



Universidade Federal da Bahia
Escola Politécnica
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

José Mário Araújo

**Controle e Observação de Estado em Sistemas
Descritores Lineares Sujeitos a Restrições**

Tese de Doutorado em
Engenharia Elétrica

**Salvador
Dezembro de 2011**

José Mário Araújo

Controle e Observação de Estado em Sistemas Descritores Lineares Sujeitos a Restrições

Tese de Doutorado submetida à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Bahia como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Processamento de Informação e Energia

Carlos Eduardo Trabuco Dórea, Dr.Ing.

Orientador

Péricles Rezende Barros, Ph.D.

Orientador

Salvador, Bahia, Brasil

©José Mário Araújo, Dezembro de 2011

A663 Araújo, José Mário

Controle e observação de estado em sistemas descritores lineares sujeitos a restrições / José Mário Araújo. – Salvador, 2011.

xi, 104f. : il. color.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea
Prof. Dr. Péricles Rezende Barros

Tese (doutorado) – Universidade Federal da Bahia. Escola Politécnica, 2011.

1. Teoria do controle. 2. Análise de sistemas (Matemática).
I. Dórea, Carlos Eduardo Trabuco. II. Barros, Péricles
Rezende. I. Universidade Federal da Bahia. II. Título.

CDD.: 629.8

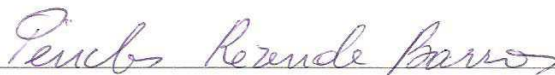
José Mário Araújo

Controle e Observação de Estado em Sistemas Descritores Lineares Sujeitos a Restrições

Tese de Doutorado apresentada como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências no Domínio da Engenharia Elétrica.



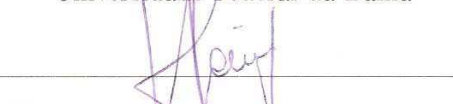
Carlos Eduardo Trabuco Dórea, Dr. Ing. - Orientador
Universidade Federal do Rio Grande do Norte



Péricles Rezende Barros, Ph.D. - Orientador
Universidade Federal de Campina Grande



Adhemar de Barros Fontes, D.Sc.
Universidade Federal da Bahia



Humberto Xavier de Araújo, Dr. Ing.
Universidade Federal da Bahia



André Laurindo Maitelli, D.Sc.
Universidade Federal do Rio Grande do Norte



João Yoshiyuki Ishihara, D.Sc.
Universidade de Brasília

Aprovada em 21 de dezembro de 2011

Dedicatória

Para minha esposa Luciene Carvalho e meus filhos Ariel e Ícaro Carvalho.

Agradecimentos

Agradeço especialmente aos meus Orientadores, os Professores Carlos Eduardo Trabuco Dórea e Péricles Rezende Barros, “co-conspiradores” constantes na edificação desta peça do conhecimento.

Agradeço, no âmbito técnico, a Henrique Cunha Barroso, pelas valorosas contribuições com a planta de nível, e no âmbito pessoal ao próprio Henrique e equipe do LIEC em geral, professores e estudantes, alguns dos quais, Antônio Marcus, Ângelo, Zé Sérgio, João Batista, George Junior, Alfranque, Thiago Eusébio e Thiago Barbosa, pela agradável convivência em Campina Grande-PB durante o ano de 2010.

Agradeço ainda aos Amigos que muito me incentivaram ao longo desta jornada: Alexandre Castro, Fabrício Simões, Eduardo Telmo, Cristina Abreu, Aldo Borges, César Rogério, Valter Rosa, Vitaly Esquerre, Jês Cerqueira e Durval Souza.

Agradeço a todos os Colegas das Coordenações de Engenharia Elétrica e de Eletrônica do IFBA, pela concordância e apoio com meu afastamento no ano de 2010.

A minha Esposa Luciene, pelas opiniões sobre a estética e aos meus filhos Ariel e Ícaro, que batizaram algumas das figuras deste trabalho de “jóias do caos”.

Também agradeço à CAPES e ao IFBA pelo suporte financeiro para viabilizar a realização deste trabalho.

Resumo

Sistemas descritores lineares formam uma importante classe de sistemas, na qual equações dinâmicas e algébricas podem constituir um único modelo. Alguns exemplos em que se encontram modelos descritores são circuitos elétricos, sistemas robóticos, sistemas econômicos, dentre outros. A teoria de controle de sistemas descritores, em geral, é construída pela extensão de resultados existentes para sistemas na forma padrão. Por sua vez, o controle de sistemas sob restrições tem despertado interesse crescente, dado que diversas situações reais envolvem restrições nas variáveis do sistema, a exemplo de saturação de sinais. Neste trabalho, são apresentados novos resultados em controle e estimação de estados em sistemas descritores sujeitos a restrições, utilizando a extensão de técnicas de invariância de conjunto, já bastante desenvolvidas em aplicações aos sistemas lineares na forma padrão. Utilizando-se os conceitos de poliedros invariantes, o controle por realimentação de estados e de saída e mais a estimação de estados são estudados, tanto do ponto de vista de análise quanto de projeto. São evidenciados os resultados via invariância controlada e invariância condicionada, que fornecem soluções menos conservadoras que pela aplicação de leis de controle e injeção lineares definidas *a priori*. Na mesma linha, propõe-se também a investigação do problema de regularização com simultâneo respeito às restrições em sistemas descritores lineares, cujos resultados preliminares, obtidos numericamente e para exemplos específicos, apontam na direção de uma família de soluções ótimas tomando como índice o hipervolume da projeção do maior poliedro invariante controlado no espaço de estados.

Abstract

Linear descriptor systems compose an important class of systems, in which dynamic and algebraic equations can build a unique model. Some examples can be found in electrical circuits, robotic systems, economics, among others. The control theory regarding descriptor systems is in general constructed by extending existing results for standard systems. On the other hand, constrained control systems have gained crescent attention, given that physical constraints on system variables as, for instance, input saturation, are present in several real world applications. This work presents new results regarding control and state estimation in descriptor systems subject to such constraints, by using the set invariance approach, a methodology already well developed in applications to standard systems. By means of the concept of invariant polyhedra, state and output feedback control and state estimation are studied from the analysis and design points of view. The results concerning controlled and conditioned invariance are pointed, that give less conservative solutions than by application of designed linear *a priori* control and injections laws. In the same line, a study on the problem of simultaneously regularizing a non regular descriptor system with constraints satisfaction is carried out in the context of descriptor systems, whose preliminary results, numerically obtained in specific examples, taking the hypervolume of the maximal controlled invariant polyhedron projected onto the state space as the performance index points towards a family of optimal solutions.

Sumário

Introdução	1
1 Revisão da Literatura	4
1.1 Sistemas descritores lineares	4
1.1.1 Regularidade e causalidade	5
1.1.2 Solução no domínio do tempo	8
1.1.3 Autoestrutura e estabilidade	9
1.2 Controlabilidade e observabilidade	9
1.3 Invariância de conjuntos	11
1.4 Controle de sistemas descritores sob restrições	12
2 Conjuntos Poliédricos Invariantes Controlados e Controle sob Restrições	14
2.1 Preliminares	14
2.2 Caracterização de poliedros invariantes controlados	14
2.2.1 Admissibilidade do estado inicial	17
2.3 Exemplo numérico	19
2.4 Invariância controlada por realimentação de saída e um estudo de caso	20
2.4.1 Invariância controlada por realimentação de saída - I.C.R.S.	20
2.4.2 Extensão aos sistemas descritores	23
2.4.3 Estudo de caso em um sistema de tanques interligados (controle de nível)	24
2.4.4 Resultados de I.C.R.S.	26
2.4.5 Comentários adicionais	30
2.5 Regularização de sistemas descritores sob restrições	30
2.5.1 Preliminares	30
2.5.2 Regularização	31
2.5.3 Análise de exemplos específicos de regularização com restrições	33
2.6 Comentários conclusivos	36

3	Conjuntos Invariantes Condicionados e Estimação de Estados	38
3.1	Preliminares	38
3.2	Observadores de estado com limitação de erro	39
3.2.1	O problema da estimação de estado	39
3.2.2	Conjuntos invariantes condicionados	39
3.2.3	O observador proposto	43
3.3	Erro inicial admissível	45
3.4	Exemplos numéricos	46
3.5	Projeto de observador na plataforma experimental de nível	48
3.6	Comentários conclusivos	51
4	Invariância controlada por realimentação de saída: realimentação dinâmica	52
4.1	Preliminares	52
4.2	Construção de um poliedro simultaneamente invariante controlado e condicionado	53
4.3	Exemplo numérico	56
4.4	Resultados de simulação em sistema de nível	57
4.5	Comentários conclusivos	62
5	Conclusão e trabalhos futuros	63
	Referências Bibliográficas	66
	Apêndice	72
	Anexo	75

Lista de Símbolos e Abreviaturas

$\mathbb{R}$	Corpo dos números reais
$\mathbb{R}_+$	Corpo dos números reais não-negativos
$\mathbb{R}^n$	Espaço dos vetores coluna reais com n elementos
$\mathbb{R}^{g \times n}$	Espaço das matrizes reais com g linhas e n colunas
$\mathbb{C}$	Corpo dos números complexos
$\in$	Pertence
$\subset$	Está contido
$\cup$	União
$\cap$	Intersecção
$\exists$	Existe
$\forall$	Para todo
$:$	Tal que
$\rho(\bullet)$	Posto de linhas de uma matriz
A^T	Matriz transposta de A
$\det(\bullet)$	Determinante de uma matriz
$(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y})$	Estado, entrada, saída
$\arg \max$	Argumento da maximização (variável de decisão)
$\arg \min$	Argumento da minimização (variável de decisão)
I.C.R.S.	Invariante controlado por realimentação de saída
$\min$	Minimize (problema)
$\max$	Maximize (problema)
s.a.	Sujeito a

Lista de Figuras

1.1	Circuito com modelo singular para $k = G_1 + G_2$	5
2.1	Projeção no espaço de estados do poliedro invariante controlado calculado com $\gamma = 1$, juntamente com a trajetória dos estados.	19
2.2	Projeção no espaço do controle do poliedro invariante controlado calculado com $\gamma = 1$, juntamente com a trajetória do controle.	20
2.3	Plataforma experimental.	25
2.4	Sistema elaborado com três tanques.	26
2.5	Respostas do sistema e do modelo identificado para uma sequência de degraus de $+5\%$, -10%	27
2.6	Poliedro com trajetória do estado para ilustração de invariância controlada com medição de todo o estado: simulado (preto) e experimental (vermelho).	28
2.7	Esforço de controle com medição de todo o estado: simulado (preto) e experimental (vermelho).	29
2.8	Poliedro com trajetória do estado para ilustração de invariância controlada com medição q_2 : simulado (preto) e experimental (vermelho).	29
2.9	Esforço de controle com medição de q_2 : simulado (preto) e experimental (vermelho).	30
2.10	Área da projeção no espaço de estados do maior poliedro invariante para o exemplo A, sem restrição no sinal de controle	34
2.11	Área da projeção no espaço de estados do maior poliedro invariante para o exemplo A, com restrição no sinal de controle $ u \leq 1$, e diversos valores de amplitude máxima da perturbação $d(k)$	34
2.12	Volume da projeção no espaço de estados do maior poliedro invariante para o exemplo B, para diversos valores de amplitude máxima da controle $u(k)$	35
2.13	Volume da projeção no espaço de estados do maior poliedro invariante em função da norma do ganho regularizante para o exemplo C, para diversos valores de amplitude máxima da controle $\mathbf{u}(k)$	36
3.1	Poliedros do exemplo 1, junto com uma trajetória de erro.	47

3.2	Poliedros do exemplo 2.	48
3.3	Poliedro invariante do exemplo 2 junto com uma trajetória do erro.	49
3.4	Poliedro do estudo de caso e trajetória do erro com ganho linear (preto) e injeção <i>on line</i> (vermelho).	50
3.5	Erro de estimação no domínio do tempo (a) ganho linear (b) injeção <i>online</i>	50
4.1	Poliedro invariante do exemplo com trajetória do estado aumentado.	57
4.2	Trajетória do erro $\mathbf{x} - \mathbf{z}_x$	58
4.3	Poliedros invariantes do sistema de nível com trajetória do estado para realimentação estática e dinâmica de saída.	59
4.4	Evolução temporal do vetor de estado com realimentação dinâmica.	59
4.5	Esforço de controle <i>online</i> com realimentação dinâmica.	60
4.6	Evolução temporal do vetor de estado com realimentação estática.	60
4.7	Esforço de controle <i>online</i> com realimentação estática.	61
4.8	Poliedro invariante condicionado e trajetória de $\mathbf{q}(k) - \mathbf{z}(k)$	61

“Better living through Mathematics.”

“Nenhum ponto finito tem significado
sem um ponto de referência no
infinito.”

Jean-Paul Sartre

Introdução

Desde o seu desenvolvimento, que data da década de 1960, a descrição de sistemas lineares no espaço de estados tornou-se uma ferramenta sólida em modelagem e controle de sistemas. As abordagens são as mais variadas, sendo as mais importantes a algébrica e a geométrica. Entre o final da década de 1970 e o início da década de 1980, uma classe de sistemas lineares desperta crescente atenção dos especialistas: os sistemas descritores lineares. O problema não era novo na época. Gantmacher, em seu trabalho clássico (1), já havia discutido estruturas de sistemas de equações algébrico-diferenciais e as implicações desta forma híbrida na solução de tais sistemas. Desde então, as contribuições para a consolidação da teoria de sistemas lineares descritores são frequentes na literatura. Um exemplo clássico de sistema descritor de tempo discreto é o modelo de Leontief para interação entre n setores em uma economia (2). O modelo descritor de Leontief é definido pelo sistema de equações:

$$E\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + \mathbf{f}(k),$$

e $x^i(k)$ e $-f^i(k)$ representam, respectivamente, a saída monetária e a demanda para o i -ésimo setor. Os termos $A\mathbf{x}(k)$ e $E\mathbf{x}(k+1)$ representam, respectivamente, as relações inter-setor e os investimentos. Um caso interessante é quando E é uma matriz singular, resultando no modelo singular de Leontief. Diversos outros exemplos de modelos descritores não-singulares, singulares e retangulares e suas respectivas aplicações estão disponíveis numa vasta literatura, sendo alguns exemplos importantes aqueles encontrados em (3),(4).

A invariância de conjuntos, por sua vez, tem suas raízes na álgebra linear, e mais tarde foi introduzida também a noção de subespaços invariantes. O conceito de invariância de conjuntos poliédricos, ou simplesmente poliedros, vai ao encontro de uma característica intrínseca aos sistemas físicos: seus limites operacionais, impostos por limitação de suprimento de energia, segurança e outros aspectos. Se tais limites são dados na forma de restrições lineares, elas podem ser matematicamente traduzidas na forma de poliedros. A invariância de tais poliedros então é capaz de garantir a operação de sistemas dentro de seus limites operacionais, e este conceito é o que será apresentado como invariância

controlada. Na mesma linha, o problema da estimação de estados com limitação de erro pode ser abordado, por meio do conceito de invariância condicionada.

A presente tese tem como objetivo geral a extensão de conceitos e aplicações de invariância de conjuntos em controle sob restrições de sistemas lineares padrões para sistemas descritores singulares, buscando assim aplicações desta metodologia em sistemas lineares mais gerais. Os seguintes objetivos específicos são listados:

1. propor uma extensão do conceito de poliedro invariante controlado, para fins de controle sob restrições em um sistema descritor singular;
2. propor uma extensão do conceito de poliedro invariante condicionado, para fins de estimação com limitação de erro em um sistema descritor singular;
3. propor uma extensão do conceito de poliedro invariante controlado por realimentação de saída, para fins de controle sob restrições em um sistema descritor singular;
4. estudar algumas aplicações teóricas e experimentais dos conceitos anteriores;
5. investigar a possibilidade de solução do problema conhecido como regularização de sistemas singulares, satisfazendo simultaneamente restrições, por meio de técnicas de invariância.

Para o cumprimento destes objetivos, a metodologia consistiu em estudo aprofundado da literatura pertinente; proposições de novas estruturas para sistemas descritores; solução dos problemas de controle e observação sob restrições pela extensão de resultados já consolidados; organização de estudos de simulação computacional e estudos experimentais em uma plataforma experimental de nível de líquido; validações dos resultados por meio de exemplos teóricos e/ou experimentais.

No Capítulo 1, uma revisão da literatura sobre sistemas descritores, invariância de conjuntos e controle sob restrições é apresentada, de forma a fundamentar a proposta de tese. O Capítulo 2 apresenta a proposta de extensão de resultados em invariância controlada e a síntese via realimentação de estados e também por realimentação de saída, com apresentação de exemplo numérico e também estudo de caso experimental. Ainda neste capítulo, é apresentado um estudo preliminar de um problema pouco explorado na literatura especializada, que é a solução simultânea do problema de regularização de sistemas descritores com respeito a restrições. O Capítulo 3 aborda a extensão para sistemas descritores de resultados em invariância condicionada, aplicada a estimação de estado com limitação de erro. O capítulo 4 apresenta a aproximação dos conceitos dos Capítulos 2 e 3, na proposição de técnica para solução do problema de invariância

controlada por realimentação dinâmica de saída (I.C.R.S.) em sistemas descritores. As conclusões deste trabalho de tese são então descritas no Capítulo 5.

Capítulo 1

Revisão da Literatura

1.1 Sistemas descritores lineares

Um sistema linear invariante no tempo tem descrição generalizada no espaço de estados, respectivamente de tempo contínuo e de tempo discreto, dada por:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (1.1)$$

$$E\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (1.2)$$

em que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. No presente trabalho, o interesse central é em sistemas lineares descritores de tempo discreto. O caso em que E é uma matriz não singular é conhecido como forma padrão ou regular:

$$\mathbf{x}(k+1) = E^{-1}A\mathbf{x}(k) + E^{-1}B\mathbf{u}(k). \quad (1.3)$$

Ao sistema da Eq. 1.2 pode ser agregada a equação de saída:

$$\mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k), \quad (1.4)$$

em que $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$. A teoria de sistemas lineares padrão no espaço de estados é largamente empregada e já é bastante consolidada (5),(6),(7),(8),(9). Em certos sistemas, equações algébricas podem interligar as variáveis de estado, e desta forma, a matriz E passa a ser singular. Esta classe de sistemas descritores é também conhecida como sistemas lineares singulares ou ainda sistemas lineares implícitos (10). Por exemplo, o circuito da Fig. 1.1 (11) tem modelo no espaço de estados dado por:

$$\begin{bmatrix} LG_1 & C \\ L(k - G_2) & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Tomando-se $k = G_1 + G_2$, têm-se um modelo do tipo singular. Isto acontece devido ao cancelamento exato, no capacitor, da contribuição da tensão do nó 1, imposta pela indutância, devido a uma parcela de mesma magnitude no nó 2, imposta pela fonte dependente agindo sobre a condutância G_2 .

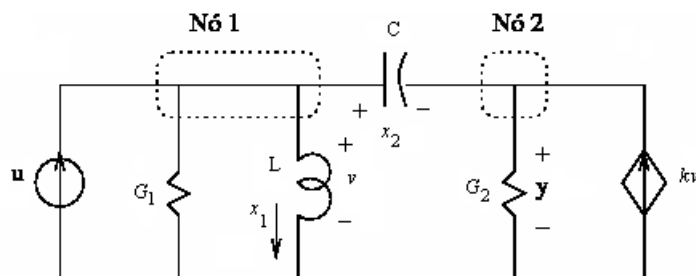


Figura 1.1: Circuito com modelo singular para $k = G_1 + G_2$.

Dentre os primeiros trabalhos que abordam esta classe de problemas, um dos mais importantes é o livro de Gantmacher (1). Nele, equações algébrico-diferenciais recebem atenção especial quanto à solução, com base na teoria de feixes de matrizes. Um dos primeiros trabalhos a tratar de forma rigorosa sistemas descritores de tempo discreto foi o de Luenberger (12). Neste artigo, a caracterização da solução é apresentada, e aspectos surpreendentes, ausentes no caso de sistemas padrão, são observados nos sistemas descritores. Um deles é a possível não-causalidade do sistema. A década de 80 do século passado experimentou uma atenção crescente sobre diversas características estruturais de sistemas descritores, muitas das quais bastante diferenciadas em relação àquelas dos sistemas padrão. Tais características dizem respeito à solução no domínio do tempo, regularidade, causalidade, controlabilidade, observabilidade, autoestrutura, dentre outras. Na sequência, serão brevemente introduzidas estas importantes características.

1.1.1 Regularidade e causalidade

Seja o sistema descritor, dado pela Eq. 1.2.

Definição 1.1. (13): O sistema descritor da Eq. 1.2 é **regular** se o feixe $\lambda E - A$ é não-singular para ao menos um $\lambda \in \mathbb{C}$.

Condição 1.1. (13): O sistema descritor é causal se $\text{grau}(\det(\lambda E - A)) = \rho(E)$, em que $\rho(\bullet)$ é o posto de uma matriz.

Uma consequência importante da regularidade é que o sistema é resolvível (uma única solução existe) somente se for regular (12).

Exemplo 1.1. Seja um sistema em que

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

As equações para este sistema são, linha por linha:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) + u(k), \\ x_1(k) &= 0. \end{aligned}$$

Obviamente, não existe uma solução para este par de equações se $u(k) \neq 0$; ainda, caso $u(k) = 0$, a solução não é única, uma vez que $x_2(k)$ é livre. É fácil notar que $\det(\lambda E - A) = 0$. Agora, com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

tem-se

$$\det(zE - A) = 1,$$

e portanto $\text{grau}[\det(\lambda E - A)] = 0 < \rho(E)$. A inversa do feixe do sistema é, no domínio da frequência:

$$(zE - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & z \end{bmatrix}.$$

Nota-se a existência de um termo de avanço na matriz de transição de estados, e assim o sistema é não-causal. Pode-se chegar a esta conclusão facilmente no domínio do tempo, uma vez que a solução é dado por:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= u(k), \\ x_2(k) &= x_1(k+1) + u(k). \end{aligned}$$

Os teoremas na sequência apresentam condições necessárias e suficientes para regularidade e causalidade de um sistema descritor.

Teorema 1.2. (decomposição rápida-lenta) (13): O sistema descritor 1.2 é regular se e somente se existe um par de matrizes (M_1, N_1) não-singulares tais que

$$M_1 E N_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{J} \end{bmatrix}, M_1 A N_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

em que $\mathcal{J}$ é uma matriz nilpotente.

Exemplo 1.2. *Seja um sistema descritor de tempo discreto com as matrizes*

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0,7 & -3,25 & -0,7 & 0 \\ 1,8 & 0,4 & -6,4 & 2,6 \\ 1 & -1,9 & -5,4 & 2,4 \\ -0,6 & -2,7 & 5,4 & -2,8 \end{bmatrix} \quad (\rho(E) = 2).$$

As matrizes M e N atendem ao Teorema 1.1, com $M = M_1^{-1}$, $N = N_1^{-1}$, conforme mostrado a seguir:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1,5 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$E = M \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} N, \quad A = M \begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} N, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

Nota: Todo sistema descritor na forma 1.2 tem uma representação canônica na forma:

$$MEN = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad MAN = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Teorema 1.3. (13): *O sistema descritor dado pela forma canônica 1.6 é causal se e somente se A_{22} é não-singular.*

Seja o sistema do exemplo 1.2. As matrizes de transformação propostas levam à forma 1.6. Neste caso, é fácil observar que $A_{22} = I$, e desta forma o sistema é causal. O teorema a seguir é uma forma interessante de se verificar regularidade e causalidade com um único teste. Para maiores detalhes sobre o mesmo, ver (14).

Teorema 1.4. *O sistema descritor 1.2 é regular e causal se*

$$\rho \left(\begin{bmatrix} 0 & E \\ E & A \end{bmatrix} \right) = n + \rho(E).$$

Ainda utilizando-se as matrizes do Exemplo 1.2, pode-se verificar que

$$\rho \left(\begin{bmatrix} 0 & E \\ E & A \end{bmatrix} \right) = 6.$$

O que significa que o sistema é regular e causal.

1.1.2 Solução no domínio do tempo

Para sistemas regulares, uma única solução em um dado intervalo $[0, N]$ é obtida quando se conhecem as condições de contorno neste intervalo (15). Para ilustrar esta característica, considera-se o sistema discreto regular na forma canônica dada pela decomposição rápida-lenta:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k). \quad (1.7)$$

O sistema nesta forma é desacoplado, e as equações podem ser explicitadas como:

$$\mathbf{x}_1(k+1) = \mathcal{A} \mathbf{x}_1(k) + B_{21} \mathbf{u}(k), \quad (1.8)$$

$$\mathcal{J} \mathbf{x}_2(k+1) = \mathbf{x}_2(k) + B_{22} \mathbf{u}(k). \quad (1.9)$$

A solução para x_1 é imediata, por se tratar de um subsistema na forma padrão no espaço de estados:

$$\mathbf{x}_1(k) = \mathcal{A}^k \mathbf{x}_1(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathcal{A}^{k-i-1} B_{21} \mathbf{u}(j). \quad (1.10)$$

Para a solução de $\mathbf{x}_2$, com $k = 0, 1, 2 \dots N$, não é possível aplicar recursividade crescente. Neste caso, é necessária uma manipulação recursiva para trás, mas admitindo-se conhecer $x(N)$ e, como será visto, a sequência $\mathbf{u}(k), \mathbf{u}(k+1), \dots, \mathbf{u}(N-l)$ em que l é o índice de nilpotência de $\mathcal{J}$. Assim, isolando-se $\mathbf{x}_2(k)$, obtém-se a forma recursiva:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(N-1) &= \mathcal{J} \mathbf{x}_2(N) - B_{22} \mathbf{u}(N-1), \\ \mathbf{x}_2(N-2) &= \mathcal{J}^2 \mathbf{x}_2(N) - \mathcal{J} B_{22} \mathbf{u}(N-1) - B_{22} \mathbf{u}(N-2), \\ \mathbf{x}_2(N-3) &= \mathcal{J}^3 \mathbf{x}_2(N) - \mathcal{J}^2 B_{22} \mathbf{u}(N-1) - \mathcal{J} B_{22} \mathbf{u}(N-2) - B_{22} \mathbf{u}(N-3), \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_2(k) &= \mathcal{J}^{N-k} \mathbf{x}_2(N) - \sum_{j=k}^{N-1} \mathcal{J}^{j-k} B_{22} \mathbf{u}(j). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Conclui-se que a causalidade do sistema será função do seu índice de nilpotência. Se o índice de nilpotência for maior do que a unidade, nota-se a dependência da solução no instante k com entradas futuras. O sistema na forma canônica será causal se e somente se $\mathcal{J} = 0$.

1.1.3 Autoestrutura e estabilidade

Para sistemas descritores não-singulares, o problema de autoestrutura consiste em determinar autovalores λ e autovetores v generalizados:

$$E^{-1}A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \quad (1.12)$$

Para o caso de sistemas descritores singulares com $\rho(E) = q < n$, a *autoestrutura finita* é definida através das relações (15):

$$(\lambda E - A)\mathbf{v} = 0, \quad (1.13)$$

$$(\lambda E - A)\mathbf{v}^{k+1} = -E\mathbf{v}^k. \quad (1.14)$$

e, respectivamente, 1.13 e 1.14 se aplicam a autovalores simples e múltiplos. Os demais $n - q$ autovalores são denominados autovalores infinitos. Importantes contribuições a respeito da alocação de autoestruturas finitas e infinitas em sistemas descritores podem ser vistas em (15),(16),(17). É possível verificar que os autovalores finitos de um sistema descritor regular são os autovalores da matriz $\mathcal{A}$ em 1.7.

Seja o sistema do exemplo 1.2. A matriz $\mathcal{A}$ é obtida da forma canônica 1.5:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,3 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores desta matriz, que são os autovalores finitos do sistema, são $\lambda_1 = -0,5405$, $\lambda_2 = 0,2405$.

O teorema a seguir caracteriza a estabilidade de um sistema descritor regular e causal com respeito à sua autoestrutura finita.

Teorema 1.5. (13) *As seguintes afirmações são equivalentes para o sistema descritor 1.2, regular e causal:*

1. *o sistema descritor dado pela Eq. 1.2 é assintoticamente estável;*
2. *os autovalores finitos do par (E, A) estão dentro do círculo unitário;*
3. *o raio espectral de $\mathcal{A}$ é menor do que 1.*

Pelo teorema 1.4 e a partir dos autovalores do exemplo 1.2, pode-se verificar que o sistema em questão é estável.

1.2 Controlabilidade e observabilidade

Diferentemente dos sistemas lineares na forma padrão, as definições de controlabilidade e observabilidade para sistemas descritores singulares são mais restritivas, devido a

condições rígidas nas variáveis de estado impostas pelas equações algébricas. Tal rigidez é governada pela definição de vetor admissível (18), a seguir definido:

Definição 1.2. *Um vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é dito admissível com relação ao sistema 1.2 se existem vetores $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ tais que $E\bar{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$.*

O conjunto de todos os vetores admissíveis para um sistema descritor a partir da definição acima é denotado por R_0 . As noções de controlabilidade e observabilidade em sistemas descritores estão intimamente ligadas ao conjunto admissível. Tal conjunto é um subespaço do $\mathbb{R}^n$, o que leva à noção de R-controlabilidade (observabilidade), ou seja, dentro do subespaço admissível. Quando $R_0 = \mathbb{R}^n$, então tem-se a controlabilidade (observabilidade), num sentido semelhante ao de sistemas na forma padrão. Uma discussão detalhada sobre estas definições pode ser vista em (18).

Para a controlabilidade (observabilidade) de sistemas descritores singulares, os seguintes teoremas fornecem condições necessárias e suficientes com base na estrutura do sistema, e eles equivalem às definições originais tais como aquelas propostas em (18) para sistemas causais.

Teorema 1.6. (13): *Um sistema descritor regular dado pela Eq. 1.2 (1.2 e 1.5) é dito R-controlável (R-observável) se e somente se $\rho\left(\begin{bmatrix} \lambda E - A & B \end{bmatrix}\right) = n$ ($\rho\left(\begin{bmatrix} \lambda E^T - A^T & C^T \end{bmatrix}\right) = n$)*

Teorema 1.7. (13): *Um sistema descritor regular dado pela Eq. 1.2 (1.2 e 1.5) é dito controlável (observável) se e somente se for R-controlável (R-observável) e adicionalmente $\rho\left(\begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix}\right) = n$ ($\rho\left(\begin{bmatrix} E^T & C^T \end{bmatrix}\right) = n$).*

Exemplo 1.3: Seja o sistema descritor dado a seguir

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

Escrevendo as equações linha por linha, obtém-se:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) + x_2(k+1) &= x_1(k) + x_2(k) + u(k), \\ x_2(k) &= \frac{1}{2}x_1(k). \end{aligned}$$

Pode-se notar que o controle $u(k)$ pode mover o vetor de estados no subespaço gerado pelo vetor $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$. Assim, o sistema é R-controlável, mas não é controlável. Pelo Teorema 1.5:

$$\rho\left(\begin{bmatrix} zE - A & B \end{bmatrix}\right) = 2, \quad \rho\left(\begin{bmatrix} E & B \end{bmatrix}\right) = 1.$$

O que confirma a análise anterior. Chega-se à mesma conclusão para o caso da observabilidade tomando-se $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ e analisando o sistema dual.

1.3 Invariância de conjuntos

A idéia de invariância de conjuntos tem grande utilidade no tratamento de problemas no espaço de estados. Um importante resultado para a álgebra linear derivado da invariância de conjuntos foi a definição de subespaços invariantes (19). A chamada invariância positiva surge no estudo de conjuntos que não são subespaços, mas por exemplo, poliedros ou cones. No contexto da teoria de controle por realimentação, a primeira noção de invariância importante é a de (A, B) -invariância, ou como é mais atualmente denominado, invariância controlada. Resultados de destaque estão presentes na literatura no tocante a subespaços invariantes no contexto da teoria geométrica de controle (9).

Para os conjuntos doravante considerados, as seguintes noções são importantes: um conjunto fechado é qualquer subconjunto do $\mathbb{R}^n$ que contém seus pontos limites; por sua vez, conjunto compacto é todo conjunto do tipo Heine-Borel, ou seja, é fechado e limitado. Considere um sistema linear de tempo discreto, de ordem n , sujeito à perturbação limitada em um domínio compacto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^p$, com controle definido pelo vetor $\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$:

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B_2\mathbf{u}(k) + B_1\mathbf{d}(k). \quad (1.15)$$

Em seguida, são enunciadas as definições de conjunto positivamente invariante, invariante controlado e invariante controlado contrativo.

Definição 1.3. (20): Um conjunto não-vazio, fechado, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito positivamente D -invariante com relação ao sistema 1.15 com $\mathbf{u} \equiv 0$ se $A\mathbf{x}(k) + B_1\mathbf{d}(k) \in \Omega, \forall \mathbf{x}(k) \in \Omega, \forall \mathbf{d}(k) \in \mathcal{D}$.

Definição 1.4. (20): Um conjunto não-vazio, fechado, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito invariante controlado com relação ao sistema 1.15 se

$$\exists \mathbf{u}(k) \in \mathcal{U} : A\mathbf{x}(k) + B_2\mathbf{u}(k) + B_1\mathbf{d}(k) \in \Omega, \forall \mathbf{x}(k) \in \Omega, \forall \mathbf{d}(k) \in \mathcal{D}. \quad (1.16)$$

Definição 1.5. (20): Um conjunto não-vazio, fechado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito invariante controlado λ -contrativo ($0 < \lambda < 1$) com respeito ao sistema 1.15 se

$$\exists \mathbf{u}(k) \in \mathcal{U} : A\mathbf{x}(k) + B_2\mathbf{u}(k) + B_1\mathbf{d}(k) \in \lambda\Omega, \forall \mathbf{x}(k) \in \Omega, \forall \mathbf{d}(k) \in \mathcal{D}. \quad (1.17)$$

Outro conceito de grande relevância é o conceito de invariância condicionada. Considere a equação de saída:

$$\mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + \eta(k), \quad (1.18)$$

com $\eta \in \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^l$ é um ruído de medição no domínio compacto $\mathcal{N}$. O conjunto Ω induz o conjunto de saídas admissíveis $\mathcal{Y}(\Omega, \mathcal{N}) = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = C\mathbf{x} + \eta, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall \eta \in \mathcal{N}\}$. Além disso, a cada $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ pode-se associar o seguinte conjunto de estados $\bar{\eta}$ -consistente com uma dada medida:

$$\mathcal{C}(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} : C\mathbf{x} = \mathbf{y} - \eta, |\eta| \leq \bar{\eta}\}.$$

Definição 1.6. *Um conjunto não-vazio, fechado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito invariante condicionado λ -contrativo ($0 < \lambda \leq 1$) com relação ao sistema 1.15 e 1.18, se*

$$\exists \mathbf{v}(\mathbf{y}) : A\mathbf{x} + \mathbf{v} + B_1\mathbf{d} \in \lambda\Omega, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}(\Omega), \forall \mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathbf{y}) \cap \Omega, \forall \mathbf{d} \in \mathcal{D}. \quad (1.19)$$

Se um conjunto for invariante controlado, será possível obter uma lei de controle tal que, uma vez que o vetor de estados esteja no interior do conjunto, a sua evolução permanecerá em seu interior; da mesma forma, se um conjunto for invariante condicionado, tem-se uma lei de injeção de saída que será capaz de assegurar a evolução do vetor de estados dentro deste conjunto. Esta característica é totalmente adequada à idéia de controle sob restrições (invariância controlada) e limitação de erro de estimação (invariância condicionada), uma vez que tais restrições formam um conjunto, quase sempre definido por restrições lineares. Matematicamente estas restrições resultam em poliedros no $\mathbb{R}^n$, na forma:

$$\Omega = \{\mathbf{x} : G\mathbf{x} \leq \rho\}, \quad (1.20)$$

com $G \in \mathbb{R}^{g \times n}$, $\rho \in \mathbb{R}^g$ e $\leq$ denota desigualdade elemento a elemento. Contribuições sobre a caracterização de invariância controlada de conjuntos poliédricos podem ser encontradas em (20),(21),(22),(23). Em (23), as condições para invariância são estabelecidas em termos dos vértices do poliedro, enquanto em (20), tais condições são estabelecidas a partir de desigualdades lineares. Ainda que um poliedro não seja invariante, é possível obter os maiores poliedros invariantes contidos em dado poliedro, como por exemplo em (20). Por sua vez, conjuntos poliédricos são uma tradução natural de certas restrições encontradas em sistemas físicos, tais como a saturação. Desta forma, este conceito é bastante adequado ao estudo de problemas de controle sob restrições.

1.4 Controle de sistemas descritores sob restrições

Até o presente, enquanto vários trabalhos tratam do problema da invariância de conjuntos aplicada ao controle sob restrições de sistemas lineares na forma padrão (ver (20),(21),(22) e referências contidas), uma pequena quantidade de contribuições é encontrada na literatura especializada com relação aos sistemas descritores causais. Algumas contribuições tratam do problema através do conceito de invariância positiva

(24),(25),(26),(27),(28). Em todos estes trabalhos, uma lei de controle linear é definida *a priori*, o que introduz resultados conservadores. Além disso, estas abordagens estabelecem condições para invariância positiva após a aplicação do controle linear, sendo portanto pautadas em análise, e não em síntese. O caso da invariância controlada não foi encontrado durante a revisão bibliográfica, o que sugeriu uma boa direção para a presente pesquisa.

Seja o sistema descritor sujeito a distúrbios, na forma:

$$E\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B_1\mathbf{d}(k). \quad (1.21)$$

Quando se leva em conta que, devido a possíveis inconsistências entre o estado inicial $\mathbf{x}(0)$ e a equação algébrica, um sistema descritor singular pode apresentar um salto finito no estado inicial de $\mathbf{x}(0)$ para $\mathbf{x}(0^+)$ (13,25), as seguintes definições de invariância positiva podem ser destacadas:

Definição 1.7. (25): *Um conjunto não-vazio, fechado, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito $\mathcal{D}$ -invariante simples com relação ao sistema 1.21 se $\mathbf{x}(k) \in \Omega$ e $\mathbf{x}(0^+) \in \Omega$, $\forall k \geq 1$, $\forall \mathbf{d} \in \mathcal{D}$.*

Definição 1.8. (25): *Um conjunto não-vazio, fechado, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito fracamente $\mathcal{D}$ -invariante com relação ao sistema 1.21 se $\mathbf{x}(k) \in \Omega$, $\forall k \geq 1$, $\forall \mathbf{d} \in \mathcal{D}$.*

Basicamente, estas duas definições diferem pela importância dada ao valor inicial do vetor de estados após um possível salto. A definição de invariância simples será relacionada a um dos resultados do capítulo subsequente.

No capítulo seguinte, por meio do re-arranjo da equação de estado em uma forma aumentada para um sistema linear descritor regular e causal, os resultados descritos em (20) são estendidos para esta classe de sistemas e mostram-se efetivos. Também, para o caso em que o poliedro não é invariante controlado, o algoritmo descrito em (20) para determinação do maior poliedro invariante contido nas restrições também é empregado com resultados satisfatórios.

Capítulo 2

Conjuntos Poliédricos Invariantes Controlados e Controle sob Restrições

2.1 Preliminares

Conforme relatado no capítulo anterior, uma diversidade de contribuições sobre controle sob restrições utilizando técnicas de invariância para sistemas lineares na forma padrão pode ser vista na literatura. Entretanto, para a classe dos sistemas descritores lineares, as contribuições sobre caracterização de invariância de conjuntos são bastante raras. Alguns trabalhos importantes usando invariância positiva com alocação de pólos foram citados. Todavia, o uso de realimentação linear pode levar a soluções demasiado conservadoras, não lidando desta forma com restrições de controle severas ou perturbações de maior amplitude. Neste capítulo, é analisada a invariância controlada de conjuntos poliédricos em sistemas descritores lineares de tempo discreto. Assumindo que o sistema é causal, as equações de estado podem ser re-escritas em uma forma aumentada, a partir da qual é possível a aplicação de métodos conhecidos para a caracterização de invariância controlada de conjuntos poliédricos em sistemas lineares padrão (29). O conceito de invariância controlada por realimentação de saída (i.c.r.s.) (30) é também abordado, e um estudo de caso envolvendo uma plataforma experimental de nível é apresentado de forma a validar as contribuições teóricas do capítulo. A última seção descreve um estudo preliminar sobre o problema de regularização com simultâneo respeito a restrições, utilizando-se a forma aumentada proposta neste capítulo.

2.2 Caracterização de poliedros invariantes controlados

A fim de ilustrar a possibilidade de extensão dos resultados estabelecidos de invariância controlada para sistemas descritores, é apresentada a seguir uma metodologia para

validação desta hipótese.

Sem perda de generalidade, considere o sistema descritor com a presença de distúrbios:

$$E\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B_2\mathbf{u}(k) + B_1\mathbf{d}(k), \quad (2.1)$$

em que o vetor de estado particionado e as matrizes têm a forma:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$$E = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

A hipótese de causalidade assegura que A_{22} é inversível. Após uma breve manipulação do subsistema algébrico representado por $\mathbf{x}_2$, conclui-se que o sistema pode ser reescrito na forma:

$$\mathbf{x}(k+1) = \tilde{A}\mathbf{x}(k) + \tilde{B}_2\mathbf{u}(k) + \tilde{B}_3\mathbf{u}(k+1) + \tilde{B}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{d}(k) \\ \mathbf{d}(k+1) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

em que

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} B_{21} - A_{12}A_{22}^{-1}B_{22} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(B_{21} - A_{12}A_{22}^{-1}B_{22}) \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ -A_{22}^{-1}B_{22} \end{bmatrix}, \tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}B_{12} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}B_{12}) & -A_{22}^{-1}B_{12} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pode-se observar nesta nova forma a presença (i) do controle um passo a frente e (ii) do distúrbio também um passo a frente. Desde que o distúrbio seja suposto limitado em amplitude, como definir-se-á adiante, resta um tratamento adequado ao controle. Propõe-se então reescrever o sistema numa forma aumentada, com a inclusão de $\mathbf{u}(k)$ como variável de estado. A partir desta suposição, obtém-se a seguinte forma aumentada:

$$\chi(k+1) = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}_2 + \tilde{B}_3 \\ 0 & I \end{bmatrix} \chi(k) + \begin{bmatrix} \tilde{B}_3 \\ I \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u}(k+1) + \begin{bmatrix} \tilde{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}(k) \\ \mathbf{d}(k+1) \end{bmatrix},$$

$$\Delta\mathbf{u}(k+1) = \mathbf{u}(k+1) - \mathbf{u}(k), \quad (2.5)$$

em que

$$\chi(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{u}(k+1) \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Este é um sistema padrão com vetor de estado aumentado $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(k) & \mathbf{u}^T(k) \end{bmatrix}^T$ e distúrbio $\begin{bmatrix} \mathbf{d}^T(k) & \mathbf{d}^T(k+1) \end{bmatrix}^T$, e a aplicação de algoritmos estabelecidos para sistemas na forma padrão é direta. A preservação de propriedades estruturais importantes nesta forma em relação ao sistema original é discutida no apêndice. É possível notar ainda que este sistema estendido possui $n + m$ autovalores: (i) q autovalores finitos de 2.1; (ii) $n - q$ autovalores iguais a 0 correspondentes aos autovalores infinitos de 2.1; e m autovalores iguais a 1 correspondentes à dinâmica do esforço de controle.

Suponha que o sistema 2.1 esteja sujeito às seguintes restrições lineares no estado e no controle, dadas por poliedros 0-simétricos:

$$\mathbf{x}(k) \in \Omega_x = \{\mathbf{x} : G\mathbf{x} \leq \rho\}, \mathbf{u}(k) \in \mathcal{U} = \{\mathbf{u} : U\mathbf{u} \leq v\}, \Delta\mathbf{u}(k) \in \Delta\mathcal{V} = \{\Delta\mathbf{u} : L\Delta\mathbf{u} \leq \varphi\}. \quad (2.7)$$

O distúrbio é suposto limitado em amplitude, definido pelo poliedro compacto:

$$\mathbf{d}(k) \in \mathcal{D} = \{\mathbf{d} : V\mathbf{d} \leq \mu\}. \quad (2.8)$$

Considerando-se agora a formulação aumentada, as restrições nos estados e no controle podem ser escritas como:

$$\chi(k) \in \Omega = \{\chi : \mathcal{G}\chi \leq \varrho\}, \mathcal{G} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix}, \varrho = \begin{bmatrix} \rho \\ v \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

e os limites sobre o distúrbio:

$$\bar{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}(k) \\ \mathbf{d}(k+1) \end{bmatrix} \in \Psi = \{\bar{\mathbf{d}} : \mathcal{V}\bar{\mathbf{d}} \leq \bar{\mu}\}, \mathcal{V} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}, \bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

O objetivo agora é construir uma lei de controle que satisfaça as restrições 2.9 para todo distúrbio em Ψ . Tal construção será baseada na seguinte definição:

Definição 2.1. *Um conjunto Ω^* é λ -contrativo invariante controlado em relação ao sistema 2.5 se $\forall \chi(k) \in \Omega^*$, $\forall \bar{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^T(k) & \mathbf{d}^T(k+1) \end{bmatrix}^T \in \Psi$, $\exists \Delta\mathbf{u}(k+1) \in \Delta\mathcal{V}$ tal que*

$$\chi(k+1) = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}_2 + \tilde{B}_3 \\ 0 & I \end{bmatrix} \chi(k) + \begin{bmatrix} \tilde{B}_3 \\ I \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u}(k+1) + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}(k) \\ \mathbf{d}(k+1) \end{bmatrix} \in \lambda\Omega^*, 0 < \lambda \leq 1. \quad (2.11)$$

O problema de controle sob restrições pode então ser resolvido pela determinação de Ω^* , o maior conjunto invariante controlado contido em Ω (20). Desta forma, se o estado

inicial for consistente com a equação algébrica:

$$0 = A_{21}\mathbf{x}_1(0) + A_{22}\mathbf{x}_2(0) + B_{22}\mathbf{u}(0) + B_{12}\mathbf{d}(0), \quad (2.12)$$

e $\chi(0) \in \Omega^*$, então $\exists \Delta \mathbf{u}(k+1)$ tal que $\chi(k) \in \Omega^*$, $\forall k$ e $\forall \bar{\mathbf{d}}(k) \in \Psi$. Adicionalmente, para $\mathbf{d}(k) = 0$, $\chi(k) \in \lambda^k \Omega^*$, e se $\lambda < 1$, $\chi(k) \rightarrow 0$ para $k \rightarrow \infty$, assegurando estabilidade assintótica.

Uma vez que o maior poliedro invariante controlado é obtido, uma lei de controle linear por partes pode ser calculada para assegurar o respeito às restrições (22):

$$\Delta \mathbf{u}(k+1) = \phi[\chi(k)] = \phi[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)]. \quad (2.13)$$

2.2.1 Admissibilidade do estado inicial

Na subseção anterior, o aspecto da consistência das condições iniciais foi mencionado. A lei de controle da Eq. 2.13 assegura o respeito às restrições no estado e no controle se o estado inicial satisfaz $\chi(0) \in \Omega^*$. No entanto, diferentemente dos sistemas lineares na forma padrão, $\mathbf{x}(0)$ pode não ser consistente, ou seja, pode não satisfazer as equações algébricas. Nesta situação, um salto pode ocorrer para $k = 0$ e o resultado é imprevisível devido ao distúrbio $\mathbf{d}(0)$. Seja $\mathbf{x}(0^+)$ o estado após o salto. A parte dinâmica do vetor de estados não experimenta saltos para $k = 0$. Isto pode ser verificado pela mudança na representação da Eq. 2.1 para a forma canônica rápida-lenta, na qual as equações algébricas e dinâmicas são desacopladas (13). Assim, $\mathbf{x}_1(0^+) = \mathbf{x}_1(0)$. A parte algébrica pode ser explicitada a partir de 2.3:

$$\mathbf{x}_2(0^+) = -A_{22}^{-1}A_{21}\mathbf{x}_1(0) - A_{22}^{-1}B_{22}\mathbf{u}(0) - A_{22}^{-1}B_{12}\mathbf{d}(0). \quad (2.14)$$

A consistência da condição inicial pode ser tratada a partir da seguinte definição:

Definição 2.2. *Considere o conjunto Ω^* , invariante controlado com relação ao sistema 2.5. O conjunto de estados iniciais admissíveis é definido como: $\Lambda_{ad} = \{\mathbf{x}(0^+) : \exists \mathbf{u}(0) / \mathbf{x}(0^+) \in \Omega_x^*, \forall \mathbf{d}(0) \in \mathcal{D}\}$, em que Ω_x^* é a projeção de Ω^* no espaço de estados.*

Agora, seja Ω^* o poliedro $\Omega^* = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & \mathbf{u}^T \end{bmatrix}^T : G_x \mathbf{x} + G_u \mathbf{u} \leq \rho \right\}$. Além disso, a projeção no espaço de estados é dada por $\Omega_x^* = \{\mathbf{x} : T_x G_x \mathbf{x} \leq T_x \rho, T_x G_u = 0, T_x \geq 0\}$. Note-se que T_x , pela definição do poliedro Ω_x^* , é uma matriz de projeção não-negativa, que pode ser calculada, por exemplo, utilizando o método de Fourier-Motzkin (31). Neste caso, o conjunto de estados iniciais admissíveis também é um poliedro, dado pelo conjunto

dos $\mathbf{x}(0^+) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T(0^+) & \mathbf{x}_2^T(0^+) \end{bmatrix}^T$ tal que $\exists \mathbf{u}(0)$ que satisfaz, $\forall V \mathbf{d}(0) \leq \mu$:

$$G_x \begin{bmatrix} I \\ -A_{22}^{-1}A_{21} \end{bmatrix} \mathbf{x}_1(0^+) + \left\{ G_x \begin{bmatrix} 0 \\ -A_{22}^{-1}B_{22} \end{bmatrix} + G_u \right\} \mathbf{u}(0) + G_x \begin{bmatrix} 0 \\ -A_{22}^{-1}B_{12} \end{bmatrix} \mathbf{d}(0) \leq \rho. \quad (2.15)$$

Uma vez que $\mathbf{d}(0)$ não é medido, sua influência pode ser levada em conta considerando o pior caso, linha por linha, Define-se então o vetor δ tal que:

$$\delta_i = \max_{V \mathbf{d} \leq \mu} \left\{ G_x \begin{bmatrix} 0 \\ -A_{22}^{-1}B_{12} \end{bmatrix} \right\}_i \mathbf{d}. \quad (2.16)$$

Novamente, o controle $\mathbf{u}(0)$ pode ser eliminado por projeção não-negativa T (similar a T_x), resultando no seguinte poliedro em $\mathbf{x}_1$:

$$\Lambda_{x_1} = \{ \mathbf{x}_1(0) : \bar{G} \mathbf{x}_1(0) \leq \bar{\rho} \}, \quad (2.17)$$

em que:

$$\bar{G} = T G_x \begin{bmatrix} I \\ -A_{22}^{-1}A_{21} \end{bmatrix}, \quad \bar{\rho} = T(\rho - \delta),$$

com $T \left\{ G_x \begin{bmatrix} 0 \\ -A_{22}^{-1}B_{22} \end{bmatrix} + G_u \right\} = 0$. Então, o conjunto de estados iniciais admissíveis é dado como:

$$\Lambda_{ad} = \left\{ \mathbf{x}(0^+) : \begin{bmatrix} \bar{G} & 0 \\ & G \end{bmatrix} \mathbf{x}(0^+) \leq \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \rho \end{bmatrix} \right\}. \quad (2.18)$$

O controle $\mathbf{u}(0)$, que assegura que o estado inicial após o salto pertence a Λ_{ad} , pode ser calculado pela minimização de sua norma através de:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0) &= \arg \min_{\mathbf{u}(0)} \|\mathbf{u}(0)\|^2 \\ \text{s.a. } &\left\{ G_x \begin{bmatrix} 0 \\ -A_{22}^{-1}B_{22} \end{bmatrix} + G_u \right\} \mathbf{u}(0) \leq \rho - \delta - G_x \begin{bmatrix} I \\ -A_{22}^{-1}A_{21} \end{bmatrix} \mathbf{x}_1(0^+). \end{aligned}$$

Após a aplicação do controle, definido por $\mathbf{u}(0)$ e $\Delta \mathbf{u}(k+1)$, o poliedro invariante atende a definição de $\mathcal{D}$ -invariante simples (25), ou seja, para todo $\mathbf{x}(0) \in \Omega$, tem-se $\mathbf{x}(0^+) \in \Omega$ e $\mathbf{x}(k) \in \Omega$, $\forall k$ e $\forall \mathbf{d}(k) \in \mathcal{D}$.

Observação 2.1. A forma padrão aumentada discutida nesta seção pode ser interpretada como um caso particular dos clássicos algoritmos de embaralhamento direto e reverso de Luenberger (12), com a aplicação de avanço em um passo da equação algébrica. A vantagem desta formulação está no fato que a solução da parte algébrica, para $k \geq 1$, é desacoplada de $x_2(0^+)$. Ou seja, garantida a consistência da condição inicial, a forma aumentada é válida para $k \geq 1$.

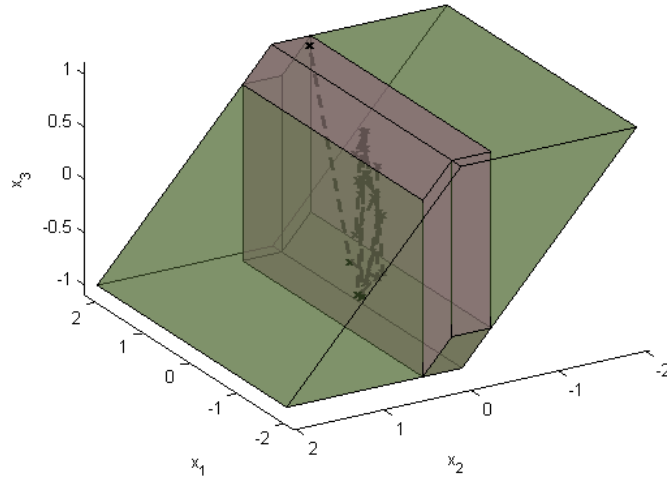


Figura 2.1: Projeção no espaço de estados do poliedro invariante controlado calculado com $\gamma = 1$, juntamente com a trajetória dos estados.

2.3 Exemplo numérico

Seja por exemplo o sistema, o mesmo utilizado em (24),(25):

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1,2 & 0 & 0 \\ -1 & -0,7 & -1 \\ 2 & -0,5 & -1,2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0,5 & 2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

As seguintes restrições são impostas sobre o estado e o controle: $|G_s \mathbf{x}| \leq \rho_s, |u_i| \leq 10, i = 1, 2$, com

$$G_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,9318 \\ -1 & 0 & -0,1164 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \rho_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

O distúrbio é limitado como $|d(k)| \leq \gamma$. Aplicando-se o algoritmo proposto em (20), pode ser verificado que o maior poliedro invariante controlado contido no conjunto de restrições, com uma taxa de contração $\lambda = 0,99$, é não vazio para $\gamma \leq \gamma_{max} = 1,082115$.

Nas Fig. 2.1 e 2.2, são mostrados, respectivamente, o poliedro invariante controlado para $\gamma = 1$ projetado sobre o espaço de estados e sobre o espaço do controle; na Fig. 2.1, também é mostrado o poliedro dos estados iniciais admissíveis, contido na projeção. Constata-se que o poliedro original das restrições sobre o estado é invariante controlado. Tais resultados se mostram melhores do que aqueles obtidos utilizando-se uma lei de controle por alocação de pólos proposta em (24),(25), para a qual $\gamma_{max} = 0,208815$. Uma lei de controle linear por partes que assegura o respeito às restrições pode ser determinada

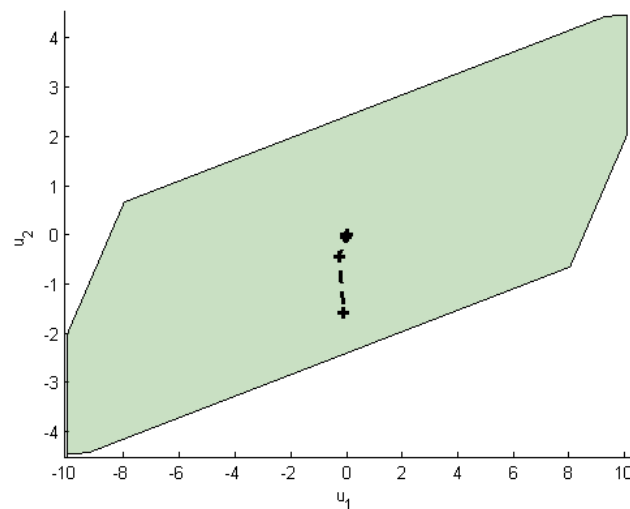


Figura 2.2: Projeção no espaço do controle do poliedro invariante controlado calculado com $\gamma = 1$, juntamente com a trajetória do controle.

como em (22). Entretanto, para este exemplo em particular, com $\gamma = 1$, a invariância de Ω sob as restrições pode ser conseguida através de uma lei de controle linear $\Delta u(k+1) = F\chi(k) = F_1x(k) + F_2u(k)$ calculada por programação linear como em (32),(33), o que conduz a

$$F = \begin{bmatrix} -1,5301 & -0,0909 & 0 & -0,8129 & -1,4176 \\ -0,2509 & 0,0103 & 0 & -0,0212 & -2,0263 \end{bmatrix}.$$

O sistema aumentado em malha fechada possui: (i) 4 autovalores nulos e (ii) 1 autovalor igual a 0,0766. Isto confirma a estabilidade do sistema em malha fechada.

Uma simulação foi realizada com $\mathbf{x}(0^-) = \begin{bmatrix} 1,649 & -0,2354 & 0 \end{bmatrix}^T$. O controle inicial $\mathbf{u}(0)$ foi então calculado de forma a garantir $\mathbf{x}(0^+) \in \Omega^*, \forall d(0) \in \mathcal{D}$ resultando em $\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} -0,1198 & -1,5779 \end{bmatrix}^T$ e para $d(0) = 1$ (um cenário de pior caso) $\mathbf{x}(0^+) = \begin{bmatrix} 1,649 & -0,2354 & 1 \end{bmatrix}^T$. A trajetória simulada com um distúrbio aleatório é ilustrada nas Figs. 2.1 (estado) e 2.2 (controle).

2.4 Invariância controlada por realimentação de saída e um estudo de caso

2.4.1 Invariância controlada por realimentação de saída - I.C.R.S.

Nesta seção, uma descrição sumária sobre as condições para i.c.r.s. de um poliedro é apresentada, bem como a extensão destes resultados para sistemas descritores com ênfase em suas peculiaridades.

Seja o sistema linear :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= A\mathbf{x}(k) + B_2\mathbf{u}(k) + B_1\mathbf{d}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= C\mathbf{x}(k) + \eta(k),\end{aligned}\tag{2.20}$$

com $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ a saída medida e $\eta \in \mathbb{R}^l$ é o ruído de medição limitado como $|\eta| \leq \bar{\eta}$.

Considere agora o conjunto das saídas admissíveis associado ao poliedro $\Omega_x = \{\mathbf{x} : G\mathbf{x} \leq \rho\}$:

$$\mathcal{Y}(\Omega_x, \bar{\eta}) = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = C\mathbf{x} + \eta \text{ for } \mathbf{x} \in \Omega_x, \eta : |\eta| \leq \bar{\eta}\}.\tag{2.21}$$

$\mathcal{Y}(\Omega_x, \bar{\eta}) \subset \mathbb{R}^l$ é o conjunto, também fechado e convexo, de todos os valores de $\mathbf{y}$ que podem se associar com $\mathbf{x} \in \Omega_x$. Logo, se $\mathbf{x}(k) \in \Omega_x$, então $\mathbf{y}(k) \in \mathcal{Y}(\Omega_x, \bar{\eta})$.

Para cada $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$ pode-se associar o seguinte conjunto de estados $\bar{\eta}$ -consistentes com uma dada medida:

$$\mathcal{C}(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} : C\mathbf{x} = \mathbf{y} - \eta, |\eta| \leq \bar{\eta}\}.$$

A invariância de Ω_x com a realimentação de saída é definida como:

Definição 2.3. O poliedro Ω_x é dito invariante controlado por realimentação de saída (i.c.r.s.) em relação ao sistema 2.20 se $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}(\Omega_x, \bar{\eta}), \exists \mathbf{u} \in \mathcal{V} : G_x(A\mathbf{x} + B_2\mathbf{u} + B_1\mathbf{d}) \leq \lambda\rho$, $\forall \mathbf{d} \in \mathcal{D}$ and $\forall \mathbf{x} \in \Omega_x \cap \mathcal{C}(\mathbf{y})$, com $0 < \lambda \leq 1$.

Quando Ω_x é i.c.r.s., se $\mathbf{x}(k) \in \Omega_x$, então existe uma lei de controle $\mathbf{u}(\mathbf{y}(k)) \in \mathcal{U}$, calculada a partir da medida no instante k , tal que $\mathbf{x}(k+1) \in \Omega_x, \forall k$. Neste caso, se Ω_x está contido no conjunto de restrições sobre os estados, então as restrições podem ser satisfeitas por realimentação de saída.

O mesmo esforço de controle $\mathbf{u}$ deve funcionar para todo $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$; e para todo $\mathbf{x} \in \Omega$ consistente com a medição $\mathbf{y}$, a definição anterior pode ser reescrita na forma: o poliedro Ω_x é i.c.r.s. se

$$\forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}, \exists \mathbf{u} : \begin{bmatrix} \phi(\mathbf{y}) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_x B \\ U \end{bmatrix} \mathbf{u} \leq \begin{bmatrix} \lambda\rho - \delta \\ v \end{bmatrix},\tag{2.22}$$

em que

$$\begin{aligned}\delta_i &= \max_{\mathbf{d}} G_{xi} B_1 \mathbf{d} \\ \text{s.a. } \forall \mathbf{d} &\leq \mu.,\end{aligned}$$

$$\phi_j(\mathbf{y}) = G_{xj} A \xi^{*j}(\mathbf{y}),\tag{2.23}$$

com

$$\begin{aligned} \xi^{*j}(\mathbf{y}) = & \arg \max_{\mathbf{x}} G_{xj} A \mathbf{x} \\ \text{s.a. } & G_x \mathbf{x} \leq \rho, \quad |C \mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \bar{\eta}. \end{aligned}$$

Os termos ϕ_i e δ_i modelam, respectivamente, o pior caso devido ao conjuntos dos estados consistentes com uma dada saída (medida), e o pior caso devido à incerteza no valor do distúrbio.

Considera-se ainda a matriz não-negativa $T = [t^T \ w^T] \in \mathcal{R}^{n_r \times g}$, cujas linhas formam um conjunto gerador mínimo do cone poliédrico definido como: $[t^T \ w^T] \begin{bmatrix} G_x B \\ U \end{bmatrix} = 0$. Aplicando-se o lema de Farka's ((31)), a condição 2.22 pode ser reescrita como: $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}(\Omega)$, $\forall i = 1, \dots, n_r$,

$$\begin{bmatrix} T_i & W_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(\mathbf{y}) \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} T_i & W_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \rho - \delta \\ v \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

O resultado central em (30) é o teorema:

Teorema 2.2. *O poliedro $\Omega_x = \{\mathbf{x} : G_x \mathbf{x} \leq \rho\}$ é i.c.r.s. com taxa de contração λ se, e somente se, $\forall i = 1, \dots, n_r$:*

$$\sum_{j=1}^g T_{ij} G_{xj} A \xi^j \leq \left(\sum_{j=1}^g T_{ij} (\lambda \rho_j - \delta_j) \right) + W_i v, \quad (2.25)$$

$$\forall \mathbf{y}, \xi^j, j = 1, 2, \dots, g : G_x \xi^j \leq \rho, \quad -C \xi^j + \mathbf{y} \leq \bar{\eta} \quad (2.26)$$

A I.C.R.S. do conjunto Ω_x pode ser verificada pela solução de n_r problemas de programação linear (PL):

$$\begin{aligned} \epsilon_i = & \max_{\mathbf{y}, \xi^j} \sum_{j=1}^g T_{ij} G_{xj} A \xi^j \\ \text{s.a. : } & G_x \xi^j \leq \rho, \quad |C \xi^j - \mathbf{y}| \leq \bar{\eta}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

Assim, Ω_x é i.c.r.s. com taxa de contração λ se e somente se $\epsilon_i + (\sum_{j=1}^g T_{ij} \delta_j) - W_i v \leq (\sum_{j=1}^g T_{ij}) \lambda \rho_j$, $\forall i = 1, \dots, n_r$.

Conforme é demonstrado em (30), o número máximo de variáveis necessário para calcular ϵ_i é somente $(m+1).n+p$, o que torna as PLs (2.27) tratáveis computacionalmente.

Uma lei de controle *online* que impõe o respeito às restrições pode ser calculada como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{y}(k)) = & \arg \min_{\mathbf{u}(k)} \varepsilon \\ \text{s.a. } & \phi(\mathbf{y}(k)) + G_x B \mathbf{u} \leq \varepsilon \rho - \delta, \quad U \mathbf{u}(k) \leq v. \end{aligned} \quad (2.28)$$

com $\phi(\mathbf{y}(k))$ dado por 2.23.

Esta lei de controle age no sentido de otimizar a contração um passo à frente para a trajetória dos estados com relação ao poliedro i.c.r.s. Ω . O cálculo $u(y(k))$ requer a solução de g PLs com n variáveis e $g + q$ restrições (2.23) mais a PL (2.28) com $m + 1$ variáveis e $g + v$ restrições.

2.4.2 Extensão aos sistemas descritores

Considera-se agora o sistema descritor linear, sujeito a distúrbios e ruído de medição dado por:

$$E\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B_2\mathbf{u}(k) + B_1\mathbf{d}(k) \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + \eta(k) \quad (2.29b)$$

Considera-se ainda a forma aumentada 2.5 desenvolvida na Seção 2.2:

$$\chi(k+1) = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}_2 + \tilde{B}_3 \\ 0 & I \end{bmatrix} \chi(k) + \begin{bmatrix} \tilde{B}_3 \\ I \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u}(k+1) + \begin{bmatrix} \tilde{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}(k) \\ \mathbf{d}(k+1) \end{bmatrix},$$

$$\Delta\mathbf{u}(k+1) = \mathbf{u}(k+1) - \mathbf{u}(k),$$

juntamente com os poliedros 2.9 e 2.10, que caracterizam as restrições nas variáveis de estado e no controle e os limites no distúrbio. A equação de saída pode ser estendida para a forma: $\tilde{\mathbf{y}}(k) = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta(k) \\ 0 \end{bmatrix}$. O conjunto de saídas admissíveis induzido por Ω é dado por:

$$\tilde{\mathcal{Y}}(\Omega) = \left\{ \tilde{\mathbf{y}} : \tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix}, \forall \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \in \Omega, |\eta| \leq \bar{\eta} \right\}.$$

Com base nestas premissas, o desenvolvimento que resulta no Teorema 2.2 pode ser estendido diretamente para o sistema descritor 2.5, substituindo-se adequadamente as matrizes correspondentes.

Observação 2.3. Quando Ω é i.c.s.r., se o estado $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(k) & \mathbf{u}^T(k) \end{bmatrix}^T$ pertence a Ω , então existe $\Delta\mathbf{u}(k+1) \in \mathcal{U}$ tal que $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(k+1) & \mathbf{u}^T(k+1) \end{bmatrix}^T \in \Omega$. Pode ser observado que $\Delta\mathbf{u}(k+1)$ é escolhido com base em $\tilde{\mathbf{y}}(k)$. Neste sentido, a realimentação pode ser considerada como do tipo atrasada.

Observação 2.4. O controle $\Delta\mathbf{u}(k+1)$ afeta o estado imediatamente no instante $k+1$. Esta é uma característica de um sistema descritor, associada com o acoplamento entre o estado e as variáveis de entrada.

Observação 2.5. Não há, até o presente momento, um procedimento sistemático para o cálculo de um poliedro i.c.r.s; entretanto, poliedros invariantes controlados por realimentação de estado, com pequenas taxas de contração podem ser i.c.r.s. com λ maior, o que pode ser verificado com as condições do Teorema 2.2.

2.4.3 Estudo de caso em um sistema de tanques interligados (controle de nível)

Uma plataforma experimental para controle de nível (34) mostrada na Fig. 2.3 foi utilizada para a configuração de um modelo descritor linear, a partir do esquema da Fig. 2.4 em torno de um ponto de operação. A plataforma é equipada com transmissores de nível baseados em pressão nos tanques 1 e 2, e o atuador é um conjunto moto-bomba mais conversor de frequência. Toda a comunicação é feita por rede ethernet, e os comandos podem ser realizados por meio de uma estação de trabalho (PC) com especificação: Intel(R) Core(TM) i7 CPU @ 2.67GHz, 4Gb memória RAM. A ferramenta OPC MATLAB © interage com um controlador lógico programável da Allen-Bradley ©, e desta forma é possível o controle com arquivos escritos diretamente em MATLAB. O modelo incremental para os volumes dos tanques no esquema da Fig. 2.4 é dado por:

$$E\dot{\mathbf{q}}_a(t) = A\mathbf{q}_a(t) + Bu_a(t), \quad (2.30a)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{q}_a(t) + \eta_a(t). \quad (2.30b)$$

com $\mathbf{q}_a = \begin{bmatrix} q_{a1} & q_{a2} & q_{a3} \end{bmatrix}^T$ é o vetor de estado consistindo dos volumes absolutos nos tanques, u_a é a vazão absoluta da bomba, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, a matriz de saída C depende dos níveis que são medidos, e $\eta(t)$ é o ruído de medição. Este modelo é de um sistema descritor, singular, e a equação correspondente à terceira linha pode ser facilmente justificada pelo princípio do balanço de massa, desde que o sistema não recebe nem tem demanda de material para o meio externo (35),(36):

$$q_{a1}(t) + q_{a2}(t) + q_{a3}(t) = 0 \quad (2.31)$$

O modelo dado pela Eq. 2.30 utiliza variáveis em valor absoluto. Será demonstrado em seguida que mudanças de escala são necessárias, levando em consideração que as variáveis no sistema são dadas em valores relativos. Para extração dos parâmetros do modelo, tanto o tanque 1 como o tanque 2 foram submetidos a ensaios de resposta ao degrau. Um



Figura 2.3: Plataforma experimental.

degrau de +5% na vazão de entrada do atuador foi aplicado a partir do ponto de operação para o ensaio do tanque 1, enquanto um degrau de -10% (+5% para -5%) foi utilizado no tanque 2. Para uma correta calibração do modelo, as seguintes equações com as variáveis em valores relativos foram consideradas:

$$\dot{q}_1(t) = \kappa_{v_1} u(t) - k_1 q_1(t), \quad (2.32a)$$

$$\dot{q}_2(t) = \kappa_{v_2} u(t) - k_2 q_2(t). \quad (2.32b)$$

Nas equações anteriores, os parâmetros κ_{v_1} e κ_{v_2} são utilizados para escalonar corretamente e tornar compatíveis a velocidade da bomba e os volumes nos tanques, que estão em valores-base diferentes. Os seguintes valores numéricos aproximados são então obtidos dos ensaios: $\kappa_{v_1} = 0,0190s^{-1}$, $\kappa_{v_2} = 0,0059s^{-1}$, $k_1 = 0,0104s^{-1}$ e $k_2 = 0,0042s^{-1}$. Adicionalmente, os tanques 1 e 2 tem parâmetros geométricos diferentes: a relação entre as secções transversais é $D_2 = \frac{27}{25}D_1$, e entre as alturas, $H_2 = 2H_1$; assim, um dado volume no tanque 2 deve ser escalonado por um fator $\frac{D_2^2 H_2}{D_1^2 H_1} \approx 2,3328$, para termos como referência o volume percentual do tanque 1. Os volumes nos tanques 1 e 2 são medidos, mas não há sensor no tanque 3. Então, a equação algébrica do balanço de massa, referida ao tanque 1 pode ser adotada:

$$q_1 + 2,3328q_2 + q_3 = 0. \quad (2.33)$$

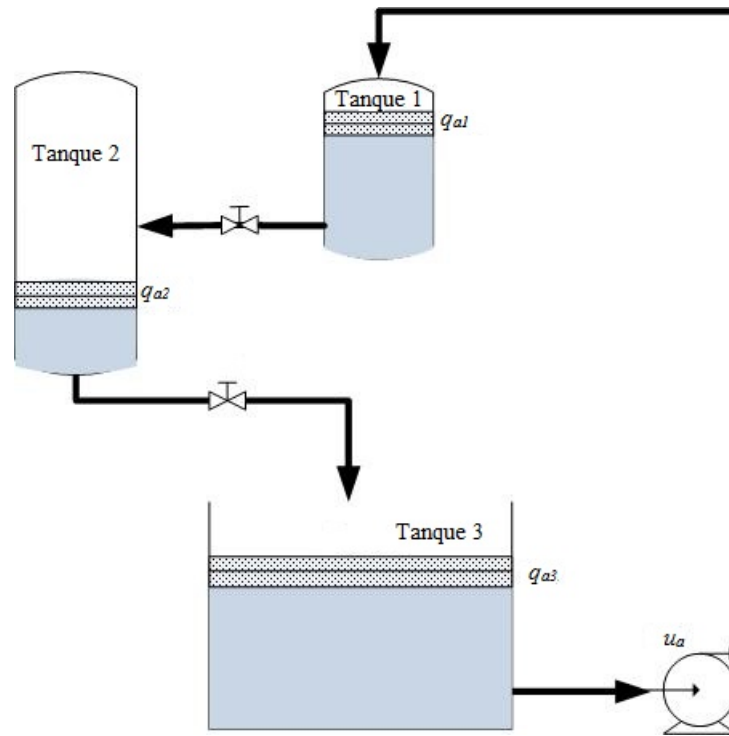


Figura 2.4: Sistema elaborado com três tanques.

Como comentário final, pode-se notar que ao acoplar a saída do tanque 1 para alimentar o tanque 2, é necessário escalonar o termo $k_1 q_1(t)$ pelo fator $\frac{\kappa_{v2}}{\kappa_{v1}}$. Agora, o modelo linearizado em variáveis relativas é dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0104 & 0 & 0 \\ 0,0033 & -0,0042 & 0 \\ 1 & 2,3328 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0190 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

Na Fig. 2.5 são mostradas as respostas experimental e simulada dos volumes dos tanques 1 e 2, a uma sequência de degraus de +5%, -10% em que se observa que o modelo é bastante consistente e pode ser utilizado no projeto dos controladores.

2.4.4 Resultados de I.C.R.S.

São mostrados a seguir resultados de simulação e experimentais utilizando i.c.r.s. Um período de amostragem $T_s = 3s$ foi utilizado. As restrições consideradas são $|q_1| \leq 9$, $|q_2| \leq 7$, $|q_3| \leq 25,33$, $|u| \leq 15$. O sistema na forma aumentada resulta em:

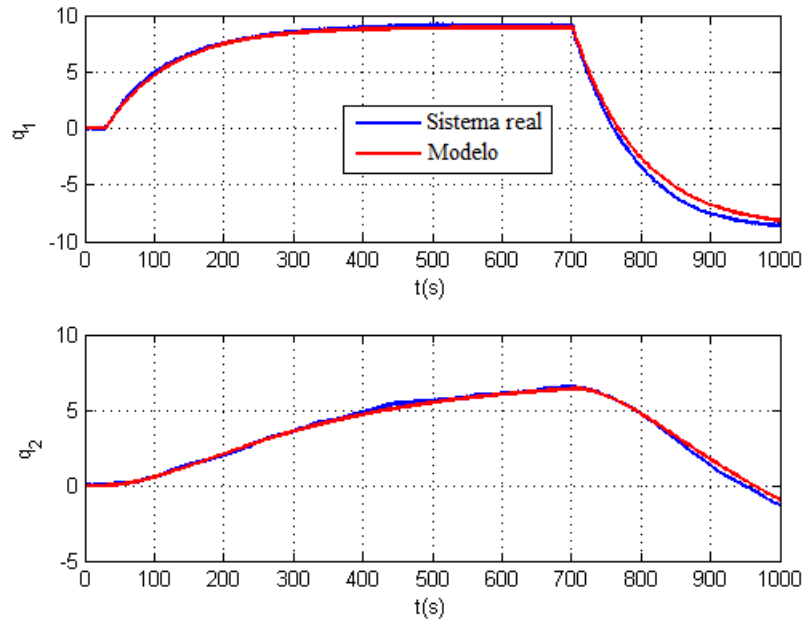


Figura 2.5: Respostas do sistema e do modelo identificado para uma sequência de degraus de +5%, -10%.

$$\begin{bmatrix} q_1(k+1) \\ q_2(k+2) \\ q_3(k+3) \\ u(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9692 & 0 & 0 & 0,0560 \\ 0,0095 & 0,9876 & 0 & 0,0003 \\ -0,9915 & 2,3038 & 0 & -0,0566 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ q_3(k) \\ u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u(k+1).$$

O poliedro que define as restrições não é invariante controlado, mas pode-se calcular o máximo invariante controlado contido neste utilizando, por exemplo a metodologia descrita em (20). Uma taxa de contração $\lambda = 0,95$ foi utilizada.

A condição de i.c.r.s. para o poliedro obtido foi verificada com a equação de saída:

$$\tilde{\mathbf{y}}(k) = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(k) \\ u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta(k) \\ 0 \end{bmatrix},$$

quando duas matrizes C foram consideradas: $C = I$ (medição completa dos estados, mas com ruído) e $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (apenas q_2 é medido), com ruídos, respectivamente, $|\eta(k)| \leq \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,667 \end{bmatrix}^T$ - a terceira entrada do vetor foi adotada com base na equação algébrica - e $|\eta(k)| \leq 0,2$. O poliedro resultou i.c.r.s. com taxas de contração $\lambda = 0,9536$ e $\lambda = 0,9884$, respectivamente para $C = I$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

O controle $\Delta u(k+1)$ foi calculado *online* a partir das PLs 2.23, 2.28 com as matrizes apropriadas do modelo aumentado.

A condição inicial $\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} -7,069 & -1,176 & 9,803 \end{bmatrix}^T$, $u(0) = 15$ foi adotada no experimento com medição de todos os estados.

Na Fig. 2.6 são mostradas a trajetória dos estados e a projeção do poliedro invariante sobre o espaço de estados. É possível observar a boa concordância entre os resultados simulados e experimentais, com total respeito às restrições. Na Fig. 2.7 é ilustrado o esforço de controle nesta situação.

É interessante destacar a tendência no esforço de controle. Tal tendência ilustra o fato de a solução da PL (2.28) ser uma função afim por partes de $\mathbf{y}(k)$, $\mathbf{u}(k)$.

O experimento com q_2 sendo a única medição foi feito com a condição inicial $\mathbf{q}(0) = \begin{bmatrix} -5,827 & -1,423 & 9,146 \end{bmatrix}^T$, $u(0) = 15$. Novamente, uma boa concordância entre os resultados de simulação e experimentais pode ser observada. Os resultados são mostrados nas Figuras 2.8 e 2.9.

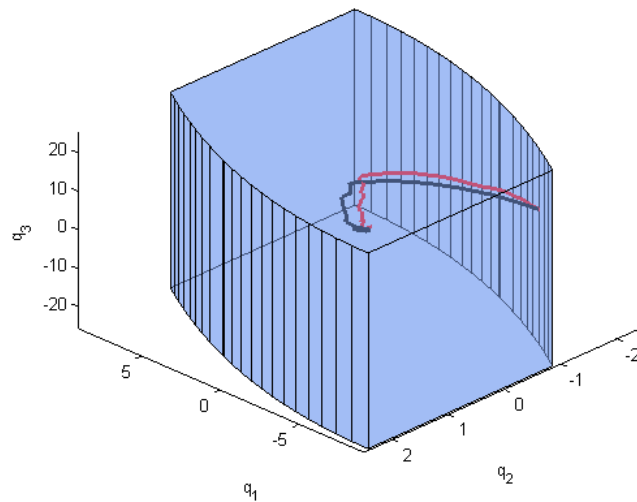


Figura 2.6: Poliedro com trajetória do estado para ilustração de invariância controlada com medição de todo o estado: simulado (preto) e experimental (vermelho).

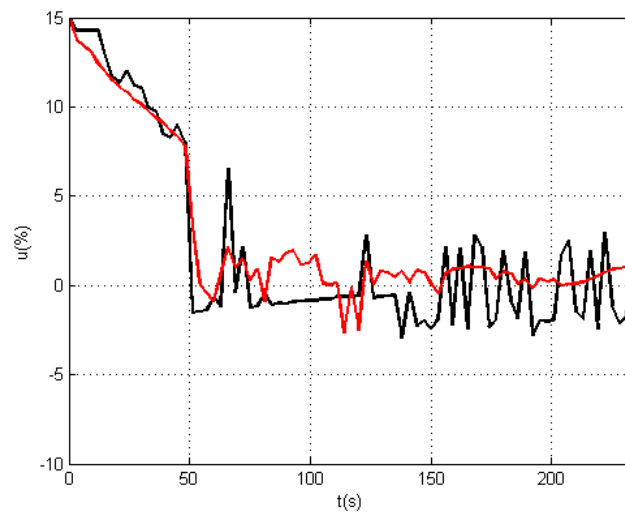


Figura 2.7: Esforço de controle com medição de todo o estado: simulado (preto) e experimental (vermelho).

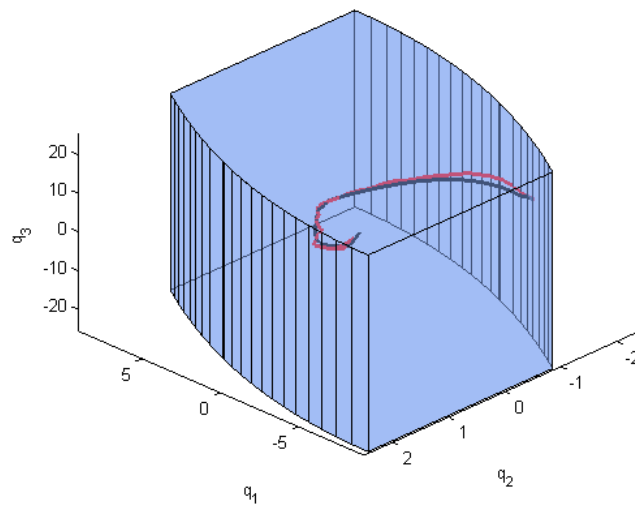


Figura 2.8: Poliedro com trajetória do estado para ilustração de invariância controlada com medição q_2 : simulado (preto) e experimental (vermelho).

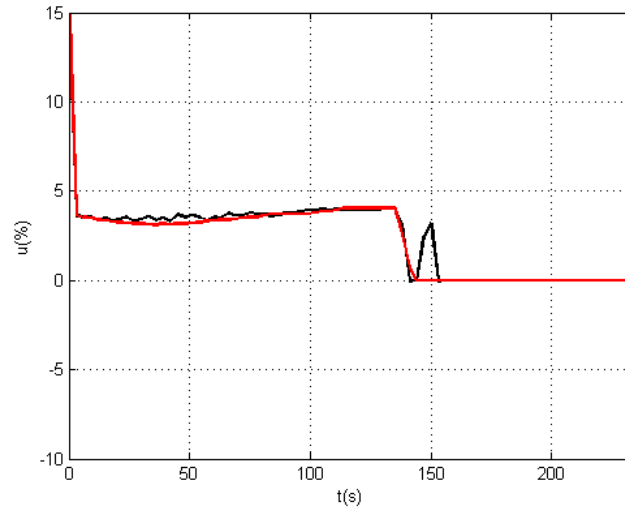


Figura 2.9: Esforço de controle com medição de q_2 : simulado (preto) e experimental (vermelho).

2.4.5 Comentários adicionais

Sistemas descritores regulares possuem restrições algébricas envolvendo as variáveis de estado, o distúrbio, quando existe, e o controle, dadas por:

$$0 = A_{21}\mathbf{x}_1(0) + A_{22}\mathbf{x}_2(0) + B_{22}\mathbf{u}(0) + B_{12}\mathbf{d}(0) \quad (2.34)$$

Desta forma, as condições iniciais devem ser consistentes com estas restrições, como já discutido na Seção 2.2. Os resultados apresentados sobre as condições iniciais admissíveis pode ser facilmente estendido ao caso de realimentação de saída. No sistema do estudo de caso, a equação algébrica depende apenas das variáveis de estado e não há distúrbio, e desta forma a inicialização do controle é livre.

Na estrutura de controle proposta, o cálculo da lei de controle $u(k+1)$ é feito com base na medição $y(k)$ e na controle $u(k)$ atuais. É importante comentar que se $u(k)$ não for considerado como uma saída, então o poliedro calculado deixa de ser i.c.r.s..

2.5 Regularização de sistemas descritores sob restrições

2.5.1 Preliminares

A definição de regularidade de sistemas descritores e suas implicações foram brevemente introduzidas no capítulo 1. Outra definição importante para sistemas de tempo discreto é a de causalidade, que é estreitamente relacionada à definição de imunidade a impulsão no caso contínuo. Um sistema descritor é dito admissível, isto é, representa o modelo

de algum sistema físico, se for causal. No caso de tempo contínuo, esta definição é controversa, e é um argumento aberto em duas vertentes, uma pela não admissibilidade e outra pela admissibilidade. Para sistemas lineares na forma padrão, uma interessante nota filosófica pode ser encontrada em (37) - ver seção 2.6, pp. 34-35. Nela, uma discussão sobre o operador derivada e sua realização (causalidade) é trazida do ponto de vista de sua aproximação, se para frente $(t + \Delta)$ ou para trás $(t - \Delta)$. Um problema de interesse crescente na literatura é a chamada regularização de sistemas descritores: dado um sistema descritor não-regular (ou não-causal), determinar em que condições existe uma lei de controle que torna o sistema causal e, por consequência, regular. O caso de tempo contínuo é largamente explorado, e diversas contribuições sobre condições necessárias e suficientes são bem estabelecidas, por exemplo, utilizando realimentação de estados (15),(38), realimentação de saída (39),(40),(41), realimentação da derivada dos estados (15) e realimentação PD (proporcional+derivativa) (42),(43). Para sistemas de tempo discreto, uma quantidade relativamente pequena de trabalhos aborda a regularização. Dentre alguns exemplos, destaca-se o uso de LMIs em (44) e (45). Quando o problema é associado simultaneamente com controle sob restrições, tem-se uma linha que representa a fronteira do conhecimento para esta classe de sistemas. Uma das raras contribuições a este problema pode ser vista em (26), que utiliza realimentação de estados linear, portanto, com soluções conservadoras, através do conceito de conjunto positivamente invariante.

Neste contexto, esta seção tem o objetivo de apresentar alguns estudos e observações a respeito da possibilidade da solução do problema de regularização com simultâneo respeito a restrições utilizando técnicas de invariância controlada. Será apresentado um sumário dos principais resultados para o problema da regularização por realimentação de estados e de saída, e a seguir, alguns exemplos serão tratados a partir da proposição de uma lei de controle mista com uma parcela linear no subestado algébrico um termo livre, possivelmente não-linear. Para estes estudos, será utilizada a estrutura aumentada proposta na seção 2.2.

2.5.2 Regularização

Sem perda de generalidade, considere o sistema descritor na forma:

$$E\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B_2\mathbf{u}(k), \quad (2.35)$$

com as matrizes na forma

$$E = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}.$$

Conforme mostrado no capítulo 1, este sistema descritor é regular se $\det(zE - A) \neq 0$. Adicionalmente, para que se possa atribuir um sentido físico ao sistema, ou seja, a possibilidade de realização, o sistema deve ser causal, isto é, $\text{grau}[\det(zE - A)] = \rho(E)$. Ainda no capítulo 1, foi discutida a importante propriedade que descreve que todo sistema descritor causal é também regular.

Sistemas não-regulares tem uma importância mais teórica, mas do ponto de vista prático, sistemas descritores não-causais podem ser obtidos, por exemplo, pela discretização de sistemas descritores de tempo contínuo impulsivos (46),(47). Neste contexto, o problema de regularização pode ser descrito como: dado um sistema descritor não-regular ou não-causal, determinar uma lei de controle, função do estado ou da saída, de forma que o sistema em malha fechada seja causal. É importante destacar que, a solução deste problema para o caso discreto implica na solução do problema do caso contínuo tornando o sistema livre de impulsão.

Seja o estado do sistema $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T(k) & \mathbf{x}_2^T(k) \end{bmatrix}^T$. A lei de controle:

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{F}_2 \mathbf{x}_2(k) + \mathbf{w}(k), \quad (2.36)$$

leva o sistema para a forma:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} + B_{21}\mathbf{F}_2 \\ A_{21} & A_{22} + B_{22}\mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} \mathbf{w}(k). \quad (2.37)$$

Claramente, o sistema é regularizável se e somente se $\exists \mathbf{F}_2 : \det(A_{22} + B_{22}\mathbf{F}_2) \neq 0$. Em (45), condições necessárias e suficientes via LMIs para regularização utilizando uma lei de controle nesta forma são estabelecidas, bem como a parametrização de todos os controladores regularizantes na forma da Eq. 2.36.

Uma vez que o sistema é regularizado, é possível aplicar as técnicas descritas na seção 2.2 para o projeto sob restrições por invariância controlada. Entretanto, o conjunto de ganhos regularizante é um domínio certamente infinito, o que leva a imaginar-se de que forma a escolha de um ganho específico dentro deste domínio afeta o cálculo do maior invariante controlado. Estabelecer uma correlação entre o ganho reregularizante $\mathbf{F}_2$ e as condições de invariância controlada de forma analítica é uma tarefa possivelmente insolúvel para um problema geral, mas algumas situações peculiares podem ser investigadas do ponto de vista numérico.

Seja o sistema da Eq. 2.36, com a adição de uma perturbação, não-regular ou não-causal. O sistema é, por hipótese, regularizável pela realimentação linear do subestado $\mathbf{x}_2$. Assim, a forma padrão aumentada resultante é dada por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \\ \mathbf{v}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}\bar{A}_{22}^{-1}A_{21} & 0 & B_{21} - A_{12}\bar{A}_{22}^{-1}B_{22} \\ -\bar{A}_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}\bar{A}_{22}^{-1}A_{21}) & 0 & -\bar{A}_{22}^{-1}[A_{21}(B_{21} - A_{12}\bar{A}_{22}^{-1}B_{22}) + B_{22}] \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \\ \mathbf{w}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\bar{A}_{22}^{-1}B_{22} \\ I \end{bmatrix} \Delta \mathbf{v}(k+1) + \begin{bmatrix} B_{11} - A_{12}\bar{A}_{22}^{-1}B_{12} & 0 \\ -\bar{A}_{22}^{-1}A_{21}(B_{11} - A_{12}\bar{A}_{22}^{-1}B_{12}) & -\bar{A}_{22}^{-1}B_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}(k),$$

onde $\bar{A}_{22} = A_{22} + B_{22}\mathbf{F}_2$. A próxima subseção é dedicada ao estudo de algumas situações de interesse.

2.5.3 Análise de exemplos específicos de regularização com restrições

Três exemplos são analisados, levando em conta: (i) restrições no vetor de estados e controle irrestrito (ilimitado); (ii) restrições nos estados e no controle.

Exemplo A

O primeiro sistema tem as matrizes a seguir:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A perturbação é limitada tal que $|d(k)| \leq \gamma$. As restrições no estado e no controle são:

$$\Omega_x = \{x : |G_x x| \leq \rho_x\}, \quad G_x = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \rho_x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$|u| \leq v.$$

A lei de controle que assegura a regularização é $u(k) = F_2 x_2(k) + w(k)$. Pode-se verificar que esta lei de controle regulariza o sistema para $F_2 \in \mathbb{R}^*$. É importante observar que, no presente exemplo e nos demais, para sistema aumentado, a restrição $|F_2 x_2 + v| \leq g$ deve ser acrescentada ao poliedro no espaço aumentado $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ w \end{bmatrix}$.

Variou-se então F_2 no intervalo $[-20, 20]$ a fim de verificar o efeito no maior poliedro invariante controlado. Os seguintes cenários foram simulados, para uma taxa de contração $\lambda = 0,95$:

- Considerando $v\infty$, ou seja, sistema sem restrição no controle, observa-se, para $\gamma \leq 0,56$, que a projeção do poliedro sobre o espaço de estados tem área S_x constante, conforme a figura 2.10.

- Considerando $v = 1$, observa-se que a área S_x da projeção do maior poliedro invariante controlado varia com o ganho regularizante, na forma de uma função com simetria par. Esta função apresenta também uma dependência com o a amplitude máxima da perturbação γ , conforme pode ser observado na figura 2.11

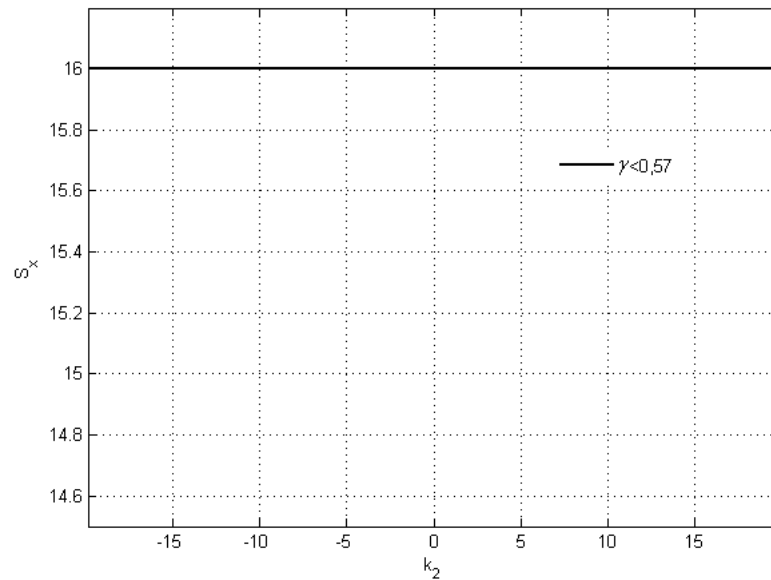


Figura 2.10: Área da projeção no espaço de estados do maior poliedro invariante para o exemplo A, sem restrição no sinal de controle .

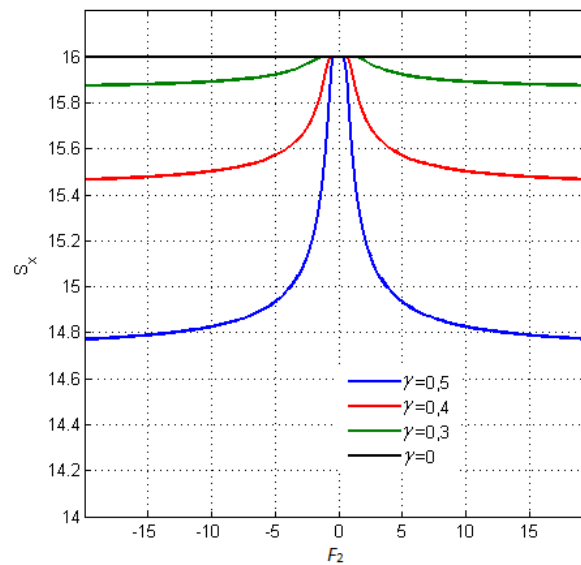


Figura 2.11: Área da projeção no espaço de estados do maior poliedro invariante para o exemplo A, com restrição no sinal de controle $|u| \leq 1$, e diversos valores de amplitude máxima da perturbação $d(k)$.

Exemplo B

Este exemplo é visto em (26), cujas matrizes são:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & -0,3 \\ 2,0 & 1,0 & 0,5 \\ -0,4 & -0,5 & 0,0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 1,0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Note que este sistema é regular de acordo com a definição 1.1, porém, é não causal, pois $A_{22} = 0$. Então, o conceito de regularização discutido no presente capítulo pode ser aplicado. As restrições no estado e no controle tem forma semelhante ao exemplo A, com:

$$G_x = \begin{bmatrix} 20 & 40 & 0 \\ -15 & 20 & 0 \\ 4 & 8 & 40 \end{bmatrix}, \quad \rho_x = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix},$$

$$|u| \leq v.$$

Novamente, é possível verificar que o sistema em malha fechada com o controle $u(k) = F_2 \mathbf{x}_2(k) + w(k)$ será regular para todo $F_2 \in \mathbb{R}^*$. A taxa de contração escolhida foi $\lambda = 0,8$. Variando-se então k_2 no intervalo $[-20, 20]$, obtém-se a família de curvas da figura 2.12, para variados limites na restrição v do sinal de controle. Novamente, observa-se um comportamento similar ao do exemplo A, onde o volume da projeção do maior poliedro invariante contido nas restrições é invariante no caso sem restrição no controle. Quando uma restrição é imposta, observa-se então uma dependência do tamanho da projeção com o ganho regularizante.

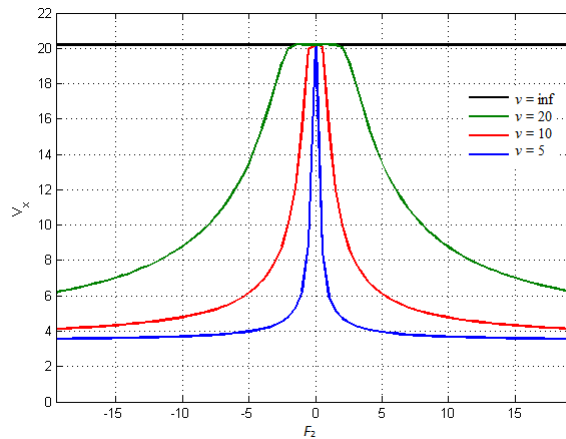


Figura 2.12: Volume da projeção no espaço de estados do maior poliedro invariante para o exemplo B, para diversos valores de amplitude máxima da controle $u(k)$.

Exemplo C

Este exemplo ilustra um caso multivariável, adaptado de (45). As matrizes do sistema são

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2,4 & 0,2 & 0,0 \\ -0,8 & 1,1 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A restrição no estado e no controle é definida pelas matrizes:

$$G_x = \begin{bmatrix} 0,1746 & -0,5833 & 0,1139 \\ -0,1867 & 2,1832 & 1,0668 \\ 0,725 & -0,1364 & 0,0593 \end{bmatrix}, \quad \rho_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$|u_j| \leq v.$$

Para uma taxa de contração $\lambda = 0,25$, foram simulados 200 ensaios gerando ganhos regularizantes aleatórios $\mathbf{k}_2 \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$, e o volume da projeção do maior poliedro invariante controlado foi calculado para cada ensaio. A figura 2.13 mostra o volume da projeção em função da norma do ganho regularizante, e é possível notar que, para o caso com restrições no controle, existe uma faixa para a norma do ganho para o qual a projeção é a maior possível.

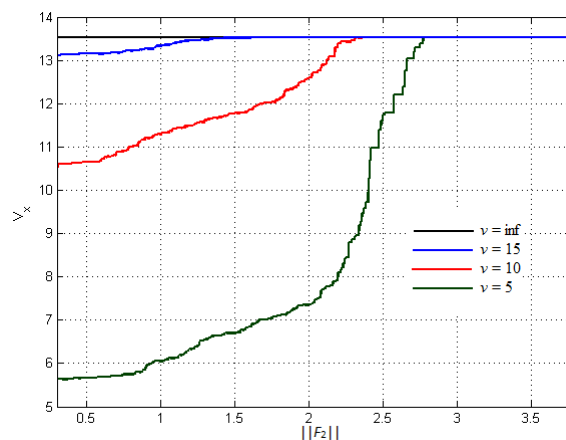


Figura 2.13: Volume da projeção no espaço de estados do maior poliedro invariante em função da norma do ganho regularizante para o exemplo C, para diversos valores de amplitude máxima da controle $\mathbf{u}(k)$.

2.6 Comentários conclusivos

Neste capítulo, a extensão de resultados de invariância controlada de poliedros foram estendidos para sistemas descritores singulares e causais. Tal extensão foi possível a partir da transformação das equações do sistema para uma forma padrão aumentada, na qual o controle é também tratado como variável de estado e o seu incremento um passo a frente passa ao papel de sinal de controle. Também foi feita a caracterização

da inicialização do sistema, que apresenta particularidades não presentes nos sistemas padrão. A nova forma aumentada foi então utilizada no projeto de controle sob restrições dadas por poliedros em um exemplo de simulação para realimentação de estados e em um estudo de caso experimental para realimentação de saída. Os resultados confirmaram o mérito da abordagem proposta.

Ainda, com base na nova forma padrão aumentada introduzida, foi apresentado um estudo preliminar do problema de regularização de sistemas descritores de tempo discreto, com simultâneo respeito às restrições no estado e no controle. Tal estudo foi feito por meio de simulações numéricas, tomando como parâmetros de observação o ganho regularizante (caso monovariável) ou sua norma (caso multivariável) e seu impacto no maior poliedro invariante controlado, por meio da observação da área ou volume de sua projeção no espaço de estados. Este é um indicador interessante, devido ao fato que o maior poliedro invariante controlado sempre está contido nas restrições, ou seja, projeções com o mesmo volume ou área certamente serão iguais, ao passo que uma diminuição deste indicador significa um poliedro menor. As observações feitas dão indícios de duas importantes possibilidades, porém de difícil prova analítica:

- a projeção do maior poliedro invariante no espaço de estados parece ser invariante com o ganho regularizante para sistemas com controle sem restrições.
- para problemas com restrições, existe uma faixa de ganho regularizante para a qual o maior poliedro invariante controlado tem o (hiper)volume de sua projeção no espaço de estados o maior possível.

Com base nestas observações, seria verossímil concluir que, para um dado problema específico, pode ser possível determinar o ganho regularizante ótimo com respeito ao (hiper)volume da projeção estudada.

Capítulo 3

Conjuntos Invariantes Condicionados e Estimação de Estados

3.1 Preliminares

O problema da observação da estado desempenha um papel central na teoria de controle de sistemas e aplicações. A técnica de realimentação de estado, muitas vezes é aplicável devido ao desenvolvimento de observadores de estado. A primeira grande contribuição sobre o tema pode ser vista nas obras de Luenberger (48),(49),(8) e tantos outros foram publicados, que ajudaram a consolidar o tema. No caso de sistemas descritores, a questão é um pouco mais difícil, devido ao fato de que a noção de observabilidade difere consideravelmente em relação aos sistemas na forma padrão. Importantes contribuições em estimação de estados e projeto de observadores podem ser encontradas em vários trabalhos (50),(51),(52),(53),(54). Por outro lado, o interesse de observadores que apresentam a capacidade de delimitar erro, lidando com os distúrbios na planta e ruído de medição, tem sido crescente nos últimos tempos. Algumas importantes contribuições sobre desacoplamento/atenuação de perturbações em observadores/filtros podem ser vistas em (55) e (56). O uso de invariância de conjuntos para a limitação de erro de observação foi introduzida e melhorada nos trabalhos (57),(58) e (59). Neste capítulo, a invariância condicionada de conjuntos poliédricos para os observadores com forma padrão no espaço de estados é estendida para os do tipo descritor. Um observador descritor é então proposto, com uma lei de injeção de saída adequada com um termo estático e outro atrasado, que impõe ao erro o confinamento a tal poliedro invariante. A idéia é semelhante à utilizada na seção anterior, onde a equação de estado foi re-escrita para uma forma padrão equivalente, com a finalidade de se projetar controle sob restrições baseado em conjuntos invariantes. Exemplos numéricos são apresentados para confirmar a eficácia do observador proposto. Um estudo de caso, utilizando a plataforma experimental descrita no capítulo

2, é apresentado de forma a consolidar melhor as contribuições apresentadas.

3.2 Observadores de estado com limitação de erro

3.2.1 O problema da estimação de estado

Seja o modelo de um sistema descritor linear invariante no tempo, sujeito a ruído de medição na saída, dado por:

$$\begin{aligned} E\mathbf{x}(k+1) &= A\mathbf{x}(k) + B_1\mathbf{d}(k) \\ y(k) &= Cx(k) + \eta(k), \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^p$ é um distúrbio, $y \in \mathbb{R}$ é a saída e $\eta \in \mathbb{R}$ é um ruído de medição. Sem perda de generalidade, considere-se tal sistema descritor causal com as seguintes matrizes:

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

O problema de obter um observador de estados (estimador) consiste em construir um sistema dinâmico, padrão ou descritor, de tal forma que, para o caso não perturbado ($\mathbf{d}(k) \equiv 0$ e $\eta(k) \equiv 0$) o vetor de estado estimado $\hat{\mathbf{x}}(k)$ resultante deste modelo obedeça $\lim_{k \rightarrow \infty} [\mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)] = 0$. Diversos trabalhos tratam deste problema, e algumas contribuições importantes podem ser encontradas na forma de observadores padrão ou descritores de tempo discreto (51), e ainda observadores descritores de tempo contínuo ou discreto do tipo PD (proporcional-derivativo) (52), e também observadores descritores proporcional-integral de tempo contínuo (53) e de tempo discreto (54).

3.2.2 Conjuntos invariantes condicionados

Nesta seção, trataremos do conceito de invariância condicionada e toda sua construção para sistemas lineares na forma padrão. Será visto em seguida que toda a teoria apresentada pode ser facilmente estendida ao observador descritor proposto, quando será provado que o mesmo tem uma forma padrão com algumas características adicionais. Todos os conceitos apresentados são baseados nos trabalhos (57),(58),(59), nos quais podem ser encontradas descrições mais detalhadas.

Seja o sistema linear, invariante no tempo, sujeito a ruído de medição e perturbações limitados em amplitude na forma padrão:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= A\mathbf{x}(k) + B_1\mathbf{d}(k) \\ y(k) &= C\mathbf{x}(k) + \eta(k),\end{aligned}\tag{3.3}$$

e um observador de ordem completa dado por:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(k+1) &= A\mathbf{x}(k) - \mathbf{v}(z(k)) \\ \hat{y}(k) &= C\hat{\mathbf{x}}(k),\end{aligned}\tag{3.4}$$

onde $\mathbf{v}(z(k))$ é uma lei de injeção de saída. Definindo-se o erro de estimação de estado como $\mathbf{e}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$ e $z(k) = y(k) - \hat{y}(k)$, tem-se a seguinte equação de estado para o erro:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(k+1) &= A\mathbf{e}(k) + B_1d(k) + \mathbf{v}(z(k)) \\ z(k) &= C\mathbf{e}(k) + \eta(k).\end{aligned}\tag{3.5}$$

O ponto de partida é a definição de *invariância condicionada* de um conjunto compacto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Considera-se que distúrbio $\mathbf{d}$ é suposto limitado e pertence ao conjunto compacto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^r$, e o ruído de medição ao conjunto $\mathcal{N} = \{\eta : |\eta| \leq \bar{\eta}\}$.

Definição 3.1. Dado $0 < \lambda < 1$, o conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é dito *invariante condicionado* λ -contrativo com relação ao sistema 3.5 se $\forall \mathbf{e}(k) \in \Omega$, $\exists \mathbf{v}(z(k))$ tal que $\mathbf{e}(k+1) \in \lambda\Omega$, $\forall \mathbf{d}(k) \in \mathcal{D}$, $\forall \eta(k) \in \mathcal{N}$.

Sendo Ω um conjunto compacto definido no espaço do erro de estimação, cujo interior contém a origem, tal conjunto induz o seguinte conjunto de *saídas admissíveis*:

$$\mathcal{Z}(\Omega, \bar{\eta}) = \{z : z = C\mathbf{e} + \eta, \mathbf{e} \in \Omega, |\eta| \leq \bar{\eta}\}.$$

O conjunto dos erros de estimação $\bar{\eta}$ -consistentes com cada $z \in \mathcal{Z}(\Omega, \bar{\eta})$ é dado por:

$$\mathcal{E}(z) = \{\mathbf{e} : C\mathbf{e} = z - \eta, |\eta| \leq \bar{\eta}\}.$$

Com estas considerações, a definição 3.1 pode ser enunciada como segue: um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é dito ser invariante condicionado λ -contrativo em relação ao sistema 3.5 se $\forall z \in \mathcal{Z}(\Omega, \bar{\eta})$, $\exists \mathbf{v} : A\mathbf{e} + B_1\mathbf{d} + \mathbf{v} \in \lambda\Omega$, $\forall \mathbf{d} \in \mathcal{D}$, $\forall \mathbf{e} \in \mathcal{E}(z) \cap \Omega$.

Sejam agora Ω e $\mathcal{D}$ poliedros convexos compactos cujo interior contém a origem:

$$\Omega = \{\mathbf{e} : G\mathbf{e} \leq \rho\}, \mathcal{D} = \{\mathbf{d} : V\mathbf{d} \leq \mu\}.$$

O conjunto de saídas admissíveis $\mathcal{Z}(\Omega, \bar{\eta})$ é um segmento de reta em $\mathbb{R}$ dado por:

$$\mathcal{Z}(\Omega, \bar{\eta}) = \{z : z = C\mathbf{e} + \eta, \mathbf{e} : G\mathbf{e} \leq \rho, \eta : |\eta| \leq \bar{\eta}\}.$$

Pode-se notar que Ω será invariante condicionado λ -contrativo se e somente se, $\forall z \in \mathcal{Z}(\Omega, \bar{\eta})$:

$$\exists \mathbf{v} : G(A\mathbf{e} + B_1\mathbf{d} + \mathbf{v}) \leq \lambda\rho, \forall \mathbf{e}, \eta : z = C\mathbf{e} + \eta, G\mathbf{e} \leq \rho, |\eta| \leq \bar{\eta}, \forall \mathbf{d} \in \mathcal{D}.$$

Serão resumidos agora os principais resultados sobre invariância condicionada de poliedros vistos em (57), (58) e (59). Considere os vetores $\phi(\Omega, z)$ e δ :

$$\begin{aligned} \phi_i(\Omega, z) &= \max_{\mathbf{e}, \eta} G_i A \mathbf{e} \\ \text{s.a. } G\mathbf{e} &\leq \rho, |\eta| \leq \bar{\eta}, C\mathbf{e} + \eta = z \Leftrightarrow G\mathbf{e} \leq \rho, |C\mathbf{e} - z| \leq \bar{\eta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_i &= \max_{\mathbf{d}} G_i B_1 \mathbf{d} \\ \text{s.a. } V\mathbf{d} &\leq \mu. \end{aligned}$$

Em termos destes vetores, a condição para invariância condicionada é dada por:

$$\exists \mathbf{v}(z) : \phi(\Omega, z) + G\mathbf{v}(z) \leq \lambda\rho - \delta.$$

Esta condição pode ser numericamente difícil de verificar, dado que a função $\phi(\Omega, z)$ é côncava e afim por partes. Esta dificuldade pode ser superada pela utilização da representação externa de Ω baseada em seus vértices $\mathbf{e}^j$, $j = 1, 2, \dots, n_v$. Para cada vértice, dois pontos de quebra de $\phi(\Omega, z)$ estão em: $z_-^j = C\mathbf{e}^j - \bar{\eta}$ e $z_+^j = C\mathbf{e}^j + \bar{\eta}$. Então, é possível definir o seguinte conjunto $\mathcal{Z}(\Omega, \bar{\eta}) = \{z : z = z_-^j, z = z_+^j, j = 1, \dots, n_v\}$ com cardinalidade n_z . O teorema a seguir fornece uma condição necessária e suficiente numericamente tratável para invariância condicionada de poliedros (59):

Teorema 3.1. *O poliedro $\Omega = \{G\mathbf{e} \leq \rho\}$ é invariante condicionado λ -contrativo se e somente se:*

$$\forall \ell = 1, \dots, n_z, \exists \mathbf{v}(z^\ell) : \phi(\Omega, z^\ell) + G\mathbf{v}(z^\ell) \leq \lambda\rho - \delta.$$

Este resultado vem do fato de que $\phi(\Omega, z)$ é afim no intervalo $[z^\ell, z^{\ell+1}]$. Desta forma, a verificação da condição pode ser feita através da solução dos seguintes problemas de programação linear:

$$\begin{aligned} \epsilon(z_\ell) &= \min_{\epsilon, \mathbf{v}} \epsilon \\ \text{s.a. } \phi(\Omega, z) + G\mathbf{v} &\leq \epsilon\rho - \delta, \ell = 1, 2, \dots, n_z. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Ω é então invariante condicionado se $\forall \ell, \epsilon(z^\ell) \leq \lambda$.

No caso em que os poliedros Ω e $\mathcal{D}$ são simétricos em relação a origem, o seguinte lema fornece uma condição necessária para invariância de Ω :

Lema 3.2. $\Omega = \{e : |Ge| \leq \rho\}$ é invariante λ -contrativo somente se:

$$\phi(\Omega, 0) \leq \lambda\rho - \delta. \quad (3.7)$$

Este lema, apesar de ser apenas uma condição necessária, é muito mais fácil de verificar do que a condição necessária e suficiente do teorema 2.1, devido ao fato de não haver necessidade de cálculos envolvendo os vértices. Ademais, a mesma torna-se também suficiente quando $l = n - 1$ (o número de saídas é igual ao número de estados menos 1) (59).

Agora, o interesse é na construção de um poliedro invariante condicionado que contenha o conjunto dos erros iniciais possíveis Ω , o qual assume-se ser um poliedro convexo compacto 0-simétrico. Idealmente, tal poliedro deve ser o menor possível de forma a impor o máximo de limitação sobre o erro de estimação. O conjunto desejado pode ser calculado pelo uso judicioso do seguinte algoritmo:

Algoritmo 1: $X^{k+1} = \text{conv}[\lambda^{-1}R(X^k) \cup X^k]$, com: $R(X^k) = A(\mathcal{E}(0) \cap X^k) + B_1\mathcal{V}$, $X^0 = \Omega$.

Comentário 1: Em (59) é mostrado que o conjunto $X^\infty(\Omega, \lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} X^k$ é o menor conjunto simétrico convexo que contém Ω e satisfaz a condição necessária $A(\mathcal{E}(0) \cap X) + B_1\mathcal{V} \subset \lambda X$ (Lema 2.1). Tal conjunto é então um candidato a ser o menor conjunto invariante condicionado que contém Ω . Além disso, para o caso particular em que o número de saídas é $l = n - 1$ e que o ruído de medição está ausente, o conjunto $X^\infty(\Omega, \lambda)$ é de fato o menor invariante condicionado que contém Ω .

No caso geral, se $X^\infty(\Omega, \lambda)$ não é invariante, um outro algoritmo (Algoritmo 2 em (58), (59) e (60)) pode ser utilizado, cuja saída é um poliedro pequeno, não necessariamente o menor. O menor invariante pode até não existir, em geral.

Com um poliedro invariante condicionado à disposição, deve-se calcular uma lei de injeção de saída que assegure a limitação do erro de estimação, e algumas possibilidades são:

1. A solução *online*, em cada passo, do problema de programação linear:

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{v}(k)} \varepsilon \\ \text{s.a. } & \phi(\Omega, z(k)) + Gv(k) \leq \varepsilon\rho - \delta \end{aligned}$$

2. Uma lei de injeção de saída explícita, variante no tempo e afim por partes, na forma:

$$\mathbf{v}(z(k), k) = L^j z(k) + \lambda^k w^j$$

onde $L^j \in \mathbb{R}^n$ and $w^j \in \mathbb{R}^n$ são constantes para $z^j \leq z(k) \leq z^{j+1}$, com $z^j \in \mathcal{Z}(\Omega)$.

Comentário 2: Para um dado conjunto invariante condicionado Ω , devido a presença de distúrbio e ruído de medição, apenas $\mathbf{e}(k) \in \Omega$ é assegurado $\forall k$. Entretanto, é possível fazer o erro convergir para um conjunto menor $\beta^{-1}\Omega$, $\beta \geq 1$, pelo ajuste adequado na lei de controle explícita. Detalhes adicionais podem ser encontrados em (59).

3.2.3 O observador proposto

Os resultados desta subseção podem ser vistos em (61). Seja o observador descritor de ordem completa para o sistema 3.1 na forma:

$$\begin{aligned} E\hat{\mathbf{x}}(k+1) &= A\hat{\mathbf{x}}(k) - E\mathbf{v}(z(k)) - P\mathbf{v}(z(k-1)) \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k), \end{aligned} \quad (3.8)$$

em que $\mathbf{v}(z)$ é uma lei de injeção de saída adequada, com $z = y - \hat{y}$, e:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Como já afirmado, apenas sistemas causais serão considerados. Uma condição necessária e suficiente para tal é que $\det(A_{22}) \neq 0$. A equação do erro é então dada por:

$$\begin{aligned} E\mathbf{e}(k+1) &= A\mathbf{e}(k) + B_1\mathbf{d}(k) + E\mathbf{v}(z(k)) + P\mathbf{v}(z(k-1)) \\ z(k) &= C\mathbf{e}(k) + \eta(k). \end{aligned} \quad (3.9)$$

O erro de observação e a injeção de saída podem ser particionados como:

$$\mathbf{e}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1(k) \\ \mathbf{e}_2(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(z(k)) \\ \mathbf{v}_2(z(k)) \end{bmatrix}.$$

Desta forma, pode-se notar que:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1(k+1) &= A_{11}\mathbf{e}_1(k) + A_{12}\mathbf{e}_2(k) + B_{11}\mathbf{d}(k) + \mathbf{v}_1(z(k)) + A_{12}\mathbf{v}_2(z(k-1)) \\ 0 &= A_{21}\mathbf{e}_1(k) + A_{22}\mathbf{e}_2(k) + B_{12}\mathbf{d}(k) + A_{22}\mathbf{v}_2(z(k-1)). \end{aligned}$$

Pela substituição de $\mathbf{e}_2(k)$ obtido a partir da equação algébrica, e então avançando o mesmo um passo, obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1(k+1) \\ \mathbf{e}_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1(k) \\ \mathbf{e}_2(k) \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}B_{12} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(B_{12} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) & -A_{22}^{-1}B_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}(k) \\ \mathbf{d}(k+1) \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1(z(k)) \\ \mathbf{v}_2(z(k)) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Considera-se agora a matriz inversível $Q = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix}$, definindo-se:

$$\varphi(z(k)) = Qv(z(k)),$$

a equação do erro pode ser posta em uma forma compacta padrão no espaço de estados:

$$\mathbf{e}(k+1) = \tilde{A}\mathbf{e}(k) + \tilde{B}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{d}(k) \\ \mathbf{d}(k+1) \end{bmatrix} + \varphi(z(k)), \quad (3.10)$$

em que:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_1 = \begin{bmatrix} B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}B_{12} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}B_{12}) & -A_{22}^{-1}B_{12} \end{bmatrix}.$$

Toda a construção anterior poder ser revertida, visto que cada um dos passos dados admite um caminho inverso.

Tendo sido então obtida a forma padrão para o observador proposto, nota-se que a Eq. 3.10 é absolutamente similar à Eq. 3.5; desta forma, todos os conceitos apresentados na seção anterior podem ser aplicados em relação à Eq. 3.10 para caracterização de invariância condicionada, notando-se que o distúrbio passa a ser dado pelo novo vetor $\bar{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_i \\ \mathbf{d}_{i+1} \\ \mu \\ \mu \end{bmatrix} \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, conjunto compacto que no caso poliédrico é dado por $\begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \leq \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \end{bmatrix}$.

Um caso especial que merece destaque é aquele em que a lei de injeção de saída obtida resulta em um ganho estático L . Tal lei, para o observador descritor, quando substituída em 3.9 e levada ao domínio da frequência, fornece uma estrutura em malha fechada caracterizada pelo feixe não-linear:

$$\Gamma(z) = zE - (A + EQ^{-1}LC) - z^{-1}PQ^{-1}LC.$$

As raízes z deste feixe, que podem ser facilmente determinadas pelo feixe quadrático auxiliar $z^2E - z(A + EQ^{-1}LC) - PQ^{-1}LC$ caracterizam a dinâmica em malha fechada do observador no caso linear. Tal feixe quadrático possui $2n - \rho(E)$ autovalores finitos (62).

3.3 Erro inicial admissível

Um aspecto importante que diz respeito ao observador com limitação de erro é a sua inicialização. O estado inicial do sistema é desconhecido, mas uma hipótese razoável é que o mesmo pertença a uma dada região, caracterizada nesta seção.

Seja o estado inicial estimado $\hat{\mathbf{x}}(0) = 0$, e o estado inicial verdadeiro pertencente a uma região que contém a origem. Pode ser facilmente demonstrado pela decomposição rápida-lenta que o subestado $\mathbf{x}_1$ não é afetado por saltos $k = 0$ (13),(25). O subestado $\mathbf{x}_2$ deve ser consistente com a equação algébrica:

$$0 = A_{21}\mathbf{x}_1(0) + A_{22}\mathbf{x}_2(0^+) + B_{12}\mathbf{d}(0).$$

Desta forma, um salto finito pode ocorrer se o subestado inicial $\mathbf{x}_2(0)$ não é consistente com a equação algébrica. Seja o subestado inicial antes do salto dado por $\mathbf{x}_2(0^-)$ e após o salto $\mathbf{x}_2(0^+)$. Dada a natureza desconhecida, porém limitada do distúrbio d uma caracterização do conjunto que contém o estado inicial após a ocorrência do salto é necessária. Seja o seguinte poliedro compacto que caracteriza o estado inicial antes do salto:

$$\Upsilon = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ \mathbf{x}_2(0^-) \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ \mathbf{x}_2(0^-) \end{bmatrix} \leq \rho \right\}. \quad (3.11)$$

Conforme já pontuado no Capítulo 2, é possível calcular uma matriz de projeção não-negativa T_1 utilizando o método visto em (31), de forma a eliminar G_2 , i.e., $T_1 G_2 = 0$. Isto implica na condição $T_1 G_1 x_1(0) \leq T_1 \rho$, que representa a projeção de Υ sobre o espaço definido por x_1 . Agora, agregando esta condição à equação algébrica e ao poliedro do distúrbio obtém-se o conjunto a seguir:

$$\Lambda = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ \mathbf{x}_2(0^+) \end{bmatrix} : \exists \mathbf{d}(0) : \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} & B_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} & -B_{12} \\ T_1 G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ \mathbf{x}_2(0^+) \\ \mathbf{d}(0) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_1 \rho \\ \mu \end{bmatrix} \right\}.$$

Novamente, eliminando o distúrbio d por meio de uma matriz de projeção positiva T_2 , obtém-se o poliedro final para o estado após a ocorrência do salto:

$$\bar{\Lambda} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ \mathbf{x}_2(0^+) \end{bmatrix} : T_2 \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ -A_{21} & -A_{22} \\ T_1 G_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ \mathbf{x}_2(0^+) \end{bmatrix} \leq T_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_1 \rho \\ \mu \end{bmatrix} \right\}$$

Lembrando que o observador é inicializado com zeros, o erro inicial pertence a este poliedro. Assim, com o propósito de limitar o erro de observação, um conjunto invariante condicionado tão pequeno quanto possível que contém este conjunto deve ser calculado.

3.4 Exemplos numéricos

Esta seção apresenta dois exemplos de forma a ilustrar os conceitos discutidos nas seções anteriores.

Primeiro, seja o sistema descritor com as seguintes matrizes:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1,1153 & 0,0399 \\ -0,5500 & -2,4828 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1,1465 \\ 1,1909 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 1,1892 \\ -0,0376 \end{bmatrix}.$$

Além disto, são dados um distúrbio aleatório e limitado como $|d| \leq 0,2$ e um ruído de medição tal que $|\eta| \leq 0,2$. Considerando-se antes do salto o seguinte poliedro inicial simétrico $|Qe| \leq \rho$, com $Q = I_2$, $\rho = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 \end{bmatrix}^T$, o procedimento da seção 3 leva ao seguinte poliedro inicial após o salto:

$$G_f e \leq \rho_f, \text{ com } G_f = \begin{bmatrix} 0,2510 & 1,1332 \\ -0,2510 & -1,1332 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \rho_f = \begin{bmatrix} 0,1087 \\ 0,1087 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{bmatrix}$$

Tal poliedro não é invariante, assim o menor invariante possível que o contém foi calculado com base no algoritmo da seção anterior, para uma taxa de contração $\lambda = 0,9$. Além disso, uma lei de injeção de saída linear pode ser calculado neste exemplo, cujo ganho é $L = \begin{bmatrix} 0,9449 \\ -0,2093 \end{bmatrix}$.

Na Fig. 3.1 são ilustrados os poliedros deste exemplo e a trajetória do erro para um erro inicial contido no poliedro após o salto. Alguns comentários interessantes sobre o exemplo são os seguintes. A análise da estrutura do observador em malha fechada tanto na forma padrão como na forma de sistema descritor conduz à mesma conclusão; pode-se notar que os autovalores da matriz de malha fechada $\tilde{A} + LC$ são alocados em um duplo autovalor $\lambda_c = 0$, então a dinâmica do erro é do tipo *deadbeat*, o que torna o observador o mais rápido possível na ausência de distúrbios e ruído de medição. De outra maneira, se a análise em malha fechada é conduzida para o sistema no formato descritor, é possível confirmar então que o feixe de malha fechada $zE - (A + EQ^{-1}LC) - z^{-1}PQ^{-1}LC$ apresenta uma solução dupla $z = 0$, o que é totalmente consistente com a análise feita na forma padrão.

Como um segundo exemplo, seja o sistema dado em (25),(29), adaptado para $u(k) = 0$. Uma saída é acrescentada e as matrizes do sistema são:

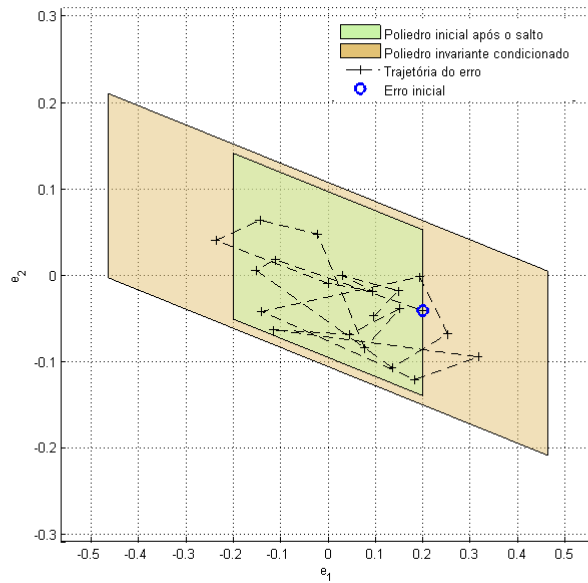


Figura 3.1: Poliedros do exemplo 1, junto com uma trajetória de erro.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1,2 & 0 & 0 \\ -1 & -0,7 & -1 \\ 2 & -0,5 & -1,2 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Severas perturbações e ruídos de saída são aplicados, com $|d| \leq 0,5$ and $|\eta| \leq 0,5$. Como no exemplo anterior, um poliedro inicial simétrico antes do salto é considerado, com $Q = I_3$, $\rho = [0,5 \ 0,5 \ 0,5]^T$. O poliedro obtido para após o salto é dado por:

$$G_f \mathbf{e} \leq \rho_f, G_f = \begin{bmatrix} 1 & -0,25 & -0,6 \\ -1 & 0,25 & 0,6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \rho_f = \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}.$$

Considerando uma taxa de contração $\lambda = 0,9$, o poliedro invariante é mostrado na Fig. 3.2, juntamente com o poliedro inicial, que não é invariante. Um lei de injeção de saída afim por partes, variante no tempo foi obtida neste caso, dada por:

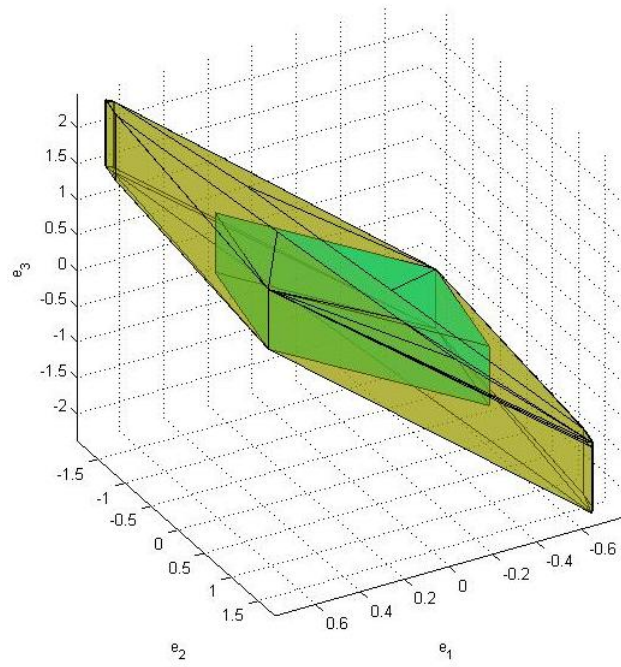


Figura 3.2: Poliedros do exemplo 2.

$$\mathbf{v}(z(k), k) = \begin{cases} \begin{bmatrix} -0,0640 \\ 0,0376 \\ -0,1240 \end{bmatrix} z(k) + (0,9)^k \begin{bmatrix} -0,0022 \\ -0,0070 \\ 0,0014 \end{bmatrix}, & 0 \leq |y| < 2,6580 \\ \begin{bmatrix} -0,1764 \\ 0,2713 \\ -0,4071 \end{bmatrix} z(k) + (0,9)^k \begin{bmatrix} -0,2073 \\ 0,5363 \\ -0,5565 \end{bmatrix}, & 2,6508 \leq |y| \leq 5,3160. \end{cases}$$

Na Fig. 3.3, são mostrados o poliedro invariante e uma trajetória de erro iniciada no poliedro admissível, e é possível ver que o erro não escapa do interior do mesmo.

3.5 Projeto de observador na plataforma experimental de nível

Seja o sistema descritor para o modelo da plataforma de nível, considerando $u(k) = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(k+1) \\ q_2(k+1) \\ q_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9692 & 0 & 0 \\ 0,0095 & 9867 & 0 \\ 1 & 2,3328 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ q_3(k) \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

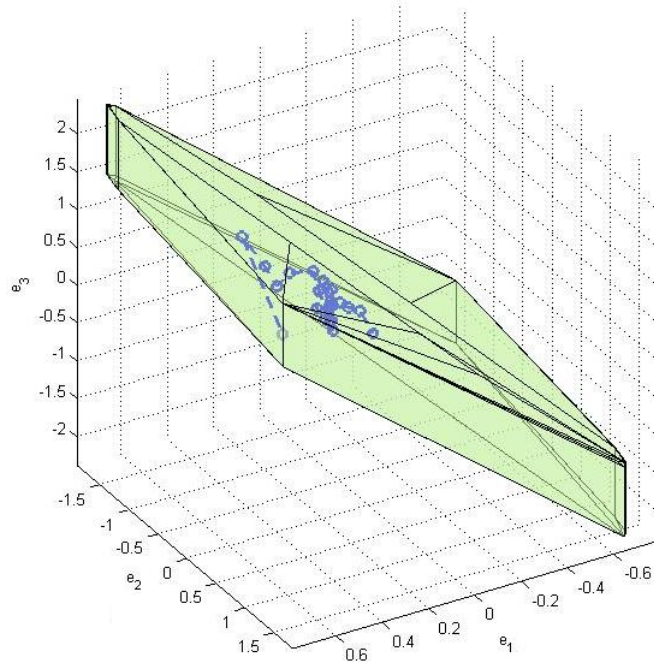


Figura 3.3: Poliedro invariante do exemplo 2 junto com uma trajetória do erro.

Considere a equação de saída como $y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ q_3(k) \end{bmatrix} + \eta(k)$, $|\eta(k)| \leq 0,2$.

Um intervalo de confiança para o erro inicial dado por $|e_1| \leq 3$; $|e_2| \leq 3$ and $|e_3| \leq |9,9984|$ foi utilizado para determinação de um (tão pequeno quanto possível) poliedro invariante condicionado, com taxa de contração $\lambda = 0,91$. O conjunto de erros iniciais admissíveis não é modificado, dada a ausência de distúrbios nas equações de estado. Uma lei de injeção

de saída linear foi obtida para o poliedro invariante, dada pelo ganho $L = \begin{bmatrix} -5,8857 \\ -0,9895 \\ 8,194 \end{bmatrix}$.

Na Fig. 3.4 são mostrados os poliedros inicial e invariante condicionado, juntamente com

uma trajetória do erro de estimação iniciado em $e(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -9,9984 \end{bmatrix}$, sendo que a terceira

entrada deste vetor foi calculada com o uso da equação algébrica. A linha vermelha é a resposta do observador para uma lei *online*, enquanto a preta é para a lei linear. É possível notar que, em ambos os casos, a trajetória do erro não abandona o poliedro invariante condicionado. Além disso, pode-se notar que para a lei *online*, não há o pico no segundo passo que é notado no caso da lei linear; isto é devido a característica da lei *online*, de minimizar a contração a cada passo. Na Fig. 3.5 é mostrada a convergência do erro no domínio do tempo.

É importante comentar que o tempo médio referente ao esforço computacional para o

cálculo da lei *online* é de cerca de 10 ms, ou seja, menos de 1% do período de amostragem (3s). Também, cada linha do vetor $\phi(\Omega, z)$ é calculada em cerca de $70\mu s$, enquanto o cálculo de $\varphi(z)$ demanda aproximadamente $140\mu s$. A conclusão é que, mesmo para um poliedro razoavelmente complexo como o obtido (22 faces), a lei *online* é perfeitamente factível para sistemas de dinâmica lenta como o do exemplo.

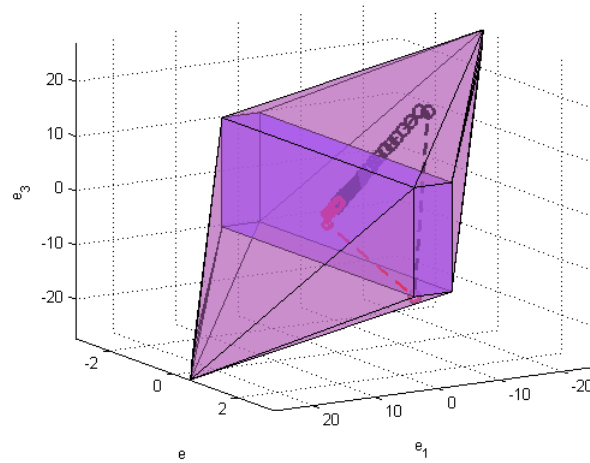


Figura 3.4: Poliedro do estudo de caso e trajetória do erro com ganho linear (preto) e injeção *on line* (vermelho).

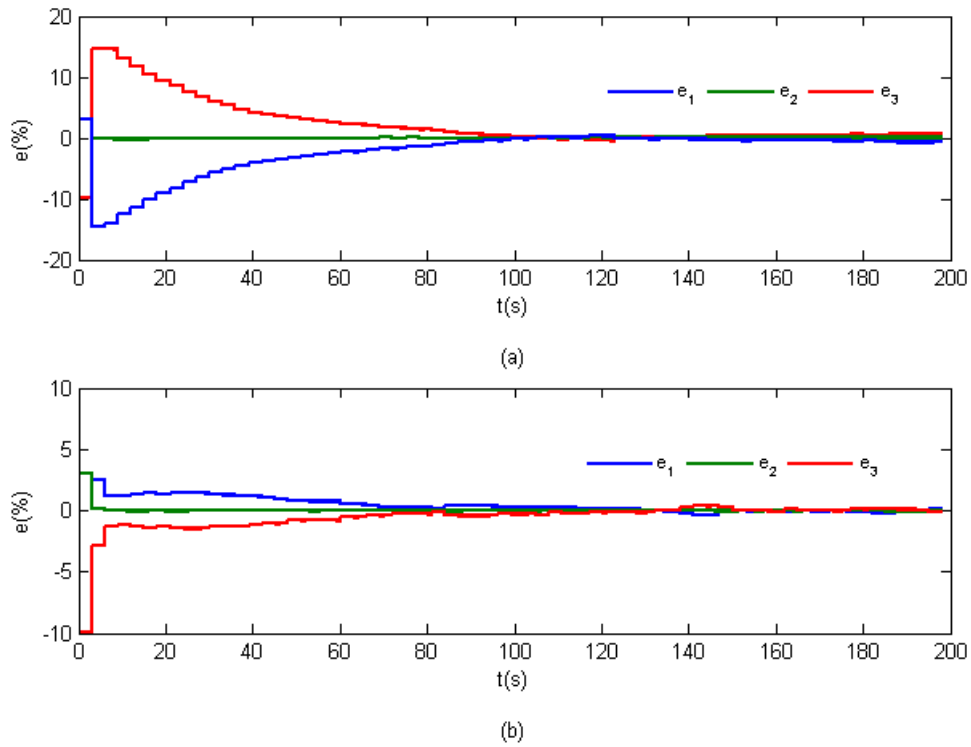


Figura 3.5: Erro de estimação no domínio do tempo (a) ganho linear (b) injeção *online*.

3.6 Comentários conclusivos

Este capítulo apresentou a extensão de resultados de invariância condicionada presentes na literatura para sistemas padrão aos sistemas descritores causais, no contexto da estimação de estados com limitação de erro. Tal extensão foi possível devido a introdução de uma nova estrutura de observador de estado, com uma lei de injeção de saída mista apresentando um termo estático e um atrasado em uma amostra. Esta estrutura permite reescrever a dinâmica do erro numa forma padrão, e assim os resultados de invariância condicionada podem ser estendidos para o projeto de observadores com limitação de erro. Os resultados de uma série de simulações e também de um estudo de caso experimental permitem concluir a viabilidade da técnica proposta, através da validação da nova estrutura de observador.

Capítulo 4

Invariância controlada por realimentação de saída: realimentação dinâmica

4.1 Preliminares

No Capítulo 2, o conceito de invariância controlada por realimentação de saída (I.C.R.S.) foi introduzido e as condições deste tipo de invariância foram discutidas a partir de um sumário dos resultados descritos em (30). A técnica de I.C.R.S. pôde então ser aplicada a sistemas descritores a partir da forma padrão aumentada 2.5. Entretanto, conforme já pontuado, a construção de poliedros I.C.R.S. ainda é um resultado aberto na literatura. Em (30), a construção de um compensador dinâmico de mesma ordem do sistema, cujo estado é uma estimativa do estado original, oferece a possibilidade de construir um poliedro candidato a I.C.R.S. no espaço aumentado sistema + compensador, tendo sido demonstrado neste trabalho que tal poliedro atende uma condição necessária para ser um I.C.R.S.. Esta condição necessária é descrita pelo seguinte teorema:

Teorema 4.1. (30) *Um conjunto não-vazio, fechado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é I.C.R.S. com relação ao sistema:*

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(k+1) &= A\mathbf{x}(k) + B_2\mathbf{u}(k) + B_1\mathbf{d}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= C\mathbf{x}(k) + \eta(k)\end{aligned}$$

somente se for simultaneamente invariante controlado e invariante condicionado em relação a este sistema.

Neste Capítulo, a aplicação de compensadores dinâmicos na construção de poliedros candidatos a I.C.R.S. para sistemas descritores causais será apresentada. A partir dos

poliedros invariante controlado (Capítulo 2) e invariante condicionado (Capítulo 3), é possível obter um poliedro com estas características. Será mostrado que, diferente de sistemas na forma padrão, o conhecimento da entrada, que é uma das saídas do sistema aumentado (sem ruído de medição) dispensa a necessidade de se obter um compensador de mesma ordem que o sistema aumentado, sendo bastante um compensador de mesma ordem que o sistema original.

4.2 Construção de um poliedro simultaneamente invariante controlado e condicionado

Conforme descrição anterior, um poliedro simultaneamente invariante controlado e condicionado é um candidato a I.C.R.S., e se for possível construir um poliedro com estas características, as condições necessárias e suficientes descritas na seção 2.3 podem ser aplicadas para verificar I.C.R.S.. Aliando-se a este fato a ausência de um método para o cálculo de um poliedro I.C.R.S. por realimentação estática de saída, será proposto em seguida um compensador dinâmico de mesma ordem do sistema, a partir do qual pode-se obter um poliedro com as características desejadas da condição necessária para I.C.R.S.

Considere-se então o sistema na forma aumentada 2.5, agregado à equação de saída:

$$\tilde{\mathbf{y}}(k) = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta(k) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

e o compensador dinâmico:

$$\mathbf{z}_x(k+1) = \mathbf{v}_x(\mathbf{z}_x(k), \tilde{\mathbf{y}}(k)) \quad (4.2)$$

$$\Delta \mathbf{u}(k+1) = \kappa(\mathbf{z}_x(k), \tilde{\mathbf{y}}(k)). \quad (4.3)$$

Incorporando-se o vetor de estado do compensador ao sistema na forma $\xi(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{z}_x(k) \end{bmatrix}$, tem-se a seguinte formulação:

$$\xi(k+1) = \mathfrak{A}\xi(k) + \mathfrak{B}_2\omega(k) + \mathfrak{B}_1\bar{\mathbf{d}}(k) \quad (4.4)$$

$$\zeta(k) = \mathfrak{C}\xi(k) + \Upsilon(k) \quad (4.5)$$

com:

$$\mathfrak{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & (\tilde{B}_2 + \tilde{B}_3) & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{B}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{B}_2 = \begin{bmatrix} \tilde{B}_3 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{C} = \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$\zeta(k) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} \\ \mathbf{z}_x \end{bmatrix}, \quad \omega(k) = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k+1) \\ \mathbf{v}_x(k) \end{bmatrix}, \quad \Upsilon(k) = \begin{bmatrix} \eta(k) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tomando-se então um par de poliedros:

$$\Omega_c = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} : G_c \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \leq \rho_c \right\},$$

invariante controlado em relação ao sistema 2.5-4.1, determinado pelas técnicas descritas no Capítulo 2, e

$$\Omega_o = \{\mathbf{x} : G_o \mathbf{x} \leq \rho_o\},$$

invariante condicionado em relação ao sistema:

$$\mathbf{x}(k+1) = \tilde{A}\mathbf{x}(k) + \tilde{B}_2\mathbf{u}(k) + \tilde{B}_3\mathbf{u}(k+1) + \tilde{B}_1\bar{\mathbf{d}}(k) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + \eta(k) \quad (4.7)$$

em que $\bar{\mathbf{d}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{d}(k) \\ \mathbf{d}(k+1) \end{bmatrix}$, o que significa:

$$\forall \mathbf{x}(k) : G_o \mathbf{x}(k) \leq \rho_o, \quad \exists \mathbf{v}(\mathbf{y}) : G_o \left\{ \tilde{A}\mathbf{x}(k) + v + \tilde{B}_1\bar{\mathbf{d}}(k) \right\} \leq \rho_o, \quad \forall \bar{\mathbf{d}}(k) : \mathcal{V}\bar{\mathbf{d}}(k) \leq \bar{\mu}, \text{ e}$$

$$C\mathbf{x}(k) = \mathbf{y} - \eta, \quad |\eta| \leq \bar{\eta}.$$

o qual pode ser construído a partir das técnicas descritas no Capítulo 3; tendo por hipótese a propriedade $\Omega_o \subset \Omega_{c \cap x}$, onde o subscrito $\cap x$ denota a intersecção do poliedro com o espaço de estados, a seguinte proposição é estabelecida:

Proposição 4.2. *O poliedro:*

$$\Phi = \left\{ \xi : \begin{bmatrix} G_c & 0 \\ [G_o & 0] & -G_o \end{bmatrix} \xi \leq \begin{bmatrix} \rho_c \\ \rho_o \end{bmatrix} \right\}$$

é simultaneamente invariante controlado e invariante condicionado com relação ao sistema (4.4, 4.5).

Demonstração. Primeiramente, será provado que Φ é invariante controlado. Ou seja,

$$\exists \omega : \begin{bmatrix} G_c & 0 \\ [G_o & 0] & -G_o \end{bmatrix} \xi(k+1) \leq \begin{bmatrix} \rho_c \\ \rho_o \end{bmatrix}, \quad \forall \xi(k) : \begin{bmatrix} G_c & 0 \\ [G_o & 0] & -G_o \end{bmatrix} \xi(k) \leq \begin{bmatrix} \rho_c \\ \rho_o \end{bmatrix},$$

$$\forall \bar{\mathbf{d}}(k) : \mathcal{V}\bar{\mathbf{d}}(k) \leq \bar{\mu}$$

Sendo Ω_c invariante controlado, então

$$\begin{aligned} \exists \Delta \mathbf{u}(k+1) : G_c \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{u}(k+1) \end{bmatrix} &\leq \lambda_c \rho_c, \\ \forall \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} : G_c \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} &\leq \rho_c, \quad \forall \bar{\mathbf{d}}(k) : \mathcal{V} \bar{\mathbf{d}}(k) \leq \bar{\mu}. \end{aligned}$$

Na mesma linha, Ω_o sendo invariante condicionado, então:

$$\exists \mathbf{v} : \forall \mathbf{x}(k), \mathbf{z}_x(k) : G_o(\mathbf{x}(k) - \mathbf{z}_x(k)) \leq \rho_o, \quad G_o \left\{ \tilde{A}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{z}_x(k)) + \mathbf{v}(k) + \tilde{B}_1 \bar{\mathbf{d}}(k) \right\} \leq \rho_o.$$

$$\text{Assim, fazendo-se: } \omega = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k+1) \\ \tilde{A} \mathbf{z}_x(k) + (\tilde{B}_2 + \tilde{B}_3) \mathbf{u}(k) - \mathbf{v}(k) \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\begin{bmatrix} G_c & 0 \\ [Gs & 0] & -Gs \end{bmatrix} \xi(k+1) = \begin{bmatrix} G_c \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}_2 + \tilde{B}_3 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_3 \\ I \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k+1) + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{d}}(k) \right\} \\ G_o \left\{ \tilde{A}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{z}_x(k)) + \mathbf{v}(k) + \tilde{B}_1 \bar{\mathbf{d}}(k) \right\} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \rho_c \\ \rho_o \end{bmatrix},$$

Isto mostra que Φ é invariante controlado. Resta provar que o poliedro é invariante condicionado. Deve-se verificar se

$$\begin{aligned} \exists \bar{\nu}(\zeta) : \forall \xi(k) : \begin{bmatrix} G_c & 0 \\ [Gs & 0] & -Gs \end{bmatrix} \xi(k) &\leq \begin{bmatrix} \rho_c \\ \rho_o \end{bmatrix} \text{ e} \\ \zeta(k) = \mathfrak{C} \xi(k) + \Upsilon(k), \quad \begin{bmatrix} G_c & 0 \\ [Gs & 0] & -Gs \end{bmatrix} [\mathfrak{A} \xi(k) + \bar{\nu} + \mathfrak{B}_1 \bar{\mathbf{d}}(k)] &\leq \begin{bmatrix} \rho_c \\ \rho_o \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Então, fazendo } \bar{\nu} = \begin{bmatrix} -\tilde{A} \mathbf{z}_x(k) - (\tilde{B}_2 + \tilde{B}_3) \mathbf{u}(k) + \mathbf{v}(k) \\ -\mathbf{u}(k) \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ obtém-se:}$$

$$\begin{bmatrix} G_c & 0 \\ [Gs & 0] & -Gs \end{bmatrix} \xi(k+1) = \begin{bmatrix} G_c \begin{bmatrix} \tilde{A}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{z}_x(k)) + \mathbf{v}(k) + \tilde{B}_1 \bar{\mathbf{d}}(k) \\ 0 \end{bmatrix} \\ G_o \left\{ \tilde{A}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{z}_x(k)) + \mathbf{v}(k) + \tilde{B}_1 \bar{\mathbf{d}}(k) \right\} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Considere a partição do poliedro invariante controlado, de forma que $G_c = \begin{bmatrix} G_x & G_u \end{bmatrix}$. O poliedro da intersecção entre o espaço de estados e o poliedro invariante então é dado por:

$$\Omega_{c \cap x} = \{ \mathbf{x} : G_x \mathbf{x} \leq \rho \}$$

Além disso, por hipótese, $\Omega_o \subset \Omega_{c \cap x}$. Logo, assegura-se que:

$$G_x \left\{ \tilde{A}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{z}_x(k)) + \mathbf{v}(k) + \tilde{B}_1 \bar{\mathbf{d}}(k) \right\} \leq \rho_c.$$

Simplificando-se a equação 4.8, finalmente chega-se a:

$$\begin{bmatrix} G_c \begin{bmatrix} \tilde{A}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{z}_x(k)) + \mathbf{v}(k) + \tilde{B}_1 \bar{\mathbf{d}}(k) \\ 0 \end{bmatrix} \\ G_o \left\{ \tilde{A}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{z}_x(k)) + \mathbf{v}(k) + \tilde{B}_1 \bar{\mathbf{d}}(k) \right\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_x \left\{ \tilde{A}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{z}_x(k)) + \mathbf{v}(k) + \tilde{B}_1 \bar{\mathbf{d}}(k) \right\} \\ G_o \left\{ \tilde{A}(\mathbf{x}(k) - \mathbf{z}_x(k)) + \mathbf{v}(k) + \tilde{B}_1 \bar{\mathbf{d}}(k) \right\} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \rho_c \\ \rho_o \end{bmatrix}$$

o que prova que Φ também é invariante condicionado. ■

Observação 4.3. *Fica claro, na demonstração desta proposição, que o estado do compensador $\mathbf{z}_x$ é uma estimativa do estado do sistema, tendo em vista que o poliedro invariante condicionado utilizado na construção do poliedro candidato a I.C.R.S. é calculado com base na técnica descrita no Capítulo 3.*

4.3 Exemplo numérico

Para investigar a aplicação dos resultados acima, seja o sistema descritor causal cujas matrizes são:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1,0668 & -0,0956 \\ 0,0593 & -0,8323 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0,5000 \\ 0,2000 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -1,1465 \\ 1,1909 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

O distúrbio e o ruído de medição são limitados, respectivamente, como $|d(k)| \leq 0,1$ e $|\eta(k)| \leq 0,1$. As restrições no estado e no controle são $|x_1| \leq 1$, $|x_2| \leq 1$ e $|u| \leq 1$. Um poliedro invariante controlado com taxa de contração $\lambda_c = 0,98$ foi calculado utilizando a técnica de (29), e as condições de I.C.R.S. (30) foram testadas considerando a saída medida, tendo o poliedro falhado em atender a condição necessária e suficiente para ser I.C.R.S. por realimentação estática de saída.

Considerando um compensador dinâmico e o sistema aumentado proposto neste Capítulo, um poliedro candidato à I.C.R.S. em relação a forma aumentada sistema + compensador foi construído. Para tal, um poliedro invariante condicionado, calculado por meio do método descrito no Capítulo 3 foi obtido com taxa de contração de $\lambda_o = 0,8$, a partir de um poliedro do erro inicial admissível construído do poliedro

base $|\mathbf{x} - \mathbf{z}_x| \leq [0.1 \ 0.1]^T$. O teste de I.C.R.S. foi aplicado, verificando-se uma taxa de contração de 0,98, o que mostra a factibilidade da técnica. Na figura 4.1 é visto o poliedro invariante controlado, e uma trajetória do estado aumentado do sistema, que fica confinada no interior do poliedro. Vale lembrar que o sistema em malha aberta é instável. Além disso, como um resultado que pode ser considerado uma consequência importante, é visto na figura 4.2 o poliedro invariante condicionado utilizado para a construção do poliedro I.C.R.S., junto com o poliedro do erro inicial admissível e uma trajetória de $\mathbf{x}(k) - \mathbf{z}_x(k)$. Observa-se que a trajetória fica confinada ao poliedro invariante condicionado, confirmando o que é demonstrado pela proposição 4.2, ou seja, o estado $\mathbf{z}_x(k)$ do compensador é uma estimativa do estado do sistema.

A fim de verificar a influência do poliedro invariante condicionado no resultado em malha fechada, a simulação também foi realizada considerando este poliedro com taxa de contração $\lambda_o = 0,9$; foi possível verificar que a contração mínima imposta pela lei de controle *online* foi no mínimo igual a taxa de contração do poliedro invariante condicionado, o que torna claro que o controle acelera a convergência para poliedros invariantes condicionados mais fortemente contrativos.

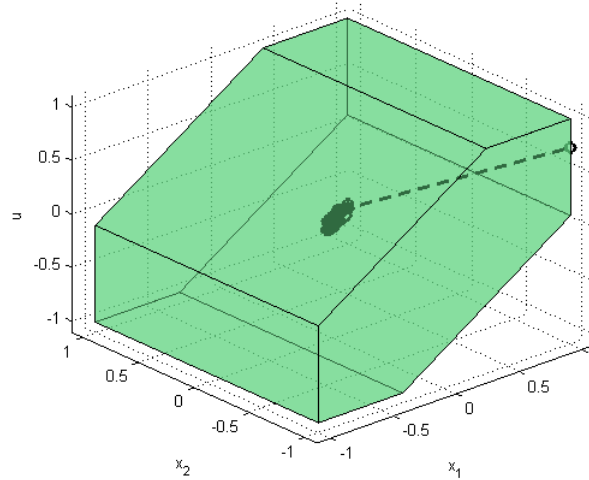
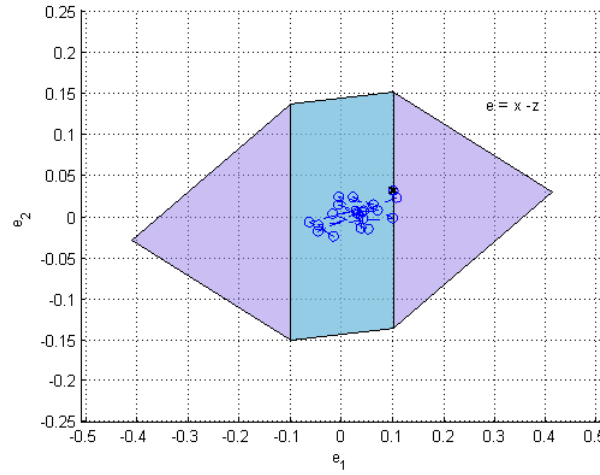


Figura 4.1: Poliedro invariante do exemplo com trajetória do estado aumentado.

4.4 Resultados de simulação em sistema de nível

Nesta seção, são apresentados resultados para a planta de nível também utilizada nos Capítulos 2 e 3. Em particular, no Capítulo 2, resultados de realimentação estática de saída foram obtidos a partir de um poliedro I.C.R.S., ao passo que no Capítulo 3, o projeto de observadores com erro limitado a partir de poliedros invariantes condicionados


 Figura 4.2: Trajetória do erro $\mathbf{x} - \mathbf{z}_x$.

foi considerado. Seja o modelo de tempo discreto na forma aumentada obtido no Capítulo 2, com a adição de uma perturbação na equação algébrica:

$$\begin{bmatrix} q_1(k+1) \\ q_2(k+2) \\ q_3(k+3) \\ u(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9692 & 0 & 0 & 0,0560 \\ 0,0095 & 0,9876 & 0 & 0,0003 \\ -0,9915 & 2,3038 & 0 & -0,0566 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ q_3(k) \\ u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u(k+1) + \\
 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(k) \\ d(k+1) \end{bmatrix} \\
 \tilde{y}(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ q_3(k) \\ u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta(k) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Considere as mesmas restrições da subseção 2.4.4., e adicionalmente a perturbação limitada na forma $|d(k)| < 1,6$ e o ruído de medição como $|\eta(k)| < 0,1$. O poliedro invariante controlado calculado como na subseção 2.4.4. foi utilizado ($\lambda_c = 0,95$); um poliedro invariante condicionado com taxa de contração $\lambda_o = 0,91$ foi determinado, partindo-se de uma região inicial para o erro admissível calculada de acordo com a metodologia proposta no Capítulo 3 com base em um erro inicial no interior do poliedro dado por:

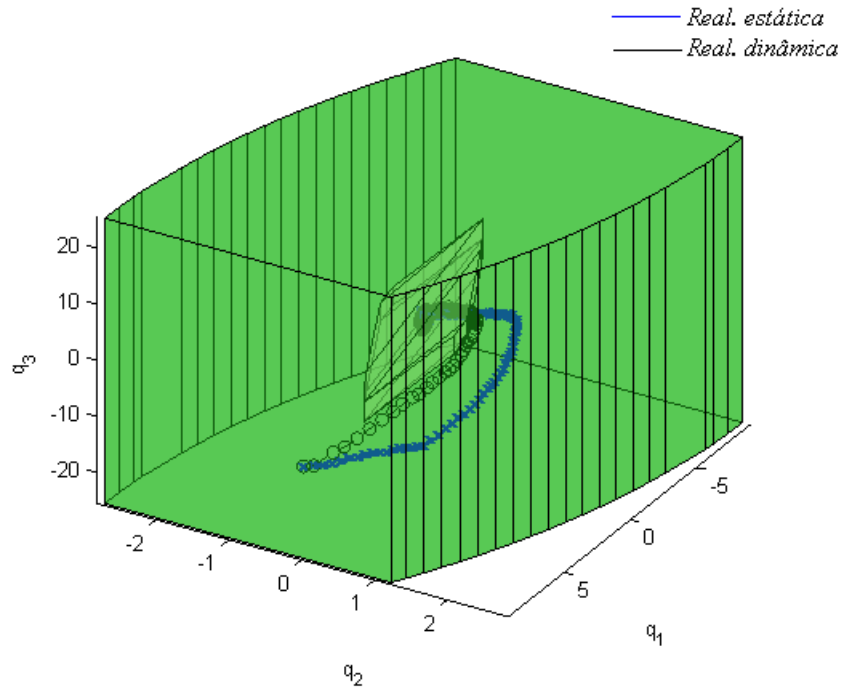


Figura 4.3: Poliedros invariantes do sistema de nível com trajetória do estado para realimentação estática e dinâmica de saída.

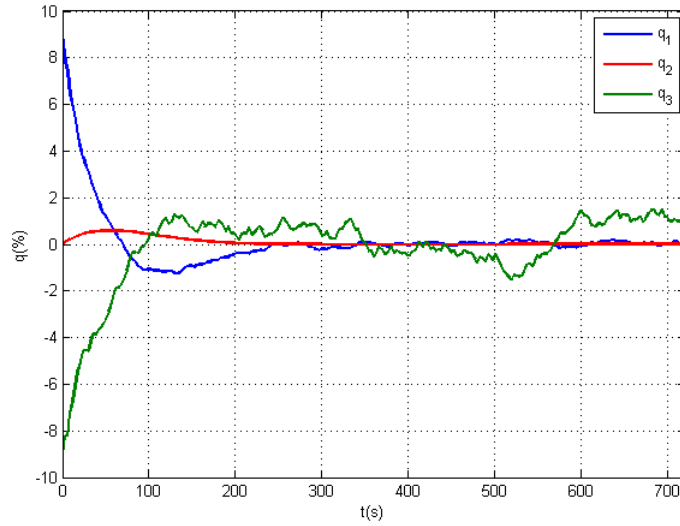


Figura 4.4: Evolução temporal do vetor de estado com realimentação dinâmica.

$$\Omega_e = \{\mathbf{e} : |\mathbf{H}\mathbf{e}| \leq \rho_e\}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{I}_3, \quad \rho_e = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 1,6664 \end{bmatrix}$$

Verificou-se que poliedro invariante controlado calculado foi I.C.R.S. com taxa de contração $\lambda = 0,9947$, e o poliedro do sistema aumentado também, entretanto com melhor contração: $\lambda = 0,9855$.

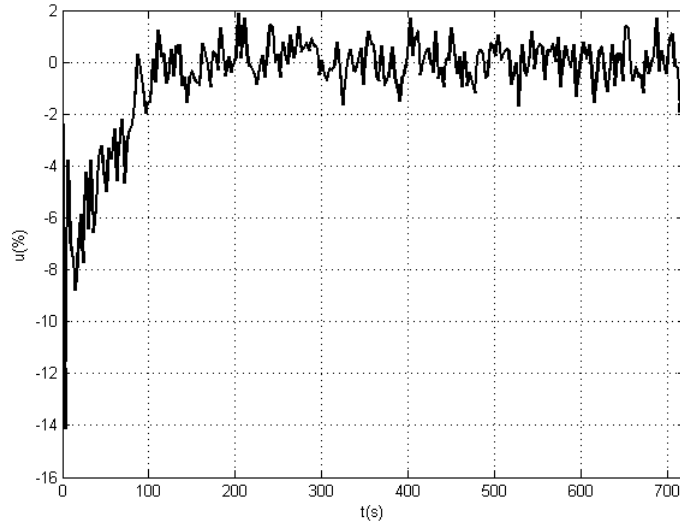
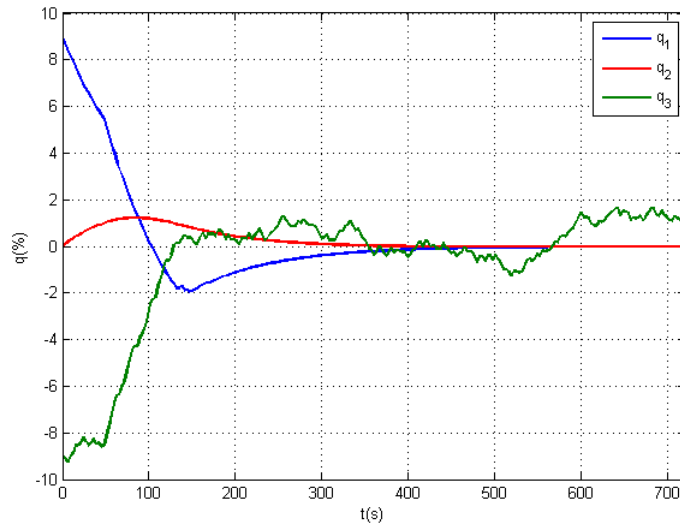

 Figura 4.5: Esforço de controle *online* com realimentação dinâmica.


Figura 4.6: Evolução temporal do vetor de estado com realimentação estática.

Foram simulados dois casos, um deles com realimentação dinâmica e o segundo com realimentação estática de saída. Na figura 4.3 são mostrados os poliedros I.C.R.S. e o invariante condicionado, juntamente com as trajetórias para compensação estática e dinâmica. O projeto para o compensador dinâmico desenvolvido pela técnica da seção 4.2 mostra-se efetivo, com a convergência rápida do vetor de estado. A comparação destas convergências pode ser feita a partir das figuras 4.4 e 4.6, onde é evidente o desempenho superior do compensador dinâmico. Os esforços de controle para os casos dinâmico e estático podem ser verificados, respectivamente, nas figuras 4.5 e 4.7.

Novamente, como subproduto da metodologia, tem-se que o estado do compensador é uma estimativa do estado real, e na figura 4.8 observa-se a trajetória do “erro” $\mathbf{q}(k) - \mathbf{z}(k)$

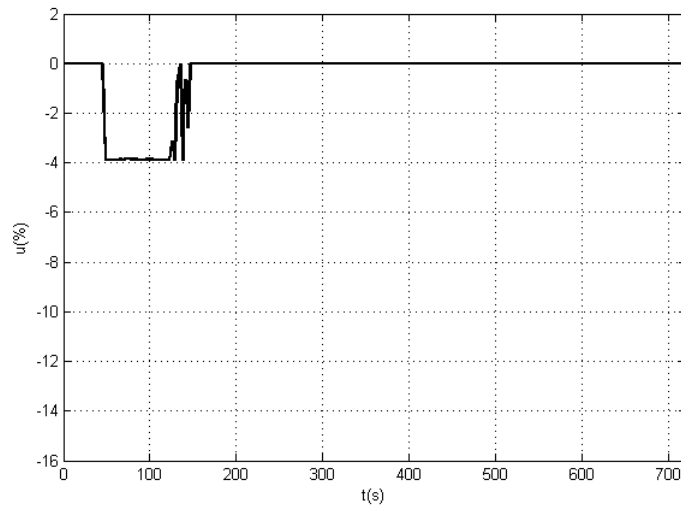


Figura 4.7: Esforço de controle *online* com realimentação estática.

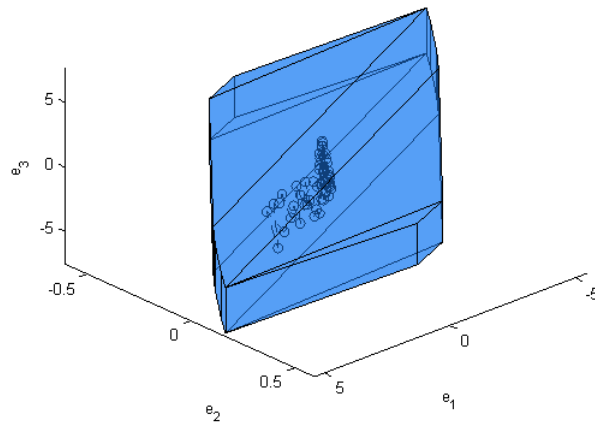


Figura 4.8: Poliedro invariante condicionado e trajetória de $\mathbf{q}(k) - \mathbf{z}(k)$.

confinada no poliedro invariante condicionado.

4.5 Comentários conclusivos

Neste Capítulo, foi apresentada uma metodologia de projeto de compensadores dinâmicos em sistemas descritores por realimentação de saída, utilizando poliedros I.C.R.S. constituídos por um par de poliedros, um invariante controlado e outro invariante condicionado. A partir do sistema aumentado modelo+compensador, uma lei de controle *online* pode ser calculada, a cada passo, minimizando a contração do estado aumentado. Os resultados obtidos demonstram claramente o mérito da técnica proposta, e seu superior desempenho quando comparado à realimentação estática. A técnica desenvolvida aproxima definitivamente os conceitos de invariância controlada e de invariância condicionada, abordados de forma independente nos capítulos 2 e 3.

Capítulo 5

Conclusão e trabalhos futuros

Foram apresentadas no presente documento algumas contribuições para o desenvolvimento da teoria de sistemas descritores sob restrições, por meio da extensão de resultados sobre técnicas de invariância de conjuntos já bastante conhecidas e utilizadas em sistemas lineares na forma padrão. Tais contribuições enlaçam o conceito de poliedros invariantes controlados e invariantes condicionados com aplicações a problemas de controle e observação sob restrições. A causalidade dos sistemas estudados foi uma premissa para em parte do capítulo 2 e nos capítulos 3 e 4, o que permite reescrever as equações do sistema descritor numa forma padrão, introduzida nesta tese. Novas estruturas para o modelo do sistema, que considera o esforço de controle como variável de estado (29), bem como para observadores descritores de ordem completa (61), foram introduzidas. A aplicação destas estruturas para o projeto através de técnicas de invariância foram comprovadas através de exemplos numéricos e de um estudo de caso numa plataforma experimental de nível (60),(63).

Em cada um dos capítulos, cometários conclusivos foram elaborados, cuja síntese apresentamos em seguida.

No Capítulo 2, a extensão de resultados de invariância controlada de poliedros foram estendidos para sistemas descritores singulares e causais. Tal extensão foi possível a partir da transformação das equações do sistema para uma forma padrão aumentada, na qual o controle é também tratado como variável de estado e o seu incremento um passo a frente passa ao papel de sinal de controle. Também foi feita a caracterização da inicialização do sistema, que apresenta particularidades não presentes nos sistemas padrão. A nova forma aumentada foi então utilizada no projeto de controle sob restrições dadas por poliedros em um exemplo de simulação para realimentação de estados e em um estudo de caso experimental para realimentação de saída. Os resultados confirmaram o mérito da abordagem proposta. Com relação aos sistemas descritores não-regulares/não-causais, o problema de regularização com respeito a restrições foi abordado numa discussão

heurística que pode ser vista no capítulo 2. Um estudo com a solução do problema em dois passos: (i) aplicação de realimentação linear de forma a tornar o sistema regular e (ii) determinação do maior poliedro invariante contido nas restrições, foi realizado em exemplos numéricos, onde procurou-se verificar o efeito do ganho linear que torna o sistema regular no maior poliedro invariante controlado. Tomando como base base na nova forma padrão aumentada introduzida, foi apresentado um estudo preliminar do problema de regularização de sistemas descritores de tempo discreto, com simultâneo respeito à restrições no estado e no controle. Tal estudo foi feito por meio de simulações numéricas, tomando como parâmetros de observação o ganho regularizante (caso monovariável) ou sua norma (caso multivariável) e seu impacto no maior poliedro invariante controlado, por meio da observação da área ou volume de sua projeção no espaço de estados. Este é um indicador interessante, devido ao fato que o maior poliedro invariante controlado sempre está contido nas restrições, ou seja, projeções com o mesmo volume ou área certamente serão iguais, ao passo que uma diminuição deste indicador significa um poliedro menor. As observações feitas dão indícios de duas importantes possibilidades, porém de difícil prova analítica:

- a projeção do maior poliedro invariante no espaço de estados parece ser invariante com o ganho regularizante para sistemas com controle sem restrições.
- para problemas com restrições, existe uma faixa de ganho regularizante para a qual o maior poliedro invariante controlado tem o (hiper)volume de sua projeção no espaço de estados o maior possível.

Com base nestas observações, seria verossímil concluir que, para um dado problema específico, pode ser possível determinar o ganho regularizante ótimo com respeito ao (hiper)volume da projeção estudada.

O Capítulo 3 apresentou a extensão de resultados de invariância condicionada presentes na literatura para sistemas padrão aos sistemas descritores causais, no contexto da estimação de estados com limitação de erro. Tal extensão foi possível devido a introdução de uma nova estrutura de observador de estado, com uma lei de injeção de saída mista apresentando um termo estático e um atrasado em uma amostra. Esta estrutura permite reescrever a dinâmica do erro numa forma padrão, e assim os resultados de invariância condicionada podem ser estendidos para o projeto de observadores com limitação de erro.

No Capítulo 4, foi apresentada uma metodologia de projeto de compensadores dinâmicos em sistemas descritores por realimentação de saída, utilizando poliedros I.C.R.S. constituídos por um par de poliedros, um invariante controlado e outro invariante condicionado. A partir do sistema aumentado modelo+compensador, uma lei de controle *online* pode ser calculada, a cada passo, minimizando a contração do

estado aumentado. Os resultados obtidos demonstram o mérito da técnica proposta, e seu superior desempenho quando comparado à realimentação estática. A técnica desenvolvida aproxima definitivamente os conceitos de invariância controlada e de invariância condicionada, abordados de forma independente nos capítulos 2 e 3.

O desenvolvimento desta tese abre uma seara, para a qual existem as seguintes possibilidades de continuidade dentro do tema abordado:

- Determinação de leis de controle analíticas (*offline*), capazes de garantir o respeito a restrições para o problema i.c.r.s.;
- Métodos sistemáticos para o cálculo de poliedros i.c.r.s. contidos nas restrições;
- Investigação de provas e desenvolvimentos analíticos que melhor explicitem a dependência do poliedro invariante controlado com a escolha da realimentação linear que assegura a regularidade do sistema em malha fechada.

Referências Bibliográficas

- 1 F. Gantmacher. *The Theory of Matrices*. Chelsea, New York, 1959.
- 2 D. G. Luenberger and A. Arbel. Singular dynamic leontief systems. *Econometrica*, 45:991–995, 1977.
- 3 A. Rehm. *Control of Linear Descriptor Systems: A Matrix Inequality Approach*. VDI Verlag, Düsseldorf, Germany, 2004.
- 4 J. Y. Ishihara, M. H. Terra, and A. F. Bianco. Recursive linear estimation for general discrete-time descriptor systems. *Automatica*, 46:761–766, 2010.
- 5 L. A. Zadeh and C. A. Desoer. *Linear system theory*. McGraw-Hill, New York, 1963.
- 6 H. H. Rosenbrock. *State-Space and Multivariable Theory*. Wiley, New York, 1972.
- 7 W. M. Wonham. *Linear multivariable control: a geometric approach*. Springer-Verlag, New York, 1 edition, 1974.
- 8 D. G. Luenberger. *Introduction to dynamic systems: theory, models and applications*. John Wiley and Sons, New York, 1 edition, 1979.
- 9 G. Basile and G. Marro. *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory*. Prentice-Hall, New Jersey, 1 edition, 1992.
- 10 G. C. Verghese, B. C. Levy, and T. Kailath. A generalized state-space for singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4):811–831, 1981.
- 11 C. E. T. Dórea. Definições e exemplos de sistemas lineares. In L.A. Aguirre, editor, *Enciclopédia de automática*, volume 02, pages 22–39. Blucher, 2007.
- 12 D. G. Luenberger. Time-invariant descriptor systems. *Automatica*, 15(5):473–480, 1978.
- 13 L. Dai. *Singular control systems*. Lecture Notes in Control and Information Science. Springer-Verlag, New York, 1989.

- 14 M. Hou and P. C. Müller. Causal observability of descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1):158–163, 1999.
- 15 F. Lewis. A survey of linear singular systems. *Circuits, systems and signal processing*, 5(1):5–36, 1986.
- 16 D. Cobb. Controllability, observability, and duality in singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(12):1706–1082, 1984.
- 17 K. Ozcaldiran and F. L. Lewis. A result on the placement of infinite eigenvalues in descriptor systems. In *Proceeding of American Control Conference*, pages 366–371, 1984.
- 18 T. Yamada and D. G. Luenberger. Generic controllability theorems for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(2):144–152, 1985.
- 19 H. Radjavi and P. Rosenthal. *Invariant Subspaces*. Springer-Verla, New York, 1973.
- 20 C. E. T. Dórea and J. C. Hennet. (A,B)-invariant polyhedral sets of linear discrete-time systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 103(3):521–542, 1999.
- 21 C. E. T. Dórea and J. C. Hennet. (A,B)-invariance conditions of polyhedral domains for continuous-time systems. *European Journal of Control*, 5(1):70–81, 1999.
- 22 F. Blanchini. Ultimate boundedness control for uncertain discrete-time systems via set-induced lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(2):428–433, 1994.
- 23 F. Blanchini. Set invariance in control. *Automatica*, 35(11):1747–1767, 1999.
- 24 S. Tarbouriech and E. B. Castelan. Positively invariant-sets for singular discrete-time-systems. *International Journal of Systems Science*, 24(9):1687–1705, 1993.
- 25 E. B. Castelan and S. Tarbouriech. Simple and weak δ -invariant polyhedral sets for discrete-time singular systems. *Controle e Automação*, 14(4):339–347, 2003.
- 26 C. Georgiou and N. J. Krikelis. A design approach for constrained regulation in discrete singular systems. *Syst. Control Lett.*, 17:297–304, 1991.

- 27 S. Tarbouriech and E. B. Castelan. An eigenstructure assignment approach for constrained linear continuous-time systems. *System and Control Letters*, 24:333–343, 1995.
- 28 Z. Lin and L. Lv. Set invariance conditions for singular linear systems subject to actuator saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(12):2351–2355, 2007.
- 29 J.M. Araújo and C. E. T. Dórea. Controlled-invariant polyhedral sets for constrained discrete-time descriptor systems. In P. Pereira L. Camarinha-Matos and L. Ribeiro, editors, *Emerging Trends in Technological Innovation*, volume 1 of *IFIP AICT*, pages 385–392, Lisbon, Portugal, Feb. 2010.
- 30 C. E. T. Dórea. Output-feedback controlled-invariant polyhedra for constrained linear systems. In *Proceedings of 48th Conference in Decision and Control*, pages 5317–5322, 2009.
- 31 A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley and Sons, Chichester, England, 1997.
- 32 M. Vassilaki, J. C. Hennet, and G. Bitsoris. Feedback control in linear discrete-time systems under state and control constraints. *International Journal of Control*, 47(6):1727–1735, 1988.
- 33 M. Vassilaki and G. Bitsoris. Constrained regulation of linear continuous-time dynamical systems. *Systems and Control Letters*, 13:247–252, 1989.
- 34 J. B. M. Santos, G. A. Junior, H. C. Barroso, and P. R. Barros. A flexible laboratory-scale quadruple-tank coupled system for control education and research purposes. *Computer Aided Chemical Engineering*, 27(C):2151–2156, 2009.
- 35 G. Bastin. Issues in modelling and control of mass balance systems. In Dirk Aeyels, Françoise Lamnabhi-Lagarrigue, and Arjan van der Schaft, editors, *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems*, volume 246 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 53–74. Springer Berlin / Heidelberg, 1999.
- 36 T. Yeu, H. Kim, and S. Kawaji. Fault detection, isolation and reconstruction for descriptor systems. *Asian Journal of Control*, 7(4):356–367, 2005.
- 37 C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 3rd edition, 1998.

- 38 K. Ozcaldiran and F.L. Lewis. On the regularizability of singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(10):1156–1160, 1990.
- 39 L. R. Fletcher. Regularizability of descriptor systems. *International Journal of Systems Science*, 17(6):843–847, 1986.
- 40 D. L. Chu and D. W. C. Ho. Necessary and sufficient conditions for the output feedback regularization of descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(2):405–412, 1999.
- 41 A. Bunse-Gerstner, V. Mehrmann, and N. K. Nichols. Regularization of descriptor systems by output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(8):1742–1748, 1994.
- 42 G.R. Duan and X. Zhang. Regularizability of linear descriptor systems via output plus partial state derivative feedback. *Asian Journal of Control*, 5(3):334–340, 2003.
- 43 D. L. Chu, H. C. Chan, and D. W. C. Ho. Regularization of singular systems by derivative and proportional output feedback. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 19(1):21–38, 1998.
- 44 S. Ibrir. Regularization and robust control of uncertain singular discrete-time linear systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 24(1):71–80, 2007.
- 45 W. J. Mao and J. Chu. Regularisation and stabilisation of linear discrete-time descriptor systems. *IET Control Theory & Applications*, 4(10):2205–2211, 2010.
- 46 N. P. Karampetakis. On the discretization of singular systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 21(2):223–242, 2004.
- 47 A. Rachid. A remark on the discretization of singular systems. *Automatica*, 31(2):347–348, 1995.
- 48 D. G. Luenberger. Observing state of linear system. *IEEE Transactions on Military Electronics*, MIL8(2):74–77, 1964.
- 49 D. G. Luenberger. Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC11(2):190–194, 1966.
- 50 D. Cobb. Feedback and pole placement in descriptor variable systems. *International Journal of Control*, 33(6):1135–1146, 1981.

- 51 L. Dai. Observers for discrete singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33(2):187–191, 1984.
- 52 A. G. Wu and G. R. Duan. Design of pd observers in descriptor linear systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 5(1):93–98, 2007.
- 53 G. R. Duan A. G. Wu and Y. M. Fu. Generalized pid observer design for descriptor linear systems. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Part B-Cybernetics*, 37(5):1300–1395, 2009.
- 54 A. G. Wu G. R. Duan and J. Dong. Design of proportional-integral observers for discrete-time descriptor linear systems. *IET Control Theory and Applications*, 3(1):79–87, 2009.
- 55 V. G. Da Silva, S. Tarbouriech, E. B. Castelan, and G. Garcia. Concerning the project of decoupled observers of perturbation for descriptor systems. *Controle & Automação*, 18(4):423–433, 2007.
- 56 F. Blanchini and M. Sznaier. A convex optimization approach to synthesizing bounded complexity l8 filters. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, pages 217–222, 2009.
- 57 C. E. T. Dórea and A.C.C. Pimenta. Set-invariant estimators for linear systems subject to disturbances and measurement noise. In *Proceedings of 16th IFAC World Congress*, 2005.
- 58 C. E. T. Dórea and A.C.C. Pimenta. Design of set-invariant estimators for linear discrete-time systems. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 7235–7240, 2005.
- 59 C. E. T. Dórea. Set-invariant estimators for single-output linear discrete-time systems. *Submetido*, pages 01–20, 2008.
- 60 J. M. Araujo, P. R. Barros, and C. E. T. Dorea. Design of observers with error limitation in discrete-time descriptor systems: A case study of a hydraulic tank system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, PP(99):1–7, 2011.
- 61 J. M. Araújo, P. R. Barros, and C. E. T. Dórea. Conditioned-invariant polyhedral sets for observers with error limitation in discrete-time descriptor systems. In *Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, pages 65–69, 2010.

- 62 F. Tisseur and K. Meerbergen. The quadratic eigenvalue problem. *Siam Reviews*, 43:235–286, 2001.
- 63 J. M. Araújo, H. C. Barroso, P. R. Barros, and C. E. T. Dórea. Output feedback control of constrained descriptor systems: a case study of a hydraulic tank system. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 2011.
- 64 D. S. Bernstein. *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear Systems Theory*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.

Apêndice

Propriedades estruturais da forma padrão aumentada

O Capítulo 2 explora uma forma aumentada padrão dada pela Eq. 2.5. Neste apêndice, pretende-se analisar as características estruturais importantes que são preservadas nesta forma em relação ao sistema original, são elas: controlabilidade/estabilizabilidade, observabilidade/detetabilidade e solução no domínio do tempo. A análise de controlabilidade pode ser facilmente estendida para a de observabilidade, e desta forma, a segunda não será abordada.

Controlabilidade

Sem perda de generalidade, assume-se que o sistema está na forma canônica rápida-lenta, ou seja: $A_{11} = \mathcal{A}$, $A_{12} = 0$, $A_{21} = 0$, $A_{22} = I$. Além disso, o distúrbio pode ser desprezado na presente análise. Como é demonstrado em (18), o sistema descritor é R-controlável se e somente se: $\begin{bmatrix} B_{21} & \mathcal{A}B_{21} & \dots & \mathcal{A}^q B_{21} \end{bmatrix}$ tem posto de linhas cheio; além disso, o sistema é controlável se e somente se for R-controlável e B_{22} tem posto de linhas cheio.

As matrizes do sistema aumentado resultante são: $A_a = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 & B_{21} \\ 0 & 0 & -B_{22} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$ e $B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ -B_{22} \\ I \end{bmatrix}$. A matriz de controlabilidade resultante é dada por:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & B_{21} & \mathcal{A}B_{21} & \dots & \mathcal{A}^{n+p-1}B_{21} \\ I & I & I & \dots & I \\ -B_{22} & -B_{22} & -B_{22} & \dots & -B_{22} \end{bmatrix}$$

Com o auxílio de propriedades do posto de matrizes apresentadas em (64), é possível concluir que

$$\rho(U) = \rho(I) + \rho\left(\begin{bmatrix} B_{21} & \mathcal{A}B_{21} & \mathcal{A}^2B_{21} & \dots & \mathcal{A}^{n+p-1}B_{21} \end{bmatrix}\right) =$$

$$\rho(I) + \rho \left(\begin{bmatrix} B_{21} & \mathcal{A}B_{21} & \mathcal{A}^2B_{21} & \dots & \mathcal{A}^{q-1}B_{21} \end{bmatrix} \right) = q + p < n + p.$$

Então, o sistema na forma aumentada é não-controlável. Entretanto, aplicando separação de Kalman, por meio da transformação de similaridade:

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & B_{22} \end{bmatrix},$$

obtem-se as seguintes matrizes: $\bar{A}_a = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & B_{21} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\bar{B}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}$. Tem-se então

$A_c = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & B_{21} \\ 0 & I \end{bmatrix}$, $B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$ e $A_{\bar{c}} = 0$. Então, se o sistema original for R-controlável, o sistema aumentado será estabilizável, pois os autovalores da parte não controlável são sempre nulos, portanto, estáveis.

Solução no domínio do tempo

Considerando a forma aumentada padrão:

$$\chi(k+1) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \\ \mathbf{u}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 & B_{21} \\ 0 & 0 & -B_{22} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -B_{22} \\ I \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k+1)$$

Tem-se que a solução é dada por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 & B_{21} \\ 0 & 0 & -B_{22} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(0) \\ \mathbf{x}_2(0) \\ u(0) \end{bmatrix} + \sum_{j=0}^{k-1} \begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 & B_{21} \\ 0 & 0 & -B_{22} \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^{k-j-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -B_{22} \\ I \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(j+1)$$

O desenvolvimento das potências e do somatório da solução levam aos seguintes resultados para o vetor de estados:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(k) = & \mathcal{A}^k \mathbf{x}_1(0) + \mathcal{A}^{k-1} B_{21} \mathbf{u}(0) + \mathcal{A}^{k-2} B_{21} \mathbf{u}(0) + \dots + \mathcal{A} B_{21} \mathbf{u}(0) + B_{21} \mathbf{u}(0) + \\ & + \mathcal{A}^{k-2} B_{21} \Delta \mathbf{u}(1) + \mathcal{A}^{k-3} B_{21} \Delta \mathbf{u}(1) + \dots + \mathcal{A} B_{21} \Delta \mathbf{u}(1) + B_{21} \Delta \mathbf{u}(1) + \mathcal{A}^{k-3} B_{21} \Delta \mathbf{u}(2) + \\ & \dots + \mathcal{A} B_{21} \Delta \mathbf{u}(2) + B_{21} \Delta \mathbf{u}(2) + \dots + \\ & + \mathcal{A} B_{21} \Delta \mathbf{u}(k-2) + B_{21} \Delta \mathbf{u}(k-2) + B_{21} \Delta \mathbf{u}(k-1) \end{aligned}$$

que pode ser simplificado para:

$$\mathbf{x}_1(k) = \mathcal{A}^k \mathbf{x}_1(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathcal{A}^{k-j-1} B_{21} \mathbf{u}(j)$$

Além disso, têm-se:

$$\mathbf{x}_2(k) = -B_{22} [\mathbf{u}(0) + \Delta \mathbf{u}(1) + \Delta \mathbf{u}(2) + \dots + \Delta \mathbf{u}(k)] = -\mathbf{B}_{22} \mathbf{u}(k)$$

Esta solução obtida da forma aumentada é exatamente igual às Eqs. 1.10 e 1.11, desenvolvidas no capítulo 1.

Anexo

Como complemento deste texto, são vistos neste anexo as publicações que resultaram do desenvolvimento metodológico do trabalho de tese.

Controlled Invariant Polyhedral Sets for Constrained Discrete-Time Descriptor Systems

José Mario Araújo¹ and Carlos Eduardo Trabuco Dórea²

¹ Instituto Federal da Bahia, Departamento de Tecnologia em Eletro-Eletrônica, Rua Emídio dos Santos, S/N, Barbalho, Salvador-BA, Brazil
jomario@ifba.edu.br

² Universidade Federal da Bahia, Escola Politécnica, Depto. de Engenharia Elétrica, Rua Aristides Novis, 2, Federação, Salvador-BA, Brazil
cetdorea@ufba.br

Abstract. This paper addresses the problem of constructing controlled invariant polyhedral sets for linear discrete-time descriptor systems subject to state and control constraints and persistent disturbances. Regardless the large number of contributions on set invariance for linear systems in the standard form, there are few works dealing with set invariance properties in the case of descriptor systems. Here, assuming regularity and causality of the descriptor system, the state equations are written in such way that standard algorithms can be directly applied. Moreover, state and control constraints can be enforced through a piecewise linear delayed state feedback. A numerical example is presented to illustrate these ideas.

Keywords: Descriptor systems, set invariance, constraints.

1 Introduction

Descriptor systems is an important class of linear systems, also called generalized state space, or singular systems and yet implicit systems when algebraic equations are present. Very important works have built a rich theoretical and applied framework on the subject [1], [2], [3], [4] and [5]. The design of constrained control systems is very useful in practice, since certain requirements of supply or safety impose limits on physical quantities. The use of the set-invariance concept is a efficient way of dealing with constrained control systems (see [6], [7] and [8] and references therein). Several works concerning constrained control for standard state-space systems can be found in the literature [9], [10] and [11]. For the class of descriptor linear systems, however, the contributions on the characterization of controlled invariance over polyhedral sets are not so numerous. Some important works on positive invariance under linear pole placement design can be found on literature [12], [13], [14], [15] and [16]. However, the use of linear feedback may lead to very conservative solutions, not coping with severe control constraints or high amplitude disturbances. In this note, controlled

invariance of polyhedral sets for discrete time linear descriptor systems is analyzed. By assuming that the system is regular and causal, the state equation can be rewritten in an augmented form which gives the possibility of applying available methods for characterization of controlled invariance for polyhedral sets in standard linear systems. A delayed state-feedback control law can then be synthesized to enforce the constraints. A numerical example is presented in order to illustrate the effectiveness of the proposal.

2 Contribution for Technological Innovation

Descriptor systems arise from a diversity of areas, such economics, chemical and electrical [1]. The control of this class of models is very important, since a series of requirements of quality, reliability and safety are involved. In many cases, physical constraints are inherent, and comprising operational limits of supply/safety. The set-invariance for control under constraints is well developed for systems in the classical state representation. For descriptor model a few works have contributed in this aspect. The present paper tries to rise new ideas in this direction.

3 Preliminaries

The n th-dimensional system under study is in the form of a perturbed descriptor state-space representation:

$$Ex(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Dd(k) \quad (1)$$

in which $x \in \Re^n, u \in \Re^m, d \in \Re^p$. The disturbance amplitude is supposed to be bounded for all instants k . When $\text{rank}(E) = q < n$, without loss of generality, the state vector can be partitioned:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} \quad (2)$$

and the system matrices can be written:

$$E = \begin{bmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

The hypothesis that the system is causal assures that A_{22} is invertible [4]. In this case, manipulations on the systems matrices leads to the form:

$$x(k+1) = \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k) + \tilde{C}u(k+1) + \tilde{D} \begin{bmatrix} d(k) \\ d(k+1) \end{bmatrix} \quad (4)$$

in which

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ -A_{22}^{-1}B_2 \end{bmatrix}, \tilde{D} = \begin{bmatrix} D_1 - A_{12}A_{22}^{-1}D_2 & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(D_1 - A_{12}A_{22}^{-1}D_2) & -A_{22}^{-1}D_2 \end{bmatrix}$$

Now, one can see that one-step forward terms in control input and in disturbance appear. This is not a problem for the disturbance, since it is not measured. For the control input, it is convenient to consider it as another state variable. The augmented state vector is then:

$$\chi(k+1) = \begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k+1) \end{bmatrix} \quad (5)$$

The augmented state equation are now given as:

$$\chi(k+1) = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} + \tilde{C} \\ 0 & I \end{bmatrix} \chi(k) + \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ I \end{bmatrix} \Delta u(k+1) + \begin{bmatrix} \tilde{D} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(k) \\ d(k+1) \end{bmatrix} \quad (6)$$

In which $\Delta u(k+1) = u(k+1) - u(k)$. This is a standard state-space model with state vector $\begin{bmatrix} x^T(k) & u^T(k) \end{bmatrix}^T$ and bounded disturbance $\begin{bmatrix} d^T(k) & d^T(k+1) \end{bmatrix}^T$, and application of well-established algorithms for standard systems is straightforward. It should be noticed that this extended system has $n+m$ eigenvalues: (i) q finite eigenvalues of (1); (ii) $n-q$ eigenvalues equal to 0 corresponding to infinite eigenvalues of (1); and m eigenvalues equal to 1 corresponding to the control input dynamics. In the next section, this representation will be useful for the characterization of controlled invariance of polyhedral sets that represent constraints on state variables and control inputs.

4 Solution of Constrained Control Problem

4.1 Controlled Invariance

Assume that system (1) is subject to the following state and control constraints:

$$x(k) \in \Omega = \{x : Gx \leq \rho\}, u(k) \in \mathcal{U} = \{u : Uu \leq v\}, \Delta u(k) \in \Delta \mathcal{V} = \{\Delta u : L\Delta u \leq \phi\} \quad (7)$$

The disturbance is supposed to be bounded as follows:

$$d(k) \in \mathcal{D} = \{d : Vd \leq \mu\} \quad (8)$$

Considering the augmented representation, the constraints on state and control can be written as:

$$\chi(k) \in \Gamma = \{\chi : \mathcal{G}\chi \leq \rho\}, \mathcal{G} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix}, \rho = \begin{bmatrix} \rho \\ v \end{bmatrix}$$

and the bounds on the disturbance as:

$$\begin{bmatrix} d(k) \\ d(k+1) \end{bmatrix} \in \Psi = \{d : \mathcal{V}d \leq \bar{\mu}\}, \mathcal{V} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}, \bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \end{bmatrix}$$

The goal now is to construct a control law which enforces the constraints, for all disturbances in Ψ . Such a construction will be based on the following concept [9]:

Definition 4.1. A set is λ -contractive controlled invariant with respect to system (6) and constraints (7),(8) if for any $\chi(k) \in \Gamma$, $\exists \Delta u$ such that

$$\chi(k+1) = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} + \tilde{C} \\ 0 & I \end{bmatrix} \chi(k) + \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ I \end{bmatrix} \Delta u(k+1) + \begin{bmatrix} \tilde{D} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d(k) \\ d(k+1) \end{bmatrix} \in \lambda \Gamma \quad \text{with } 0 < \lambda \leq 1.$$

The constrained control problem can then be solved by computing Γ^* , the maximal controlled invariant set contained in Γ [8,9]. Hence, if the initial state is consistent with the algebraic equation:

$$0 = A_{21}x_1(0) + A_{22}x_2(0) + B_2u(0) + D_2d(0) \quad (9)$$

and $\chi(k) \in \Gamma^*$ then there exists $\Delta u(k) \in \Delta \mathcal{V}$ such that $\chi(k+1) \in \lambda \Gamma^*, \forall d(k) \in \mathcal{D}$. As a consequence, if $\chi(0) \in \Gamma^*$, then $\exists \Delta u(k+1)$ such that $\chi(k) \in \Gamma^* \forall k$ and $\forall d(k) \in \mathcal{D}$. Moreover, if $d(k) = 0$, $\chi(k) \in \lambda^k \Gamma^*$, thus if $\lambda < 1$, $\chi(k) \rightarrow 0$ when $k \rightarrow \infty$, guaranteeing asymptotic stability.

Once the maximal controlled invariant is obtained, a piecewise linear control law can be computed that assures the respect to constraints [9]:

$$\Delta u(k+1) = \phi[\chi(k)] = \phi[x(k), u(k)] \quad (10)$$

One can see that such control law is delayed with respect to the augmented state vector.

4.2 Admissible Initial Conditions

In the previous subsection, the issue of consistency of initial conditions was mentioned. The control law (10) enforces state and control constraints as long as the initial state satisfies $\chi(0) \in \Gamma^*$. However, differently from standard linear systems, $\chi(0)$ may not be consistent, i.e., may not satisfy the algebraic equation (9). In this

case, a jump can occur for $k = 0$ and this is unpredictable due the disturbance $d(0)$. Let $x(0^+)$ be the state after the jump. The dynamic part of state vector does not experiment jumps in $k = 0$. It can be verified by changing the representation of (1) into a canonical representation where the dynamic and algebraic equations are decoupled [14]. Hence $x_1(0^+) = x_1(0)$. The algebraic portion can be made explicit from (9):

$$x_2(0^+) = -A_{22}^{-1}A_{21}x_1(0) - A_{22}^{-1}B_2u(0) - A_{22}^{-1}D_2d(0) \quad (11)$$

The consistency of the initial condition can be treated on the basis of the following definition.

Definition 4.2. Consider the set Γ^* , controlled invariant with respect to the system (6) and constraints (7),(8). The set of admissible initial states is defined by: $\Lambda_{ad} = \{x(0) \in \Omega : \exists u(0) \in \mathcal{U} : x(0^+) \in \Gamma^*, \forall d(0) \in \mathcal{D}\}$.

Let now Γ^* be the polyhedral set $\Gamma^* = \{x : G^*x \leq \rho^*\}$. In this case, the set of admissible initial states is also a polyhedron, given by the set of $x(0) = \begin{bmatrix} x_1(0)^T & x_2(0)^T \end{bmatrix}^T$ such that $\exists u(0)$ which satisfies, $\forall d(0) \leq \mu$:

$$\begin{bmatrix} G^* \begin{bmatrix} I \\ -A_{22}^{-1}A_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} x_1(0) + \begin{bmatrix} G^* \begin{bmatrix} 0 \\ -A_{22}^{-1}B_2 \\ U \end{bmatrix} \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} G^* \begin{bmatrix} 0 \\ -A_{22}^{-1}D_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} d(0) \leq \begin{bmatrix} \rho^* \\ v \end{bmatrix} \quad (12)$$

Since $d(0)$ is not measured, its influence can be taken into account by considering the worst case row-by-row. Define then the vector:

$$\sigma_i = \max_{\forall d \leq \mu} \left\{ \begin{bmatrix} -G^* \begin{bmatrix} 0 \\ -A_{22}^{-1}D_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \right\}_i d \quad (13)$$

The variable $u(0)$ can be eliminated by a projection computed like in [8], resulting in the following polyhedron on x_1 :

$$\Lambda_{x_1} = \{x_1(0) : H_1x_1(0) \leq h_1\} \quad (14)$$

The set of admissible initial states is then given by:

$$\Lambda_{ad} = \left\{ x(0) : \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ G & \end{bmatrix} x(0) \leq \begin{bmatrix} h_1 \\ \rho \end{bmatrix} \right\} \quad (15)$$

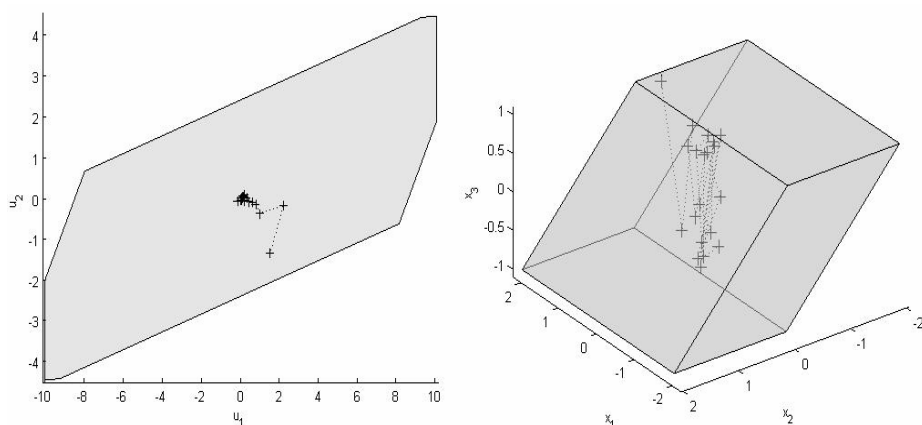


Fig. 1. Projection onto the control space (a) and the state space (b) of the controlled invariant polyhedron computed with $\gamma = 1$, together with a control and a state trajectory

5 Numerical Example

Consider the same system used in [13, 14, 15]:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ -1 & -0.7 & -1 \\ 2 & -0.5 & -1.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

The following state and control constraints (7),(8) are imposed: $|G_s x| \leq \rho_s, |u_i| \leq 10, i = 1, 2$ with

$$G_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0.9318 \\ -1 & 0 & -0.1164 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \rho_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

The disturbances are bounded as $|d(k)| \leq \gamma$. By application of the algorithm proposed in [8], it was verified that the maximal controlled invariant polyhedron contained in the set of constraints, with a contraction rate $\lambda = 0.99$, is non-empty for $\gamma \leq \gamma_{\max} = 1.082115$.

Figure 1 shows the controlled invariant polyhedron for $\gamma = 1$ projected onto control and state spaces, where it can be noticed that the original polyhedron of the constraints in states is itself controlled invariant. These results are better than those obtained by the pole placement control law proposed in [14], where $\gamma_{\max} = 0.208815$. A piecewise control law that enforces the constraints can be computed as in [9]. However, it turns out that for this example, with $\gamma = 1$, invariance of Ω under control

constraints can be achieved by a linear feedback $\Delta u(k+1) = F\chi(k) = F_1x(k) + F_2u(k)$ computed by linear programming as in [10, 11], leading to

$$F = \begin{bmatrix} 0.9370 & 0.7409 & 0 & -0.8944 & -0.4852 \\ -0.7146 & 0.1915 & 0 & -0.0385 & -1.8254 \end{bmatrix}.$$

It should be noticed that due to the null column in F , the closed-loop augmented systems has: (i) 4 finite eigenvalues in 0.6663, -0.4669 , -0.0329 , 0.0305, and (ii) 1 eigenvalue equal to 0, corresponding to the infinite pole of (1). Its confirms stability of the system under closed-loop.

The set of admissible initial states coincides with the initial polyhedron. A simulation was carried out with initial conditions $x(0) = [1.649 \quad -0.2354 \quad 0]^T$, $x(0^+) = [1.649 \quad -0.2354 \quad 1]^T$. The initial control input $u(0)$ was then computed in order to guarantee $x(0^+) \in \Gamma^*$, resulting in $u(0) = [1.5 \quad -1.344]^T$. The simulated trajectories with random disturbances are depicted in figure 1.

6 Conclusions and Future Works

A characterization of controlled invariance of polyhedral sets was proposed for descriptor linear discrete time systems, based on an augmented state-space representation in the form of a classical linear system. Under this representation, standard algorithms can be used to compute controlled invariant sets. Then, a delayed state feedback law can be synthesized to solve a control problem under state and control constraints for systems subject to bounded disturbances. Through a numerical example, it was shown that the proposed controller can outperform linear ones proposed in literature. Future works will focus the study of the solution to the problem by means of static and dynamic output feedback laws, already characterized in [17] for classical linear systems. The design of a control law for simultaneous regularization and constraints satisfaction will be also investigated.

Acknowledgments. The Authors would like to thank to their Institutions and to PROAP/CAPEs for financial support.

References

1. Luenberger, D.G.: Time-invariant descriptor systems. *Automatica* 14(5), 473–480 (1978)
2. Yip, E.L., Sincovec, R.F.: Solvability, controllability, and observability of continuous descriptor systems. *IEEE T Automat. Contr.* 26(3), 702–707 (1981)
3. Cobb, D.: Feedback and pole placement in descriptor variable systems. *Int. J. Control* 33(6), 1135–1146 (1981)
4. Dai, L.: *Singular control systems*. Springer, New York (1989)
5. Lewis, F.: A survey of linear singular systems. *Circ. Syst. Signal Pr.* 5(1), 5–36 (1986)
6. Blanchini, F.: Set invariance in control. *Automatica* 35(11), 1747–1767 (1999)

7. Dórea, C.E.T., Hennes, J.C.: (A,B)-invariance conditions of polyhedral domains for continuous-time systems. *European Journal of Control* 5(1), 70–81 (1999)
8. Dorea, C.E.T., Hennes, J.C.: (A,B)-invariant polyhedral sets of linear discrete-time systems. *J. Optimiz. Theory App.* 103(3), 521–542 (1999)
9. Blanchini, F.: Ultimate boundedness control for uncertain discrete-time systems via set-induced Lyapunov functions. *IEEE T Automat. Contr.* 39(2), 428–433 (1994)
10. Vassilaki, M., Hennes, J.C., Bitsoris, G.: Feedback control in linear discrete-time systems under state and control constraints. *Int. J. Control* 47(6), 1727–1735 (1988)
11. Vassilaki, M., Bitsoris, G.: Constrained regulation of linear continuous-time dynamical systems. *Syst. Control Lett.* 13, 247–252 (1989)
12. Georgiou, G., Krikelis, N.J.: A design approach for constrained regulation in discrete singular systems. *Syst. Control Lett.*, 297–304 (1991)
13. Tarbouriech, S., Castelan, E.B.: Positively invariant-sets for singular discrete-time systems. *International Journal of Systems Science* 24(9), 1687–1705 (1993)
14. Castelan, E.B., Tarbouriech, S.: Simple and weak D-invariant polyhedral sets for discrete-time singular systems. *Controle e Automacao* 14(4), 339–347 (2003)
15. Tarbouriech, S., Castelan, E.B.: An eigenstructure assignment approach for constrained linear continuous-time systems. *Syst. Control Lett.* 24, 333–343 (1995)
16. Lin, Z., Lv, L.: Set invariance conditions for singular linear systems subject to actuator saturation. *IEEE T Automat. Contr.* 52(12), 2351–2355 (2007)
17. Dórea, C.E.T.: Output-feedback controlled invariant polyhedra for constrained linear systems. To appear in *Proceedings of 48th CDC*, pp. 1–6 (2009)

Conditioned-Invariant Polyhedral Sets for Observers with Error Limitation in Discrete-Time Descriptor Systems

José M. Araújo, Pércles R. Barros and Carlos E.T. Dórea

Abstract—This work aims to establish a characterization of conditioned-invariant polyhedral sets applied in the context of state estimation in linear discrete-time descriptor systems. It is shown that, assuming causality, the existing conditions for linear systems in the standard form can be extended to descriptor ones, by rewriting the state equation in a suitable form. To this end, a specific descriptor structure for the observer is proposed, whereby limitation of the estimation error can be achieved by the computation of an as small as possible conditioned invariant polyhedron that contains the set of possible initial errors, which is also characterized, together with the corresponding output injection. The effectiveness of methodology is then illustrated by numerical examples.

I. INTRODUCTION

The state estimation problem plays a central role in control systems theory and applications. The state-feedback technique is many times applicable due the development of state observers. The first important contributions on the theme can be found in the works of Luenberger [1],[2]. In the case of descriptor systems, this issue is a little bit more difficult, due the fact that observability notion differs considerably from the standard systems. Important contributions on observability and observers design can be found in several papers [1],[2],[3],[4],[5],[6],[7]. On the other hand, interest in observers which are able to impose a tight bound on the estimation, coping with disturbances in the plant and measurement noise, is growing in recent times. Some important contribution on disturbance decoupling/attenuation can be seen in [8]. The use of set invariance [9] for error limitation was introduced in [10],[11] and improved in [12]. In this work, conditioned invariance of polyhedral sets for standard state-space observers is extended to descriptor ones. A descriptor

observer is then proposed, with an adequate mixed static plus delayed output injection law that enforces the error to be confined in such an invariant polyhedron. The idea is similar to that used in [13], where the state equation was re-written as a standard one, with constrained control purposes. Numerical examples are presented to illustrate the effectiveness of the proposed observer.

II. OBSERVER WITH ERROR LIMITATION

A. The observer problem

Consider the state-space model for a perturbed descriptor linear time-invariant system, subject to measurement noise on the output, given by:

$$\begin{aligned} E x(k+1) &= A x(k) + B_1 d(k) \\ y(k) &= C x(k) + \eta(k) \end{aligned} \quad (1)$$

where $x \in \mathcal{R}^n$ is the state vector, $d \in \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^p$ is a bounded disturbance, $y \in \mathcal{R}$ is the output and $\eta \in \mathcal{N} \subset \mathcal{R}$ is a bounded measurement noise. Without loss of generality, consider causal descriptor systems with the following matrices:

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix} \quad (2)$$

The problem of obtaining an observer amounts to construct a dynamic system, standard or descriptor, in such a manner that its state vector $\hat{x}(k)$ is such that, for the unperturbed system ($d, \eta \equiv 0$):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [x(k) - \hat{x}(k)] = 0 \quad (3)$$

Several works deal with this problem, and some important contributions can be found in the form of a continuous time standard observer or discrete time descriptor observer [4], descriptor continuous time proportional plus derivative [5], descriptor continuous time proportional plus integral [6] or descriptor discrete time proportional plus integral ones [7].

B. The proposed observer and conditioned invariant sets

Consider the full-order descriptor observer for (1) in the form:

$$\begin{aligned} E \hat{x}(k+1) &= A \hat{x}(k) - E v(z(k)) - P v(z(k-1)) \\ \hat{y}(k) &= C \hat{x}(k) \end{aligned} \quad (4)$$

where $v(z)$ is a suitable, possibly non-linear, output injection law, with $z = y - \hat{y}$, and

This work was partially supported by CAPES/PROAP-UFBA and CAPES/PROCAD-UFBA UFCEG.

José M. Araújo is with Universidade Federal de Campina Grande, Departamento de Engenharia Elétrica, Laboratório de Instrumentação e Controle, Rua Aprigio Veloso, S/N, Bodocongó, Campina Grande-PB, on leave of Instituto Federal da Bahia, Departamento de Tecnologia em Eletro-Eletrônica, Rua Emídio dos Santos, S/N, Barbalho, Salvador-BA jomario@ifba.edu.br

Pércles R. Barros is with Universidade Federal de Campina Grande, Departamento de Engenharia Elétrica, Laboratório de Instrumentação eletrônica e Controle, Rua Aprigio Veloso, S/N, Bodocongó, Campina Grande-PB prbarros@ufcg.edu.br

Carlos E.T. Dórea is with Universidade Federal da Bahia, Departamento de Engenharia Elétrica, Rua Aristides Novis, 2, Federação, Salvador-BA cetdorea@ufba.br

$$P = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

As already stated, only causal (consequently regular) systems will be considered. A necessary and sufficient condition for this is that matrix (A_{22}) be non-singular [14]. The estimation error dynamics is then given by

$$\begin{aligned} Ee(k+1) &= Ae(k) + B_1d(k) + Ev(z(k)) + Pv(z(k-1)) \\ z(k) &= Ce(k) + \eta(k) \end{aligned} \quad (5)$$

At this point, the following definition for conditioned invariant sets can be stated:

Definition 2.1: Given $0 < \lambda < 1$, the set $\Omega \subset \mathcal{R}^n$, is said to be conditioned-invariant λ -contractive with respect to system (5) if $\forall e(k) \in \Omega, \exists v(z(k))$ such that $e(k+1) \in \lambda\Omega, \forall d(k) \in \mathcal{D}, \forall \eta(k) \in \mathcal{N}$.

Now, a standard form for (5) is constructed. The estimation error and the output injection vector can be partitioned as:

$$e(k) = \begin{bmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \end{bmatrix}, \quad v(k) = \begin{bmatrix} v_1(z(k)) \\ v_2(z(k)) \end{bmatrix}$$

Henceforth, one can see that:

$$\begin{aligned} e_1(k+1) &= A_{11}e_1(k) + A_{12}e_2(k) + \\ &B_{11}d(k) + v_1(z(k)) + A_{12}v_2(z(k-1)), \\ 0 &= A_{21}e_1(k) + A_{22}e_2(k) + B_{12}d(k) + A_{22}v_2(z(k-1)) \end{aligned}$$

By replacing $e_2(k)$ obtained from the algebraic equation, and then advancing it by one step, the following equation comes:

$$e(k+1) = \tilde{A}e(k) + \tilde{B}_1 \begin{bmatrix} d(k) \\ d(k+1) \end{bmatrix} + \varphi(z(k)) \quad (6)$$

where:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_1 &= \begin{bmatrix} B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}B_{12} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}B_{12}) & -A_{22}^{-1}B_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

We have also that:

$$\varphi(z(k)) = Qv(z(k)), \quad Q = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & -I \end{bmatrix}$$

Since matrix Q is nonsingular, $v(z(k))$ can be directly obtained from $\varphi(z(k))$.

Let us now consider the following [10],[11],[12]. Disturbance d is supposed to belong to a compact set $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}^r$, and noise measurements to the set $\mathcal{N} = \{\eta : |\eta| \leq \bar{\eta}\}$. Ω is a compact set defined on the estimation error space whose interior contains the origin, and it induces the following set of *admissible outputs*:

$$\mathcal{Z}(\Omega) = \{z : z = Ce + \eta, e \in \Omega, \eta \in \mathcal{N}\}$$

The set of estimation errors which are consistent with each $z \in \mathcal{Z}(\Omega)$ is given by:

$$\mathcal{E}(z) = \{e : Ce = z - \eta, \eta \in \mathcal{N}\}$$

In the standard state space form, definition 2.1 can be stated as follows: a set $\Omega \subset \mathcal{R}^n$, is said to be conditioned-invariant λ -contractive with respect to system (6) if $\forall z \in \mathcal{Z}(\Omega), \exists \varphi : \tilde{A}e + \tilde{B}_1\bar{d} + \varphi \in \lambda\Omega, \forall \bar{d} = \begin{bmatrix} d & d \end{bmatrix}^T \in \mathcal{V} = \mathcal{D} \times \mathcal{D}, \forall e \in \mathcal{E}(z) \cap \Omega$.

Let now $\Omega, \mathcal{D}$ and $\mathcal{N}$ be compact, convex polyhedral sets containing the origin:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{e : Ge \leq \rho\}, \quad \mathcal{D} = \{d : Vd \leq \mu\}, \\ \mathcal{N} &= \{\eta : |\eta| \leq \bar{\eta}\}. \end{aligned}$$

The set of admissible outputs $\mathcal{Z}(\Omega)$ is a line segment in $\mathcal{R}$ given by:

$$\mathcal{Z}(\Omega) = \{z : z = Ce + \eta, e : Ge \leq \rho, \eta : |\eta| \leq \bar{\eta}\}$$

One can then see that Ω is conditioned-invariant λ -contractive if and only if, $\forall z \in \mathcal{Z}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \exists \varphi : G(\tilde{A}e + \tilde{B}_1\bar{d} + \varphi) &\leq \lambda\rho, \forall e, \eta : z = Ce + \eta, Ge \leq \\ \rho, |\eta| \leq \bar{\eta}, \forall \bar{d} = \begin{bmatrix} d & d \end{bmatrix}^T : \bar{V}\bar{d} &\leq \bar{\mu}, \bar{V} = \\ \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}, \bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \end{bmatrix} \end{aligned}$$

We now summarize the main results on polyhedral conditioned-invariance presented in [12]. Consider the vectors $\phi(\Omega, z)$ and δ :

$$\begin{aligned} \phi_i(\Omega, z) &= \max_{e, \eta} G_i \tilde{A}e \\ \text{s.t. } Ge &\leq \rho, |\eta| \leq \bar{\eta}, Ce + \eta = z \Leftrightarrow Ge \leq \rho, |Ce - z| \leq \bar{\eta} \\ \delta_i &= \max_d G_i \tilde{B}_1 \bar{d} \\ \text{s.t. } \bar{V} \bar{d} &\leq \bar{\mu} \end{aligned}$$

In terms of these vectors, the conditioned-invariance condition is given by:

$$\exists \varphi(z) : \phi(\Omega, z) + G\varphi(z) \leq \lambda\rho - \delta$$

This condition can be numerically hard to check as function $\phi(\Omega, z)$ is concave, piecewise affine. This difficulty can be overcome by using the external representation for Ω based on its vertices $e^j, j = 1, 2, \dots, n_v$. To each vertex, two break points of $\phi(\Omega, z)$ are associated: $z_-^j = Ce^j - \bar{\eta}$ and $z_+^j = Ce^j + \bar{\eta}$. Then, it is possible to define the discrete set $\mathcal{Z}(\Omega) = \{z : z = z_-^j, z = z_+^j, j = 1, \dots, n_v\}$ and its cardinality n_z . The following theorem gives a necessary and sufficient numerically tractable condition for polyhedral conditioned invariance [12]:

Theorem 1: The polyhedron $\Omega = \{Ge \leq \rho\}$ is conditioned-invariant λ -contractive if and only if:

$$\forall l = 1, \dots, n_z, \exists \varphi(z^l) : \phi(\Omega, z^l) + G\varphi(z^l) \leq \lambda\rho - \delta$$

This result comes from the fact the $\phi(\Omega, z)$ is affine in the interval $[z^l, z^{l+1}]$. Henceforth, the verification of the condition can be made by solving the following linear-programming problems:

$$\begin{aligned} \epsilon(z^l) &= \min_{\varepsilon, \varphi} \varepsilon \\ \text{s.t. } \phi(\Omega, z^l) + G\varphi &\leq \varepsilon\rho - \delta \end{aligned} \quad (7)$$

Ω is then conditioned-invariant if and only if $\forall l, \epsilon(z^l) \leq \lambda$.

$$\Lambda = \left\{ x(0^+) : \exists d(0) : \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} & B_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} & -B_{12} \\ T_1 G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0^+) \\ d(0) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_1 \rho \\ \mu \end{bmatrix} \right\}$$

When the polyhedrons Ω and $\mathcal{D}$ are symmetric with respect to the origin, the following lemma gives a necessary condition for conditioned-invariance of Ω :

Lemma 2.1: $\Omega = e : |Qe| \leq \rho$ is conditioned-invariant λ -contractive only if:

$$\phi(\Omega, 0) \leq \lambda\rho - \delta \quad (8)$$

In this lemma, Although this is only a necessary condition, it is much easier to check than the necessary and sufficient conditions of theorem 2.1, because it does not require vertex computation. Moreover, it turns out to be sufficient as well when $p = n - 1$ (the number of outputs is equal to the number of states minus one) [11].

We are now interested in constructing a conditioned-invariant polyhedron which contains the set of possible initial errors Ω , assumed to be a 0-symmetric convex and compact polyhedron. Ideally, such a polyhedron should be as small as possible in order to impose the tightest limitation on the estimation error. Such a set can be computed by a judicious use of the following algorithms:

Algorithm 1: $X^{k+1} = \text{conv}[\lambda^{-1}R(X^k) \cup X^k]$, with: $R(X^k) = \tilde{A}(\mathcal{E}(0) \cap X^k) + \tilde{B}_1\mathcal{V}$, $X^0 = \Omega$.

Remark 1: In [12] it is shown that the set $X^\infty(\Omega, \lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} X^k$ is the minimal symmetric convex set containing Ω which satisfies the necessary condition $\tilde{A}(\mathcal{E}(0) \cap X) + \tilde{B}_1\mathcal{V} \subset \lambda X$ (Lemma 2.1). It is then a candidate to be the minimal conditioned-invariant set that containing Ω . Furthermore, for the particular case where $p = n - 1$ and measurement noise is absent, the set $X^\infty(\Omega, \lambda)$ is actually the minimal conditioned invariant set containing Ω .

In the general case, if $X^\infty(\Omega, \lambda)$ is not invariant, another algorithm (Algorithm 2 in [10] and [12]) can be used, which delivers a small polyhedron, not necessarily the minimal one, which may not even exist in the general case.

With a conditioned-invariant polyhedron at hand, an output injection law that assures error limitation must be computed, and some possibilities are:

- 1) The online solution, at each step, of the linear programming problem:

$$\begin{aligned} & \min_{\varepsilon, \varphi(k)} \varepsilon \\ & \text{s.t. } \phi(\Omega, z(k)) + G\varphi(k) \leq \varepsilon\rho - \delta \end{aligned}$$

- 2) An explicit time-varying, piecewise-affine output injection law computed off-line, in the form:

$$\varphi(z(k), k) = L^j z(k) + \lambda^k w^j$$

where $L^j \in \mathcal{R}^n$ and $w^j \in \mathcal{R}^n$ are constant for $z^j \leq z(k) \leq z^{j+1}$, with $z^j \in \mathcal{Z}(\Omega)$.

Remark 2: For a given conditioned-invariant set Ω , due to the presence of disturbance and measurement noise, only $e(k) \in \Omega$ is assured $\forall k$. However, it is possible to enforce the error to converges to a small conditioned-invariant set $\beta^{-1}\Omega$, $\beta \geq 1$, by a suitable adjust of the output injection law. Further details can be seen in [12].

III. ADMISSIBLE INITIAL ERROR

A key issue of the proposed observer for error limitation purposes concerns the initialization. The initial state of the systems is unknown, but a reasonable hypothesis is that it belongs to a given region, now characterized. Let us initialize the estimated state as $\hat{x}(0) = 0$, and assume that the initial state of the system belongs to a known region Ψ containing the origin. It can be easily shown by means of a fast-slow decomposition that the state x_1 does not experiment jumps for $k = 0$ [13],[14]. The state partition x_2 , however, must be consistent with the algebraic equation:

$$0 = A_{21}x_1(0) + A_{22}x_2(0) + B_{12}d(0)$$

Henceforth, a finite jump can occur if $x_2(0)$ is not consistent with the algebraic equation. The initial state before jump is noted by $x_2(0^-)$ and after jump $x_2(0^+)$. Due to the random nature of the disturbance d a characterization of the set that contains the initial state after jump is necessary. Let the following compact polyhedron characterize the initial state before jump:

$$\Upsilon = \left\{ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0^-) \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0^-) \end{bmatrix} \leq \rho \right\} \quad (9)$$

One can then compute a positive projection matrix T_1 using e.g. Fourier-Motzkin elimination technique [15], in order to eliminate G_2 , i.e., $T_1 G_2 = 0$. The projected polyhedron $T_1 G_1 x_1 \leq T_1 \rho$ can be aggregated to the algebraic equation and to the polyhedron of the disturbance, resulting the set at the top of page. Again, one can eliminate the disturbance d by means of a positive projection matrix T_2 , and the final polyhedron obtained is given by:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0^+) \end{bmatrix} : T_2 \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ -A_{21} & -A_{22} \\ T_1 G_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0^+) \end{bmatrix} \leq T_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_1 \rho \\ \mu \end{bmatrix} \right\}$$

Since the observer is initialized with zeros, the initial error belongs to such polyhedron. Then, for error limitation purposes, a conditioned invariant polyhedron as small as possible that contains Ψ can be computed.

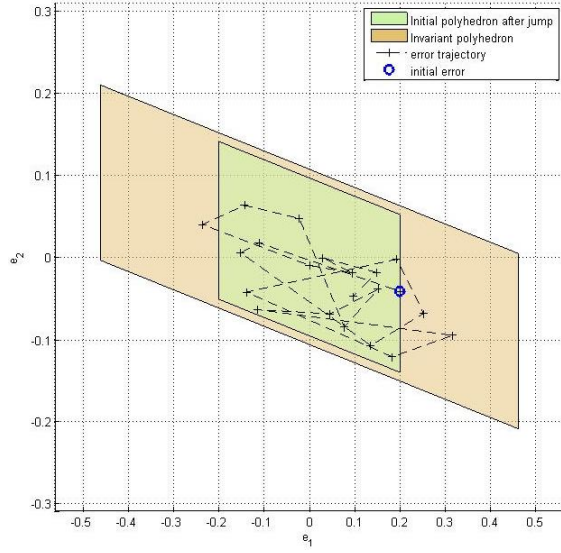


Fig. 1. Polyhedrons for example 1 with an error trajectory

IV. NUMERICAL EXAMPLES

In this section two examples are given in order to illustrate the concepts discussed in the previous sections. First, consider the descriptor systems with matrices:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1.1153 & 0.0399 \\ -0.5500 & -2.4828 \end{bmatrix}, \\ B_1 = \begin{bmatrix} -1.1465 \\ 1.1909 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 1.1892 \\ -0.0376 \end{bmatrix}$$

The random disturbance is bounded as $|d| \leq 0.2$ and the measurement noise as $|\eta| \leq 0.2$. Considering that before the jump the initial state belongs to the symmetrical polyhedron $|Q|e \leq \rho$, with $Q = I_2$, $\rho = [0.2 \ 0.2]^T$, the procedure in section III gives the following after jump symmetrical polyhedron:

$$\{G_a e \leq \rho_a\}, G_a = \begin{bmatrix} 0.2510 & 1.1332 \\ -0.2510 & -1.1332 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \rho_a = \begin{bmatrix} 0.1087 \\ 0.1087 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

The original polyhedron is not invariant, then the minimal one containing it was computed using the algorithm described in section II, for a contraction rate $\lambda = 0.9$. Also, a linear output injection law is achieved in this case with the gain given by $L = [0.9387 \ -0.2079]^T$.

Figure 1 depicts the polyhedra and an error trajectory initiated in the original polyhedron. In this example, with a linear output injection, one can analyze the closed-loop structure for the error dynamics both in standard and descriptor form. In standard form, the eigenvalues of closed-loop matrix $\tilde{A} + LC$ are both placed in the origin, and the error dynamics is *deadbeat*-like.

Equivalently, if the analysis of the closed-loop behavior is carried out in descriptor form, one can confirm that the closed-loop pencil $zE - (A + EQ^{-1}LC) - z^{-1}PQ^{-1}LC$ has a double root $z = 0$, which is consistent with the analysis in standard form.

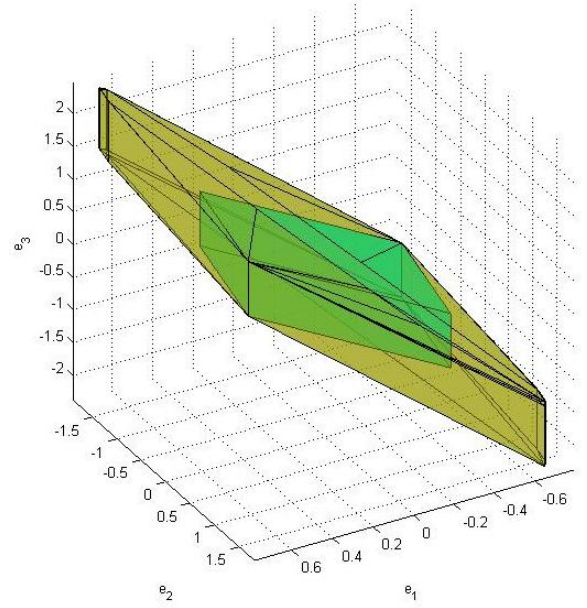


Fig. 2. Polyhedrons for example 2

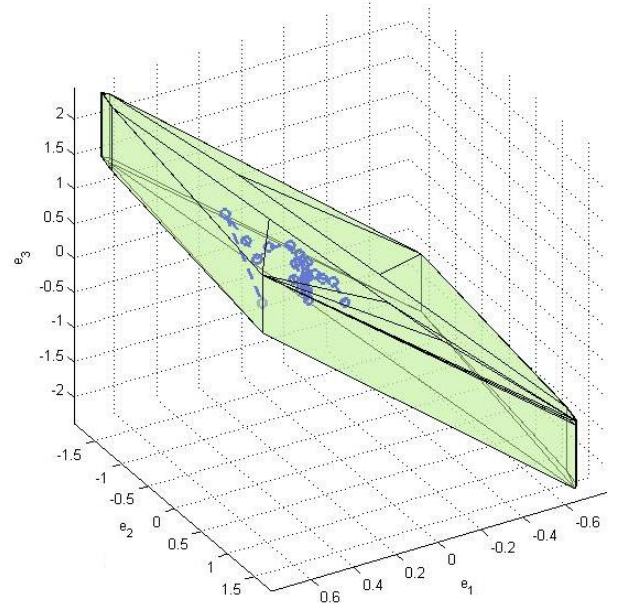


Fig. 3. Invariant polyhedron from example 2 with an error trajectory

As a second example, consider the system given in [13],[16], with $u(k) = 0$. An output is added and the system matrices are:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 & 0 \\ -1 & -0.7 & -1 \\ 2 & -0.5 & -1.2 \end{bmatrix}, \\ B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Severe disturbance and noise measurement are assumed, with $|d| \leq 0.5$ and $|\eta| \leq 0.5$. Like in the previous example, a symmetrical polyhedron is considered before the jump, with $Q = I_3$, $\rho = [0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$. The polyhedron of after jump initial error is given by:

$$\{G_a e \leq \rho_a\}, G_a = \begin{bmatrix} 1 & -0.25 & -0.6 \\ -1 & 0.25 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \rho_a = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

With a contraction rate $\lambda = 0.9$, the invariant polyhedron is shown at Figure 2, together with the original one. A time-variant, piecewise affine output injection law is obtained for this case, given by:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -0.0640 \\ 0.0376 \\ -0.1240 \end{bmatrix} z(k) + (0.9)^k \begin{bmatrix} -0.0022 \\ -0.0070 \\ 0.0014 \end{bmatrix}, & 0 \leq |z| < 2.6580 \\ \begin{bmatrix} -0.1764 \\ 0.2713 \\ -0.4071 \end{bmatrix} z(k) + (0.9)^k \begin{bmatrix} -0.2073 \\ 0.5363 \\ -0.5565 \end{bmatrix}, & 2.6508 \leq |z| \leq 5.3160 \end{cases}$$

Figure 3 depicts a state trajectory starting from the conditioned-invariant polyhedron, for which the error, as expected, does not escape from within.

V. CONCLUSION AND FUTURE WORKS

An extension of set-invariance based techniques for design of observers with error limitation was proposed for discrete-time descriptor systems. Such extension was possible due to a suitable structure for the observer, introduced in this work. A discussion was carried out on the admissibility of initial states, and a characterization of the polyhedron of initial estimation error after jump was given. Future work related to this study concerns $l_\infty - l_\infty$ filtering design and the use of invariant observers for designing output feedback controllers for constrained descriptor systems.

REFERENCES

- [1] D. G. Luenberger, "Observing state of linear system," *IEEE Transactions on Military Electronics*, vol. MIL8, no. 2, pp. 74-77, (1964).
- [2] D.G. Luenberg, "Observers for multivariable systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC11, no. 2, pp. 190-194, (1966).
- [3] D. Cobb, "Controllability, observability, and duality in singular systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 29, no. 12, pp. 1076-1082 (1984).
- [4] L. Dai, "Observers for discrete singular systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 33, no. 2, pp. 187-191, Feb, (1988).
- [5] A. G. Wu, and G. R. Duan, "Design of PD observers in descriptor linear systems", *International Journal of Control Automation and Systems*, vol. 5, no. 1, pp. 93-98 (2007).
- [6] A. G. Wu, G. R. Duan, and Y. M. Fu, "Generalized PID observer design for descriptor linear systems", *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Part B-Cybernetics*, vol. 37, no. 5, pp. 1390-1395 (2007).
- [7] A. G. Wu, G. R. Duan, J. Dong et al., "Design of proportional-integral observers for discrete-time descriptor linear systems", *IET Control Theory and Applications*, vol. 3, no. 1, pp. 79-87 (2009).
- [8] V.G. Da Silva, S. Tarbouriech, E.B. Castelan, G. Garcia, "Concerning the project of decoupled observers of perturbation for descriptor systems", *Controle y Automacao*, 18 (4), pp. 423-433 (2007).
- [9] F. Blanchini, "Set invariance in control", *Automatica*, vol. 35, no. 11, pp. 1747-1767 (1999).
- [10] C.E.T. Dórea and A.C.C. Pimenta, "Set-invariant estimators for linear systems subject to disturbances and measurement noise", in *Proc. 16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic (2005).
- [11] C.E.T. Dórea, A.C.C. Pimenta, "Design of set-invariant estimators for linear discrete-time systems", in *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*, CDC-ECC '05, 2005, pp. 7235-7240 (2005).
- [12] C.E.T. Dórea, "Set-Invariant Estimators for Single-Output Linear Discrete-Time Systems", submitted for publication, available on demand, pp. 1-20 (2010).
- [13] J.M. Araújo and C.E.T. Dórea, "Controlled-invariant Polyhedral Sets for Constrained Discrete-Time Descriptor Systems", in *Proceedings of 1st Doctoral Conference on Computing, Electrical and Industrial Systems*, pp. 385-392 (2009).
- [14] L. Dai, *Singular control systems*, Springer-Verlag, New York (1989).
- [15] A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley and Sons, Chichester, England, 1987.
- [16] E.B. Castelan and S. Tarbouriech, "Simple and weak Δ -invariant polyhedral sets for discrete-time singular systems". *Controle and Automacao*, vol. 14, no.4, pp. 339-347 (2003).

Design of Observers With Error Limitation in Discrete-Time Descriptor Systems: A Case Study of a Hydraulic Tank System

José M. Araújo, *Student Member, IEEE*, Péricles R. Barros, and Carlos E. T. Dórea

Abstract—A novel descriptor observer structure is proposed in the context of discrete-time descriptor linear systems. On the basis of this new structure, the characterization of conditioned-invariant polyhedral sets with the purpose of limiting the estimation error is carried out. Limitation of the estimation error can be achieved by the computation of an as small as possible conditioned-invariant polyhedron, that contains the set of possible initial errors, and by a suitable output injection law. The approach is applied to an experimental tanks platform, for which a descriptor model is identified and validated. The obtained results confirm the merits of the proposed observer for applications in this kind of systems.

Index Terms—Descriptor systems, hydraulic accumulators, observers, set invariance.

I. INTRODUCTION

THE state estimation problem plays a central role in control systems theory and applications. The first important contribution on the theme can be found in the work of Luenberger [1], [2]. In the case of descriptor systems, this issue is a little bit more involved, due to the fact that observability notion differs considerably from the observability of standard systems. Contributions on observability and observers design can be found in several papers [1]–[7].

On the other hand, interest in observers which are able to impose a tight bound on the estimation error, coping with persistent disturbances in the plant and measurement noise, is growing in recent times. This is the case of the approaches based on the so-called set-valued observers [8], [9]. Considering discrete-time linear systems, for each time instant, the set of states consistent with the measured outputs (or an outer approximation of

it [10]) is computed and a point-wise optimal state is selected. Since such a set has to be computed online, the computational burden can be excessive, and its practical implementation in fast systems can become unfeasible.

As an alternative, full-order state observers can be constructed in order to confine the trajectory of the estimation error into a so-called (C,A)-invariant or conditioned-invariant polyhedron [11]–[13]. Conditioned-invariance is defined as the possibility of keeping the estimation error in a given set in spite of the action of unknown-but-bounded disturbances and noise. Examples of applications that benefit from such error bounded estimators are the design of filters for systems subject to unknown-but-bounded disturbances and noise [14], and the design of output feedback dynamic compensators for constrained linear systems, whose construction uses conditioned-invariant polyhedral sets, associated to observers with error limitation [15].

This work is an extended version of [16] and includes novel experimental results. Here, we address the problem of designing state observers with error limitation for causal linear discrete-time descriptor systems subject to unknown-but-bounded disturbances and measurement noise. First we propose a particular descriptor observer structure under which we show that conditioned-invariant polyhedral sets can be computed from the algorithms developed for standard linear systems. Then, the proposed technique is applied to a hydraulic tank system [17]. The experimental results confirm the feasibility of using this technique to this kind of system.

II. OBSERVER WITH ERROR LIMITATION

A. Observer Problem

Consider the state-space model for a perturbed descriptor linear time-invariant system, subject to measurement noise on the output, given by

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k) + B_1 d(k) \\ y(k) &= Cx(k) + \eta(k) \end{aligned} \quad (1)$$

where $x \in \mathcal{R}^n$ is the state vector, $d \in \mathcal{D} \subset \mathcal{R}^p$ is a bounded disturbance, $y \in \mathcal{R}$ is the output and $\eta \in \mathcal{N} \subset \mathcal{R}$ is a bounded measurement noise. Without loss of generality, consider causal descriptor systems with the following matrices:

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

The problem of obtaining an observer amounts to constructing a dynamic system, standard or descriptor, in such a manner that its state vector $\hat{x}(k)$ is such that, for the unperturbed system ($d, \eta \equiv 0$), $\lim_{k \rightarrow \infty} [x(k) - \hat{x}(k)] = 0$.

Manuscript received April 04, 2011; revised June 02, 2011; accepted June 05, 2011. Manuscript received in final form June 08, 2011. Recommended by Associate Editor N. K. Kazantzis. This work was supported in part by CAPES/PROAP-UFBA, CAPES/PROCAD-UFBA UFCG, PRPGI-IFBA, and FAPESB.

J. M. Araújo was with the Universidade Federal de Campina Grande, Departamento de Engenharia Elétrica, Laboratório de Instrumentação e Controle, Rua Aprígio Veloso, S/N, 58429-900, Campina Grande-PB, Brazil. He is now with the Instituto Federal da Bahia, Departamento de Tecnologia em Eletro-Eletrônica, Rua Emídio dos Santos, S/N, 40301-015, Salvador-BA, Brazil, and also with the Universidade Federal da Bahia, Prog. de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Rua Aristides Novis, 02, 40210-910, Salvador-BA, Brazil (e-mail: jomario@ifba.edu.br).

P. R. Barros is with the Universidade Federal de Campina Grande, Departamento de Engenharia Elétrica, Laboratório de Instrumentação Eletrônica e Controle, Rua Aprígio Veloso, S/N, 58429-900, Campina Grande-PB, Brazil (e-mail: prbarros@ufcg.edu.br).

C. E. T. Dórea is with the Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Departamento de Engenharia de Computação e Automação, 59870-900 Natal-RN, Brazil (e-mail: cetdorea@dca.ufrn.br).

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online at <http://ieeexplore.ieee.org>.

Digital Object Identifier 10.1109/TCST.2011.2159719

Several works deal with this problem, and some important contributions can be found in the form of a continuous time standard observer or discrete-time descriptor observer [4], descriptor continuous-time proportional plus derivative [5], descriptor continuous-time proportional plus integral [6], or descriptor discrete-time proportional plus integral ones [7].

B. Proposed Observer and Conditioned-Invariant Sets

Consider the full-order descriptor observer for (1), in the form

$$\begin{aligned} E\hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) - Ev(z(k)) - Pv(z(k-1)) \\ \hat{y}(k) &= C\hat{x}(k) \end{aligned} \quad (3)$$

where $v(z)$ is a suitable, possibly nonlinear, output injection law, with $z = y - \hat{y}$, and

$$P = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}.$$

As already stated, only causal (consequently regular) systems will be considered. A necessary and sufficient condition for this is that matrix A_{22} be non-singular [18]. The estimation error dynamics is then given by

$$\begin{aligned} Ee(k+1) &= Ae(k) + B_1d(k) + Ev(z(k)) + Pv(z(k-1)) \\ z(k) &= Ce(k) + \eta(k). \end{aligned} \quad (4)$$

At this point, the following definition of conditioned-invariant sets can be stated.

Definition 2.1: Given $0 < \lambda < 1$, the set $\Omega \subset \mathcal{R}^n$, is said to be conditioned-invariant λ -contractive with respect to system (4) if $\forall e(k) \in \Omega, \exists v(z(k))$ such that $e(k+1) \in \lambda\Omega, \forall d(k) \in \mathcal{D}, \forall \eta(k) \in \mathcal{N}$.

Now, a standard form for (4) is constructed. The estimation error and the output injection vector can be partitioned as $e(k) = \begin{bmatrix} e_1(k) \\ e_2(k) \end{bmatrix}$, $v(k) = \begin{bmatrix} v_1(z(k)) \\ v_2(z(k)) \end{bmatrix}$. Hence, one can see that

$$\begin{aligned} e_1(k+1) &= A_{11}e_1(k) + A_{12}e_2(k) + B_{11}d(k) + v_1(z(k)) \\ &\quad + A_{12}v_2(z(k-1)) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} 0 &= A_{21}e_1(k) + A_{22}e_2(k) + B_{12}d(k) \\ &\quad + A_{22}v_2(z(k-1)). \end{aligned} \quad (6)$$

From (6) and the assumption that the system is causal, $e_2(k+1)$ can be written as

$$e_2(k+1) = -A_{22}^{-1}A_{21}e_1(k+1) - A_{22}^{-1}B_{12}d(k+1) - v_2(z(k)). \quad (7)$$

By replacing (5) in (7), and aggregating $e_1(k+1)$ back, the following equation comes:

$$e(k+1) = \tilde{A}e(k) + \tilde{B}_1 \begin{bmatrix} d(k) \\ d(k+1) \end{bmatrix} + \varphi(z(k)) \quad (8)$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}) & 0 \end{bmatrix} \\ \tilde{B}_1 &= \begin{bmatrix} B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}B_{12} & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21}(B_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}B_{12}) & -A_{22}^{-1}B_{12} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

We have also that

$$\varphi(z(k)) = Qv(z(k)), \quad Q = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{22}^{-1}A_{21} & -I \end{bmatrix}.$$

Since matrix Q is nonsingular, $v(z(k))$ can be uniquely obtained from $\varphi(z(k))$.

Let us now assume the following [11]–[13]: disturbance d is supposed to belong to a compact set $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}^r$, and noise measurements to the set $\mathcal{N} = \{\eta : |\eta| \leq \bar{\eta}\}$. Ω is a compact set defined on the estimation error space whose interior contains the origin, and it induces the following set of *admissible outputs*:

$$\mathcal{Z}(\Omega) = \{z : z = Ce + \eta, e \in \Omega, \eta \in \mathcal{N}\}.$$

The set of estimation errors which are consistent with each $z \in \mathcal{Z}(\Omega)$ is given by

$$\mathcal{E}(z) = \{e : Ce = z - \eta, \eta \in \mathcal{N}\}.$$

In the standard state space form, definition 2.1 can be stated as follows: a set $\Omega \subset \mathcal{R}^n$, is said to be conditioned-invariant λ -contractive with respect to system given by (8) if

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathcal{Z}(\Omega), \exists \varphi : \tilde{A}e + \tilde{B}_1\bar{d} + \varphi &\in \lambda\Omega \\ \forall \bar{d} = \begin{bmatrix} d_l \\ d_m \end{bmatrix} \in \mathcal{V} = \mathcal{D} \times \mathcal{D}, \forall e \in \mathcal{E}(z) \cap \Omega. \end{aligned} \quad (9)$$

Let now Ω , $\mathcal{D}$, and $\mathcal{N}$ be compact, convex polyhedral sets containing the origin

$$\Omega = \{e : Ge \leq \rho\}, \mathcal{D} = \{d : Vd \leq \mu\}, \mathcal{N} = \{\eta : |\eta| \leq \bar{\eta}\}$$

where $G \in \mathcal{R}^{r \times n}$, $\rho \in \mathcal{R}^r$, $V \in \mathcal{R}^{s \times p}$, $\mu \in \mathcal{R}^s$. The set of admissible outputs $\mathcal{Z}(\Omega)$ is a line segment in $\mathcal{R}$ given by

$$\mathcal{Z}(\Omega) = \{z : z = Ce + \eta, e : Ge \leq \rho, \eta : |\eta| \leq \bar{\eta}\}.$$

One can then see that Ω is conditioned-invariant λ -contractive if and only if

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathcal{Z}(\Omega), \exists \varphi : G(\tilde{A}e + \tilde{B}_1\bar{d} + \varphi) &\leq \lambda\rho \\ \forall e, \eta : z = Ce + \eta, Ge \leq \rho, |\eta| \leq \bar{\eta}, \forall \bar{d} : \bar{V}\bar{d} &\leq \bar{\mu} \end{aligned} \quad (10)$$

where

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}, \quad \bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \end{bmatrix}.$$

We now summarize the main results on polyhedral conditioned-invariance presented in [11]–[13]. Consider the vectors $\phi(\Omega, z)$ and δ given by

$$\begin{aligned}
\phi_i(\Omega, z) &= \max_e G_i \tilde{A}e = \max_{e \in \Omega \cap \mathcal{E}(z)} G_i \tilde{A}e \\
&\text{s.t. } Ge \leq \rho, |Ce - z| \leq \bar{\eta} \\
\delta_i &= \max_{\tilde{d}} G_i \tilde{B}_1 \tilde{d} = \max_{\tilde{d} \in \mathcal{V}} G_i \tilde{B}_1 \tilde{d} \\
&\text{s.t. } \bar{V} \tilde{d} \leq \bar{\mu}.
\end{aligned}$$

Since (10) should be satisfied $\forall e \in \Omega \cap \mathcal{E}(z)$ and $\forall \tilde{d} \in \mathcal{V}$, then, one can consider the worst case row-by-row. That is, ϕ_i and δ_i model, respectively, the worst case due to the estimation error associated with a given output and to the uncertainty on the disturbance value. In terms of these vectors, conditioned-invariance of Ω amounts to

$$\forall z \in \mathcal{Z}(\Omega), \exists \varphi(z) : \phi(\Omega, z) + G\varphi(z) \leq \lambda\rho - \delta.$$

This condition can be numerically hard to check since function $\phi(\Omega, z)$ is concave and piecewise affine. This difficulty can be overcome by using the external representation for Ω based on its vertices $e^j, j = 1, 2, \dots, n_v$. To each vertex, two break points of $\phi(\Omega, z)$ are associated: $z_-^j = Ce^j - \bar{\eta}$ and $z_+^j = Ce^j + \bar{\eta}$. Then, it is possible to define the discrete set $\mathcal{Z}_d(\Omega) = \{z : z = z_-^j, z = z_+^j, j = 1, \dots, n_v\}$ and its cardinality n_z . The following theorem gives a necessary and sufficient numerically tractable condition for polyhedral conditioned invariance [12], [13].

Theorem 2.1: The polyhedron $\Omega = \{Ge \leq \rho\}$ is conditioned-invariant λ -contractive if and only if

$$\forall l = 1, \dots, n_z, \exists \varphi(z^l) : \phi(\Omega, z^l) + G\varphi(z^l) \leq \lambda\rho - \delta.$$

This result comes from the fact the $\phi(\Omega, z)$ is affine in the interval $[z^l, z^{l+1}]$. Hence, the verification of the condition can be made by solving the following linear-programming problems:

$$\begin{aligned}
\epsilon(z^l) &= \min_{\epsilon, \varphi} \epsilon \\
&\text{s.t. } \phi(\Omega, z^l) + G\varphi \leq \epsilon\rho - \delta.
\end{aligned} \tag{11}$$

Ω is then conditioned-invariant if and only if $\forall l, \epsilon(z^l) \leq \lambda$. Notice that if a given polyhedron is conditioned-invariant with contraction rate λ , the feasibility and boundedness of the set of linear programming in (11) is guaranteed, i.e., $\sup_l \epsilon(z^l) = \lambda$.

When the polyhedra Ω and $\mathcal{D}$ are symmetric with respect to the origin, the following lemma gives a necessary condition for conditioned-invariance of Ω .

Lemma 2.1: $\Omega = \{e : |Ge| \leq \rho\}$ is conditioned-invariant λ -contractive only if

$$\phi(\Omega, 0) \leq \lambda\rho - \delta. \tag{12}$$

Although this is only a necessary condition, it is much easier to check than the necessary and sufficient conditions of Theorem 2.1, because it does not require vertex computation. Moreover, it turns out to be sufficient as well when $q = n - 1$ (the number of outputs is equal to the number of states minus one) [12].

We are now interested in constructing a conditioned-invariant polyhedron which contains the set of possible initial errors Ω , assumed to be a 0-symmetric convex and compact polyhedron. Ideally, such a polyhedron should be as small as possible in order to impose the tightest limitation on the estimation error. Such a set can be computed by a judicious use of the following algorithms.

Algorithm 2.1: $X^{k+1} = \text{conv}[\lambda^{-1}R(X^k) \cup X^k]$, with: $R(X^k) = \tilde{A}(\mathcal{E}(0) \cap X^k) + \tilde{B}_1\mathcal{V}$, $X^0 = \Omega$.

Where $\text{conv}(\cdot)$ stands for the convex hull.

Theorem 2.2: The set $X^\infty(\Omega, \lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} X^k$ is the minimal symmetric convex compact set containing Ω which satisfies the necessary condition $\tilde{A}(\mathcal{E}(0) \cap X) + \tilde{B}_1\mathcal{V} \subset \lambda X$.

The necessary condition in Theorem 2.2 is a geometric version for the Lemma 2.1. The set $X^\infty(\Omega, \lambda)$ is then a candidate to be the minimal conditioned-invariant set containing Ω . Furthermore, for the particular case where $q = n - 1$ and measurement noise is absent, the set $X^\infty(\Omega, \lambda)$ is actually the minimal conditioned-invariant convex set containing Ω [12]. The proof of Theorem 2.2 is given in the Appendix.

In the general case, if $X^\infty(\Omega, \lambda)$ is not invariant with contraction rate λ , another algorithm can be used, which delivers a small polyhedron, not necessarily the minimal one. The minimal one may not even exist in the general case, but starting from $X^\infty(\Omega, \lambda)$, this second algorithm delivers an as small as possible conditioned-invariant λ -contractive polyhedron containing Ω .

Consider then the following optimization problem, whose constraints are a geometric version of those in (10)

$$\begin{aligned}
\epsilon(X, z) &= \min_{\epsilon, \varphi} \epsilon \\
&\text{s.t. } \tilde{A}(\mathcal{E}(z) \cap X) + \varphi + \tilde{B}_1\mathcal{V} \subset \epsilon X.
\end{aligned} \tag{13}$$

The following algorithm computes an as small as possible conditioned-invariant λ -contractive polyhedron S^∞ , starting from $X^\infty(\Omega, \lambda)$, containing Ω .

Algorithm 2.2:

$$S^{k+1} = \text{conv}\{\lambda^{-1}[\bigcup_{z \in \mathcal{Z}_u(S^k, \lambda)} R_e(S^k, z)] \cup S^k\}$$

where $R_e(S^k, z) = \tilde{A}[\mathcal{E}(z) \cap S^k] + \varphi^k(z) + \tilde{B}_1\mathcal{V}$, $\varphi^k(z)$ is the optimizer of (13) with

$$\begin{aligned}
X &= S^k, \mathcal{Z}_u(S^k, \lambda) = \{z \in \mathcal{Z}_d(S^k) : \epsilon(S^k, z) > \lambda\} \\
S^0 &= X^\infty(\Omega, \lambda).
\end{aligned}$$

Theorem 2.3: Suppose there exists $\mu < \lambda$ such that $X_\mu = X^\infty(\Omega, \mu)$ is conditioned-invariant with contraction rate λ . Then, $S^\infty(X_\lambda, \lambda) \subset X_\mu$, and $S^\infty(X_\lambda, \lambda)$ is a conditioned-invariant set containing Ω , with contraction rate λ , where $X_\lambda = X^\infty(\Omega, \lambda)$.

Proof: See the Appendix.

Remark 2.1: Efficient numerical packages for the implementation of Algorithms 2.1 and 2.2, such as CDDMEX [19], [20], can be used for the computational steps involving operations

with polyhedral sets. For further details on their computational implementation, the reader is referred to [11] and [12].

We assume henceforth that a conditioned-invariant polyhedron Γ , obtained from Algorithm 2.1 or Algorithm 2.2 is available. An output injection law that assures error limitation must be computed, and some possibilities are [11]–[13] as follows.

- 1) The online solution, at each step, of the linear programming problem

$$\begin{aligned} \min_{\varepsilon, \varphi(k)} \quad & \varepsilon \\ \text{s.t.} \quad & \phi(\Gamma, z(k)) + G\varphi(k) \leq \varepsilon\rho - \delta. \end{aligned} \quad (14)$$

- 2) An explicit time-varying, piecewise-affine output injection law computed offline, in the form

$$\varphi(z(k), k) = L^j z(k) + \lambda^k w^j \quad (15)$$

where $L^j \in \mathcal{R}^n$ and $w^j \in \mathcal{R}^n$ are constant for $z^j \leq z(k) \leq z^{j+1}$, with $z^j \in \mathcal{Z}(\Gamma)$.

Remark 2.2: For a given conditioned-invariant set Γ , due to the presence of disturbance and measurement noise, only $e(k) \in \Gamma$ is assured $\forall k$. However, it is possible to enforce the error to converges to a small conditioned-invariant set $\beta^{-1}\Gamma$, $\beta \geq 1$, by a suitable adjustment of the output injection law in (15) [13].

III. ADMISSIBLE INITIAL ERROR

A key issue of the proposed observer for error limitation purposes concerns the initialization. The initial state of the systems is unknown, but a reasonable hypothesis is that it belongs to a given region, now characterized. Let us initialize the estimated state as $\hat{x}(0) = 0$, and assume that the initial state of the system belongs to a known region Υ containing the origin. It can be easily shown by means of a fast-slow decomposition that the state x_1 does not undergo a jump for $k = 0$ [18]. The state x_2 , however, must be consistent with the algebraic equation

$$0 = A_{21}x_1(0) + A_{22}x_2(0) + B_{12}d(0).$$

Hence, a finite jump can occur if $x_2(0)$ is not consistent with the algebraic equation. The initial state before jump is noted by $x_2(0^-)$ and after jump $x_2(0^+)$. Due to the random nature of the disturbance d a characterization of the set that contains the initial state after jump is necessary. We consider that the initial state before the jump belongs to the set of state constraints $\Omega = \{Gx \leq \rho\}$

$$\Upsilon = \left\{ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0^-) \end{bmatrix} : [G_1 \quad G_2] \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0^-) \end{bmatrix} \leq \rho \right\}. \quad (16)$$

One can then compute a nonnegative projection matrix T_1 using, e.g., Fourier-Motzkin elimination technique [21], in order to eliminate G_2 , i.e., $T_1 G_2 = 0$. The projected polyhedron $T_1 G_1 x_1 \leq T_1 \rho$ can be aggregated to the algebraic equation and to the polyhedron of the disturbance, resulting in the set of possible states after jump



Fig. 1. Experimental platform.

$$\Lambda = \left\{ x(0^+) : \exists d(0) : \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} & B_{12} \\ -A_{21} & -A_{22} & -B_{12} \\ T_1 G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0^+) \\ d(0) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_1 \rho \\ \mu \end{bmatrix} \right\}.$$

Again, one can eliminate the disturbance d by means of a positive projection matrix T_2 , and the final polyhedron obtained is given by

$$\Lambda^* = \left\{ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0^+) \end{bmatrix} : T_2 \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ -A_{21} & -A_{22} \\ T_1 G_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0^+) \end{bmatrix} \leq T_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_1 \rho \\ \mu \end{bmatrix} \right\}.$$

If the observer is initialized with zeros, the initial error is assured to belong to the polyhedron Λ^* . Then, for error limitation purposes, a conditioned-invariant polyhedron, as small as possible, that contains Λ^* can be computed.

IV. EXPERIMENTAL PLATFORM AND SYSTEM MODEL

A. Platform

A highly flexible, fully instrumented, experimental platform for tanks level control [17] seen in Fig. 1 was used to set up a descriptor model, obtained by linearizing the schematics of Fig. 2 around a stationary operating point. The platform is equipped with pressure based level transmitters in tank 1 and tank 2, and the actuator is a pump plus frequency converter set. Using OPC MATLAB resources, an Allen-Bradley PLC system performs the

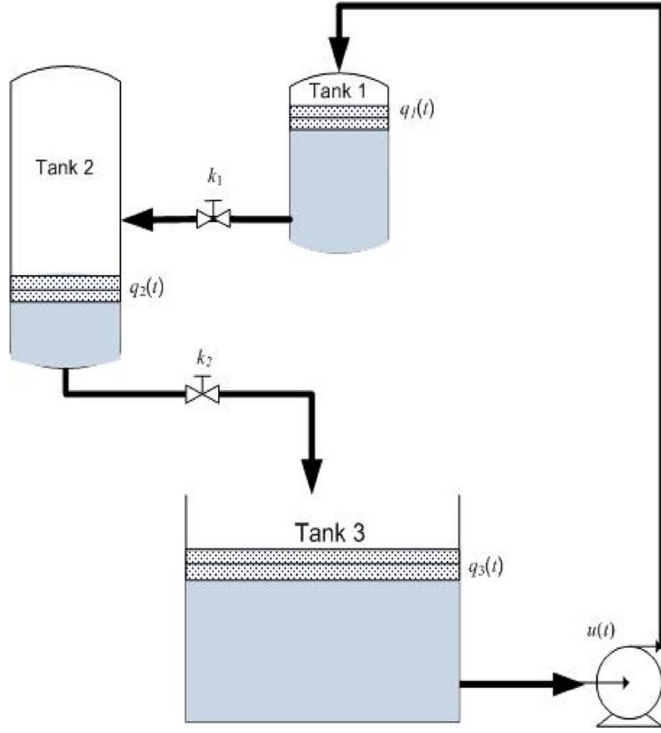


Fig. 2. Assembled system with three tanks.

control. The MATLAB files run in real time via OPC, in a station with an Intel Core i7 CPU @ 2.67 GHz, 4 Gb RAM memory.

The descriptor, linear model of the system taking absolute variables is given by

$$\begin{aligned} E\dot{\mathbf{q}}_a(t) &= A\mathbf{q}_a(t) + Bu_a(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{q}_a(t) + \eta_a(t) \end{aligned} \quad (17)$$

where $\mathbf{q}_a = [q_{a1} \ q_{a2} \ q_{a3}]^T$ is the state vector consisting of the volumes in the tanks, u_a is the pump flow

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

The output matrix C is dependent on the levels that are measured, and $\eta(t)$ is the measurement noise. This is a descriptor system, and the equation given by the third row of the system is easily justified by the mass balance principle, as that the system does not gain or lose material to the exterior [22], [23]

$$q_{a1}(t) + q_{a2}(t) + q_{a3}(t) = 0. \quad (18)$$

B. Use of a Descriptor Model

A question arises at this point: why use a descriptor model for the observer design, instead of a standard state space model? To answer this question, consider the following non-descriptor (standard) model for the system of Fig. 2:

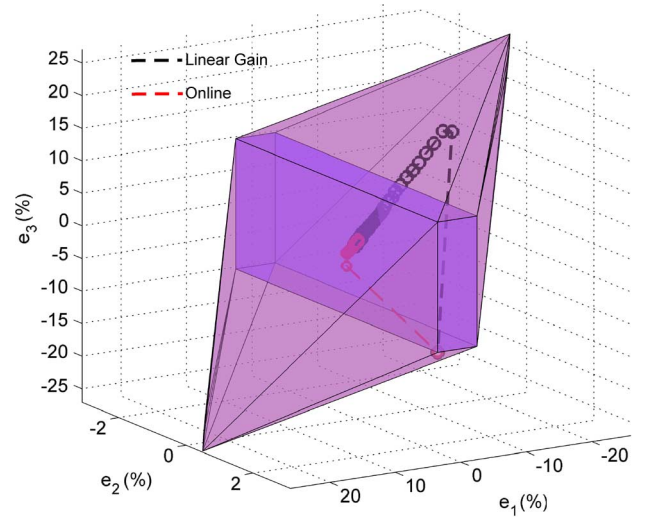


Fig. 3. Polyhedra of the case study with error trajectories obtained with linear gain and with online output injection law.

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{a1}(t) \\ \dot{q}_{a2}(t) \\ \dot{q}_{a3}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{a1}(t) \\ q_{a2}(t) \\ q_{a3}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t). \quad (19)$$

Such system is unobservable, and it has two stable eigenvalues and a single eigenvalue at the origin. The transformation of this system to Kalman observable canonical form [24] reveals that the eigenvalue at the origin is unobservable, then, the system is nondetectable.

On the other hand, the descriptor model adopted in the previous subsection, though unobservable if one consider the whole state-space, can be proven to be R -observable [25] in the admissible subspace given by the algebraic equation.

C. Model Adjustments

The variables are measured in a relative scale (percent), and the tanks 1 and 2 have different geometric parameters: for the transversal section diameters $D_2 = (27/25)D_1$, and for the heights $H_2 = 2H_1$. Taking into account these facts, the following linear descriptor model relating the incremental volumes in the tanks around an operating point was obtained:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0104 & 0 & 0 \\ 0.0033 & -0.0042 & 0 \\ 1 & 2.3328 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0190 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t).$$

A detailed, systematic procedure for the obtention and validation of this model is shown in [26]. The discretization of such model with a sampling time $T_s = 3$ s results in

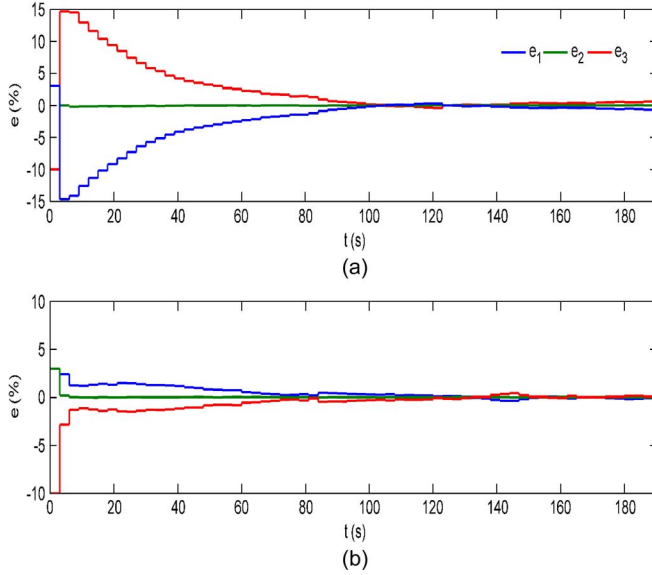


Fig. 4. Estimation error for the observer with: (a) linear gain and (b) online output injection.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(k+1) \\ q_2(k+1) \\ q_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9692 & 0 & 0 \\ 0.0095 & 0.9867 & 0 \\ 1 & 2.3328 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ q_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0560 \\ 0.003 \\ 0 \end{bmatrix} u(k).$$

V. EXPERIMENTAL RESULTS AND DISCUSSION

The output measurement was taken as $y(k) = [0 \ 1 \ 0][q_1(k) \ q_2(k) \ q_3(k)]^T + \eta(k)$, with $|\eta(k)| \leq 0.2$. A confidence set for the initial error given by $|e_1| \leq 3$; $|e_2| \leq 3$ and $|e_3| \leq 9.9984$ was used for the determination of a (as small as possible) conditioned-invariant polyhedron that contains it. The application of Algorithm 2.1 considering a contraction rate $\lambda = 0.91$, resulted in a conditioned-invariant polyhedron $X^\infty(\Omega, \lambda) = \{G_f e \leq \rho_f\}$ for which G_f matrix has 22 rows. The initial admissible set is not modified, due to the absence of disturbances in the state equations. A linear output injection law was obtained in this case, and is given by $L^1 = [-5.8857 \ -0.9895 \ 8.194]^T$, $\omega^1 = 0$ for (15). With this gain, the closed loop eigenvalues of (8) are 0, 0.0598, and 0.9075. Fig. 3 shows the initial and the conditioned-invariant polyhedra, together with error trajectories starting from the point $e_0 = [3 \ 3 \ -9.9984]^T$. The dark line corresponds to the response of the observer using the linear gain L , and the other one to that using an online injection law. One can note that in both cases, the error does not leave the invariant polyhedron. Moreover, in the online injection design, no inrush is seen in the error trajectory, differently from the linear design. This is due the fact that the online computation seeks to optimize the contraction of the error trajectory at each time step. Fig. 4 shows the error convergence in time domain.

The time needed for online computation of the output injection law was about 10 ms, which is far below the sampling time

(3 s). Also, each row of $\phi(X^\infty(\Omega, \lambda), z)$ is computed in about $70 \mu s$, while $\varphi(z)$ computation demands about $140 \mu s$. Hence, for this application no special care is required on this issue. It must be pointed out that, for dynamically fast systems, the piecewise-affine law in (15) can be used, despite the possibility of inrush responses in the estimation error.

VI. CONCLUSION AND FUTURE WORK

An extension of set-invariance based techniques for design of observers with error limitation was proposed for discrete-time descriptor systems. Such extension was possible due to a suitable structure of the observer, introduced in this work. A discussion was carried out on the admissibility of initial states, and a characterization of the polyhedron of initial estimation error after jump was given. The proposed technique was successfully applied in a hydraulic tank system, where tight bounds on estimation error with fast convergence were assured due to the design. Future work related to this study concerns $l_\infty - l_\infty$ filtering design and the use of invariant observers for designing output feedback controllers for constrained descriptor systems.

APPENDIX

Proof of Theorem 2.2: First we prove that $X^\infty(\Omega, \lambda)$ satisfies the necessary condition in the Theorem. From the algorithm, clearly, $\forall k, X^k \subset X^{k+1}$ and $R(X^k) \subset \lambda X^{k+1}$. Therefore, $\hat{A}(\mathcal{E}(0) \cap X^k) + \hat{B}_1 \mathcal{V} = R(X^k) \subset \lambda X^{k+1} \subset \lambda X^\infty(\Omega, \lambda)$. Since this condition is valid $\forall k$, it proves that $X^\infty(\Omega, \lambda)$ satisfies $\hat{A}(\mathcal{E}(0) \cap X^\infty(\Omega, \lambda)) + \hat{B}_1 \mathcal{V} \subset \lambda X^\infty(\Omega, \lambda)$.

Consider now a symmetric compact set P which satisfies the necessary condition and such that $X^k \subset P$. Then: $\hat{A}(\mathcal{E}(0) \cap X^k) + \hat{B}_1 \mathcal{V} \subset \hat{A}(\mathcal{E}(0) \cap P) + \hat{B}_1 \mathcal{V} \subset \lambda P$. Hence, since P is convex: $X^{k+1} = \text{conv}[\lambda^{-1}(\hat{A}(\mathcal{E}(0) \cap X^k) + \hat{B}_1 \mathcal{V}) \cup X^k] \subset P$. Since this condition holds $\forall k$, then $X^\infty(\Omega, \lambda) \subset P$, which proves that $X^\infty(\Omega, \lambda)$ is the minimal compact set satisfying the necessary condition. ■

Proof of Theorem 2.3: Clearly, from Algorithm 2.1, if $\mu < \lambda$ then $X^\infty(\Omega, \lambda) \subset X^\infty(\Omega, \mu)$, implying $X_\lambda \subset X_\mu$.

Consider now a set S^k in Algorithm 2.2 and assume that $S^k \subset X_\mu$. Then, since X_μ is conditioned-invariant with rate λ , $\forall z \in \mathcal{Z}(S^k)$, $\exists v$ such that $\hat{A}(\mathcal{E}(z) \cap S^k) + \hat{B}_1 \mathcal{V} + \varphi \subset \lambda X_\mu$. Then, from Algorithm 2.2, $S^{k+1} \subset X_\mu$. Initializing Algorithm 2.2 with $S^0 = X_\lambda \subset X_\mu$, guarantees, by induction, that $S^\infty(X_\lambda, \lambda) \subset X_\mu$.

Moreover, Algorithm 2.2 clearly generates a sequence $\{S^k\}$ of compact sets such that, $\forall k = 0, 1, \dots, S^k \subset S^{k+1}$, and the fixed point S^∞ , attained when, eventually, $S^{k+1} = S^k$, is clearly conditioned-invariant with rate λ . ■

REFERENCES

- [1] D. G. Luenberger, "Observing state of linear system," *IEEE Trans. Military Electron.*, vol. MIL-8, no. 2, pp. 74–77, Apr. 1964.
- [2] D. G. Luenberger, "Observers for multivariable systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. AC-11, no. 2, pp. 190–194, Apr. 1966.
- [3] D. Cobb, "Controllability, observability, and duality in singular systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 29, no. 12, pp. 1076–1082, Dec. 1984.
- [4] L. Dai, "Observers for discrete singular systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 33, no. 2, pp. 187–191, Feb. 1988.
- [5] A. G. Wu and G. R. Duan, "Design of PD observers in descriptor linear systems," *Int. J. Control Autom. Syst.*, vol. 5, no. 1, pp. 93–98, 2007.

- [6] A. G. Wu, G. R. Duan, and Y. M. Fu, "Generalized PID observer design for descriptor linear systems," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B, Cybern.*, vol. 37, no. 5, pp. 1390–1395, Oct. 2007.
- [7] A. G. Wu, G. R. Duan, J. Dong, G. R. Duan, J. Dong, and Y. M. Fu, "Design of proportional-integral observers for discrete-time descriptor linear systems," *IET Control Theory Appl.*, vol. 3, no. 1, pp. 79–87, 2009.
- [8] J. S. Shamma and K.-Y. Tu, "Set-valued observers and optimal disturbance rejection," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 44, no. 2, pp. 253–264, Feb. 1999.
- [9] F. Blanchini and S. Miani, *Set-Theoretic Methods in Control*. Boston, MA: Birkhäuser, 2007.
- [10] T. Alamo, J. M. Bravo, and E. F. Camacho, "Guaranteed state estimation by zonotopes," *Automatica*, vol. 41, pp. 1035–1043, 2005.
- [11] C. E. T. Dórea and A. C. C. Pimenta, "Set-invariant estimators for linear systems subject to disturbances and measurement noise," presented at the 16th IFAC World Congr., Prague, Czech Republic, 2005.
- [12] C. E. T. Dórea and A. C. C. Pimenta, "Design of set-invariant estimators for linear discrete-time systems," in *Proc. 44th IEEE Conf. Decision Control, Eur. Control Conf. (CDC-ECC)*, 2005, pp. 7235–7240.
- [13] C. E. T. Dórea, "Set-invariant estimators for single-output linear discrete-time systems," UFRN, Natal-RN, Internal Tech. Rep., 2011.
- [14] F. Blanchini and M. Sznaiar, "A convex optimization approach to synthesizing bounded complexity l^∞ filters," in *Proc. 48th Conf. Decision Control*, 2009, pp. 217–222.
- [15] C. E. T. Dórea, "Output-feedback controlled-invariant polyhedra for constrained linear systems," in *Proc. 48th Conf. Decision Control*, 2009, pp. 5317–5322.
- [16] J. M. Araújo, P. R. Barros, and C. E. T. Dórea, "Conditioned-invariant polyhedral sets for observers with error limitation in descriptor systems," in *Proc. 19th Int. Symp. Math. Theory Netw. Syst.*, 2010, pp. 65–69.
- [17] J. B. M. Santos, G. A. Junior, H. C. Barroso, and P. R. Barros, "A flexible laboratory-scale quadruple-tank coupled system for control education and research purposes," *Comput.-Aided Chem. Eng.*, vol. 27, no. C, pp. 2151–2156, 2009.
- [18] L. Dai, *Singular Control Systems*. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [19] K. Fukuda, "Cddlib Reference Manual," 2005. [Online]. Available: <ftp://ftp.ifor.math.ethz.ch/pub/fukuda/cdd/cddlibman/cddlibman.html>
- [20] Matlab, Natick, MA, "CDDMEX—Matlab Interface for the CDD Solver," 2011. [Online]. Available: <http://control.ee.ethz.ch/~hybrid/cdd.php>
- [21] A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*. Chichester, U.K.: Wiley, 1987.
- [22] G. Bastin, "Issues in modelling and control of mass balance systems," in *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems*, ser. Lecture Notes in Control and Information Sciences, D. Aeyels, F. Lamnabhi-Lagarigue, and A. van der Schaft, Eds. New York: Springer, 1999, vol. 246, pp. 53–74.
- [23] T. Yeu, H. Kim, and S. Kawaji, "Fault detection, isolation and reconstruction for descriptor systems," *Asian J. Control*, vol. 7, no. 4, pp. 356–367, 2005.
- [24] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*. New York: Oxford University Press, 1999.
- [25] T. Yamada and D. G. Luenberger, "Generic controllability theorems for descriptor systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 30, no. 2, pp. 144–152, Feb. 1985.
- [26] J. M. Araújo, H. C. Barroso, P. R. Barros, and C. E. T. Dórea, "Output feedback control of constrained descriptor systems: A case study of a hydraulic tank system," *Proc. IMechE, Part I: J. Syst. Control Eng.*, submitted for publication.

Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering

<http://pii.sagepub.com/>

Output feedback control of constrained descriptor systems: a case study of a hydraulic tank system

J M Araújo, H C Barroso, P R Barros and C E T Dórea

Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering published online 21 September 2011

DOI: 10.1177/0959651811419130

The online version of this article can be found at:

<http://pii.sagepub.com/content/early/2011/09/20/0959651811419130>

Published by:



<http://www.sagepublications.com>

On behalf of:



[Institution of Mechanical Engineers](http://www.imechE.org)

Additional services and information for *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering* can be found at:

Email Alerts: <http://pii.sagepub.com/cgi/alerts>

Subscriptions: <http://pii.sagepub.com/subscriptions>

Reprints: <http://www.sagepub.com/journalsReprints.nav>

Permissions: <http://www.sagepub.com/journalsPermissions.nav>

>> [Version of Record](#) - Sep 21, 2011

[What is This?](#)

Output feedback control of constrained descriptor systems: a case study of a hydraulic tank system

J M Araújo^{1,2*}, H C Barroso³, P R Barros³, and C E T Dórea⁴

¹Departamento de Tecnol. em Eletro-Eletrônica, Instituto Federal da Bahia, Salvador, Brazil

²Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brazil

³Laboratório de Instrumentação Eletrônica e Controle, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, Brazil

⁴Departamento de Engenharia de Computação e Automação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, Brazil

The manuscript was received on 21 February 2011 and was accepted after revision for publication on 15 July 2011.

DOI: 10.1177/0959651811419130

Abstract: A novel technique is proposed for output feedback control of constrained linear discrete-time causal descriptor systems. In particular, it is shown how linear state and control constraints can be satisfied by using only output measurements corrupted by unknown but bounded noise. To this end, conditions are established under which a polyhedron contained in the set defined by the state constraints can be made invariant through output feedback. The control input which enforces the constraints can be computed online through the solution of linear programming problems. The proposed technique is then applied to the control of a hydraulic three-tank system. Simulated as well as experimental results illustrate the proposed technique and indicate that it can be potentially used in practical situations.

Keywords: descriptor systems, output feedback, constraints satisfaction, hydraulic accumulators

1 INTRODUCTION

Descriptor systems constitute an important class of linear systems, also known as generalized state space or singular systems or even implicit systems, which arise when algebraic equations coupling the state variables and inputs are present. Several contributions help to build a rich theoretical and applied framework on the subject [1–7].

This is not the case though, when the treatment of hard state and control constraints enter the picture. Many of the available contributions are based on the concept of positively invariant sets [8–12], where one checks if a linear state feedback exists

such that the set defined by state constraints can be made invariant, i.e. the state trajectories cannot escape it. Very often, a given set cannot be made positively invariant via linear, or even non-linear state feedback though. The concept of controlled invariance [13] allows for non-linear control laws and provides methods to compute invariant polyhedral sets [13–16].

In reference [17], by rewriting the state equations of the causal descriptor model, the known results of state feedback constrained control via controlled invariant polyhedra were adapted to descriptor systems. In this paper, the output feedback case is considered. By extending recent results obtained for non-descriptor models [18], conditions are established under which a polyhedron can be made invariant via static, possibly non-linear, output feedback. It is shown how a control input which enforces control satisfaction can be computed online through the solution of linear programming

*Corresponding author: Departamento de Tecnol. em Eletro-Eletrônica, Gp. de Pesquisa em Sinais e Sistemas, Instituto Federal da Bahia, Rua Emídio dos Santos, S/N 40301-015 Salvador, Brazil.
email: jomario@ifba.edu.br

problems, based on the measured output corrupted by unknown but bounded noise.

A case study is presented, using a descriptor model of a three-tank hydraulic system [19]. Simulation and experiments are performed to evaluate the proposed model and control design strategy, showing the feasibility of the use of the technique in this kind of system.

2 INVARIANT POLYHEDRA

In this section a summary of the conditions for output feedback controlled invariance (OFCI) of a polyhedron proposed in reference [18] is presented, as well as the extension for the descriptor case, highlighting its particular features. Constraints on the system variables in general can be represented by linear inequalities, more suitable to capture physical bounds on state and control variables, imposed by limitation of the actuators or safety issues. Such inequalities define convex polyhedral sets in the state and control spaces. In the present work, symmetrical polyhedral sets containing the origin are considered

$$\mathbf{G}\mathbf{q} \leq \boldsymbol{\rho} \quad (1)$$

where $\mathbf{q} \in \mathcal{R}^s$ stands for the vector of constrained variables, state, and control, and $\mathbf{G} \in \mathcal{R}^{g \times s}$, $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{R}^g$, where g is the number of inequalities representing the system constraints and s is the dimension of vector $\mathbf{q}$, i.e. the number of constrained variables.

The following sections outline the main issues on invariant polyhedra explored in this work.

2.1 Controlled invariance by output feedback

Consider the linear, time-invariant, discrete-time system, described by

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_1\mathbf{d}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\eta}(k) \end{aligned} \quad (2)$$

where $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$ is the state vector, $\mathbf{u} \in \mathcal{R}^m$ is the control vector, $\mathbf{d}$ is an unknown disturbance in a bounded set $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}^l$, $\mathbf{y} \in \mathcal{R}^q$ is the measured output, and $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{R}^q$ is the measurement noise bounded as $|\boldsymbol{\eta}| \leq \bar{\boldsymbol{\eta}}$.

The constraints on state variables, control and the disturbance are given by the following symmetrical polyhedra containing the origin

$$\Omega_x = \{\mathbf{x} : \mathbf{G}_x\mathbf{x} \leq \boldsymbol{\rho}\} \quad (3)$$

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{u} : \mathbf{V}\mathbf{u} \leq \boldsymbol{\nu}\} \quad (4)$$

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{d} : \mathbf{S}\mathbf{d} \leq \boldsymbol{\mu}\} \quad (5)$$

Consider now the set of *admissible outputs* associated with Ω_x

$$\mathcal{Y}(\Omega_x) = \{\mathbf{y} : \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta} \text{ for } \mathbf{x} \in \Omega_x, \boldsymbol{\eta} : |\boldsymbol{\eta}| \leq \bar{\boldsymbol{\eta}}\} \quad (6)$$

$\mathcal{Y}(\Omega_x) \subset \mathcal{R}^p$ is the set, also closed and convex, of all values of $\mathbf{y}$ that can be associated with $\mathbf{x} \in \Omega_x$. Therefore, if $\mathbf{x}(k) \in \Omega_x$, then $\mathbf{y}(k) \in \mathcal{Y}(\Omega_x)$.

The set of states which are consistent with each $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}(\Omega_x)$ is given by

$$\mathcal{C}(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}, |\boldsymbol{\eta}| \leq \bar{\boldsymbol{\eta}}\}$$

Set-invariance under output-feedback can be characterized by the following definition [18].

Definition 2.1

The polyhedron Ω_x is said to be *output-feedback controlled-invariant* (OFCI) with respect to system (2) if $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}(\Omega_x)$, $\exists \mathbf{u} \in \mathcal{V} : \mathbf{G}_x(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} + \mathbf{B}_1\mathbf{d}) \leq \lambda\boldsymbol{\rho}$, $\forall \mathbf{d} \in \mathcal{D}$, and $\forall \mathbf{x} \in \Omega_x \cap \mathcal{C}(\mathbf{y})$, with $0 < \lambda \leq 1$.

When Ω_x is OFCI, if $\mathbf{x}(k) \in \Omega_x$, then there exists a control $\mathbf{u}(k) \in \mathcal{V}$, computed from the measured output at time k , such that $\mathbf{x}(k+1) \in \Omega_x, \forall k$. In this case, if Ω_x is contained in the set of state constraints, then such constraints can be satisfied via static output feedback.

Since the same input $\mathbf{u}$ must work for all $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$, and for all $\mathbf{x} \in \Omega_x$ consistent with the output $\mathbf{y}$, their worst-case effect can be taken into account row by row. Therefore, the above definition can be re-stated as: the polyhedron Ω_x is OFCI if

$$\forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}, \exists \mathbf{u} : \begin{bmatrix} \phi(\mathbf{y}) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_x\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} \mathbf{u} \leq \begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\nu} \end{bmatrix} \quad (7)$$

where

$$\delta_i = \max_{\mathbf{d}} \mathbf{G}_{x_i}\mathbf{B}_1\mathbf{d} \text{ s.t. } \mathbf{S}\mathbf{d} \leq \boldsymbol{\mu} \quad (8)$$

$$\phi_j(\mathbf{y}) = \mathbf{G}_{x_j}\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}^{*j}(\mathbf{y}) \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^{*j}(\mathbf{y}) &= \arg \max_{\mathbf{x}} \mathbf{G}_{x_j}\mathbf{A}\mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{G}_x\mathbf{x} &\leq \boldsymbol{\rho}, |\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \bar{\boldsymbol{\eta}} \end{aligned}$$

In order to compute the projection of (7) onto $\mathcal{R}^n$, consider now the non-negative matrix $[\mathbf{T}_i \ \mathbf{W}_i] \in \mathcal{R}^{n_r \times g}$, whose rows form a minimal generating set of the polyhedral cone defined by

$$[\mathbf{t}^T \ \mathbf{w}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{G}_x \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{U} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, [\mathbf{t}^T \ \mathbf{w}^T] \geq \mathbf{0},$$

Such a projection matrix can be computed using, for example, the Fourier–Motzkin elimination technique [20]. By application of this projection, condition (7) can be rewritten as $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}(\Omega_x), \forall i = 1, \dots, n_r$,

$$[\mathbf{T}_i \ \mathbf{W}_i] \begin{bmatrix} \phi(\mathbf{y}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \leq [\mathbf{T}_i \ \mathbf{W}_i] \begin{bmatrix} \lambda \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\nu} \end{bmatrix} \quad (10)$$

The main result of reference [18] is the following theorem.

Theorem 2.1

The polyhedral set $\Omega_x = \{\mathbf{x} : \mathbf{G}_x \mathbf{x} \leq \boldsymbol{\rho}\}$ is OFCI with contraction rate λ if, and only if, $\forall i = 1, \dots, n_r$

$$\sum_{j=1}^g T_{ij} \mathbf{G}_{xj} \mathbf{A} \boldsymbol{\xi}^j \leq \left(\sum_{j=1}^g T_{ij} (\lambda \boldsymbol{\rho}_j - \delta_j) \right) + \mathbf{W}_i \boldsymbol{\nu} \quad (11)$$

$$\forall \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}^j, j = 1, 2, \dots, g : \mathbf{G}_x \boldsymbol{\xi}^j \leq \boldsymbol{\rho}, |-\mathbf{C} \boldsymbol{\xi}^j + \mathbf{y}| \leq \bar{\eta} \quad (12)$$

The OFCI of Ω_x can then be checked by solving the n_r LPs

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \max_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}^j} \sum_{j=1}^g T_{ij} \mathbf{G}_{xj} \mathbf{A} \boldsymbol{\xi}^j \\ \text{s.t. } &\mathbf{G}_x \boldsymbol{\xi}^j \leq \boldsymbol{\rho}, |\mathbf{C} \boldsymbol{\xi}^j - \mathbf{y}| \leq \bar{\eta} \end{aligned} \quad (13)$$

Then Ω_x is OFCI with contraction rate λ if and only if $\epsilon_i + \left(\sum_{j=1}^g T_{ij} \delta_j \right) - \mathbf{W}_i \boldsymbol{\nu} \leq \left(\sum_{j=1}^g T_{ij} \lambda \boldsymbol{\rho}_j \right)$, $\forall i = 1, \dots, n_r$.

As shown in reference [18], the maximum number of variables necessary to compute ϵ_i is only $(m + 1)n + p$, which makes LPs (13) computationally tractable.

An online control law that enforces the tight constraints can be computed as

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k) &= \arg \min_{\mathbf{u}} \epsilon \\ \text{s.t. } &\phi(\mathbf{y}(k)) + \mathbf{G}_x \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \leq \epsilon \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\delta}, \quad \forall \mathbf{u} \leq \boldsymbol{\nu} \end{aligned} \quad (14)$$

where $\phi(\mathbf{y}(k))$ is given by equation (9).

This control action tries to optimize the one-step ahead contraction of the state trajectory with respect to the OFCI set Ω_x . The computation of $\mathbf{u}(k)$ requires the solution of g LP's with n variables and $g + q$ constraints (9) plus the LP (14) with $m + 1$ variables and $g + \nu$ constraints.

2.2 Extending OFCI to descriptor systems

Consider now the linear, discrete-time descriptor system under disturbances and measurement noise given by

$$\mathbf{E} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_1 \mathbf{d}(k) \quad (15a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \boldsymbol{\eta}(k) \quad (15b)$$

Without loss of generality, one can consider the state vector and the system matrices in the form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{B}_{12} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{21} \\ \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

with $\det(\mathbf{A}_{22}) \neq 0$ since causality is assumed [6].

As shown in reference [17], where state feedback was considered, the system can be rewritten in a standard state space form. By isolating $\mathbf{x}_2(k)$ in the algebraic equation

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_1(k) + \mathbf{A}_{22} \mathbf{x}_2(k) + \mathbf{B}_{22} \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_{12} \mathbf{d}(k)$$

writing it one step forward and replacing the dynamic equation, one obtains

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{x}(k) + \tilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{u}(k) + \tilde{\mathbf{B}}_3 \mathbf{u}(k+1) \\ &+ \tilde{\mathbf{B}}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{d}(k) \\ \mathbf{d}(k+1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{B}}_1 &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_{12} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} (\mathbf{B}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_{12}) & \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_{12} \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{B}}_2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{21} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_{22} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} (\mathbf{B}_{21} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_{22}) \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{B}}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

If one considers the incremental form for control

$$\mathbf{u}(k+1) = \mathbf{u}(k) + \Delta \mathbf{u}(k+1)$$

system (16) can be written as

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{u}(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{B}}_2 + \tilde{\mathbf{B}}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_3 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k+1) + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}(k) \\ \mathbf{d}(k+1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

Consider in addition the following polyhedra, that characterize state and control constraints, as well as bounds on the disturbances

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} : \mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \leq \boldsymbol{\rho} \right\} \quad (18)$$

$$\bar{\mathcal{D}} = \left\{ \bar{\mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_m \\ \mathbf{d}_{m+1} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{d}} \leq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} \right\} \quad (19)$$

with $\mathbf{d}_m$ and $\mathbf{d}_{m+1}$ being the disturbances at the present instant and one step ahead according to equation (17). In order to compute $\Delta \mathbf{u}(k+1)$, and, consequently, the control input $\mathbf{u}(k+1)$ under the proposed structure, $\mathbf{u}(k)$ is treated as a state. Since $\mathbf{u}(k)$ is known it can be considered as a measured output. The output equation can, then, be extended as follows

$$\tilde{\mathbf{y}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}(k) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

The set of admissible outputs induced by Ω is now given by

$$\tilde{\mathcal{Y}}(\Omega) = \{ \tilde{\mathbf{y}} : \tilde{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ for } \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \in \Omega, |\boldsymbol{\eta}| \leq \bar{\boldsymbol{\eta}} \}$$

The control increment in (17) is constrained in the form

$$\Delta \mathbf{u} \in \mathcal{U} = \{ \Delta \mathbf{u} : \mathbf{U} \Delta \mathbf{u} \leq \boldsymbol{\varphi} \}$$

On the basis of these definitions, the development that leads to Theorem 2.1 can be directly extended to the descriptor case, by replacing the corresponding matrices by those of system (17).

Remark 2.1

When Ω is OFCI, if the state $\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix}$ belongs to Ω , then there exists $\Delta \mathbf{u}(k+1) \in \mathcal{U}$ such that $\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{u}(k+1) \end{bmatrix} \in \Omega$. It should be noticed that $\Delta \mathbf{u}(k+1)$ is chosen based on $\tilde{\mathbf{y}}(k)$. In this sense, it can be considered as a delayed output feedback.

Remark 2.2

The control $\Delta \mathbf{u}(k+1)$ affects the state immediately at time $k+1$. This is a characteristic of the descriptor system, associated with the coupling of state and input variables.

Remark 2.3

As will be illustrated later, the use of $\mathbf{u}(k)$ as a measured output in order to compute the control does make a difference concerning the OFCI of Ω . In some cases the polyhedron cannot be made invariant under output feedback without this information.

Remark 2.4

The polyhedron of constraints is not OFCI in general. However, methods exist to compute controlled invariant polyhedra under state feedback [13–17]. No systematic procedure is available to compute an OFCI polyhedron. Nevertheless, it turns out that controlled-invariant sets with a small contraction rate λ are often OFCI with a larger λ . This can be checked through the necessary and sufficient conditions of Theorem 2.1.

3 EXPERIMENTAL PLATFORM AND DESCRIPTOR MODEL VALIDATION

A highly flexible, fully instrumented, experimental platform for tanks level control [19] (Fig. 1) was used to set up a descriptor model, obtained by linearizing the equations associated to the schematics of Fig. 2 around a stationary operating point. The platform is equipped with pressure-based level transmitters in tank 1 and tank 2, and the actuator is a pump plus frequency converter set. The communication is ethernet based, and by means of a graphical interface, as well as by OPC MATLAB © resources, an Allen–Bradley © PLC system performs the control. The incremental, linearized descriptor model using variables in absolute values for this scheme is given by

$$\mathbf{E} \dot{\mathbf{q}}_a(t) = \mathbf{A} \mathbf{q}_a(t) + \mathbf{B}_2 u_a(t) \quad (20a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{q}_a(t) + \boldsymbol{\eta}_a(t) \quad (20b)$$

where

$$\mathbf{q}_a = \begin{bmatrix} q_{a1} \\ q_{a2} \\ q_{a3} \end{bmatrix}$$



Fig. 1 Experimental platform

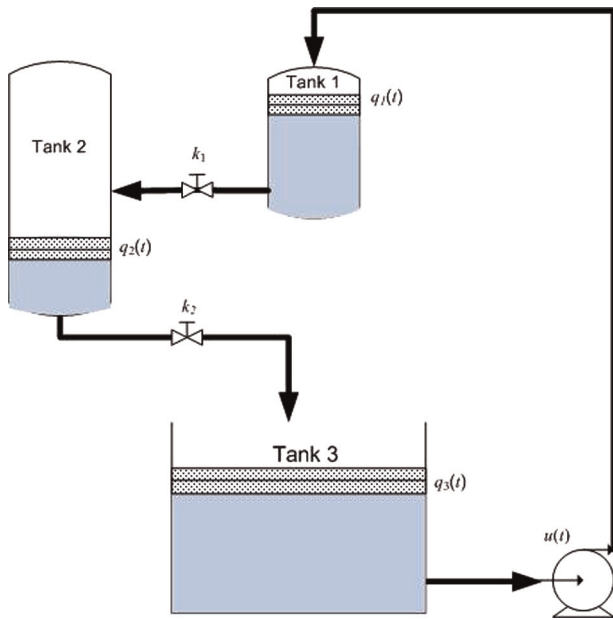


Fig. 2 The assembly system with three tanks

is the state vector consisting of the volumes in the tanks, u_a is the pump flow

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The output matrix $\mathbf{C}$ depends on the levels that are measured, and $\boldsymbol{\eta}(t)$ is the measurement noise. This is a descriptor, singular system, and the equation given by the third row is easily justified by the mass balance principle, since the system does not gain nor loses material to the exterior [21, 22]

$$q_{a1}(t) + q_{a2}(t) + q_{a3}(t) = 0 \quad (21)$$

The model given by equation (20) uses absolute variables. The necessary scaling will be shown later, taking into account the fact that these variables are expressed in relative values. For parameter extraction from data, both tanks 1 and 2 were submitted to a step response test. A +5 per cent step on the incoming flow from actuator was applied from the equilibrium point to test tank 1, and -10 per cent (+5 per cent to -5 per cent) was used in tank 2. For corrected calibration of these model, the following equations with variables in relative values are considered

$$\dot{q}_1(t) = \kappa_{v_1} u(t) - k_1 q_1(t) \quad (22a)$$

$$\dot{q}_2(t) = \kappa_{v_2} u(t) - k_2 q_2(t) \quad (22b)$$

In these equations, the parameters κ_{v_1} and κ_{v_2} are used for correct scaling between the pump velocity

and the relative volumes, which are expressed in different bases. The following approximated numerical values can be obtained from the data: $\kappa_{v_1} = 0.0190 \text{ s}^{-1}$, $\kappa_{v_2} = 0.0059 \text{ s}^{-1}$, $k_1 = 0.0104 \text{ s}^{-1}$, and $k_2 = 0.0042 \text{ s}^{-1}$. Moreover, tanks 1 and 2 have different geometric parameters: for the transversal section diameters $D_2 = (27/25)D_1$, and for the heights $H_2 = 2H_1$; hence, a given volume of tank 2 must be scaled by a factor $(D_2^2 H_2)/(D_1^2 H_1) \approx 2.3328$. The volumes in tanks 1 and 2 are measured but in tank 3 there is no sensor. Then, the algebraic equation of mass balance, referred to the basis of tank 1, can be adopted

$$q_1 + 2.3328 q_2 + q_3 = 0 \quad (23)$$

As a final remark, when one couples the output of tank 1 to feed tank 2, it is necessary to scale the term $k_1 q_1(t)$ by the factor $\kappa_{v_2}/\kappa_{v_1}$. Now, the linearized model for the plant is

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0104 & 0 & 0 \\ 0.0033 & -0.0042 & 0 \\ 1 & 2.3328 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0190 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

Figure 3 depicts the model and experimental responses with a +5 per cent to -10 per cent amplitude step sequence, where a good fit can be observed.

4 SIMULATION AND EXPERIMENTAL RESULTS

4.1 Output feedback design

In this section, simulations on the model and experimental tests for output feedback controlled invariance are performed. A sample time $T_s = 3 \text{ s}$ was considered. The constraints considered in this case are given by $|q_1| \leq 9$, $|q_2| \leq 7$, $|q_3| \leq 25.33$, $|u| \leq 15$. The augmented system (17) was obtained, resulting in

$$\begin{bmatrix} q_1(k+1) \\ q_2(k+1) \\ q_3(k+1) \\ u(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9692 & 0 & 0 & 0.0560 \\ 0.0095 & 0.9876 & 0 & 0.0003 \\ -0.9915 & 2.3038 & 0 & -0.0566 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(k) \\ q_2(k) \\ q_3(k) \\ u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u(k+1)$$

Such a polyhedron is not controlled invariant, but it is possible to compute the maximal

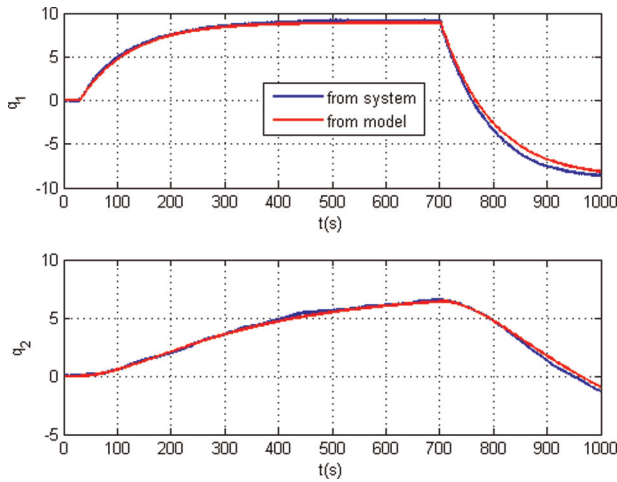


Fig. 3 Responses of the system and model to a 0 to + 5 per cent to – 5 per cent step sequence

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ u \end{bmatrix} : \mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ u \end{bmatrix} \leq \boldsymbol{\rho} \right\}$$

contained in it using, for example, the methodology proposed in [14]. For this simulation, a contraction rate $\lambda = 0.95$ was considered. The OFCI condition for this polyhedron was checked with the output equation

$$\tilde{\mathbf{y}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(k) \\ u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}(k) \\ 0 \end{bmatrix}$$

where two matrices $\mathbf{C}$ were considered: $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ (full state measurement, but with noise) and with $\mathbf{C} = [0 \ 1 \ 0]$ (only q_2 is measured), with measurement noise, respectively

$$|\boldsymbol{\eta}(k)| \leq \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.667 \end{bmatrix}$$

and $\eta(k) \leq 0.2$. The polyhedron turns out to be OFCI with contraction rate $\lambda = 0.9536$ and $\lambda = 0.9884$, respectively for $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ and $\mathbf{C} = [0 \ 1 \ 0]$.

The control $\Delta u(k+1)$ was computed online from the LPs (9) and (14) with the appropriate matrices of the augmented model, resulting in

$$\begin{aligned} \Delta u(k+1, \tilde{\mathbf{y}}(k)) &= \arg \min_{\Delta u, \varepsilon} \varepsilon \\ \text{s.t. } \phi(\tilde{\mathbf{y}}(k)) + \mathbf{G} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_3 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u} &\leq \varepsilon \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\delta} \end{aligned}$$

The initial condition $\mathbf{q}(0) = [-7.069 \ -1.176 \ 9.803]^T$, $u(0) = 15$ was used in the full state measurement experiment.

Figure 4 shows the state trajectory and the projection of the invariant polyhedron onto the state-space. One can see the good fit between the simulation and experimental results, with respect to the constraints. Figure 5 depicts the control input. It is interesting to notice the changes of tendency in the control effort curve. This just illustrates the fact that the solution of LP (14) is a piecewise affine function of $\mathbf{y}(k)$, $u(k)$. The experiment with the measurement of only q_2 was made with the initial condition $\mathbf{q}(0) = [-5.827 \ -1.423 \ 9.146]^T$, $u(0) = 15$. Again, a good fit between experimental and simulated cases was observed. The results are depicted in Figs 6 and 7.

4.2 Additional remarks and discussion

Regular descriptor systems have algebraic constraints that can involve states, disturbance, if any, and control, given by

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1(0) + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2(0) + \mathbf{B}_{22}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}_{12}\mathbf{d}(0) \quad (24)$$

Then, the initial conditions must be consistent with these constraints. In reference [17], a discussion on the satisfaction of these constraints is carried out, with the characterization of the polyhedron of admissible initial states, consistent with algebraic constraints. This result can be quite easily extended to the output feedback case. This issue is not considered here because there are no disturbances and the algebraic equation depends only on the state variables.

In the proposed control structure, the computation of the control input $u(k+1)$ is done based on the measurement $\mathbf{y}(k)$ and the previous input $u(k)$. It is remarkable that if $u(k)$ is not taken as an

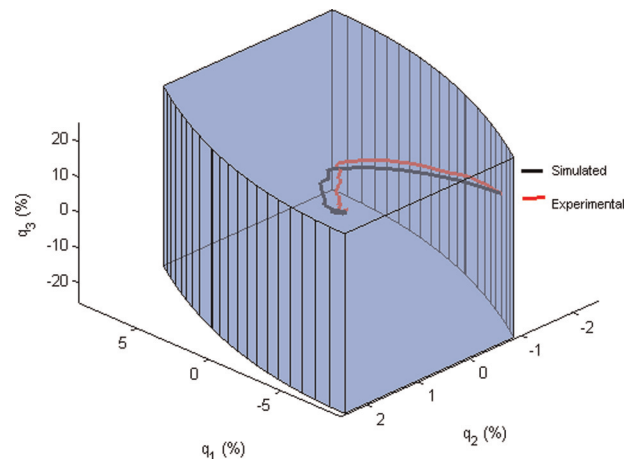


Fig. 4 Polyhedron with state trajectory for controlled invariance illustration in full state measurement design

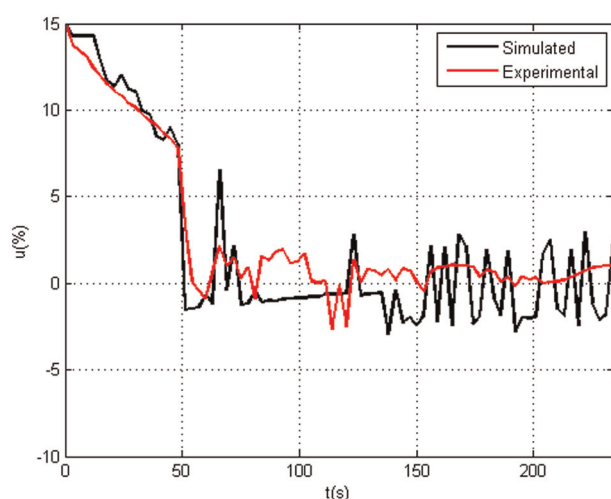


Fig. 5 Control effort in full state measurement design

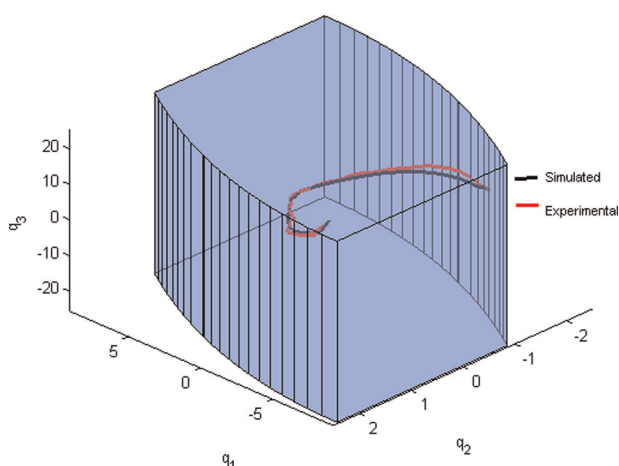


Fig. 6 Polyhedron with state trajectory for controlled invariance illustration with q_2 only at measurement

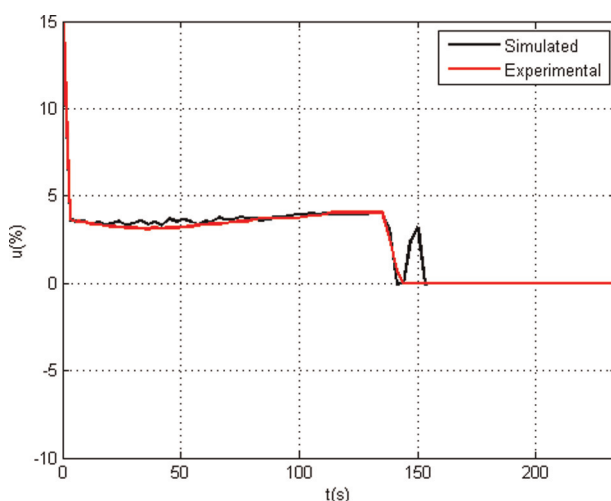


Fig. 7 Control effort with q_2 only at measurement

output, then the computed polyhedron is no longer OFCI, in either of the two considered cases.

5 CONCLUDING REMARKS AND FUTURE WORK

Invariant polyhedral-sets-based design has been applied to output feedback control of constrained linear causal descriptor systems. Necessary and sufficient conditions under which a given polyhedral set is controlled-invariant via output feedback were established, considering a special structure where the one step ahead control input is computed based on the present output and control input. The technique was successfully applied to level control of a three-tank system, illustrating its effectiveness in this kind of problem. Future work shall investigate the use of dynamic output feedback compensators in the case when the computed polyhedron is not OFCI, as in reference [18]. In that work, a polyhedron which is simultaneously controlled and conditioned invariant is designed to be OFCI via dynamic output feedback. Conditioned invariant polyhedra were used in reference [23] to design descriptor observers with limitation of the estimation error for the same tank systems used in the present work. The application of the proposed technique in a more complex plant shall also be subject of future work.

FUNDING

This research was partially supported by CAPES, Brazil, under grant number 2320/2008, and FAPESB, Brazil, under grant number 025/2008.

© Authors 2011

REFERENCES

- 1 Gantmacher, F. *The theory of matrices*, 1959 (Chelsea, New York).
- 2 Luenberger, D. G. Time-invariant descriptor systems. *Automatica*, 1978, **15**(5), 473–480.
- 3 Verghese, G. C., Levy, B., and Kailath, T. A generalized state-space for singular systems. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1981, **26**(4), 811–831.
- 4 Lewis, F. A survey of linear singular systems. *Circuit. Syst. Signal Process.*, 1986, **5**(1), 5–36.
- 5 Georgiou, C. and Krikelis, N. J. Constrained regulation design of linear discrete-time descriptor systems. *Contr. Theor. Adv. Technol.*, 1992, **8**(2), 257–268.
- 6 Dai, L. *Singular control systems*. Lecture Notes in Control and Information Science, 1989 (Springer, New York).

- 7 **Rehm, A.** *Control of linear descriptor systems: a matrix inequality approach*, 2004 (VDI, Düsseldorf).
- 8 **Vassilaki, M.** and **Bitsoris, G.** Constrained regulation of linear continuous-time dynamical systems. *Syst. Contr. Lett.*, 1989, **13**, 247–252.
- 9 **Vassilaki, M., Hennet, J. C., and Bitsoris, G.** Feedback control in linear discrete-time systems under state and control constraints. *Int. J. Contr.*, 1988, **47**(6), 1727–1735.
- 10 **Tarbouriech, S.** and **Castelan, E. B.** Positively invariant-sets for singular discrete-time-systems. *Int. J. Syst. Sci.*, 1993, **24**(9), 1687–1705.
- 11 **Tarbouriech, S.** and **Castelan, E. B.** An eigenstructure assignment approach for constrained linear continuous-time systems. *Syst. Contr. Lett.*, 1995, **24**, 333–343.
- 12 **Castelan, E. B.** and **Tarbouriech, S.** Simple and weak δ -invariant polyhedral sets for discrete-time singular systems. *Controle e Automao*, 2003, **14**(4), 339–347.
- 13 **Blanchini, F.** Ultimate boundedness control for uncertain discrete-time systems via set-induced lyapunov functions. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 1994, **39**(2), 428–433.
- 14 **Dórea, C. E. T.** and **Hennet, J. C.** (A, B)-invariant polyhedral sets of linear discrete-time systems. *J. Optim. Theor. Applic.*, 1999, **103**(3), 521–542.
- 15 **Ong, C.-J.** and **Gilbert, E.** The minimal disturbance invariant set: Outer approximation via its partial sums. *Automatica*, 2006, **42**, 1563–1568.
- 16 **Raković, S. V., Kerrigan, E. C., Mayne, D. Q., and Kouramas, K. I.** Optimized robust control invariance for linear discrete-time systems: theoretical foundations. *Automatica*, 2007, **43**, 831–841.
- 17 **Araújo, J. M.** and **Dórea, C. E. T.** Controlled-invariant polyhedral sets for constrained discrete-time descriptor systems. In *Emerging trends in technological innovation* (Eds L. Camarinha-Matos, P. Pereira, and L. Ribeiro), Vol. 1 of IFIP AICT, Lisbon, Portugal, 2010, pp. 385–392.
- 18 **Dórea, C. E. T.** Output-feedback controlled-invariant polyhedra for constrained linear systems. In Proceedings of 48th Conference in *Decision and control*, 2009, pp. 5317–5322.
- 19 **Santos, J. B. M., Junior, G. A., Barroso, H. C., and Barros, P. R.** A flexible laboratory-scale quadruple-tank coupled system for control education and research purposes. *Comput. Aided Chem. Engng*, 2009, **27**(C), 2151–2156.
- 20 **Schrijver, A.** *Theory of linear and integer programming*, 1987, Wiley, Chichester, UK.
- 21 **Bastin, G.** Issues in modelling and control of mass balance systems. In *Stability and stabilization of nonlinear systems* (Eds D. Aeyels, F. Lamnabhi-Lagarrigue, and A. van der Schaft), Vol. 246 of Lecture Notes in Control and Information Sciences, 1999, pp. 53–74 (Springer, Berlin).
- 22 **Yeu, T., Kim, H., and Kawaji, S.** Fault detection, isolation and reconstruction for descriptor systems. *Asian J. Contr.*, 2005, **7**(4), 356–367.
- 23 **Araújo, J. M., Barros, P. R., and Dórea, C. E. T.** Design of observers with error limitation in discrete-time descriptor systems: a case study of a hydraulic tank system. *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.*, 2011, PP(99), 1–7. DOI: 10.1109/TCST.2011.2159719.