency responses for sampled-data systems - their equivalence and relationships”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 205-206, pp. 1319–1339.
- YU, Y., GUO, J., LI, L., SONG, G., LI, P., OU, J., 2015, “Experimental study of wireless structural vibration control considering different time delays”, *Smart Materials and Structures*, v. 24, n. 4, pp. 045005.
- YUE, D., HAN, Q.-L., 2005, “Delayed feedback control of uncertain systems with time-varying input delay”, *Automatica*, v. 41, n. 2, pp. 233–240.
- ZHANG, J., YUAN, Y., LIU, H., 2017, “An Approach to Partial Quadratic Eigenvalue Assignment of Damped Vibration Systems Using Static Output Feedback”, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, pp. 1–17.
- ZHANG, L., SHI, Y., CHEN, T., HUANG, B., 2005, “A new method for stabilization of networked control systems with random delays”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 8, pp. 1177 – 1181.

- ZHANG, W., BRANICKY, M., PHILLIPS, S., 2001, “Stability of networked control systems”, *IEEE Control Systems Magazine*, v. 21, n. 1, pp. 84 – 99.
- ZHANG, Z., LIN, C., CHEN, B., 2015, “Complete LKF approach to stabilization for linear systems with time-varying input delay”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 352, n. 6, pp. 2425 – 2440.
- ZHONG, Q.-C., 2003, “Control of integral processes with dead time.3. Deadbeat disturbance response”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 48, n. 1, pp. 153 – 159.
- ZHONG, Q.-C., NORMEY-RICO, J., 2002, “Control of integral processes with dead-time. 1. Disturbance observer-based 2 DOF control scheme”, *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, v. 149, n. 4, pp. 285 – 290.
- ZHONG, Q.-C., REES, D., 2004, “Control of uncertain LTI systems based on an uncertainty and disturbance estimator”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control(Transactions of the ASME)*, v. 126, n. 4, pp. 905–910.
- ZHOU, K., DOYLE, J. C., 1997, *Essentials of Robust Control*. New York, NY, USA, Pearson. ISBN: 978-0135258330.
- ZUO, Z., LI, H., WANG, Y., 2013, “New criterion for finite-time stability of linear discrete-time systems with time-varying delay”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 350, n. 9, pp. 2745 – 2756.

Apêndice A

Ganho dos subsistemas

A.1 Ganho H_{wv} PSF - Caso MIMO contínuo

Com base na Fig. 4.4 matriz de funções de transferência de $\mathbf{w}(t)$ para $\mathbf{v}(t)$ são obtidas por meio das relações a seguir:

$$\mathbf{Y}_p(s) = \mathbf{S}_\bullet(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{F}_r(s)\mathbf{Y}(s), \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{P}(s)[\mathbf{W}(s) + \mathbf{U}(s)], \quad (\text{A.2})$$

Sabendo que as relações permanecem válidas se $\|\mathbf{r}(k)\| = 0$ e $\|\mathbf{q}(k)\| = 0$:

$$\mathbf{V}(s) = -s\mathbf{C}(s)\mathbf{Y}_p(s), \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{Y}_p(s) = \mathbf{S}_\bullet(s)\mathbf{U}(s) + \mathbf{F}_r(s)\mathbf{P}(s)\mathbf{W}(s) + \mathbf{F}_r(s)\mathbf{P}(s)\mathbf{U}(s), \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{Y}_p(s) = [\mathbf{S}_\bullet(s) + \mathbf{F}_r(s)\mathbf{P}(s)]\mathbf{U}(s) + \mathbf{F}_r(s)\mathbf{P}(s)\mathbf{W}(s), \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{U}(s) = \frac{1}{s}\mathbf{V}(s), \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{Y}_p(s) = [\mathbf{S}_\bullet(s) + \mathbf{F}_r(s)\mathbf{P}(s)]\frac{1}{s}\mathbf{V}(s) + \mathbf{F}_r(s)\mathbf{P}(s)\mathbf{W}(s) \quad (\text{A.7})$$

reescrevendo de forma mais simples e substituindo $\mathbf{Y}_p(s)$ em $\mathbf{V}(s)$

$$\mathbf{V}(s) = -s[I + \mathbf{C}(s)\mathbf{S}_\bullet(s) + \mathbf{C}(s)\mathbf{F}_r(s)\mathbf{P}(s)]^{-1}\mathbf{C}(s)\mathbf{F}_r(s)\mathbf{P}(s)\mathbf{W}(s) \quad (\text{A.8})$$

$$= s\mathbf{M}_\bullet(s)^{-1}\mathbf{C}(s)\mathbf{F}_r(s)\mathbf{P}(s)\mathbf{W}(s) \quad (\text{A.9})$$

adotando

$$\mathbf{M}_\bullet(s) = [I + \mathbf{C}(s)\mathbf{S}_\bullet(s) + \mathbf{C}(s)\mathbf{F}_r(s)\mathbf{P}(s)], \quad (\text{A.10})$$

para simplificar a apresentação.

Assim, a partir da definição da norma (∞):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{H}_{\mathbf{wv}}\|_{\infty} &= \sup_{\omega \in [0, \infty]} \bar{\sigma}(\mathbf{H}_{\mathbf{wv}}(j\omega)) \\ &= \left\| j\omega \mathbf{M}_{\bullet}(j\omega)^{-1} \mathbf{C}(j\omega) \mathbf{F}_r(j\omega) \mathbf{P}(j\omega) \right\|_{\infty} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Este resultado combinado com a Eq. (4.21) permite, a partir do teorema do pequeno ganho, encontrar a condição de estabilidade robusta estendida para o caso MIMO de tempo contínuo.

A.2 Ganho H_{wv} Artstein

Em sistemas na forma de espaço de estados utiliza-se o resultado obtido na seção 4.1.2 para sistemas de múltiplas entradas onde verificou-se que $\|\Delta_f\|_{L_2} \leq \delta_{\max}$.

A partir de agora considera-se o sistema nominal descrito por:

$$\dot{\hat{x}}_p(t) = A_n \hat{x}_p(t) + B_n u(t) \quad (\text{A.12})$$

$$+ e^{A_n \bar{L}} B_n [u(t - \bar{L} - \delta(t)) - u(t - \bar{L})]. \quad (\text{A.13})$$

Note que este sistema compensado não conta com o atraso mínimo. Por outro lado, a perturbação equivalente é dependente do valor de $\bar{L}$ devido ao método da redução. Aqui, considera-se a lei de controle $u(t) = K \hat{x}_p(t)$.

Este sistema pode ser reescrito por:

$$\dot{\hat{x}}_p(t) = A_n \hat{x}_p(t) + B_n u(t) + w_m(t)$$

$$w_m(t) = e^{A_n \bar{L}} B_n w(t)$$

$$w(t) = \int_0^t t - \delta(t) v(\tau) d\tau - \int_0^t t v(\tau) d\tau \quad (\text{A.14})$$

$$= [u(t - \bar{L} - \delta(t)) - u(t - \bar{L})] \quad (\text{A.15})$$

$$v(t) = \dot{u}(t - \bar{L}),$$

$$u(t) = K \hat{x}_p(t).$$

$$(\text{A.16})$$

A variável auxiliar $v(t)$ será utilizada para definir o ganho do sistema incerto conforme indicado na Fig. 4.7.

Portanto, utilizando a Transformada de Laplace é possível escrever:

$$\hat{X}_p(s) = [sI - A_n - B_n K]^{-1} W_m(s) \quad (\text{A.17})$$

$$V(s) = s e^{-s \bar{L}} K \hat{X}_p(s) \quad (\text{A.18})$$

Logo, a função de transferência de $w_m(t)$ para $v(t)$ será dada por:

$$\mathbf{H}_{\mathbf{v}\mathbf{w}}(s) = se^{-s\bar{L}}K(sI - A - BK)^{-1}e^{A\bar{L}}B. \quad (\text{A.19})$$

Para o sistema em questão o ganho L_2 é dado por:

$$\|\mathbf{H}_{\mathbf{v}\mathbf{w}}(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, \infty]} \bar{\sigma}(\mathbf{H}_{\mathbf{v}\mathbf{w}}(s)) \quad (\text{A.20})$$

$$= \sup_{\omega \in [0, \infty]} \bar{\sigma}(j\omega e^{-j\omega\bar{L}}K[j\omega I - A_n - B_nK]^{-1}e^{A_n\bar{L}}B_n) \quad (\text{A.21})$$

$$= \sup_{\omega \in [0, \infty]} \bar{\sigma}(j\omega K[j\omega I - A_n - B_nK]^{-1}e^{A_n\bar{L}}B_n). \quad (\text{A.22})$$

A estabilidade robusta pode ser finalmente verificada em sistemas com atraso variável, a partir do Teorema do Pequeno Ganho:

$$\|\mathbf{H}_{\mathbf{v}\mathbf{w}}(j\omega)\|_\infty \delta_{max} < 1. \quad (\text{A.23})$$

Este resultado conclui a prova do critério simplificado para o preditor de Artstein com realimentação de estado.

A.3 Ganho H_{vw} PSF - Caso MIMO discreto

A matriz de funções de transferência de $\mathbf{w}(k)$ para $\mathbf{v}(k)$, para o sistema representado pela Figura 5.2, é obtida por meio das seguintes relações:

$$\mathbf{Y}_p(z) = \mathbf{S}_\bullet(z)\mathbf{U}(z) + \mathbf{F}_r(z)\mathbf{Y}(z), \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{P}(z)[\mathbf{W}(z) + \mathbf{U}(z)], \quad (\text{A.25})$$

Sabendo que as relações permanecem válidas se $\|\mathbf{r}(k)\| = 0$ e $\|\mathbf{q}(k)\| = 0$:

$$\mathbf{V}(z) = -\frac{z-1}{z}\mathbf{C}(z)\mathbf{Y}_p(z), \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{Y}_p(z) = \mathbf{S}_\bullet(z)\mathbf{U}(z) + \mathbf{F}_r(z)\mathbf{P}(z)\mathbf{W}(z) + \mathbf{F}_r(z)\mathbf{P}(z)\mathbf{U}(z), \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{Y}_p(z) = [\mathbf{S}_\bullet(z) + \mathbf{F}_r(z)\mathbf{P}(z)]\mathbf{U}(z) + \mathbf{F}_r(z)\mathbf{P}(z)\mathbf{W}(z), \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{U}(z) = \frac{z}{z-1}\mathbf{V}(z), \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{Y}_p(z) = [\mathbf{S}_\bullet(z) + \mathbf{F}_r(z)\mathbf{P}(z)]\frac{z}{z-1}\mathbf{V}(z) + \mathbf{F}_r(z)\mathbf{P}(z)\mathbf{W}(z) \quad (\text{A.30})$$

reescrevendo de forma mais simples

$$\mathbf{V}(z) = -\frac{z-1}{z}[I + \mathbf{C}(z)\mathbf{S}_\bullet(z) + \mathbf{C}(z)\mathbf{F}_r(z)\mathbf{P}(z)]^{-1}\mathbf{C}(z)\mathbf{F}_r(z)\mathbf{P}(z)\mathbf{W}(z) \quad (\text{A.31})$$

$$= \frac{z-1}{z}\mathbf{M}_\bullet(z)^{-1}\mathbf{C}(z)\mathbf{F}_r(z)\mathbf{P}(z)\mathbf{W}(z) \quad (\text{A.32})$$

adotando

$$\mathbf{M}_\bullet(z) = [I + \mathbf{C}(z)\mathbf{S}_\bullet(z) + \mathbf{C}(z)\mathbf{F}_r(z)\mathbf{P}(z)] \quad (\text{A.33})$$

por simplicidade de apresentação. Assim, a partir da definição da norma (∞) :

$$\|\mathbf{H}_{\mathbf{wv}}(e^{j\omega})\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, \pi]} \bar{\sigma}(\mathbf{H}_{\mathbf{wv}}(z))$$

$$\|\mathbf{H}_{\mathbf{wv}}(e^{j\omega})\|_\infty = \|(1 - e^{-j\omega})\mathbf{M}_\bullet(e^{j\omega})^{-1}\mathbf{C}(e^{j\omega})\mathbf{F}_r(e^{j\omega})\mathbf{P}(e^{j\omega})\|_\infty$$

em que $\bar{\sigma}()$ representa o máximo valor singular de uma determinada matriz

A.3.1 Critério de Estabilidade Robusta

Partindo da Eq. (5.39) para cada valor de frequência ω e considerando a comutatividade de $\mathbf{F}_r(z)$ por ser um filtro diagonal, obtém-se:

$$\bar{\sigma}((1 - e^{-j\omega})[I + \mathbf{C}(e^{j\omega})\mathbf{G}_\bullet(e^{j\omega}) + (\mathbf{L}(e^{j\omega}) - \mathbf{L}_n(e^{j\omega})\mathbf{F}_r(e^{j\omega}))^{-1}\mathbf{L}(e^{j\omega})\mathbf{F}_r(e^{j\omega})) < \frac{1}{N}. \quad (\text{A.34})$$

Inserindo o produto $I = \mathbf{L}_n(e^{j\omega})\mathbf{L}_n(e^{j\omega})^{-1}$ imediatamente após a matriz inversa, aplicando as propriedades e a Eq. (5.42) observa-se a relação dada por:

$$\bar{\sigma}([I + \mathbf{C}(e^{j\omega})\mathbf{G}_\bullet(e^{j\omega}) + (\mathbf{L}(e^{j\omega}) - \mathbf{L}_n(e^{j\omega}))\mathbf{F}_r(e^{j\omega}))^{-1}I\mathbf{L}(e^{j\omega})\mathbf{F}_r(e^{j\omega})) \leq \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{\bar{\sigma}(\mathbf{L}_n(e^{j\omega})^{-1}\mathbf{L}(e^{j\omega})\mathbf{F}_r(e^{j\omega}))}{\underline{\sigma}(\mathbf{L}_n(e^{j\omega})^{-1}[I + \mathbf{C}(e^{j\omega})\mathbf{G}_\bullet(e^{j\omega}) + (\mathbf{L}(e^{j\omega}) - \mathbf{L}_n(e^{j\omega}))\mathbf{F}_r(e^{j\omega}))]} \leq \quad (\text{A.36})$$

$$\frac{\bar{\sigma}(\mathbf{L}_n(e^{j\omega})^{-1}\mathbf{L}(e^{j\omega})\mathbf{F}_r(e^{j\omega}))}{\underline{\sigma}(\mathbf{L}_n(e^{j\omega})^{-1}[I + \mathbf{C}(e^{j\omega})\mathbf{G}_\bullet(e^{j\omega})]) - \bar{\sigma}(\Delta_m(e^{j\omega})\mathbf{F}_r(e^{j\omega}))}. \quad (\text{A.37})$$

Assim, substituindo a Eq. (A.37) em Eq. (5.39), chega-se a:

$$N|1 - e^{-j\omega}|\Pi(\omega)\bar{\sigma}([I + \mathbf{C}(e^{j\omega})\mathbf{G}_\bullet(e^{j\omega})]^{-1}\mathbf{C}(e^{j\omega})\mathbf{P}_n(e^{j\omega})) < 1, \forall \omega \in [0, \infty), \quad (\text{A.38})$$

com

$$\Pi(\omega) = \bar{\sigma}(\mathbf{L}_n(e^{j\omega})^{-1}\mathbf{L}(e^{j\omega})\mathbf{F}_r(e^{j\omega})) + \bar{\sigma}(\Delta_m(e^{j\omega})\mathbf{F}_r(e^{j\omega})). \quad (\text{A.39})$$

A.4 Ganho H_{wv} sistema de segunda ordem

Verificou-se na Seção 4.1.2 que

$$\|\Delta_f\|_{L_2} \leq \delta_{\max}. \quad (\text{A.40})$$

Para concluir a condição para sistemas de segunda ordem resta, portanto, determinar o $\|\mathbf{H}_{wv}(j\omega)\|_{\infty}$. Um sistema de segunda ordem sujeito a atraso variável na entrada é considerado a partir de agora:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathcal{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t - \delta(t)). \quad (\text{A.41})$$

A forma equivalente representada na Fig. 6.4 é utilizada a partir de agora e verifica-se que o sistema variante no tempo é trocado por uma combinação entre uma parte variante e uma parte invariante no tempo sem atraso e perturbado por $\mathbf{B}\mathbf{w}(t)$ de modo que é possível escrever:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathcal{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}\mathbf{w}(t), \quad (\text{A.42})$$

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t), \quad (\text{A.43})$$

$$\mathbf{w}(t) = - \int_{t-\delta(t)}^t \mathbf{v}(\theta) d\theta. \quad (\text{A.44})$$

Nota-se que $\mathbf{w}(t) = -(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - \delta(t)))$ por definição.

A representação em malha fechada pode ser representada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + (\mathcal{C} - \mathbf{F}\mathbf{B})\dot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{K} - \mathbf{G}\mathbf{B})\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{w}(t), \quad (\text{A.45})$$

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t), \quad (\text{A.46})$$

$$\mathbf{w}(t) = -\Delta_f(\mathbf{v}), \quad (\text{A.47})$$

onde $\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}\dot{\mathbf{x}}(t)$ e $\|\mathbf{w}(t)\|_{L_2} \leq \delta_{\max}\|\mathbf{v}(t)\|_{L_2}$.

O ganho de $\mathbf{w}(t)$ até $\mathbf{v}(t)$ é obtido com a descrição em transformada de Laplace e com a receptância de malha fechada dada por:

$$\mathbf{H}(s) = [\mathbf{M}s^2 + (\mathcal{C} - \mathbf{F}\mathbf{B})s + \mathbf{K} - \mathbf{G}\mathbf{B}]^{-1}. \quad (\text{A.48})$$

Perceba que $\mathbf{V}(s) = \mathcal{L}\{\mathbf{v}(t)\}$ pode ser obtida como segue:

$$\mathbf{V}(s) = [\mathbf{F}s^2 + \mathbf{G}s]\mathbf{H}(s)\mathbf{B}\mathbf{W}(s). \quad (\text{A.49})$$

Neste caso, o ganho L_2 da parte invariante é dado por:

$$\|\mathbf{H}_{\mathbf{wv}}(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, \infty]} \bar{\sigma}(j\omega[j\omega\mathbf{F} + \mathbf{G}]\mathbf{H}(j\omega)\mathbf{B}) \quad (\text{A.50})$$

onde $\bar{\sigma}()$ representa o valor singular máximo. Finalmente, a estabilidade robusta pode ser analisada a partir do Teorema do Pequeno Ganho para sistemas de segunda ordem com atraso variável:

$$\|\mathbf{H}_{\mathbf{wv}}(j\omega)\|_\infty \delta_{max} < 1 \quad (\text{A.51})$$

completando a prova.

A.4.1 Critério de Estabilidade Robusta

O critério de estabilidade robusta com incerteza de modelo e atraso variável necessita considerar algumas propriedades para um dado sistema $\mathbf{L}(j\omega)$, um escalar α , e as matrizes A , $\bar{A}$, e B de dimensões apropriadas:

- i) $\|\mathbf{L}(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega \in [0, \infty)} \bar{\sigma}(\mathbf{L}(j\omega))$,
- ii) $\bar{\sigma}(A^{-1}) = 1/\underline{\sigma}(A)$, se $\det(A) \neq 0$,
- iii) $\bar{\sigma}(A + \bar{A}) \leq \bar{\sigma}(A) + \bar{\sigma}(\bar{A})$,
- iv) $\bar{\sigma}(AB) \leq \bar{\sigma}(A)\bar{\sigma}(B)$, (v) $\bar{\sigma}(\alpha A) = |\alpha|\bar{\sigma}(A)$, e
- v) $\underline{\sigma}(A + \bar{A}) \geq \underline{\sigma}(A) - \bar{\sigma}(\bar{A})$.

Reescrevendo a condição dada pela Eq. (6.14) e considerando a receptância desconhecida

$$\bar{\sigma}(\mathbf{L}(j\omega)[\mathbf{I} - \mathbf{L}(j\omega)]^{-1})\omega\delta_{max} < 1, \forall \omega \in [0, \infty), \quad (\text{A.52})$$

ou também de forma alternativa

$$\bar{\sigma}([\mathbf{I} - \mathbf{L}(j\omega)]^{-1}\mathbf{L}(j\omega))\omega\delta_{max} < 1, \forall \omega \in [0, \infty), \quad (\text{A.53})$$

$$\bar{\sigma}([\mathbf{I} - \mathbf{L}(j\omega)]^{-1}\mathbf{L}_n(j\omega)\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}\mathbf{L}(j\omega))\omega\delta_{max} < 1, \forall \omega \in [0, \infty). \quad (\text{A.54})$$

A Eq. (A.52) permanece respeitada desde que, baseada na propriedade (iv), a condição a seguir se mantiver:

$$\bar{\sigma}([\mathbf{I} - \mathbf{L}(j\omega)]^{-1}\mathbf{L}_n(j\omega))\bar{\sigma}(\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}\mathbf{L}(j\omega))\omega\delta_{max} < 1, \forall \omega \in [0, \infty). \quad (\text{A.55})$$

Considerando agora as propriedades, (ii) e (vi) para definir as condições que se seguem

$$\bar{\sigma}(\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}\mathbf{L}(j\omega))\omega\delta_{max} < \underline{\sigma}(\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}[\mathbf{I} - \mathbf{L}(j\omega)]) \quad (\text{A.56})$$

$$< \underline{\sigma}(\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}[\mathbf{I} - \mathbf{L}(j\omega) + \mathbf{L}_n(j\omega) - \mathbf{L}_n(j\omega)]) \quad (\text{A.57})$$

$$= \underline{\sigma}(\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}[\mathbf{I} - \mathbf{L}_n(j\omega)]) - \mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}\Delta_a(j\omega) \quad (\text{A.58})$$

$$\leq \underline{\sigma}(\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}[\mathbf{I} - \mathbf{L}_n(j\omega)]) - \bar{\sigma}(\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}\Delta_a(j\omega)). \quad (\text{A.59})$$

Reescrevendo assim o novo critério modificado

$$\frac{\bar{\sigma}(\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}\mathbf{L}(j\omega))\omega\delta_{max} + \bar{\sigma}(\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}\Delta_a(j\omega))}{\underline{\sigma}(\mathbf{L}_n(j\omega)^{-1}[\mathbf{I} - \mathbf{L}_n(j\omega)])} < 1, \forall \omega \in [0, \infty). \quad (\text{A.60})$$

Sendo considerado o pior caso do limitante multiplicativo para $\bar{\sigma}(\Delta_\ell(j\omega))$ e $\bar{\sigma}(\Delta_i(j\omega))$

$$\bar{\sigma}([\mathbf{I} - \mathbf{L}_n(j\omega)]^{-1}\mathbf{L}_n(j\omega))(\bar{\Delta}_i(\omega)\omega\delta_{max} + \bar{\Delta}_m(\omega)) < 1, \forall \omega \in [0, \infty). \quad (\text{A.61})$$

Para a desigualdade exigir apenas $\bar{\Delta}_m(\omega)$ substitui-se $\bar{\Delta}_i(\omega)$ por $1 + \bar{\Delta}_m(\omega)$ de modo que a seguinte condição é obtida

$$\bar{\sigma}([\mathbf{I} - \mathbf{L}_n(j\omega)]^{-1}\mathbf{L}_n(j\omega))(\omega\delta_{max} + \omega\delta_{max}\bar{\Delta}_m(\omega) + \bar{\Delta}_m(\omega)) < 1, \forall \omega \in [0, \infty). \quad (\text{A.62})$$

Nesta nova descrição nota-se que o efeito do atraso variável está representado por $\omega\delta_{max}$, $\bar{\Delta}_m(\omega)$ representa o efeito da incerteza de modelagem e $\omega\delta_{max}\bar{\Delta}_m(\omega)$ descreve o efeito combinado dos anteriores.