



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA



**Controle Preditivo Robusto de Horizonte Finito de sistemas
incertos variantes no tempo com garantia de estabilidade**

Ary Montenegro Batista

Salvador - BA, Julho 2020

Ary Montenegro Batista

"Controle Preditivo Robusto de Horizonte Finito de sistemas incertos variantes no tempo com garantia de estabilidade".

Dissertação apresentada à Universidade Federal da Bahia, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, para a obtenção do título de Mestre.

APROVADA em: 08 de Junho de 2020.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Humberto Xavier de Araújo
Orientador/UFBA



Prof. Dr. Tito Luís Maia Santos
UFBA



Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres
UNICAMP



Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite
CEFET-MG

UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Ary Montenegro Batista

**Controle Preditivo Robusto de Horizonte Finito de sistemas
incertos variantes no tempo com garantia de estabilidade**

Trabalho apresentado ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Bahia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Área de concentração: Controle e Automação

Orientador: Prof. Dr. Humberto Xavier
de Araújo

Salvador - BA, Julho 2020

Agradecimentos

Agradeço a Deus em primeiro lugar por ter iluminado meu caminho e guiado meus passos, proporcionando a concretização desta etapa tão importante na minha vida.

Agradeço aos meus pais, pelo irrestrito esforço para me proporcionar uma educação de qualidade, pelo exemplo de honestidade, humildade, dedicação e por sempre acreditarem em mim.

Ao professor Dr. Humberto Xavier de Araújo pela orientação, valiosas discussões e todo apoio para a realização deste trabalho. Obrigado por todo ensinamento e contribuição para o meu crescimento.

A todos os professores e funcionários do PPGEE/UFBA.

A todos os que torceram, ajudaram ou de alguma forma fizeram parte desta conquista.

Resumo

Este trabalho propõe uma nova abordagem para o problema de Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo de Horizonte Finito (FH-RMPC) de sistemas lineares em tempo discreto com incertezas politópicas variantes no tempo. A ideia básica desta abordagem é encontrar, em cada instante de amostragem, um controlador ótimo por realimentação de estado, baseado nas equações a diferenças de Riccati (RDE), que minimiza uma função custo de horizonte finito e atenda as restrições nos sinais de controle e saída. A garantia de estabilidade em malha fechada, conhecida como um dos temas mais desafiadores da estratégia FH-RMPC com restrições, é baseada na propriedade de monotonicidade das RDEs obtidas na solução do problema de Controle Linear Quadrático (LQ) de horizonte finito. Na abordagem proposta não é necessário que a usual matriz de custo terminal seja fixa para se atingir a estabilidade assintótica. A análise da estabilidade é feita considerando-se um conjunto finito de funções de Lyapunov e também utilizando-se funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. Finalmente, a eficiência do método FH-RMPC proposto é ilustrada com exemplos numéricos e comparações com a estratégia de controle preditivo robusto de horizonte infinito (IH-RMPC) por meio de índices de desempenho baseados no erro.

Palavras-Chave:

Controle Preditivo Robusto, Garantia de estabilidade, Incertezas variantes no tempo, Realimentação de estado, Equações a diferenças de Riccati, Desigualdades Matriciais Lineares.

Abstract

This work proposes a new approach for the Finite Horizon Robust Model-Based Predictive Control (FH-RMPC) problem of linear discrete systems with time-varying polytopic uncertainties. The basic idea of this approach is to find, in each sampling time, the optimal state feedback control law based on Riccati difference equations (RDE) that minimizes an objective function with finite horizon and takes in account input and output constraints. The closed loop stability, known as one of the challenging themes of FH-RMPC strategy with constraints, is based on the monotonic property of the RDE associated with the finite horizon Linear Quadratic (LQ) control problem. The proposed method doesn't require the usual terminal weighting matrix to be fixed to achieve asymptotic stability. The stability analysis is done considering a finite set of Lyapunov functions and also considering parameter dependent Lyapunov functions. Finally, the efficiency of the proposed approach is illustrated by numerical examples and comparisons with the Infinite Horizon Robust Model-Based Predictive Control (IH-RMPC) strategy through error-based performance indexes.

Keywords:

Robust Predictive Control, Stability guarantee, Time-varying uncertainties, State feedback, Riccati difference equation, Linear Matrix Inequalities.

Lista de Figuras

Figura 1 - Configuração do controlador RMPC	23
Figura 2 - Incertezas politópicas nas matrizes A e B	25
Figura 3 - Trajetória dos estados das estratégias FH-RMPC x IH-RMPC (Caso 02).	51
Figura 4 - Sinal de controle das estratégias FH-RMPC x IH-RMPC (Caso 02).	51
Figura 5 - Saídas das estratégias FH-RMPC x IH-RMPC (Caso 02).....	52
Figura 6 - Coeficiente γ das estratégias FH-RMPC x IH-RMPC (Caso 02).....	52
Figura 7 - Custo efetivo J_{ef} das estratégias FH-RMPC x IH-RMPC (Caso 02).....	53
Figura 8 - Sistema de posicionamento angular.	55
Figura 9 - Estados das estratégias FH-RMPC e IH-RMPC.....	56
Figura 10 - Sinal de controle das estratégias FH-RMPC e IH-RMPC.	57
Figura 11 - Saídas das estratégias FH-RMPC e IH-RMPC.....	57
Figura 12 - Coeficiente γ das estratégias FH-RMPC e IH-RMPC.....	58
Figura 13 - Custo efetivo J_{ef} das estratégias FH-RMPC x IH-RMPC	58
Figura 14 - Estados das estratégias FH-RMPC e IH-RMPC com sistema LTV.....	61
Figura 15 - Sinal de controle das estratégias FH-RMPC e IH-RMPC (sistema LTV).....	61
Figura 16 - Saídas das estratégias FH-RMPC e IH-RMPC com sistema LTV.....	62
Figura 17 - Coeficiente γ das estratégias FH-RMPC e IH-RMPC com sistema LTV.....	62
Figura 18 - Custo efetivo J_{ef} das estratégias FH-RMPC x IH-RMPC	63
Figura 19 - Sistema massa-mola acoplado.	65
Figura 20 - Estados da estratégia IH-RMPC conforme Cuzzola <i>et al.</i> (2002) (Caso 02).	67
Figura 21 - Estados da estratégia FH-RMPC sem matriz de Folga e $N = 3$ (Caso 02).....	67
Figura 22 - Sinal de Controle das estratégias IH-RMPC x FH-RMPC (Caso 02)	68
Figura 23 - Saídas das estratégias IH-RMPC x FH-RMPC (Caso 02)	68
Figura 24 - Coeficiente γ das estratégias IH-RMPC x FH-RMPC (Caso 02).....	69
Figura 25 - Custo efetivo J_{ef} das estratégias FH-RMPC x IH-RMPC (Caso 02)	69
Figura 26 - Estados da estratégia IH-RMPC conforme Mao (2003) (Caso 03).....	72
Figura 27 - Estados da estratégia FH-RMPC com matriz de Folga e $N = 3$ (Caso 03).....	73
Figura 28 - Sinal de Controle das estratégias IH-RMPC x FH-RMPC (Caso 03).	73
Figura 29 - Saídas das estratégias IH-RMPC x FH-RMPC (Caso 03)	74
Figura 30 - Coeficiente γ das estratégias FH-RMPC e IH-RMPC (Caso 03).	74
Figura 31 - Custo efetivo J_{ef} das estratégias FH-RMPC x IH-RMPC (Caso 03).....	75

Lista de Tabelas

Tabela 1 - Índices de desempenho baseados nos sinais de erro e controle.....	49
Tabela 2 - Comparação do α_M máximo.....	50
Tabela 3 - Índices de desempenho normalizados.	54
Tabela 4 - Índices de desempenho normalizados.	59
Tabela 5 - Índices de desempenho normalizados.	64
Tabela 6 - Índices de desempenho normalizados do caso 02.....	71
Tabela 7 - $\bar{J}_{ef}$ das estratégias IH-RMPC x FH-RMPC (Teorema 5), caso 02.	72
Tabela 8 - Índices de desempenho normalizados do caso 03.....	76

Lista de Abreviaturas

FH-RMPC	Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo de Horizonte Finito (<i>Finite Horizon Robust Model Predictive Control</i>)
IH-RMPC	Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo de Horizonte Infinito (<i>Infinite Horizon Robust Model Predictive Control</i>)
IAE	Integral do valor Absoluto do Erro (<i>Integral of the Absolute magnitude of the Error</i>)
ISE	Integral do Quadrado do Erro (<i>Integral of the Square of the Error</i>)
ITAE	Integral do valor Absoluto do Erro ponderado pelo Tempo (<i>Integral of Time multiplied by Absolute Error</i>)
ITSE	Integral do Quadrado do Erro ponderado pelo Tempo (<i>Integral of Time multiplied by the Square of Error</i>)
LMI	Desigualdade Matricial Linear (<i>Linear Matrix Inequality</i>)
LTI	Sistema Linear Invariante no Tempo (<i>Linear Time Invariant system</i>)
LTV	Sistema Linear Variante no Tempo (<i>Linear Time Variant system</i>)

LPV	Sistema Linear a Parâmetros Variantes (<i>Linear Parameter Varying system</i>)
LQR	Regulador Linear Quadrático (<i>Linear Quadratic Regulator</i>)
MPC	Controle Preditivo Baseado em Modelo (<i>Model Predictive Control</i>)
RDE	Equação a Diferenças de Riccati (<i>Riccati Difference Equation</i>)
RMPC	Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo (<i>Robust Model Predictive Control</i>)
TCV	Variação Total da ação de Controle (<i>Total variation of Control</i>)

Lista de Símbolos

N	Horizonte de predição
K	Matriz de ganho de realimentação de estado
A, B, C, D	Matriz de estado, Matriz de entrada, Matriz de saída, Matriz de Transmissão direta do modelo discreto
A_i, B_i	Matrizes que representam os vértices do modelo discreto sujeito a incertezas politópicas.
$A(\lambda), B(\lambda), C(\lambda)$	Matrizes do modelo discreto com incertezas paramétricas
L	Número de vértices de um politopo
λ_i	Constante escalar definida entre $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^L \lambda_i = 1$
$P \succ 0$	Matriz simétrica definida positiva ($x^T P x > 0$, $\forall x \neq 0$)
$P(\lambda)$	Matriz simétrica definida positiva dependente do parâmetro λ
$V(x)$	Função quadrática da variável x , $V(x) = x^T P x$
$x(k k)$	Estado do sistema medido no tempo k
$u(k k)$	Ação de controle aplicada no tempo k

$y(k k)$	Sinal de saída medido no tempo k
$x(k + i k)$	Estado do sistema no tempo $k + i$ predito com base nas medidas no tempo k
$y(k + i k)$	Saída do sistema no tempo $k + i$ predita com base nas medidas no tempo k
$u(k + i k)$	Sinal de controle no tempo $k + i$ predito com base nas medidas no tempo k
J	Função custo ou objetivo quadrática
$\bar{J}_{ef}$	Custo efetivo normalizado
γ	Variável escalar do problema de otimização
Q_j	Matriz simétrica de ponderação do estado na função custo
R_j	Matriz simétrica de ponderação do controle na função custo
Q_N	Matriz simétrica de ponderação do estado terminal
ε	Elipsoide
Ω, Λ	Politopos convexos
χ_f	Conjunto terminal
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^n$	Espaço vetorial real n -dimensional

Sumário

1 INTRODUÇÃO	12
1.1. Objetivo	14
1.2. Justificativa e motivação.....	14
1.3. Estrutura do texto	15
2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS	17
2.1 Introdução	17
2.2 Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)	17
2.3 Complemento de Schur	18
2.4 Estabilidade robusta de sistemas discretos	19
2.5 Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo	21
2.5.1 Estrutura básica do RMPC	22
2.5.2 Modelo com incertezas.....	24
2.5.3 Restrições	27
2.5.4 Factibilidade	27
2.5.5 Garantia de estabilidade.....	28
2.6 Equações a Diferenças de Riccati (RDE)	30
2.6.1 Estabilidade via monotonicidade da RDE	30
3 FH-RMPC	33
3.1 Introdução	33
3.2 Formulação do problema.....	33
3.3 FH-RMPC estável	35
3.4 FH-RMPC estável com funções de Lyapunov dependentes de parâmetros	42
4 SIMULAÇÃO E RESULTADOS OBTIDOS.....	48
4.1 Estudo de caso 01: controle de um sistema variante no tempo	49
4.2 Estudo de caso 02: controle de posição da antena	55
4.3 Estudo de caso 03: controle de um sistema variante no tempo adaptado	60
4.4 Estudo de caso 04: sistema massa-mola	65
5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	77
5.1 Perspectivas futuras.....	78
6 REFERÊNCIAS	79

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

O Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC – do inglês, *Model Predictive Control*), também referenciado como Controle Preditivo de Horizonte Retrocedente (RHPC – do inglês, *Receding Horizon Predictive Control*) ou Controle Preditivo com Horizonte Deslizante (*Moving Horizon Optimal Control*) engloba uma classe de controladores que computam iterativamente, de forma *on-line*, o controle ótimo baseado em um modelo da planta (Camacho e Bordón, 2007). Uma limitação do MPC (o MPC com modelo nominal) é não levar em consideração explicitamente as incertezas inerentes ao modelo da planta, o que torna o desempenho e a estabilidade dependentes da precisão do modelo. Um trabalho relevante que trata tal limitação foi desenvolvido por Khotare *et al.* (1996). Neste, uma técnica de Controle Preditivo Robusto de Horizonte Infinito (IH-RMPC – do inglês, *Infinity Horizon Robust Model Predictive Control*), que incorpora as incertezas de modelagem da planta e garante estabilidade quadrática em malha fechada, utilizando desigualdades matriciais lineares (LMIs – do inglês, *Linear Matrix Inequalities*), foi apresentada. Desde então, diversos trabalhos, como o de Cuzzola *et al.* (2002), Mao (2003), Casavola *et al.* (2004) e Wada e Saeki (2006), surgiram de forma a aprimorar tal técnica IH-RMPC.

Cuzzola *et al.* (2002) apresentaram uma melhoria na técnica desenvolvida em Khotare *et al.* (1996), propondo uma abordagem menos conservadora a partir dos resultados encontrados por De Oliveira *et al.* (1999), para obter a estabilidade com funções de Lyapunov dependentes de parâmetros. Mao (2003) reavaliou os

resultados de Cuzola *et al.* (2002), estendendo-os para os sistemas variantes no tempo (LTV).

Embora o IH-RMPC possua superioridade do ponto de vista de estabilidade e eficiência, as possibilidades de sintonia do sistema são limitadas, e a factibilidade pode ser outro problema em potencial (Chu *et al.*, 2006; Magni *et al.*, 2003). Comparado com os esquemas MPC tradicionais, o IH-RMPC não pode usar o horizonte de previsão e o horizonte de controle como parâmetros de sintonia para alcançar o equilíbrio entre a estabilidade e o desempenho do sistema (Chu *et al.*, 2006a). Por outro lado, o IH-RMPC presume sempre que existe uma única lei de controle que leva ao desempenho esperado para todo o conjunto de incertezas ao longo de todo horizonte infinito (Chu *et al.*, 2006a). Esta condição pode resultar em soluções de baixo desempenho e até problemas infactíveis (Scokaert & Mayne, 1998; Mayne *et al.*, 2000; Chu *et al.*, 2006).

Além disso, ao contrário da estratégia IH-RMPC que foi bem investigada, a estratégia de Controle Preditivo Robusto de Horizonte Finito (FH-RMPC – do inglês, *Finite Horizon Robust Model Predictive Control*) ainda necessita de mais estudos para contornar alguns obstáculos de forma satisfatória, como por exemplo: a complexidade computacional das predições de estado e saída futuras em função das incertezas e a garantia de estabilidade robusta.

Em Kim (2002), foi proposto um algoritmo FH-RMPC para sistemas discretos variantes no tempo utilizando LMI. O esquema de controle é baseado em um problema de otimização da função custo com horizonte finito, valendo-se de uma matriz de custo terminal para garantir a estabilidade em malha fechada.

Em Chu *et al.* (2006), um algoritmo FH-RMPC robusto em relação às incertezas do modelo foi apresentado. É utilizada uma abordagem LMI com uma matriz de média móvel do sistema para representar as incertezas, as quais diferem das incertezas estruturadas convencionais. A estabilidade é obtida através de uma matriz de custo terminal.

Kanev *et al.* (2006) propõem um algoritmo FH-RMPC com garantia de estabilidade assintótica em malha fechada pela imposição de restrição no sinal de controle no final do horizonte de predição.

De forma geral, as técnicas FH-RMPC presentes na literatura garantem a estabilidade através de restrições terminais como pode ser observado em Chu *et al.* (2006) e Kim (2002), ou através de restrições no sinal de controle ao final do horizonte de predição, como em Kanev *et al.* (2006).

Este trabalho propõe uma estratégia FH-RMPC para sistemas lineares em tempo discreto com incertezas politópicas variantes no tempo. Nesta abordagem, são utilizadas restrições LMI obtidas através das equações recursivas de Riccati para o projeto da lei de controle por realimentação de estado.

1.1. Objetivo

Este trabalho tem como objetivo desenvolver uma nova abordagem para o problema de Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo de Horizonte Finito (FH-RMPC) de sistemas lineares em tempo discreto, com garantia de estabilidade. Os sistemas estão sujeitos a incertezas politópicas variantes no tempo e a restrições nos sinais de controle e saída. Deseja-se avaliar a aplicabilidade dessa nova estratégia FH-RMPC através de exemplos numéricos e, utilizando-se índices de desempenho baseados no erro, compará-la com a estratégia IH-RMPC.

1.2. Justificativa e motivação

Este trabalho está inserido em uma pesquisa sobre estratégias FH-RMPC, tendo em vista que essas estratégias de controle ainda possuem alguns desafios que não foram consolidados e precisam ser mais investigados.

A primeira dificuldade está associada à complexidade computacional das predições dos estados e saídas futuras, principalmente em sistemas lineares com perturbações ou na presença de incertezas nas matrizes A e B , fazendo com que

termos incertos sejam propagados no cálculo das predições. Entretanto, é essencial para que um algoritmo RMPC seja bem sucedido ter uma forma de tratar as incertezas do modelo do processo.

A segunda dificuldade é a obtenção da garantia de estabilidade em malha fechada para a estratégia FH-RMPC de sistemas com restrições. Geralmente a estabilidade das técnicas FH-RMPC presentes na literatura recente é garantida através de restrições de custo terminal, como pode ser observado em (Chu *et al.*, 2006a) e (Kanev *et al.*, 2006).

Outro desafio do RMPC está associado à eficiência da implementação *on-line* e o tempo gasto para a execução do algoritmo. Este ponto pode ser compreendido pelos quatro passos da formulação tradicional do RMPC: *i*) determinar os parâmetros iniciais; *ii*) realizar as predições dos estados e saídas futuras; *iii*) otimizar a sequência de sinais de controle; e *iv*) aplicar o primeiro sinal de controle ótimo. Estes quatro passos devem ser completados dentro de um período de amostragem e, considerando-se a natural complexidade computacional do problema, pode não ser viável sua execução. Esta limitação pode restringir a aplicação do RMPC na indústria (Chu *et al.*, 2006).

Dessa forma, é de grande interesse aprofundar os estudos sobre estratégias FH-RMPC para transpor essas barreiras e desenvolver controladores que garantem estabilidade, apresentando um bom desempenho mesmo na presença de incertezas do modelo, que tratem casos multivariáveis e que possam lidar com restrições nos sinais de controle e saída do sistema.

1.3. Estrutura do texto

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

- **Capítulo 1: Introdução**

Na introdução, foi apresentada uma visão geral do tema assim como o objetivo, motivações e organização deste trabalho.

- **Capítulo 2: Fundamentos Teóricos**

O segundo capítulo apresenta uma visão geral da estratégia de Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo (RMPC) e alguns conceitos fundamentais para o entendimento deste trabalho. Atenção especial é reservada aos conceitos e propriedades das equações a diferenças de Riccati que servem de base para o desenvolvimento da nova estratégia FH-RMPC.

- **Capítulo 3: FH-RMPC**

No terceiro capítulo, a nova técnica de Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo de Horizonte Finito (FH-RMPC) é desenvolvida. Neste, são enunciados os teoremas propostos relacionados à estabilidade em malha fechada.

- **Capítulo 4: Simulações**

No Capítulo 4, são apresentados os resultados da nova estratégia FH-RMPC por meio de simulações e as comparações entre as estratégias de controle FH-RMPC e IH-RMPC utilizando-se de índices de desempenho baseados no erro e tempo de processamento.

- **Capítulo 5: Conclusões e Perspectivas**

O capítulo 5 é destinado às considerações finais e perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 Introdução

Este capítulo tem a finalidade de apresentar os conceitos necessários para o entendimento deste trabalho, de modo a facilitar a compreensão da estratégia de Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo de Horizonte Finito (FH-RMPC) proposta. Caso o leitor deseje entender mais sobre os assuntos apresentados nesta dissertação, recomenda-se a leitura dos livros de Boyd *et al.* (1994) para os tópicos sobre Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) e Complemento de Schur, Camacho e Bordon (2007) e Maciejowski (2002) para os conceitos básicos Controle Preditivo Robusto baseado em Modelo (RMPC) e Bitmead *et al.* (1990) para as Equações a Diferenças de Riccati (RDE) .

2.2 Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

As Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) são muito utilizadas em problemas de Engenharia de Controle e surgiram por volta de 1890, quando Lyapunov publicou seu trabalho seminal introduzindo o que se chama agora de Teoria de Lyapunov (Boyd *et al.*, 1994). Salienta-se que naquela época o termo LMI ainda não era utilizado.

Uma LMI é uma desigualdade matricial descrita da seguinte forma:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^L x_i F_i \succ 0, \quad (1)$$

na qual $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de variáveis de decisão e $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes simétricas conhecidas. $F(x) \succ 0$ significa que $F(x)$ é definida positiva, ou seja, $v^T F(x) v > 0$, para todo vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^n$. Isto implica que o menor autovalor de $F(x)$ é positivo. Quando existe x que satisfaz $F(x) \succ 0$, diz-se então que a LMI é factível.

O problema de otimização baseado em LMI que permeia este trabalho consiste em minimizar uma função objetivo sujeita a restrições LMIs:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x, \\ \text{sujeito a} \quad & F(x) \succ 0, \end{aligned} \quad (2)$$

sendo que $c \in \mathbb{R}^n$ é um vetor conhecido.

Neste caso, o problema consiste em encontrar um x factível (ou seja, achar x tal que $F(x) \succ 0$) e que minimize uma função objetivo linear.

O uso de LMIs no problema RMPC foi inicialmente proposto por Khotare *et al.* (1996). Existem muitas razões para se utilizar LMI na resolução de problemas de otimização presentes nas técnicas de MPC. Dentre as principais destaca-se o fato de que os problemas de otimização baseados em LMI podem ser resolvidos em tempo polinomial, com algoritmos eficientes como, por exemplo, aqueles que usam os métodos de pontos-interiores (Boyd *et al.*, 1994). Pela sua concepção, as desigualdades matriciais são bastante apropriadas para o tratamento de problemas envolvendo incertezas (caso robusto) e restrições de desigualdades.

2.3 Complemento de Schur

Uma propriedade matemática muito importante para a transformação de certas desigualdades convexas não-lineares em uma formulação LMI é o complemento de Schur.

Supondo-se que $Q = Q^T$, $R = R^T$ e S são matrizes reais de dimensões apropriadas, então a LMI

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \succ 0 \quad (3)$$

é equivalente às seguintes desigualdades matriciais:

$$R \succ 0 \text{ e } Q - SR^{-1}S^T \succ 0, \quad (4)$$

ou, de forma complementar,

$$Q \succ 0 \text{ e } R - S^T Q^{-1}S \succ 0. \quad (5)$$

Utilizando-se o complemento de Schur é possível então converter o conjunto de desigualdades não-lineares (4) ou (5), através de manipulações algébricas, na LMI (3).

2.4 Estabilidade robusta de sistemas discretos

O conceito de estabilidade utilizado neste trabalho está intimamente associado à teoria de Lyapunov. Para um estudo mais aprofundado do tema, consultar (Khalil, 1996).

Seja o sistema linear em tempo discreto com a seguinte representação no espaço de estados:

$$x(k+1) = A(\lambda)x(k), \quad (6)$$

em que $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\lambda \in \mathbb{R}^L$ é o vetor de parâmetros incertos e $A(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz dinâmica incerta pertencente a um domínio de incerteza convexo e limitado $\mathcal{D}$, do tipo politopo, dado por:

$$\mathcal{D} = \{A(\lambda): A(\lambda) = \sum_{i=1}^L \lambda_i A_i, \lambda \in \Lambda\}, \quad (7)$$

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^L, \sum_{i=1}^L \lambda_i = 1; \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, L\}. \quad (8)$$

A matriz $A(\lambda) \in \mathcal{D}$ pode ser escrita como a combinação convexa dos vértices $A_i = 1, 2, \dots, L$, do politopo $\mathcal{D}$.

A partir do método direto de estabilidade de Lyapunov, a estabilidade robusta do sistema incerto (6) pode ser obtida fazendo uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros ou utilizando-se o conceito de estabilidade quadrática.

A estabilidade robusta do sistema linear incerto (6) é caracterizada pela busca de uma função de Lyapunov $V(x) = x^T P(\lambda)x$ positiva tal que a sua variação $\Delta V(x) = V(x(k+1)) - V(x(k))$ seja negativa para toda trajetória do sistema, sendo que $P(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica ($P(\lambda) = P^T(\lambda)$) dependente do parâmetro $\lambda \in \Lambda$ e definida positiva $P(\lambda) > 0$.

A partir das funções de Lyapunov, podem ser obtidas restrições baseadas em LMIs que garantem a estabilidade do sistema incerto. Desta forma, os testes para verificação de estabilidade do sistema incerto são transformados em um problema de factibilidade.

A estabilidade assintótica do sistema linear incerto em tempo discreto (6) é assegurada se e somente se as seguintes LMIs em $P(\lambda) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são satisfeitas:

$$A(\lambda)^T P(\lambda) A(\lambda) - P(\lambda) < 0 \text{ e } P(\lambda) = P(\lambda)^T > 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda. \quad (9)$$

O conceito de estabilidade quadrática de Lyapunov consiste na existência de uma única função quadrática de Lyapunov para as infinitas representações do sistema incerto (6). Desta forma, o sistema incerto (6) é quadraticamente estável se e somente se existe uma matriz P simétrica ($P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$) definida positiva tal que a LMI

$$A(\lambda)^T P A(\lambda) - P < 0, \quad P > 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad (10)$$

seja factível.

Aplicando-se o complemento de Schur, pode-se obter a seguinte formulação LMI equivalente à condição (10):

$$\begin{bmatrix} P & A_i P \\ A_i^T P & P \end{bmatrix} > 0, \quad (11)$$

sendo que A_i , $i = 1, 2, \dots, L$, são os vértices do politopo de incertezas $\mathcal{D}$.

A estabilidade robusta com funções de Lyapunov dependentes de parâmetros apresenta resultados menos conservadores do que a estabilidade quadrática (Leite *et al.*, 2004).

2.5 Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo

O Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC) é um conjunto de algoritmos de controle que foram desenvolvidos considerando-se o modelo da planta conhecido para predição e obtenção do sinal de controle via minimização de uma função objetivo. O MPC surgiu no final da década de 1970 (Camacho e Bordón, 2007) e tem sido adotado cada vez mais na indústria como um efetivo meio de resolver problemas de controle multivariável com restrições (Bemporad e Morari, 1999).

As estratégias de Controle Preditivo Baseado em Modelo adotam um modelo nominal e não consideram explicitamente as incertezas de modelagem da planta em sua formulação. Esta consideração simplifica a formulação MPC, mas pode impactar no desempenho do controlador e na estabilidade do sistema em malha fechada (Chu *et al.*, 2006b). Uma pequena perturbação em algum parâmetro pode desencadear uma violação de restrição ou mesmo levar o sistema à instabilidade. Para superar estas limitações, foram introduzidas as estratégias de Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo (RMPC) que incorporam explicitamente as incertezas do modelo da planta no projeto do controlador. Assume-se que o modelo da planta pertence a um conjunto que pode ser caracterizado de alguma forma quantitativamente (Maciejowski, 2002).

As estratégias RMPC são técnicas para controle de plantas lineares e com dinâmica relativamente lenta, como as encontradas nas indústrias químicas e petroquímicas (Camacho e Bordón, 2007). Em muitos processos industriais, o tempo mínimo para a atualização da ação de controle é relativamente grande, o que viabiliza a aplicação de estratégias RMPC que exigem a execução de cálculos *on-line*.

Um sistema de controle é caracterizado como robusto com relação a um conjunto de incertezas da planta se a estabilidade em malha fechada pode ser garantida e as especificações de desempenho são atingidas apesar das incertezas. Um controlador robusto deve ser apto então a superar diferenças entre o modelo real da planta e o modelo nominal. Uma representação adequada das incertezas é fundamental para o projeto do controlador RMPC.

O RMPC apresenta muitas vantagens quando comparado a outras técnicas de controle convencionais, como por exemplo: a capacidade de respeitar restrições nos sinais de controle e saída e nas variáveis de estados, a facilidade de tratar casos multivariáveis e a capacidade de compensar pequenos distúrbios ou pequenas imprecisões do modelo. O RMPC resolve um problema de controle ótimo *on-line* para o estado atual da planta, ao invés de determinar uma lei de controle pré-computada (*off-line*), como outras estratégias de controle.

De forma geral, um Controlador Preditivo, Robusto ou não, tem a seguinte estrutura (Camacho e Bordón, 2007):

- são medidos os estados ou saídas atuais da planta;
- usa o modelo da planta (nominal ou com incertezas) para prever os estados ou saídas do sistema em instantes de tempo futuros (horizonte de previsão);
- calcula a sequência de controle que minimiza uma função objetivo;
- a cada instante de tempo, apenas o primeiro sinal de controle da sequência calculada é aplicado ao processo, e o horizonte de previsão é deslocado para um instante de tempo futuro.

2.5.1 Estrutura básica do RMPC

O RMPC com restrições é uma estratégia de controle *on-line* que computa uma sequência ótima de controle pela resolução de um problema de otimização em um horizonte de tempo deslizante. Em um determinado tempo k , baseada no modelo incerto da planta, uma sequência ótima de controle $u(k|k), u(k+1|k), \dots, u(k+N|k)$ é computada minimizando-se um determinado critério, em um

horizonte de predição N , satisfazendo restrições nos sinais de controle e saída. Entretanto, somente o primeiro sinal de controle é aplicado na planta. O problema de otimização é repetido nos instantes seguintes.

Cada algoritmo de controle preditivo robusto define seu próprio critério de otimização na obtenção de uma lei de controle. O controlador RMPC pode ser utilizado para resolver o problema servo ou regulatório, assim como utilizar matrizes de ponderação terminais.

A estrutura básica do RMPC utilizado neste trabalho está representada na Figura 1. É possível observar o uso do modelo do processo com incertezas, que a partir da medição dos estados do sistema, juntamente com a sequência de controle, possibilita a predição dos estados futuros. O otimizador então associa os estados futuros e o esforço de controle a uma função custo quadrática. A minimização desta função custo sujeita a restrições gera a sequência ótima de controle. Somente o primeiro valor do sinal de controle é aplicado na planta e o problema é repetido nos instantes seguintes.

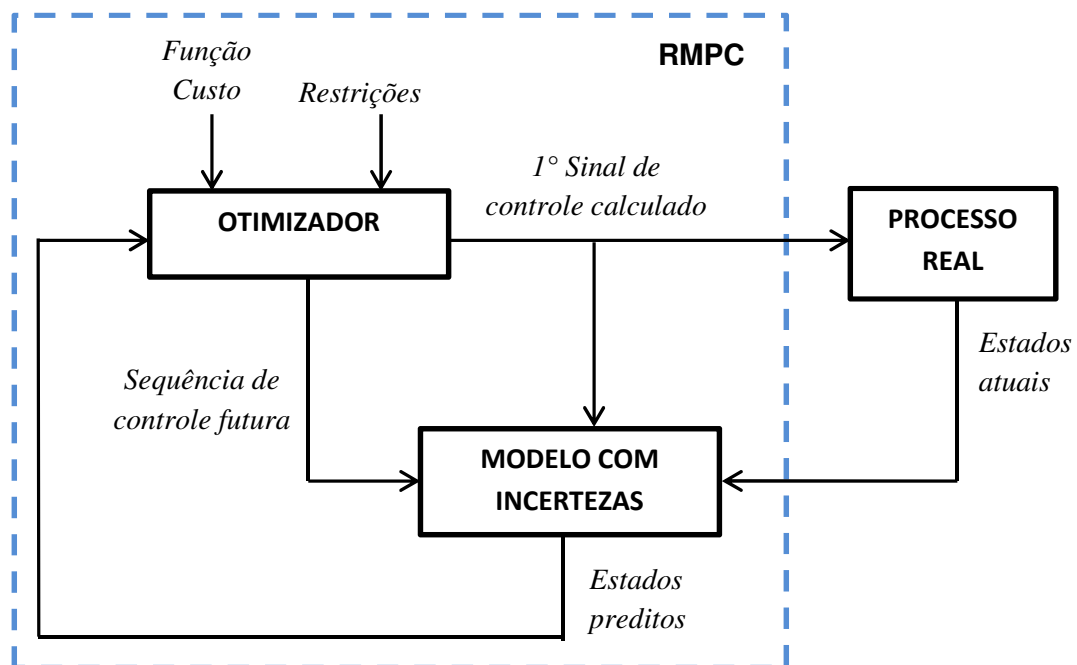


Figura 1 - Configuração do controlador RMPC [fonte: Adaptada de Camacho e Bordons (2007)].

Neste trabalho a função custo é escrita como uma equação quadrática nos estados e no sinal de controle, através da seguinte expressão:

$$J(k) = \sum_{j=0}^{N-1} [\|x(k+j|k)\|_{Q_j}^2 + \|u(k+j|k)\|_{R_j}^2] + \|x(k+N|k)\|_{Q_N}^2. \quad (12)$$

na qual $x(k+j|k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ são os estados preditos, $u(k+j|k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ são os sinais de controle preditos, N é o horizonte de predição e $Q_j \geq 0$, $R_j > 0$ e $Q_N \geq 0$ são as matrizes de ponderação do erro, do esforço de controle e a matriz de ponderação terminal, respectivamente.

2.5.2 Modelo com incertezas

Uma etapa crítica no projeto de um controlador MPC é determinar o modelo matemático utilizado para a predição. Ao descrever o comportamento de uma planta com o uso de modelos, deve-se levar em consideração as incertezas advindas dessa descrição. Discrepâncias entre a planta e o modelo podem provocar resultados não satisfatórios na implementação da técnica de controle MPC. Este tipo de situação motiva a necessidade de desenvolvimento de técnicas de MPC Robusto (RMPC), que preservam a estabilidade e o desempenho do sistema em malha fechada, apesar das imprecisões ou incertezas dos modelos (Ottoni *et al.*, 2013).

As incertezas do modelo podem ser causadas por ruídos de medição, distúrbios externos, linearização em torno de pontos de operação, retardos não incluídos no modelo ou pela existência de dinâmicas não modeladas. As estratégias de Controle Robusto podem usar diferentes procedimentos na modelagem dessas incertezas. Dois tipos de incertezas comumente utilizados são: incertezas estruturadas e não estruturadas (Uwe, 2004).

Neste trabalho, é abordada a incerteza estruturada do tipo politopo. Neste caso, o modelo possui estrutura e ordem conhecidas, no entanto, os parâmetros podem ser incertos. Estes parâmetros incertos formam um politopo. Uma propriedade importante do politopo é a convexidade, isto é, qualquer ponto no

interior deste conjunto pode ser representado pela combinação convexa de um número finito de pontos chamados vértices do politopo.

A ideia chave é incorporar as incertezas da planta de maneira explícita no projeto do controlador RMPC, minimizando o pior caso da função objetivo, sendo que o pior caso é analisado considerando-se o conjunto de incertezas da planta.

Seja o seguinte sistema discreto linear variante no tempo:

$$\begin{cases} x(k+1) = A(\lambda(k))x(k) + B(\lambda(k))u(k), \\ y(k) = Cx(k), \\ [A(\lambda(k)) \ B(\lambda(k))] \in \Omega, \end{cases} \quad (13)$$

sendo que $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o estado da planta, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o sinal de controle, $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o sinal de saída, $\lambda(k) \in \mathbb{R}^L$ é um vetor de parâmetros incertos e Ω é um domínio de incertezas politópicas definido pelo envelope convexo

$$\Omega = Co\{[A_1 \ B_1], [A_2 \ B_2], \dots, [A_L \ B_L]\}. \quad (14)$$

De forma similar, existe $\lambda(k) \in \Lambda$ (8) tal que

$$[A(\lambda(k)) \ B(\lambda(k))] = \sum_{i=1}^L \lambda_i [A_i \ B_i], \quad (15)$$

sendo que L é o número de vértices e A_i e B_i são os vértices do politopo, conforme ilustrado na Figura 2.

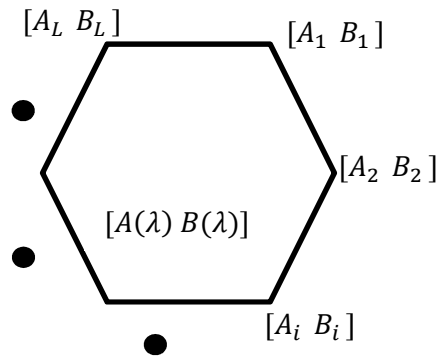


Figura 2 - Incertezas politópicas nas matrizes A e B (fonte: adaptado de Kothare *et al.*, 1996).

Propagação das incertezas

Para sistemas com incertezas nas matrizes do modelo no espaço de estados, especialmente na matriz dinâmica A , quando se executam as predições dos estados e saídas, as incertezas podem ser ampliadas e propagadas para instantes futuros.

Para simplificar a expressão, será considerado um modelo incerto invariante no tempo. Neste caso, esse efeito pode ser observado nos termos $A^2, A^3, \dots, A^N$ e $AB, A^2B, \dots, A^{N-1}B$ que aparecem nas expressões em $x(k + i|k)$:

$$\begin{aligned}
 x(k + 1|k) &= A(\lambda)x(k|k) + B(\lambda)u(k|k); \\
 x(k + 2|k) &= A(\lambda)x(k + 1|k) + B(\lambda)u(k + 1|k); \\
 &= A^2(\lambda)x(k|k) + A(\lambda)B(\lambda)u(k|k) + B(\lambda)u(k + 1|k); \\
 &\vdots \\
 x(k + N|k) &= A(\lambda)x(k + N - 1|k) + B(\lambda)u(k + N - 1|k); \\
 &= A^N(\lambda)x(k|k) + A^{N-1}(\lambda)B(\lambda)u(k|k) + \dots + B(\lambda)u(k + N - 1|k).
 \end{aligned} \tag{16}$$

O mesmo comportamento acontece nas saídas preditas $y(k + i|k)$, pois dependem de $x(k + i|k)$:

$$\begin{aligned}
 y(k + 1|k) &= Cx(k + 1|k); \\
 &= CA(\lambda)x(k|k) + CB(\lambda)u(k|k); \\
 y(k + 2|k) &= Cx(k + 2|k); \\
 &= CA^2(\lambda)x(k|k) + CA(\lambda)B(\lambda)u(k|k) + CB(\lambda)u(k + 1|k); \\
 &\vdots \\
 y(k + N|k) &= Cx(k + N|k); \\
 &= CA^N(\lambda)x(k|k) + CA^{N-1}(\lambda)B(\lambda)u(k|k) + \dots + CB(\lambda)u(k + N - 1|k).
 \end{aligned} \tag{17}$$

É difícil tratar matematicamente esses termos incertos na solução do problema de otimização.

2.5.3 Restrições

Em muitos sistemas de controle, as variáveis manipuladas estão sujeitas a limitações físicas e não podem possuir valores arbitrariamente grandes, como por exemplo, em casos em que os atuadores são válvulas, motores e bombas. Restrições no sinal de controle (ou variável manipulada) geralmente estão associadas a questões de saturação dos atuadores: válvulas com range de ajuste finito ou taxas de vazão com valores máximos devido a valores fixos do diâmetro da tubulação, velocidade máxima dos motores etc. Restrições de entrada também podem aparecer na forma de restrições de variação: válvulas e outros atuadores com limitação na velocidade de abertura (Maciejowski, 2002).

Em alguns casos, existe a necessidade de limitar os valores dos estados. Por exemplo, em plantas de processo, nas quais a temperatura ou a pressão são os estados e devem ficar dentro de certos limites por questão de segurança (Kwon e Han, 2005).

Neste trabalho, são consideradas restrições apenas nos sinais de controle e saída, definidas pelas seguintes normas Euclidianas, respectivamente:

$$\|u(k+j|k)\|_2 \leq u_{\max} \quad \forall k \geq 0, \forall j \geq 0, \quad (18)$$

$$\|y(k+j|k)\|_2 \leq y_{\max} \quad \forall k \geq 0, \forall j \geq 1. \quad (19)$$

2.5.4 Factibilidade

Em alguns casos, na solução do problema de otimização, a região definida pelo conjunto de restrições no espaço das variáveis de decisão é vazia. Nestas condições, o algoritmo de otimização não pode obter nenhuma solução e o problema de otimização é dito infactível. Um problema de otimização é factível quando o mínimo da função objetivo é atingido e existem variáveis de decisão que satisfazem todas as restrições (Camacho e Bordón, 2007).

A obtenção da factibilidade é de grande importância, pois se o problema de otimização for infactível, o algoritmo MPC não irá conseguir computar os próximos sinais de controle. Existem diversas propostas para o tratamento do problema de não-factibilidade através da aplicação de relaxamento das restrições segundo diferentes critérios (Afonso e Galvão, 2012).

2.5.5 Garantia de estabilidade

Uma das questões fundamentais na síntese de controladores MPC é a garantia de estabilidade de malha fechada, de forma a proporcionar o funcionamento adequado do sistema de controle. Há diferentes formas de assegurar a estabilidade nas estratégias MPC presentes na literatura (Bemporad e Morari, 1999; Mayne *et al.*, 2000), dentre as quais as mais usuais são:

a) Restrição de igualdade terminal

A estabilidade pode ser garantida, forçando uma restrição de igualdade terminal $x(k + N|k) = 0$ ao algoritmo MPC. O maior problema de utilizar esta técnica é que o esforço de controle requerido para levar o estado para a origem pode ser grande, especialmente para horizontes de predição curtos. Esta abordagem pode ser encontrada nos trabalhos Kwon e Pearson (1977) e Kwon e Pearson (1978).

b) Conjunto terminal invariante

A ideia é semelhante à técnica de restrição de igualdade terminal, porém ao invés de determinar que o último instante predito seja $x(k + N|k) = 0$, acrescenta-se o requisito de que o estado final pertença a um conjunto terminal $x(k + N|k) \in \chi_f$, relaxando a restrição de igualdade. Wan e Kothare (2003) apresentam algoritmos RMPC com garantia de estabilidade baseados em conjunto terminais. No primeiro

algoritmo, o conjunto terminal χ_f é um elipsoide definido por $\chi_f = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T Q x \leq 1, Q > 0\}$ e no segundo algoritmo o conjunto terminal χ_f é variante no tempo.

Isso também pode ser visto em Khotare *et al.* (1996), no qual a garantia de estabilidade da estratégia IH-RMPC é baseada em conjuntos elipsoidais invariantes. A matriz de estados K da lei de controle $u(k+i|k) = Kx(k+i|k)$, a qual minimiza a função quadrática de Lyapunov $V(x(k|k))$, estabiliza assintoticamente o sistema em malha fechada. Isto pode ser provado, observando que $V(x(k|k)) = x(k|k)^T P_k x(k|k) \leq \gamma$, com $P_k > 0$, obtida pela solução ótima no instante de amostragem k , é uma função de Lyapunov não crescente. Cuzzola *et al.* (2002) e Mao (2003) estenderam esta formulação para garantia de estabilidade através de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros associados aos vértices do politopo.

c) Matriz custo terminal

A estabilidade pode ser garantida pela adição de um termo na função objetivo que penaliza o estado terminal através de uma matriz custo terminal Q_N . Lee *et al.* (1998) apresentaram um algoritmo de horizonte deslizando com garantia de estabilidade baseada em matriz de ponderação terminal selecionada através da inequação de Riccati. As estratégias de controle FH-RMPC apresentadas em Chu *et al.* (2006a) e Kim (2002) também utilizam restrições de custo terminal para garantia da estabilidade.

d) Contração das restrições

Outra forma de garantir a estabilidade em malha fechada através da imposição de restrições de contração nos estados foi apresentada em Polak e Yang (1993). A ideia é impor explicitamente que os estados decresçam segundo alguma

norma, desta forma pode ser imposta a restrição $\|x(k+1|k)\| \leq \alpha \|x(k)\|$, com $\alpha \in [0,1)$. A estabilidade é garantida se o problema é factível. Impor restrições de contração é, entretanto, bastante restritivo para muitos problemas de controle, e pode causar infactibilidade (Camacho e Bordon, 2007).

A garantia de estabilidade da técnica de FH-RMPC proposta neste trabalho baseia-se na propriedade monotônica associada às equações a diferenças de Riccati.

2.6 Equações a Diferenças de Riccati (RDE)

Uma das equações matriciais não lineares mais estudadas na matemática e engenharia é a equação de Riccati. De modo geral, o termo “equação de Riccati” pode significar uma classe de equações envolvendo matrizes: quadráticas, algébricas, diferenciais ou a diferenças finitas, dos tipos simétricas ou não-simétricas, surgidas no estudo de sistemas dinâmicos contínuos ou discretos no tempo (Arnold e Jaub, 1984). A Equação de Riccati é um dos objetos mais estudados na área de controle ótimo e teoria de filtros e é bastante surpreendente que novos resultados ainda possam ser obtidos (Bitmead *et al.*, 1985).

Alguns resultados sobre a monotonicidade e estabilidade de controladores LQ (Linear Quadrático) com horizonte deslizante (Bitmead *et al.* (1990), de Souza *et al.* (1986), de Souza (1989), Wimmer (1992)) são utilizados para o desenvolvimento da estratégia FH-RMPC.

2.6.1 Estabilidade via monotonicidade da RDE

Em Bitmead *et al.* (1990) é mostrado que a estabilidade pode ser garantida com horizonte finito, mesmo quando não existe explicitamente restrições terminais

(Maciejowski, 2002). O problema de controle preditivo de horizonte finito pode ser associado a uma equação a diferenças de Riccati variante no tempo a qual é relacionada com o valor ótimo da função custo.

A solução do problema de Controle LQ com horizonte finito, para sistemas variantes no tempo, com função custo definida em (12), é dada pela sequência ótima de controle:

$$u(j) = K_j x(j), \quad j \in [0, N), \quad (20)$$

com matriz de ganho de realimentação de estados

$$K_j = -[R_j + B_j^T P_{j+1} B_j]^{-1} B_j^T P_{j+1} A_j, \quad (21)$$

e P_j são as matrizes simétricas definidas positivas ($P_j > 0$), obtidas recursivamente pela RDE (*Riccati Backward Difference Equation*):

$$P_j = A_j^T P_{j+1} A_j - A_j^T P_{j+1} B_j [R_j + B_j^T P_{j+1} B_j]^{-1} B_j^T P_{j+1} A_j + Q_j, \quad j \in [0, N), \quad (22)$$

com P_N conhecida. O valor ótimo da função custo (12) resultante é $J_N(x(0)) = \|x(0)\|_{P_0}^2$. Ressalta-se que no Controle LQ com horizonte deslizante apenas o sinal $u(0)$ é aplicado ao sistema em cada janela de tempo.

Os teoremas a seguir foram apresentados em Bitmead *et al.* (1990) e Bitmead *et al.* (1985), respectivamente, e adaptados para a sequência $\{P_j\}_{j=0}^N$ tratada neste trabalho.

Teorema 1: (Bitmead *et al.* (1985))

Se a solução P_j definida não-negativa da RDE (22) é monotonicamente não crescente em um determinado tempo, isto é:

$$P_{j+1} \geq P_j, \quad \text{para algum } j, \quad (23)$$

então P_j é monotonicamente não crescente para todos os tempos subsequentes:

$$P_{j-l+1} \geq P_{j-l}, \quad \forall l \geq 0 \text{ e } l \leq j. \quad (24)$$

■

O teorema a seguir (Bitmead et al. (1985)) relaciona a propriedade da monotonicidade da solução da RDE com a estabilidade assintótica de malha fechada.

Teorema 2: (Bitmead *et al.* (1990))

Seja a RDE em (22). Se

- $[A_j, B_j]$ são estabilizáveis;
- $[A_j, Q_j^{1/2}]$ são detectáveis;
- $P_{j+1} \geq P_j$, para algum j ;

então $\bar{A}_l = A_l + B_l K_l = A_l - B_l(B_l^T P_{l+1} B_l + R_l)^{-1} B_l^T P_{l+1} A_l$ é estável para todo $l \leq j$. ■

De fato, a partir das equações (21) e (22), tem-se que

$$(A_j + B_j K_j)^T P_{j+1} (A_j + B_j K_j) + K_j^T R_j K_j + Q_j = P_j. \quad (25)$$

Se $P_{j+1} \geq P_j$, para algum j , então:

$$(A_j + B_j K_j)^T P_{j+1} (A_j + B_j K_j) + K_j^T R_j K_j + Q_j \leq P_{j+1}. \quad (26)$$

A partir da desigualdade matricial (26), obtém-se:

$$(A_j + B_j K_j)^T P_{j+1} (A_j + B_j K_j) - P_{j+1} \leq 0. \quad (27)$$

Pelo Teorema 1 e desigualdade (27), para todo $l \leq j$, o sistema em malha fechada $(A_l + B_l K_l)$ é assintoticamente estável.

Os resultados acima exploram a natureza não crescente das soluções da RDE. Esses conceitos servem como base para a formulação da estratégia FH-RMPC proposta neste trabalho.

Capítulo 3

FH-RMPC

3.1 Introdução

Este trabalho propõe uma nova estratégia FH-RMPC para sistemas lineares em tempo discreto com incertezas politópicas variantes no tempo, utilizando LMI. Nesta abordagem, condições LMI são deduzidas a partir das equações a diferenças de Riccati (RDEs) para encontrar, em cada instante k , uma lei de controle estabilizante por realimentação de estado para a regulação do sistema incerto. A garantia de estabilidade é provada baseando-se nas propriedades das RDEs. São propostas duas formulações FH-RMPC com garantia de estabilidade para sistemas sujeitos a restrições nos sinais de controle e saída. A primeira utiliza um conjunto finito de funções de Lyapunov e a segunda, fundamentada nas matrizes de folga, faz uso de funções de Lyapunov dependentes de parâmetros.

3.2 Formulação do problema

Considera-se o seguinte sistema linear em tempo discreto com incertezas variantes no tempo (LPV):

$$\begin{cases} x(k+1) = A(\lambda(k))x(k) + B(\lambda(k))u(k), \\ y(k) = Cx(k), \end{cases} \quad (28)$$

e $x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o estado da planta, $u(k) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o sinal de controle, $y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o sinal de saída e $\lambda(k) \in \mathbb{R}^L$ é um parâmetro incerto e variante no tempo. Supõe-se que a variável de estado $x(k)$ é mensurável no tempo k ($x(k) = x(k|k)$). Considera-se ainda que as matrizes variantes no tempo $A(\lambda(k))$ e $B(\lambda(k))$ pertencem ao envelope convexo

$$\Omega = Co\{[A_1 \ B_1], [A_2 \ B_2], \dots, [A_L \ B_L]\}, \quad (29)$$

ou seja:

$$[A(\lambda(k)) \ B(\lambda(k))] = \sum_{i=1}^L \lambda_i(k) [A_i \ B_i], \quad (30)$$

com $\lambda_i(k) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, L$ e $\sum_{i=1}^L \lambda_i(k) = 1$.

Para um estado inicial $x(k)$ dado, deseja-se projetar uma lei de controle MPC por realimentação de estado que garanta a estabilidade em malha fechada e minimize, a cada instante de amostragem k , o seguinte critério de desempenho robusto:

$$\min_{u(k+j|k), j=0,1,\dots,N-1} \max_{[A(k+j) \ B(k+j)] \in \Omega, j=0,1,\dots,N-1} J_N(k), \quad (31)$$

com

$$J_N(k) = \sum_{j=0}^{N-1} [\|x(k+j|k)\|_{Q_j}^2 + \|u(k+j|k)\|_{R_j}^2] + \|x(k+N|k)\|_{P_N}^2,$$

e $P_N > 0$, $Q_j \geq 0$ e $R_j > 0$, $\forall j \in [0, N-1]$, são matrizes de ponderação e N é o horizonte de predição, satisfazendo as seguintes restrições:

$$\|u(k+j|k)\|_2 \leq u_{\max}, \quad \forall k \geq 0, \forall j \geq 0, \quad (32)$$

$$\|y(k+j|k)\|_2 \leq y_{\max}, \quad \forall k \geq 0, \forall j \geq 1. \quad (33)$$

Esse problema “min-máx” corresponde ao MPC com horizonte finito obtido com o modelo de predição que resulta no maior valor de $J_N(k)$ entre todos os modelos em Ω .

3.3 FH-RMPC estável

Nesta seção, uma solução estável para o problema de síntese de controladores MPC robustos com horizonte finito é apresentada, fazendo-se uso de um limitante superior para o critério de desempenho (31). A cada instante de amostragem k , determina-se uma lei de controle por realimentação de estado $u(k+j|k) = K_j x(k+j|k)$, $\forall j \in [0, N)$, que minimiza esse limitante, considerando-se restrições nos sinais de controle e saída.

Como é usual em estratégias MPC, somente o primeiro sinal de controle $u(k) = u(k|k) = K_0 x(k|k)$ é aplicado ao sistema, e o procedimento é repetido no instante de amostragem seguinte.

O teorema a seguir é baseado nas equações a diferenças de Riccati, adotando-se uma abordagem via LMI, apropriada para a síntese robusta.

Teorema 3:

Sejam o sistema LPV em tempo discreto (28) com o conjunto de incertezas associado Ω (29), $x(k) = x(k|k)$ o estado medido no instante de amostragem k , e as restrições nos sinais de controle e saída (32) e (33), respectivamente. O problema FH-RMPC com realimentação de estado e garantia de estabilidade sujeito a restrições pode ser resolvido em cada instante de amostragem k , se existem matrizes $W_l > 0$, $l = 0, 1, \dots, N$, e Y_l , $l = 0, 1, \dots, N-1$, que solucionam o seguinte problema de otimização convexo:

$$\min_{\gamma > 0, W_l > 0, Y_l} \gamma \quad (34)$$

sujeito a:

$$\begin{bmatrix} W_l & W_l A_i^T + Y_l^T B_i^T & W_l Q_l^{\frac{1}{2}} & Y_l^T R_l^{\frac{1}{2}} \\ A_i W_l + B_i Y_l & W_{l+1} & 0 & 0 \\ Q_l^{\frac{1}{2}} W_l & 0 & \gamma I & 0 \\ R_l^{\frac{1}{2}} Y_l & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k|k)^T \\ x(k|k) & W_0 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (36)$$

$$W_{N-1} \geq W_N, \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 I & Y_l \\ Y_l^T & W_l \end{bmatrix} \geq 0, \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} y_{\max}^2 I & C A_i W_l + C B_i Y_l \\ W_l A_i^T C^T + Y_l^T B_i^T C^T & W_l \end{bmatrix} \geq 0, \quad (39)$$

com $i = 1, 2, \dots, L$, e $l = 0, 1, \dots, N - 1$, e γ é um limitante superior do critério de desempenho robusto (31). A sequência de ganhos de realimentação de estado estabilizantes é calculada então a partir da solução ótima de (34) através de $K_l = Y_l W_l^{-1}$, $l = 0, 1, \dots, N - 1$, e somente o primeiro sinal de controle $u(k|k) = K_0 x(k|k)$ é aplicado ao sistema.

■

Prova:

Demonstra-se inicialmente que (35) se equivale a:

$$(A_i + B_i K_l)^T P_{l+1} (A_i + B_i K_l) + K_l^T R_l K_l + Q_l \leq P_l, \quad (40)$$

$\forall i = 1, 2, \dots, L$ e $l = 0, 1, \dots, N - 1$. Observa-se que, com $P_l \leq P_{l+1}$, a desigualdade matricial (40) contém a condição de estabilidade de Lyapunov para sistemas em tempo discreto.

Definindo-se $W_l = \gamma P_l^{-1}$, com $\bar{A}_l = (A_l + B_l K_l)$, obtém-se, a partir de (40), que:

$$\bar{A}_l^T \gamma W_{l+1}^{-1} \bar{A}_l - \gamma W_l^{-1} + K_l^T R_l K_l + Q_l \leq 0. \quad (41)$$

Utilizando-se o complemento de Schur, a desigualdade (41) resulta em:

$$\begin{bmatrix} W_l^{-1} - \gamma^{-1} K_l^T R_l K_l - \gamma^{-1} Q_l & \bar{A}_l^T \\ \bar{A}_l & W_{l+1} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (42)$$

Multiplicando-se a desigualdade matricial (42) à direita e à esquerda por $\text{diag}(W_l, I)$ e utilizando-se o complemento de Schur, com $K_l W_l = Y_l$, tem-se que (42) se equivale a

$$\begin{bmatrix} W_l & W_l A_l^T + Y_l^T B_l^T & W_l Q_l^{\frac{1}{2}} & Y_l^T R_l^{\frac{1}{2}} \\ A_l W_l + B_l Y_l & W_{l+1} & 0 & 0 \\ Q_l^{\frac{1}{2}} W_l & 0 & \gamma I & 0 \\ R_l^{\frac{1}{2}} Y_l & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0,$$

$\forall i = 1, 2, \dots, L$ e $\forall l = 0, 1, \dots, N - 1$.

Logo a desigualdade matricial (40) é equivalente à LMI (35), fazendo-se $W_l = \gamma P_l^{-1}$.

Para cada l , multiplicam-se as L desigualdades (35) pelo $\lambda_i(k+j)$ correspondente, $i = 1, 2, \dots, L$, com $\lambda_i(k+j) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^L \lambda_i(k+j) = 1$, e somam-se, resultando em:

$$\begin{bmatrix} W_l & W_l A^T(k+j) + Y_l^T B^T(k+j) & W_l Q_l^{\frac{1}{2}} & Y_l^T R_l^{\frac{1}{2}} \\ A(k+j)W_l + B(k+j)Y_l & W_{l+1} & 0 & 0 \\ Q_l^{\frac{1}{2}} W_l & 0 & \gamma I & 0 \\ R_l^{\frac{1}{2}} Y_l & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (43)$$

$\forall j = 0, 1, \dots, N - 1$, com $[A(k+j) \ B(k+j)] = \sum_{i=1}^L \lambda_i(k+j) [A_i \ B_i]$.

Como foi demonstrado anteriormente, (43) se equivale a

$$(A(k+j) + B(k+j)K_l)^T P_{l+1} (A(k+j) + B(k+j)K_l) + K_l^T R_l K_l + Q_l \leq P_l, \quad (44)$$

$$\forall j = 0, 1, \dots, N-1, \forall l = 0, 1, \dots, N-1.$$

Pelos Teoremas 1 e 2, considerando-se a LMI (37), (44) implica que

$$(A(k+j) + B(k+j)K_l)^T P_{l+1} (A(k+j) + B(k+j)K_l) - P_{l+1} \leq 0, \quad (45)$$

$$\forall j = 0, 1, \dots, N-1, \forall l = 0, 1, \dots, N-1.$$

Logo, os ganhos $K_l = Y_l W_l^{-1}$, $l = 0, 1, \dots, N-1$, estabilizam robustamente o sistema com incertezas variantes no tempo em malha fechada.

A partir da LMI (36), aplicando-se o complemento de Schur, obtém-se:

$$x(k|k)^T W_0^{-1} x(k|k) \leq 1. \quad (46)$$

Para $W_0 = \gamma P_0^{-1}$, (46) é equivalente a $x(k|k)^T P_0 x(k|k) \leq \gamma$. Desta forma, o requisito $J_N \leq x(k|k)^T P_0 x(k|k) \leq \gamma$ é satisfeito.

As LMIs (38) e (39) associadas às restrições nos sinais de controle e saída, respectivamente, são obtidas de forma similar às de Boyd *et al.* (1994).

Em cada instante de amostragem k , é considerada a restrição da norma Euclidiana no sinal de controle (32):

$$\|u(k+j|k)\|_2 \leq u_{\max}, \forall j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Assim a restrição é imposta para todo o horizonte da variável manipulada, embora somente o primeiro sinal de controle seja aplicado na planta e os demais descartados.

Com $u(k+j|k) = K_j x(k+j|k)$ e $K_j = Y_j W_j^{-1}$, tem-se que:

$$\begin{aligned} \max_{j=0,1,\dots,N-1} \|u(k+j|k)\|_2^2 &= \max_{j=0,1,\dots,N-1} \|Y_j W_j^{-1} x(k+j|k)\|_2^2, \\ &\leq \max_{z \in \varepsilon_j} \|Y_j W_j^{-1} z\|_2^2, \\ &= \lambda_{\max} \left(W_j^{-\frac{1}{2}} Y_j^T Y_j W_j^{-\frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (47)$$

para $\varepsilon_j = \{z \in \mathbb{R}^n | z^T W_j^{-1} z \leq 1\}$ um conjunto elipsoidal invariante para os estados futuros. Este é o caso, como provado no Lema 01.

A partir de (47), aplicando-se o complemento de Schur, obtém-se a seguinte LMI em Y_j e W_j , $\forall j = 0, 1, \dots, N - 1$:

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 I & Y_j \\ Y_j^T & W_j \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (48)$$

Em cada instante de amostragem k , é considerada a seguinte restrição de norma Euclidiana no sinal de saída (33):

$$\begin{aligned} \|y(k+j|k)\|_2 &\leq y_{\max}, \quad j = 1, \dots, N, \\ \max_{[A(k+j) \ B(k+j)] \in \Omega, j=1, \dots, N} \|y(k+j|k)\|_2 &= \max_{j=0,1, \dots, N-1} \|C(A(k+j) + B(k+j)K_j)x(k+j|k)\|_2, \\ &\leq \max_{z \in \mathcal{E}_j} \|C(A(k+j) + B(k+j)K_j)z\|_2, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \\ &= \bar{\sigma} \left[C(A(k+j) + B(k+j)K_j)W_j^{\frac{1}{2}} \right], \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (49)$$

Então para $\|y(k+j|k)\|_2^2 \leq y_{\max}^2$, $j = 1, \dots, N$, observa-se que:

$$\begin{aligned} W_j^{\frac{1}{2}} (A(k+j) + B(k+j)K_j)^T C^T C (A(k+j) + B(k+j)K_j) W_j^{\frac{1}{2}} &\leq y_{\max}^2 I, \\ j &= 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (50)$$

Aplicando-se o complemento de Schur, obtém-se a seguinte LMI em Y_j e W_j , $j = 0, 1, \dots, N-1$:

$$\begin{bmatrix} y_{\max}^2 I & CA_i W_j + CB_i Y_j \\ W_j A_i^T C^T + Y_j^T B_i^T C^T & W_j \end{bmatrix} \succeq 0. \quad (51)$$

Assim, as restrições nos sinais de controle e saída são garantidas pelas LMIs (38) e (39), respectivamente.

■

Cabe ressaltar, que a condição terminal não necessita ser imposta ao problema. A otimização pode ser feita com P_N fixa ou não em (31). Este resultado também é válido para sistemas em tempo discreto sem incertezas, variantes ou invariantes no tempo.

A factibilidade do problema de otimização convexo (34) pode ser provada utilizando-se o conceito de elipsoide invariante. O lema a seguir trata da invariância positiva de conjuntos elipsoidais.

Lema 1:

Sejam o sistema LPV em tempo discreto (28) com o conjunto de incertezas associado Ω (29) e

$$\varepsilon_l = \{z \in \mathbb{R}^n | z^T W_l^{-1} z \leq 1\} = \{z \in \mathbb{R}^n | z^T P_l z \leq \gamma\}, \quad (52)$$

$l = 0, 1, \dots, N-1$, com $\gamma W_l^{-1} = P_l$, conjuntos elipsoidais. Supõe-se que, para um instante de amostragem k , $\gamma, Y_l, l = 0, 1, \dots, N-1$, e $W_l > 0, l = 0, 1, \dots, N$, satisfazem as LMIs (35) a (37). Utilizando-se a lei de controle de realimentação de estados $u(k+j|k) = K_j x(k+j|k)$ com $K_j = Y_j W_j^{-1}$, se $x(k|k) \in \varepsilon_0$, então $x(k+j|k) \in \varepsilon_l$, $\forall j = 1, 2, \dots, N-1$ e $\forall l = 0, 1, \dots, N-1$.

Prova:

Como visto na prova do Teorema 3, a LMI (35) implica em

$$(A(k+j) + B(k+j)K_l)^T P_{l+1} (A(k+j) + B(k+j)K_l) - P_l \leq 0, \quad (53)$$

$$\forall j = 0, 1, \dots, N-1, \forall l = 0, 1, \dots, N-1.$$

Logo, de (53) tem-se que:

$$x(k+j)^T [(A(k+j) + B(k+j)K_l)^T P_{l+1} (A(k+j) + B(k+j)K_l) - P_l] x(k+j) \leq 0, \quad (54)$$

$$\forall j = 0, 1, \dots, N-1, \forall l = 0, 1, \dots, N-1.$$

Com $x(k+j+1|k) = (A(k+j) + B(k+j)K_l)x(k+j|k)$, obtém-se:

$$(x(k+j+1|k))^T P_{l+1} (x(k+j+1|k)) - x(k+j|k)^T P_l x(k+j|k) \leq 0, \quad (55)$$

$$\forall j = 0, 1, \dots, N-1, \forall l = 0, 1, \dots, N-1.$$

Assim, para $l = 0$, a desigualdade (55) resulta em:

$$(x(k+j+1|k))^T P_1 (x(k+j+1|k)) \leq x(k+j|k)^T P_0 x(k+j|k) , \quad (56)$$

$$\forall j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Como $P_0 \leq P_1$ (ou $W_0 \geq W_1$) pela condição (37) do Teorema 3, tem-se que

$$(x(k+j+1|k))^T P_0 (x(k+j+1|k)) \leq x(k+j+1|k)^T P_1 x(k+j+1|k) , \quad (57)$$

$$\forall j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Desta forma, a partir das desigualdades (56) e (57), pode-se concluir que

$$(x(k+j+1|k))^T P_0 (x(k+j+1|k)) \leq x(k+j|k)^T P_0 x(k+j|k) , \quad (58)$$

$$\forall j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Assim, se $x(k|k)^T P_0 x(k|k) \leq \gamma$, o que corresponde a LMI (36), então:

$$(x(k+j+1|k))^T P_0 (x(k+j+1|k)) \leq \gamma , \quad (59)$$

$$\forall j = 0, 1, \dots, N-1,$$

e ,portanto, ε_0 é um conjunto invariante para os estados preditos do sistema incerto.

De forma similar, a partir de (55), tem-se:

$$\begin{cases} x(k+j+1|k)^T P_1 x(k+j+1|k) \leq x(k+j|k)^T P_0 x(k+j|k) \\ x(k+j+1|k)^T P_2 x(k+j+1|k) \leq x(k+j|k)^T P_1 x(k+j|k) \\ \vdots \\ x(k+j+1|k)^T P_{N-1} x(k+j+1|k) \leq x(k+j|k)^T P_{N-2} x(k+j|k) \end{cases}$$

$$\forall j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Assim, se $x(k|k)^T P_0 x(k|k) \leq \gamma$, então:

$$\begin{cases} (x(k+j+1|k))^T P_1 (x(k+j+1|k)) \leq \gamma, \\ (x(k+j+1|k))^T P_2 (x(k+j+1|k)) \leq \gamma, \\ \vdots \\ (x(k+j+1|k))^T P_{N-1} (x(k+j+1|k)) \leq \gamma, \end{cases}$$

$$\forall j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Assim, ε_l , $\forall l = 0, 1, \dots, N-1$, é um conjunto elipsoidal invariante para os estados preditos do sistema incerto.

■

A factibilidade do problema abordado no Teorema 03 é analisada no corolário a seguir.

Corolário 01:

Se o problema de otimização convexo do Teorema 3 é factível no instante de amostragem k , então é factível em todos os instantes futuros $t > k$.

Prova:

Suponha-se que o Teorema 3 é factível no instante de amostragem k . Desta forma, pelo Lema 01, o conjunto elipsóidal $\varepsilon_0 = \{z \in \mathbb{R}^n | z^T W_0^{-1} z \leq 1\} = \{z \in \mathbb{R}^n | z^T P_0 z \leq \gamma\}$ é invariante para os estados futuros $x(k+j)$, $\forall j = 1, 2, \dots, N-1$. Observa-se que a LMI (36) é a única que, no Teorema 3, depende do estado medido $x(k|k) = x(k)$. Assim, a solução ótima do problema (34) no instante k é também uma solução factível (sub-ótima) do mesmo problema no instante $k+1$. Como se trata de um problema convexo, só há uma solução ótima.

■

3.4 FH-RMPC estável com funções de Lyapunov dependentes de parâmetros

Nesta seção, a estratégia FH-RMPC para sistemas lineares em tempo discreto com incertezas politópicas variantes no tempo é estudada considerando-se funções de Lyapunov dependentes de parâmetros com intuito de diminuir o conservadorismo da abordagem anterior que utiliza um conjunto de funções de Lyapunov único para todos os vértices. Nesta nova formulação, um conjunto de funções de Lyapunov é definido para cada vértice do politopo incerto.

Esta abordagem é baseada na técnica proposta por De Oliveira *et al.* (1999) e revisada por Mao (2003), no contexto de sistemas variantes no tempo. Em De Oliveira *et al.* (1999), os autores propuseram o uso de matrizes de folga G

possibilitando a separação da matriz de Lyapunov P e a matriz dinâmica do sistema A , ou seja, não haverá termos com multiplicação entre A e P .

O teorema a seguir apresentado em De Oliveira *et al.* (1999), e revisado por Mao (2003), fornece uma solução para o problema de realimentação de estado que estabiliza robustamente um sistema em tempo discreto com incertezas do tipo politopo.

Teorema 4: (De Oliveira *et al.* (1999))

O sistema em tempo discreto incerto (28) é robustamente estabilizável no domínio de incerteza (29) se existem L matrizes simétricas W_i e matrizes G e Y satisfazendo às seguintes LMIs:

$$\begin{bmatrix} G + G^T - W_i & G^T A_i^T + Y^T B_i^T \\ A_i G + B_i Y & W_i \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (60)$$

com $\forall i = 1, 2, \dots, L$. Se (60) é factível, então a matriz de realimentação de estado estabilizante é dada por:

$$K = YG^{-1}. \quad (61)$$

■

O teorema proposto a seguir apresenta uma solução estável para o FH-RMPC com matrizes de folga.

Teorema 5:

Sejam o sistema LPV em tempo discreto (28), o conjunto de incertezas associado Ω (29), $x(k) = x(k|k)$ o estado do sistema medido no instante de amostragem k , e os conjuntos de restrições (32) e (33). O problema FH-RMPC com realimentação de estado e garantia de estabilidade, sujeito a restrições nos sinais de controle e saída, pode ser resolvido, em cada instante de amostragem k , se existem matrizes G_l , Y_l e $W_{l,i} > 0$, $\forall l = 0, 1, \dots, N-1$ e $\forall i = 1, 2, \dots, L$ e γ que solucionam o seguinte problema de otimização convexo:

$$\min_{\gamma > 0, W_{l,i} > 0, Y_l, G_l} \gamma \quad (62)$$

sujeito a:

$$\begin{bmatrix} G_l + G_l^T - W_{l,i} & G_l A_i^T + Y_l^T B_i^T & G_l Q_l^{\frac{1}{2}} & Y_l^T R_l^{\frac{1}{2}} \\ A_i G_l + B_i Y_l & W_{l+1,i} & 0 & 0 \\ Q_l^{\frac{1}{2}} G_l & 0 & \gamma I & 0 \\ R_l^{\frac{1}{2}} Y_l & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (63)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k|k)^T \\ x(k|k) & W_{0,i} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (64)$$

$$W_{N-1,i} \geq W_{N,i}, \quad (65)$$

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 I & Y_l \\ Y_l^T & G_l + G_l^T - W_{l,i} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (66)$$

$$\begin{bmatrix} y_{\max}^2 I & C A_i W_{l,i} + C B_i Y_l \\ W_{l,i} A_i^T C^T + Y_l^T B_i^T C^T & G_l + G_l^T - W_{l,i} \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (67)$$

com $i = 1, 2, \dots, L$, e $l = 0, 1, \dots, N - 1$, e γ é um limitante superior do critério de desempenho (31). O sinal de controle aplicado no instante de amostragem k é $u(k|k) = K_0 x(k|k)$, com $K_0 = Y_0 G_0^{-1}$. Os ganhos $K_l = Y_l G_l^{-1}$, $\forall l = 0, 1, \dots, N - 1$ estabilizam o sistema em malha fechada. ■

Prova:

Para um l fixo, multiplica-se cada uma das L LMIs em (63) e em (64) pelo respectivo $\lambda_i(k + j)$, $i = 1, 2, \dots, L$, com $\lambda_i(k + j) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^L \lambda_i(k + j) = 1$, e a soma de cada conjunto de desigualdades resulta em

$$\begin{bmatrix} G_l + G_l^T - \bar{W}_l & G_l^T A(k+j)^T + Y_l^T B(k+j)^T & G_l^T Q_l^{\frac{1}{2}} & Y_l^T R_l^{\frac{1}{2}} \\ A(k+j)G_l + B(k+j)Y_l & \bar{W}_{l+1} & 0 & 0 \\ Q_l^{\frac{1}{2}}G_l & 0 & \gamma I & 0 \\ R_l^{\frac{1}{2}}Y_l & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (68)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x(k|k)^T \\ x(k|k) & \bar{W}_0 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (69)$$

e $\bar{W}_l \triangleq \sum_{i=1}^L \lambda_i(k+j)W_{l,i}$ são matrizes de Lyapunov dependentes de parâmetros.

A LMI (69) implica que $J_N \leq x(k|k)^T \bar{P}_0 x(k|k) \leq \gamma$. Isto pode ser provado de forma similar ao Teorema 3.

Considerando-se o fato que G_l é não singular pois $G_l + G_l^T \geq \bar{W}_l > 0$, visto que $W_{l,i} > 0, \forall i$, e que $(G_l^T - \bar{W}_l)\bar{W}_l^{-1}(G_l - \bar{W}_l) \geq 0$ e por consequência

$$G_l^T \bar{W}_l^{-1} G_l \geq G_l + G_l^T - \bar{W}_l \geq 0, \quad (70)$$

a desigualdade (68) implica que

$$\begin{bmatrix} G_l^T \bar{W}_l^{-1} G_l & * & * & * \\ [A(k+j) + B(k+j)K_l]G_l & \bar{W}_{l+1} & * & * \\ Q_l^{\frac{1}{2}}G_l & 0 & \gamma I & * \\ R_l^{\frac{1}{2}}Y_l & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (71)$$

para $K_l = Y_l G_l^{-1}$.

Multiplicando-se (71) à esquerda pela matriz $\text{diag}(G_l^{-T}, \bar{W}_{l+1}^{-1}, I, I)$ e à direita por $\text{diag}(G_l^{-1}, \bar{W}_{l+1}^{-1}, I, I)$, resulta em:

$$\begin{bmatrix} \bar{W}_l^{-1} & * & * & * \\ \bar{W}_{l+1}^{-1}[A(k+j) + B(k+j)K_l] & \bar{W}_{l+1}^{-1} & * & * \\ Q_l^{\frac{1}{2}} & 0 & \gamma I & * \\ R_l^{\frac{1}{2}}K_l & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (72)$$

Definindo-se $\bar{W}_l = \gamma \bar{P}_l^{-1}$, e aplicando-se o complemento de Schur em (72), obtém-se a seguinte desigualdade:

$$(A(k+j) + B(k+j)K_l)^T \bar{P}_{l+1} (A(k+j) + B(k+j)K_l) + K_l^T R_l K_l + Q_l \leq \bar{P}_l. \quad (73)$$

A partir dos Teoremas 1 e 2, levando-se em consideração as desigualdades (65), (73) implica então que

$$(A(k+j) + B(k+j)K_l)^T \bar{P}_{l+1} (A(k+j) + B(k+j)K_l) - \bar{P}_{l+1} \leq 0. \quad (74)$$

$$\forall j = 0, 1, \dots, N-1, \forall l = 0, 1, \dots, N-1.$$

Observa-se que se $W_{N-1,i} \geq W_{N,i}$ (65), então $W_{0,i} \geq W_{1,i} \geq W_{2,i} \geq \dots \geq W_{N-1,i} \geq W_{N,i} \geq 0$ pelos Teoremas 1 e 2. Isto implica que $\bar{W}_l \geq \bar{W}_{l+1}$ e, por consequência, $\bar{P}_l \leq \bar{P}_{l+1}$, $\forall l = 0, 1, \dots, N-1$.

Assim, (74) demonstra que os ganhos $K_l = Y_l G_l^{-1}$, $l = 0, 1, \dots, N-1$, estabilizam robustamente o sistema discreto LPV (28).

A partir de (69), aplicando-se o complemento de Schur, tem-se que

$$x(k|k)^T \bar{W}_0^{-1} x(k|k) \leq 1, \quad (75)$$

o que equivale a $x(k|k)^T \bar{P}_0^{-1} x(k|k) \leq \lambda$, para $\gamma \bar{W}_0^{-1} = \bar{P}_0$.

De forma análoga ao Lema 01, pode-se provar, utilizando-se (73) e (75), que os conjuntos elipsóides $\bar{\varepsilon}_l = \{z \in \mathbb{R}^n | z^T \bar{W}_l^{-1} z \leq 1\} = \{z \in \mathbb{R}^n | z^T \bar{P}_l^{-1} z \leq \gamma\}$ são invariantes para os estados preditos do sistema incerto.

Multiplicando-se a desigualdade (66), para cada l , pelo respectivo parâmetro $\lambda_i(k+j)$, $i = 1, 2, \dots, L$, com $\lambda_i(k+j) \geq 0$ e $\sum_{i=1}^L \lambda_i(k+j) = 1$, a soma das L desigualdades resulta em:

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 I & Y_l \\ Y_l^T & G_l + G_l^T - \bar{W}_l \end{bmatrix} \geq 0, \quad l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (76)$$

Levando-se em consideração que G_l é não singular e (70), a desigualdade (76) implica em

$$\begin{bmatrix} u_{\max}^2 I & Y_l \\ Y_l^T & G_l^T \bar{W}_l^{-1} G_l \end{bmatrix} \geq 0, \quad l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (77)$$

Aplicando-se o complemento de Schur, após algumas manipulações matemáticas, chega-se ao seguinte resultado, a partir de (77):

$$G_l^{-T} Y_l^T Y_l G_l^{-1} - u_{\max}^2 \bar{W}_l^{-1} \leq 0, \quad l = 0, 1, \dots, N-1.$$

Com $K_l = Y_l G_l^{-1}$, obtém-se:

$$\bar{W}_l^{\frac{1}{2}} K_l^T K_l \bar{W}_l^{\frac{1}{2}} \leq u_{\max}^2 I. \quad (78)$$

Como pode ser visto em (Boyd *et al.*, 1994), a desigualdade (78) é a solução do seguinte problema

$$\max_{j=0,1,\dots,N-1} \|u(k+j|k)\|_2^2 = \max_{j=0,1,\dots,N-1} \|K_l x(k+j|k)\|_2^2 = \max_{Z \in \bar{\varepsilon}_l} \|K_l Z\|_2^2 \leq u_{\max}^2,$$

tendo em vista que $\bar{\varepsilon}_l$ são conjuntos invariantes para os estados preditos do sistema. Assim, as LMIs (66) garantem que as restrições no sinal de controle para todo o horizonte de predição sejam atendidas. De forma similar, usando-se (70), pode-se demonstrar que as LMIs (67) atendem as restrições no sinal de saída (33). ■

A factibilidade do problema proposto em (62) pode ser provada de forma análoga ao Corolário 01, visto que $\bar{\varepsilon}_l$ são conjuntos invariantes.

Capítulo 4

SIMULAÇÃO E RESULTADOS OBTIDOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos através de simulações utilizando-se o *software* MATLAB® em 04 estudos de caso, a fim de validar a técnica proposta e realizar comparações com as técnicas IH-RMPC:

- estudo de caso 01: controle de um sistema variante no tempo (Ding; Xi; Li, 2004);
- estudo de caso 02: controle de posição de uma antena (Kothare *et al.*, 1996);
- estudo de caso 03: controle de um sistema variante no tempo, adaptado de (Oravec e Bakosová, 2015);
- estudo de caso 04: controle de um sistema massa-mola acoplado (Cuzola *et al.*, 2002).

Para possibilitar a comparação das técnicas FH-RMPC e IH-RMPC de forma quantitativa, são utilizados os índices de desempenho normalizados: Integral do Erro Absoluto (IAE – *Integral Absolute-Error*), Integral do Erro Absoluto Multiplicado pelo Tempo (ITAE – *Integral-of-Time-Multiplied Absolute-Error*), Integral do Erro Quadrático (ISE – *Integral Square Error*), Integral do Erro Quadrático Multiplicado pelo Tempo (ITSE – *Integral-of-Time-Multiplied Square-Error*), Variação Total de Controle (TCV – *Total Variation of Control*) e o custo efetivo $\bar{J}_{ef}$, conforme Tabela 1. Nas expressões da Tabela 1, k_{sim} indica o número de iterações das simulações.

Tabela 1 - Índices de desempenho baseados nos sinais de erro e controle.

Método	Formulação
IAE	$\left(\sum_{k=1}^{k_{sim}} e(k) \right) / k_{sim}$
ISE	$\left(\sum_{k=1}^{k_{sim}} e^2(k) \right) / k_{sim}$
ITAE	$\left(\sum_{k=1}^{k_{sim}} k e(k) \right) / k_{sim}$
ITSE	$\left(\sum_{k=1}^{k_{sim}} k e^2(k) \right) / k_{sim}$
TCV	$\left(\sum_{k=1}^{k_{sim}} \Delta u(k) \right) / k_{sim}$
$\bar{J}_{ef}$	$\left(\sum_{j=0}^{k_{sim}} (\ x(k+j)\ _{Q_j}^2 + \ u(k+j)\ _{R_j}^2) \right) / k_{sim}$

4.1 Estudo de caso 01: controle de um sistema variante no tempo

Considera-se o sistema linear variante no tempo (Ding; Xi; Li, 2004) descrito pela seguinte equação no espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha(k) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k),$$

em que $\alpha(k)$ é um parâmetro variante no tempo. A condição inicial é $x_0 = [2 \ 2]^T$, as matrizes de ponderação são $Q = I$ e $R = 1$, a restrição no sinal de controle é dada por $|u(k)| \leq 1$, $N = 4$, a saída é dada por $y(k) = x_2(k)$ e período de amostragem $T = 0,1s$.

Caso 1: a matriz dinâmica do sistema A apresenta incertezas paramétricas com $\alpha \in [0,01, \alpha_M]$. O valor do parâmetro α_M é deixado livre para testar a factibilidade do

método proposto. Para este caso, o sistema é incerto e invariante no tempo (LTI) e o sistema nominal tem $\alpha = 2,5$;

Caso 2: considera-se o sistema incerto com parâmetro variante no tempo (LPV) com $\alpha(k) = 1,5 + \sin(k)$ para calcular a evolução dos estados e $0,5 \leq \alpha \leq 2,5$ define o politopo.

• Simulações

Inicialmente, realiza-se um teste para determinar o maior valor de α_M (**Caso 01**) para o qual as técnicas IH-RMPC, de Kothare *et al.* (1996), Cuzzola *et al.* (2002), Mao (2003), (Ding; Xi; Li, 2004), e a FH-RMPC, proposta neste trabalho sem a matriz de folga (Teorema 3) e com a matriz de folga (Teorema 5), apresentam soluções factíveis. Observa-se que para as técnicas IH-RMPC de Kothare *et al.* (1996), Cuzzola *et al.* (2002), Mao (2003) e (Ding; Xi; Li, 2004) não há solução factível para valores de $\alpha_M > 75,5$, $\alpha_M > 103,7$, $\alpha_M > 77$ e $\alpha_M > 105$, respectivamente, enquanto que para a técnica de FH-RMPC sem matriz de folga proposta neste trabalho no Teorema 3 e $N = 4$, a infactibilidade acontece para $\alpha_M > 98,4$, e utilizando-se a técnica FH-RMPC com matriz de folga apresentada no Teorema 5 e $N = 4$ a infactibilidade acontece para valores de $\alpha_M > 123,9$. Desta forma, para este exemplo, a estratégia FH-RMPC com matriz de folga (Teorema 5) apresentou-se mais robusta em relação às demais técnicas. Estes resultados podem ser vistos na Tabela 2.

Tabela 2 - Comparação do α_M máximo.

	FH-RMPC Teorema 3 ($N = 4$)	FH-RMPC Teorema 5 ($N = 4$)	IH-RMPC (Ding; Xi; Li, 2004)	IH-RMPC Kothare <i>et al.</i> (1996)	IH-RMPC Cuzzola <i>et al.</i> (2002)	IH-RMPC Mao (2003)
α_M	98,4	123,9	105	75,5	103,7	77

Em seguida, são realizadas simulações para o **Caso 02** utilizando-se a técnica IH-RMPC de Cuzzola *et al.* (2002), considerando-se as observações feitas por Mao (2003) para sistemas variantes no tempo, e a técnica FH-RMPC com matrizes de folga proposta neste trabalho. Observa-se na Figura 3 que em ambos os

casos os estados convergem para a origem, pelo gráfico de trajetória dos estados. Verifica-se no gráfico do sinal de controle da Figura 4 que é respeitada a restrição de $|u(k)| \leq 1$. O comportamento da saída, os valores do coeficiente γ e do custo efetivo J_{ef} das duas técnicas também podem ser observados nas Figuras 5 a 7.

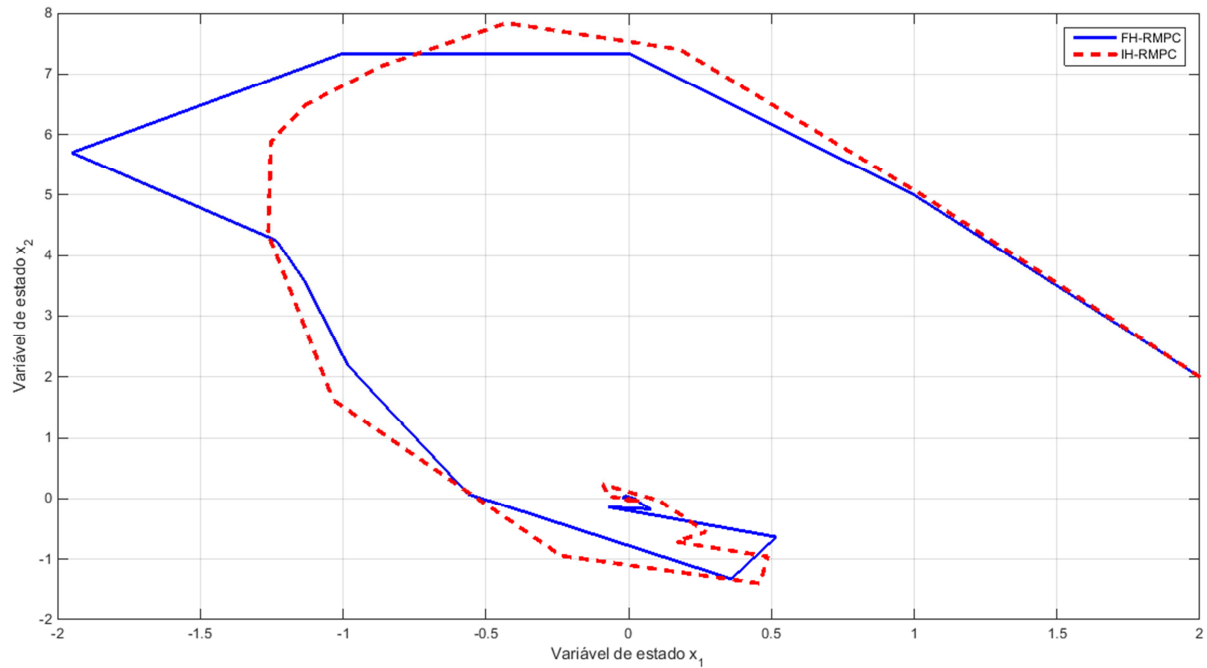


Figura 3 - Trajetória dos estados das estratégias FH-RMPC x IH-RMPC (Caso 02).

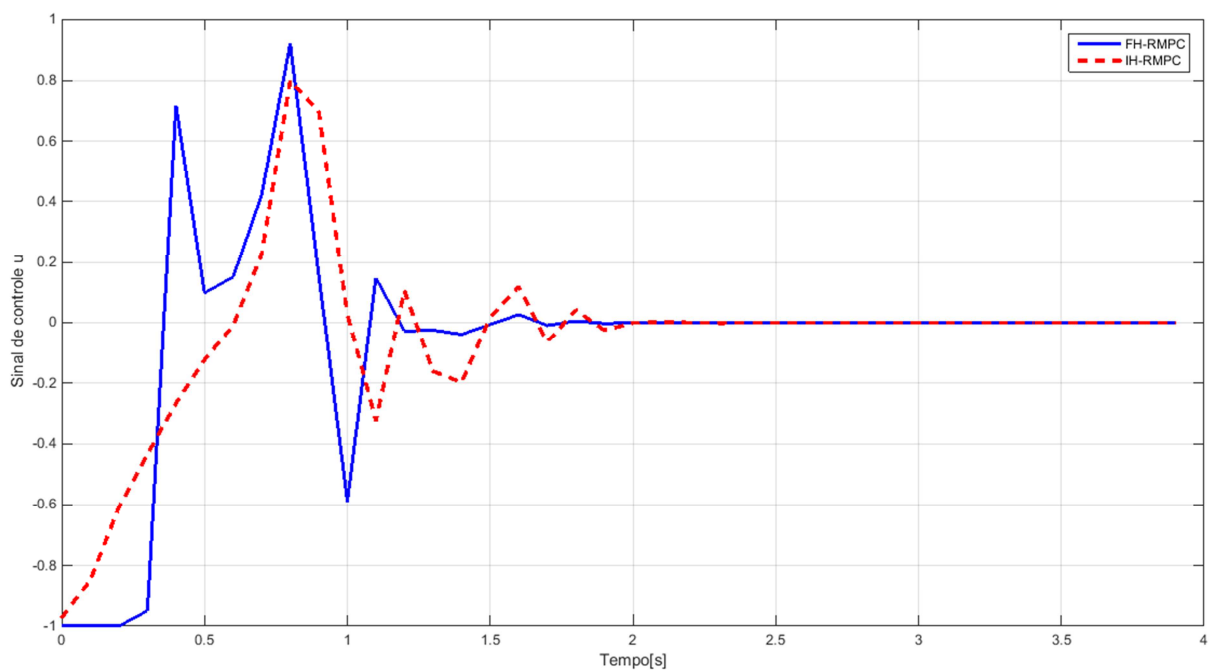


Figura 4 - Sinal de controle das estratégias FH-RMPC x IH-RMPC (Caso 02).

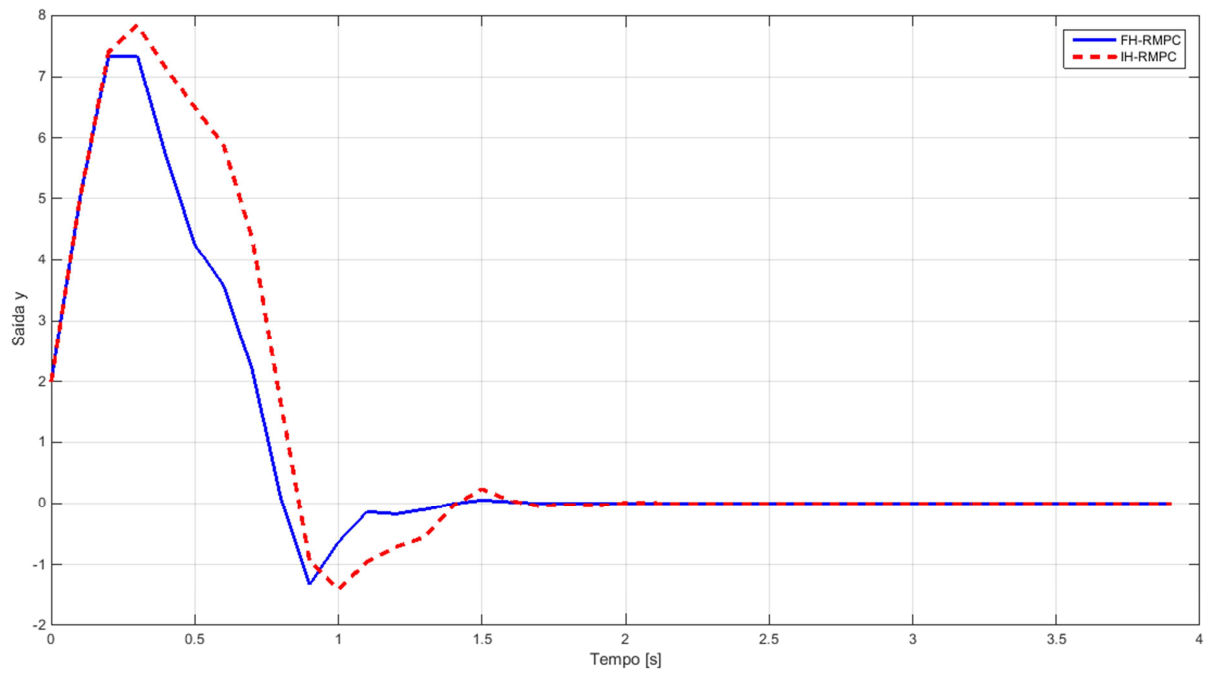


Figura 5 - Saídas das estratégias FH-RMPC x IH-RMPC (Caso 02).

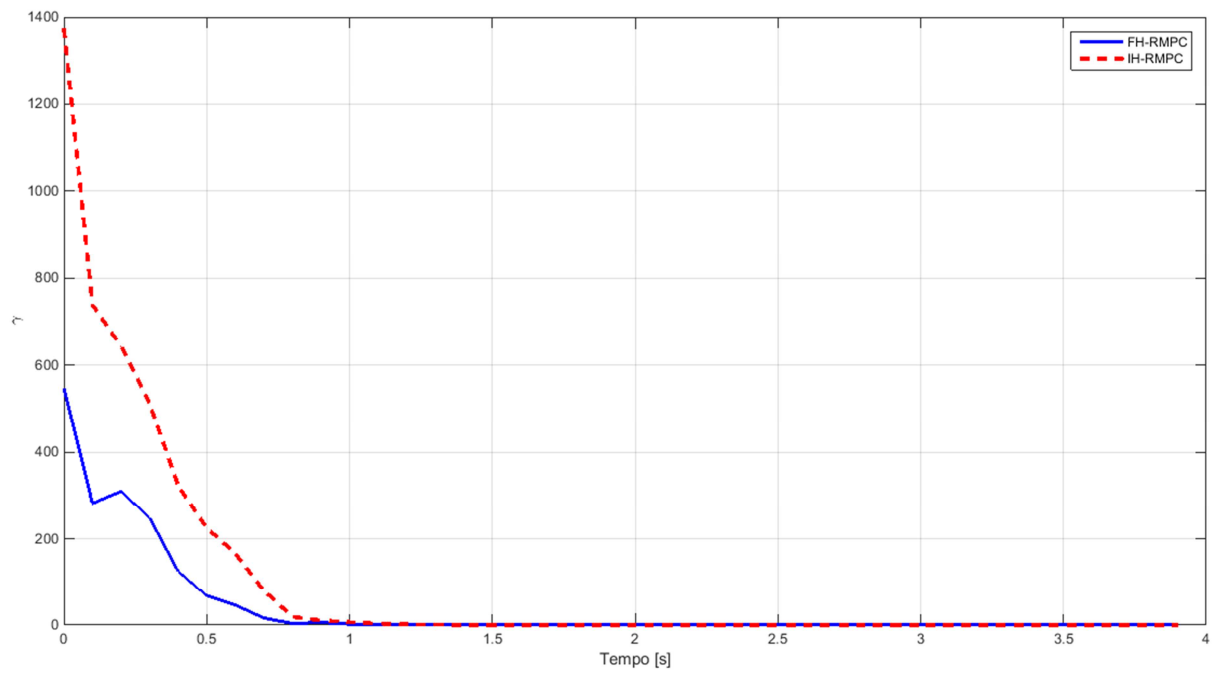


Figura 6 - Coeficiente γ das estratégias FH-RMPC x IH-RMPC (Caso 02).

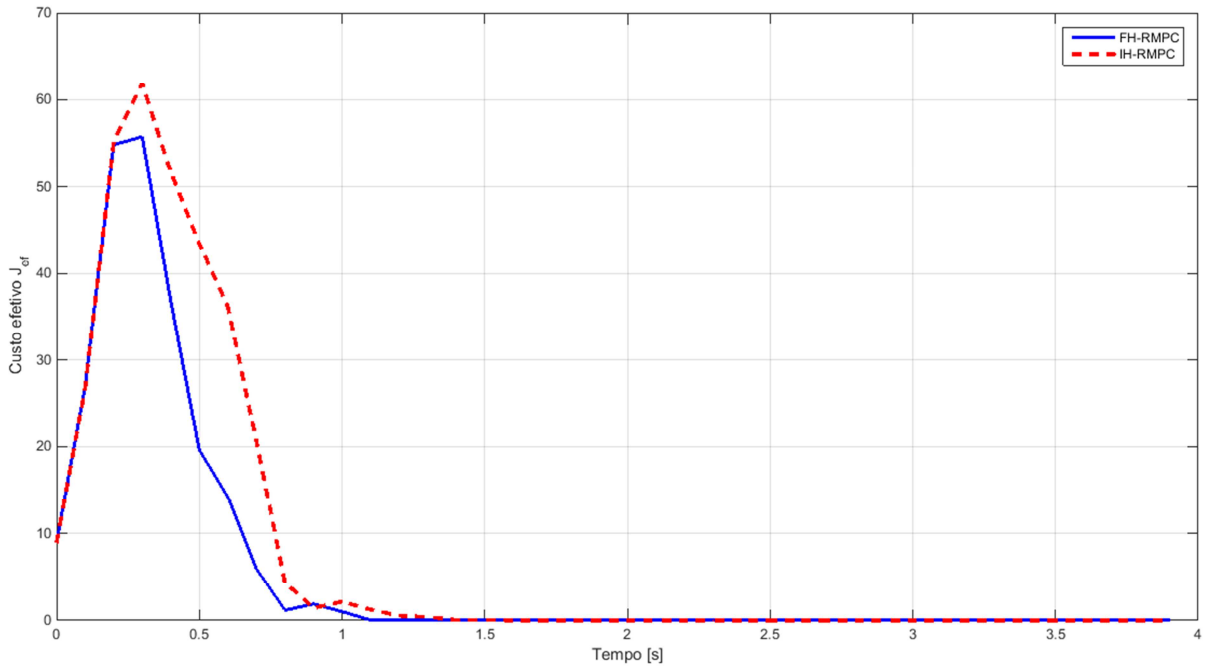


Figura 7 - Custo efetivo J_{ef} das estratégias FH-RMPC x IH-RMPC (Caso 02).

Para a comparação das técnicas FH-RMPC e IH-RMPC de forma quantitativa, são utilizados os índices de desempenho normalizados IAE, ITAE, ISE, ITSE, TVC e $\bar{J}_{ef}$, no intervalo de 0 a 4 segundos.

Como a estratégia FH-RMPC, pode ser utilizada com diferentes valores para o horizonte de predição N , são calculados os índices de desempenho normalizados para este exemplo com os horizontes $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$ e $N = 4$, possibilitando-se assim a verificação do comportamento desses índices com o aumento do N .

Observando-se os valores dos índices de desempenho normalizados IAE, ITAE, ISE, ITSE, TVC e $\bar{J}_{ef}$ obtidos e apresentados na Tabela 3, a estratégia FH-RMPC, com $N = 1$, requer o menor tempo médio de processamento, entretanto apresenta maiores valores dos índices. A estratégia FH-RMPC com $N = 2$, $N = 3$ e $N = 4$ apresenta tempo de processamento maior, entretanto possui a maioria dos índices de desempenho menores, quando comparados com a estratégia IH-RMPC, para esse exemplo. Nota-se que o menor custo efetivo médio $\bar{J}_{ef}$ se dá para o FH-RMPC com o Teorma 5 e $N = 3$. Utilizando-se a técnica IH-RMPC de Kothare *et al.*

(1996) no caso 02 desse exemplo, obtêm-se $\bar{J}_{ef} = 7,26$, e com a técnica FH-RMPC com o teorema 03 e $N = 3$, $\bar{J}_{ef} = 5,69$.

O tempo de processamento médio requerido para computar uma iteração deste exemplo para as diferentes estratégias é calculado para as simulações no *software* MATLAB, com um *notebook* com processador Intel Core I3, CPU @1,80GHz, 2 Gb de memória RAM e sistema operacional Windows 8.

Tabela 3 - Índices de desempenho normalizados.

Método		IAE	ITAE	ISE	ITSE	TCV	$\bar{J}_{ef}$	Tempo médio por iteração (seg)
IH-RMPC Mao (2003)	x_1	0,2790	1,7712	0,3039	1,4807	0,111	7,88	0,0824
	x_2	1,3183	7,2855	7,4814	36,078			
FH-RMPC Teorema 5 ($N = 1$)	x_1	0,3011	2,0261	0,3306	1,7275	0,099	8,49	0,0820
	x_2	1,4070	8,1427	8,0762	40,1230			
FH-RMPC Teorema 5 ($N = 2$)	x_1	0,2793	1,5495	0,3491	1,5263	0,1525	5,71	0,1379
	x_2	1,0045	4,7480	5,2330	21,6583			
FH-RMPC Teorema 5 ($N = 3$)	x_1	0,2735	1,4489	0,3607	1,5573	0,1463	5,65	0,2062
	x_2	0,9879	4,5903	5,1504	21,0891			
FH-RMPC Teorema 5 ($N = 4$)	x_1	0,2753	1,4767	0,3577	1,5547	0,1468	5,68	0,2437
	x_2	0,9990	4,6974	5,1814	21,3388			

4.2 Estudo de caso 02: controle de posição da antena

O segundo estudo de caso é um sistema de controle de posição angular (Kothare *et al.*, 1996). O sistema é composto por uma antena giratória na origem de um plano, movida por um motor elétrico. O problema de controle consiste em utilizar a tensão de entrada (u em *volts*) do motor para rotacionar a antena para que esta sempre aponte na direção de um objeto móvel no plano. A posição angular da antena e do objeto móvel (θ e θ_r em rad, respectivamente) e a velocidade angular da antena ($\dot{\theta}$ em rad/s) são mensuráveis. O movimento da antena é descrito pela seguinte equação no espaço de estados em tempo discreto, obtida pela discretização do modelo em tempo contínuo com período de amostragem $T = 0,1s$:

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{bmatrix} \theta(k+1) \\ \dot{\theta}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 1 - 0,1\alpha(k) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0787 \end{bmatrix} u(k), \\ y(k) = [1 \quad 0]x(k). \end{cases}$$

O parâmetro $\alpha(k)$ é proporcional ao coeficiente de fricção viscosa nas partes de rotação da antena e é assumido ser arbitrariamente variante no tempo no intervalo $0,1\text{sec}^{-1} \leq \alpha(k) \leq 10\text{sec}^{-1}$. A matriz dinâmica A apresenta incertezas paramétricas e pertence a um polítopo com os seguintes vértices:

$$A1 = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 0,99 \end{bmatrix}, \quad A2 = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

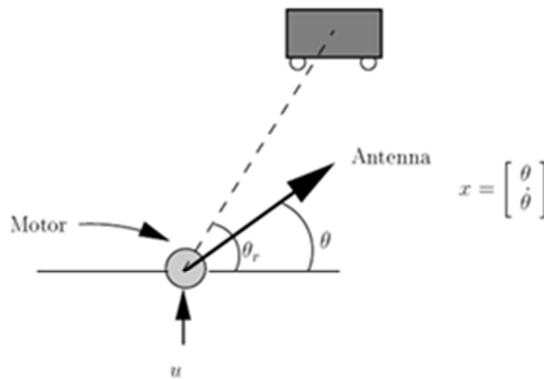


Figura 8 - Sistema de posicionamento angular. Fonte: (Kothare *et al.*, 1996).

O estado inicial é $x(0) = \begin{bmatrix} 0,05 \\ 0 \end{bmatrix}$, as matrizes de ponderações da função custo são $Q = C'C$ e $R = 0,00002$ e a restrição no sinal de controle é dada por $|u(k)| \leq 2 \text{ volts}$ e o horizonte de predição é $N = 3$.

• Simulações

São realizadas simulações para o sistema LTV com $\alpha(k)$ variando aleatoriamente no tempo, no intervalo entre $[0,1;10]$, utilizando-se o algoritmo FH-RMPC proposto e a técnica IH-RMPC baseada em Cuzzola *et al.* (2002)/Mao (2003), ambos com matrizes de folga. Observa-se a partir da Figura 9, que, em ambos os casos, os estados convergem para a origem. No gráfico do sinal de controle da Figura 10 pode ser observado que é respeitada a restrição de $|u(k)| \leq 2$. Os comportamentos da saída, os valores do coeficiente γ e do custo efetivo J_{ef} das duas técnicas são apresentados nas Figura 11 a 13.

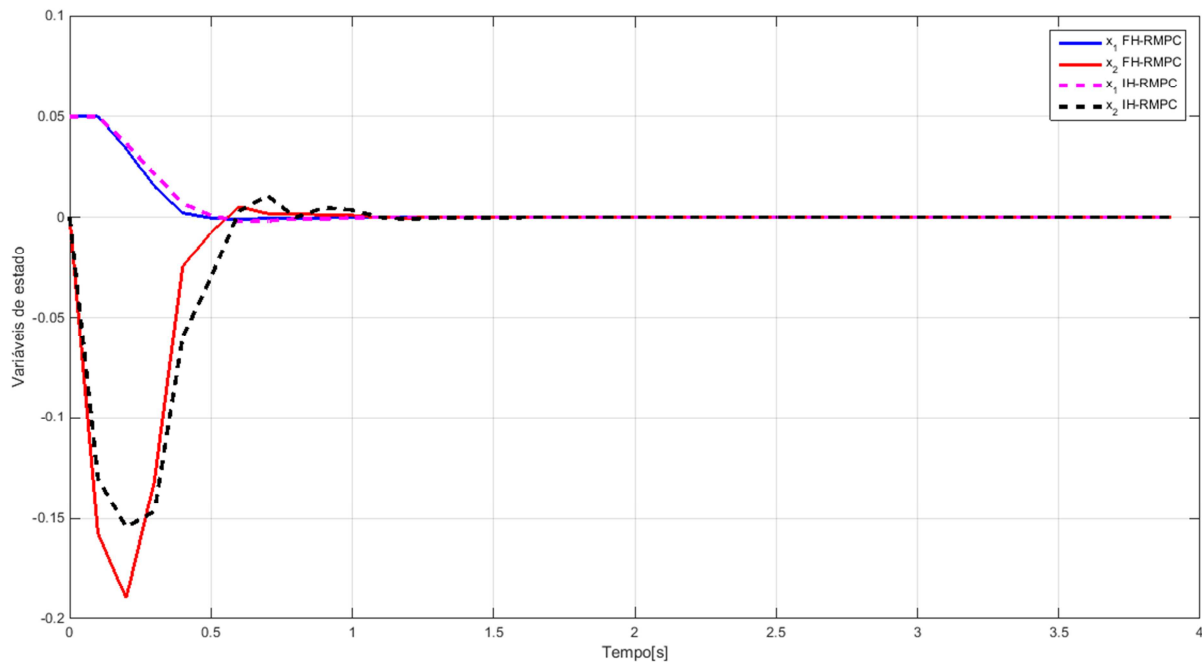


Figura 9 - Estados das estratégias FH-RMPC e IH-RMPC.

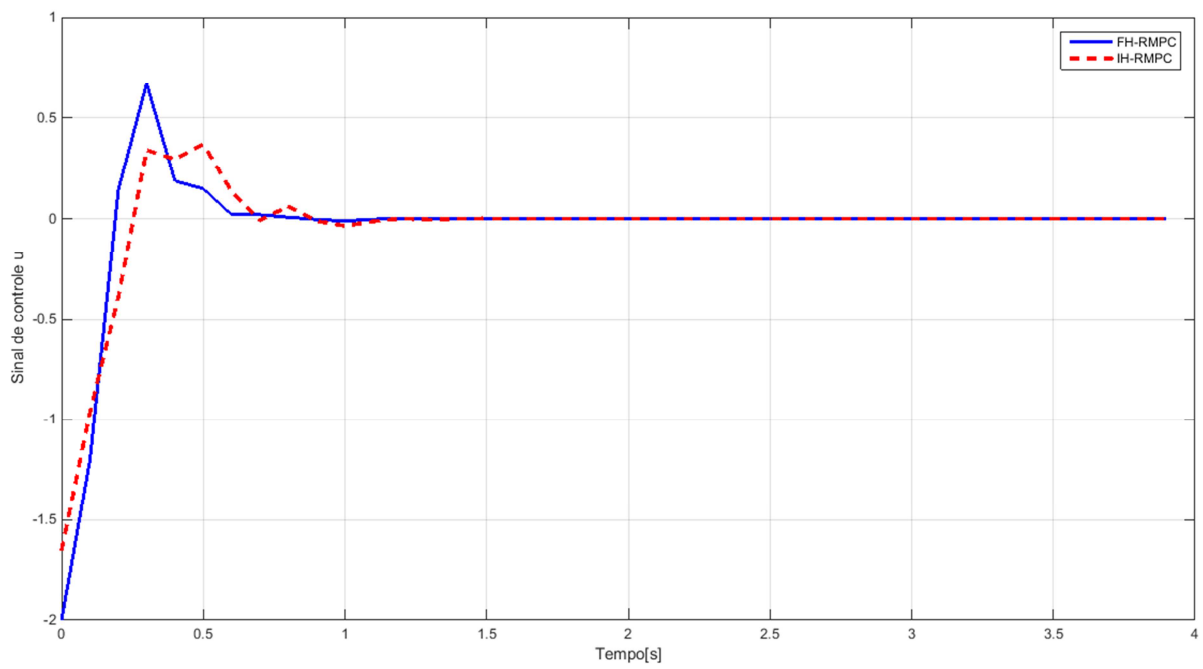


Figura 10 - Sinal de controle das estratégias FH-RMPC e IH-RMPC.

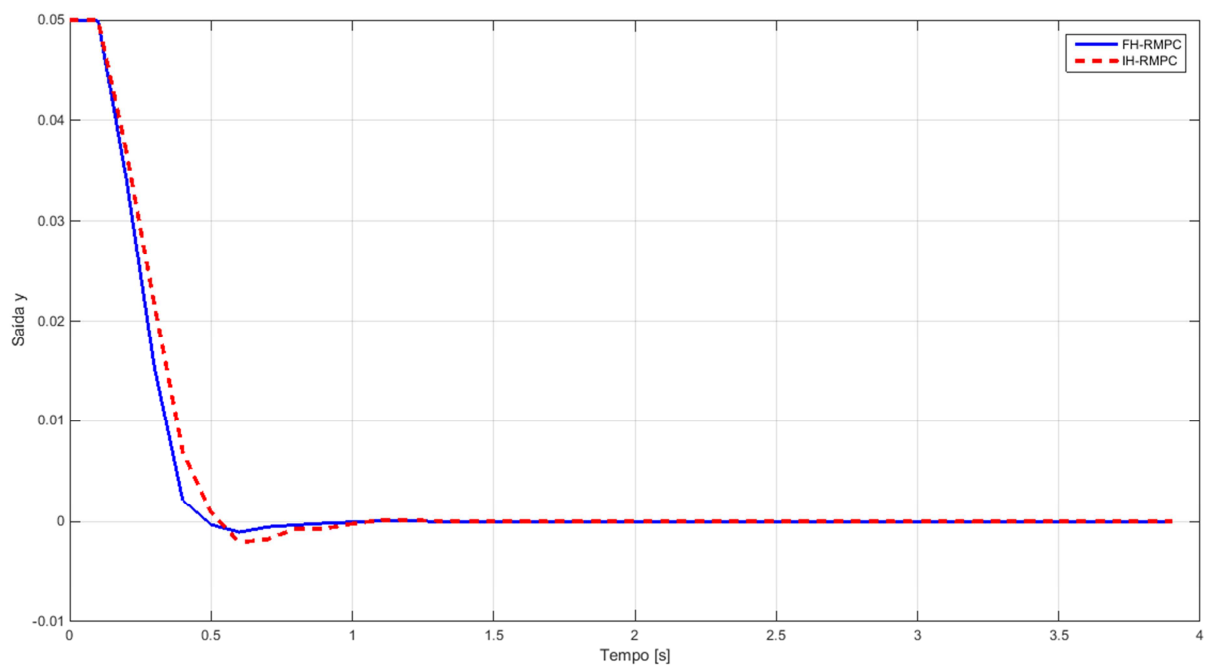


Figura 11 - Saídas das estratégias FH-RMPC e IH-RMPC.

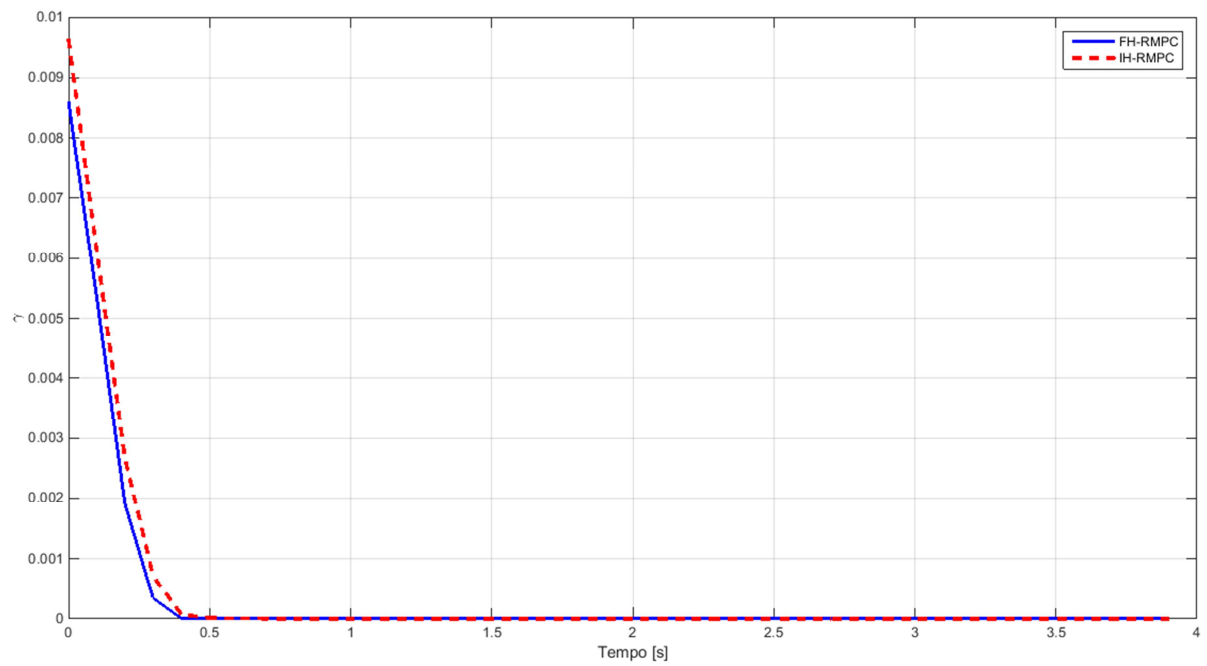


Figura 12 - Coeficiente γ das estratégias FH-RMPC e IH-RMPC.

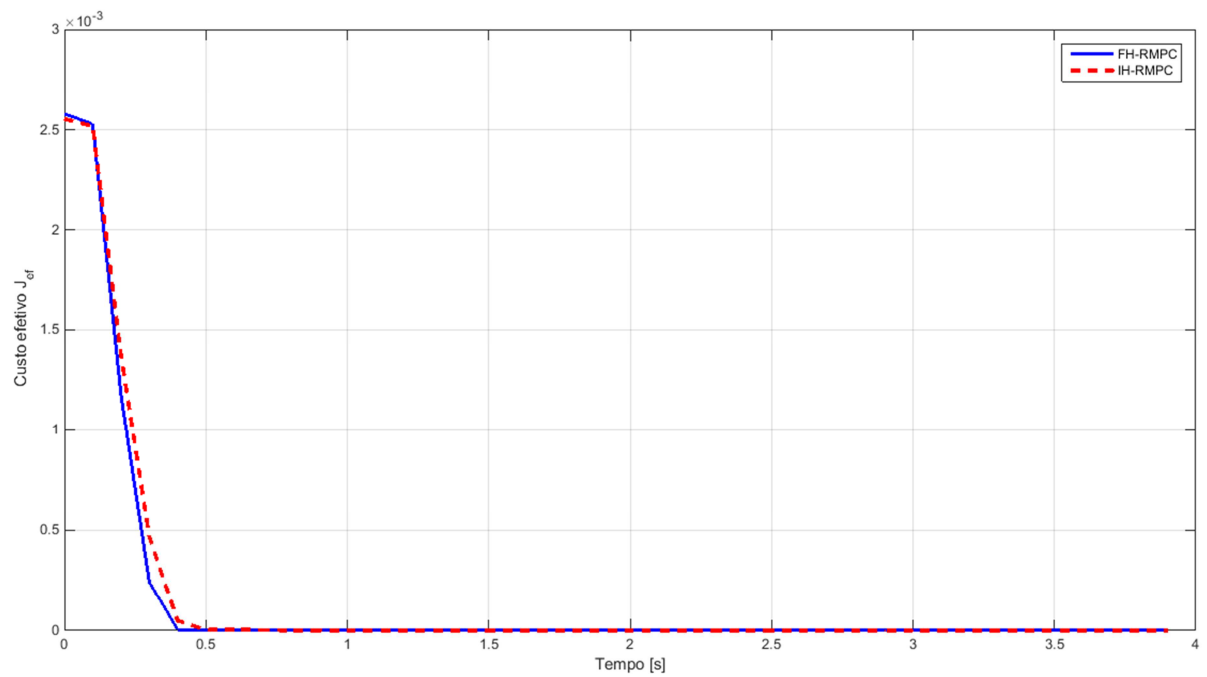


Figura 13 - Custo efetivo J_{ef} das estratégias FH-RMPC x IH-RMPC

Os índices de desempenho normalizados e o tempo médio de processamento de uma iteração das estratégias IH-RMPC e FH-RMPC, com horizonte de predição $N = 1$, $N = 2$ e $N = 3$, são apresentados na Tabela 4. Analisando-se os resultados desse exemplo, observa-se que a estratégia FH-RMPC, com $N = 1$, $N = 2$ e $N = 3$, apresenta índices normalizados IAE, ITAE, ISE e ITSE menores para x_1 e IAE e ITAE menores para x_2 , quando comparados com a estratégia IH-RMPC. A estratégia FH-RMPC, com $N = 1$, apresenta menor tempo médio de execução e menor índice TCV normalizado. Nota-se que o menor custo efetivo médio $\bar{J}_{ef}$ se dá para o FH-RMPC com o Teorema 5 e $N = 3$. Utilizando-se a técnica IH-RMPC de Kothare *et al.* (1996), obtêm-se $\bar{J}_{ef} = 1,91 * 10^{-4}$, e com a técnica FH-RMPC com o teorema 03 e $N = 3$, $\bar{J}_{ef} = 1,76 * 10^{-4}$.

Tabela 4 - Índices de desempenho normalizados.

Método		IAE	ITAE	ISE	ITSE	TCV	$\bar{J}_{ef}$	Tempo médio por iteração (seg)
IH-RMPC Mao (2003)	x_1	0,0043	0,0109	$1,72 * 10^{-4}$	$3,44 * 10^{-4}$	0,0693	$1,74 * 10^{-4}$	0,1082
	x_2	0,0136	0,0502	0,0017	0,0054			
FH-RMPC Teorema 5 ($N = 1$)	x_1	0,0042	0,0107	$1,71 * 10^{-4}$	$3,40 * 10^{-4}$	0,0687	$1,73 * 10^{-4}$	0,0613
	x_2	0,0135	0,0496	0,0017	0,0054			
FH-RMPC Teorema 5 ($N = 2$)	x_1	0,0040	0,0092	$1,62 * 10^{-4}$	$3,07 * 10^{-4}$	0,0807	$1,65 * 10^{-4}$	0,1855
	x_2	0,0132	0,0443	0,0018	0,0055			
FH-RMPC Teorema 5 ($N = 3$)	x_1	0,0039	0,0086	$1,60 * 10^{-4}$	$3 * 10^{-4}$	0,0863	$1,63 * 10^{-4}$	0,2750
	x_2	0,0131	0,0418	0,0020	0,0058			

Através dos resultados da estratégia FH-RMPC desse exemplo, observa-se que com o aumento do horizonte de predição N , obtêm-se melhores índices de desempenho baseados no erro, entretanto também aumenta o tempo de processamento, como esperado, uma vez que o número de restrições aumenta com N .

4.3 Estudo de caso 03: controle de um sistema variante no tempo adaptado

Analisa-se o estudo de caso apresentado em (Oravec e Bakosová, 2015).

Seja o sistema em tempo discreto com incerteza paramétrica α nas matrizes A e B , com $1 \leq \alpha \leq 1,05$, obtido pela discretização do modelo contínuo, com tempo de amostragem $T = 1s$:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -0.04 \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consideram-se a condição inicial $x_0 = [1 \ 2,5]^T$, com restrição no sinal de controle $|u(k)| \leq 1,5$ e as matrizes de ponderação $Q = 8I$ e $R = I$, com horizonte de predição $N = 4$.

Esse sistema é adaptado para a condição em que os parâmetros das matrizes A e B variam aleatoriamente no tempo dentro da região definida pelo politopo de dois vértices.

- **Simulações**

São realizadas simulações para o sistema LTV utilizando-se o algoritmo FH-RMPC proposto e a técnica IH-RMPC baseada em Cuzzola (2002)/ Mao (2003), ambos com matrizes de folga. Os resultados das simulações são apresentados nos gráficos das Figuras 14 a 18. Observa-se pela Figura 14 que em ambos os casos os estados convergem para a origem. No gráfico do sinal de controle da Figura 15 pode

ser observado que é respeitada a restrição de $|u(k)| \leq 1,5$. Observam-se os comportamentos do sinal de saída, do coeficiente γ e do custo efetivo J_{ef} nas Figuras 16 a 18.

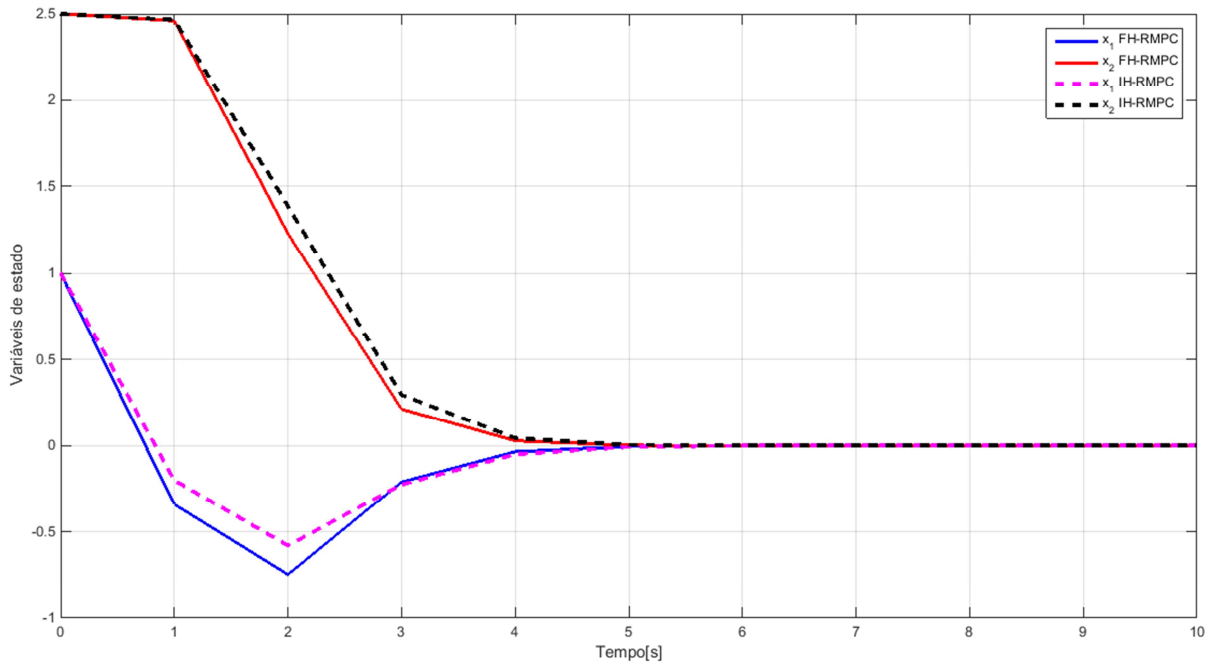


Figura 14 - Estados das estratégias FH-RMPC e IH-RMPC com sistema LTV.

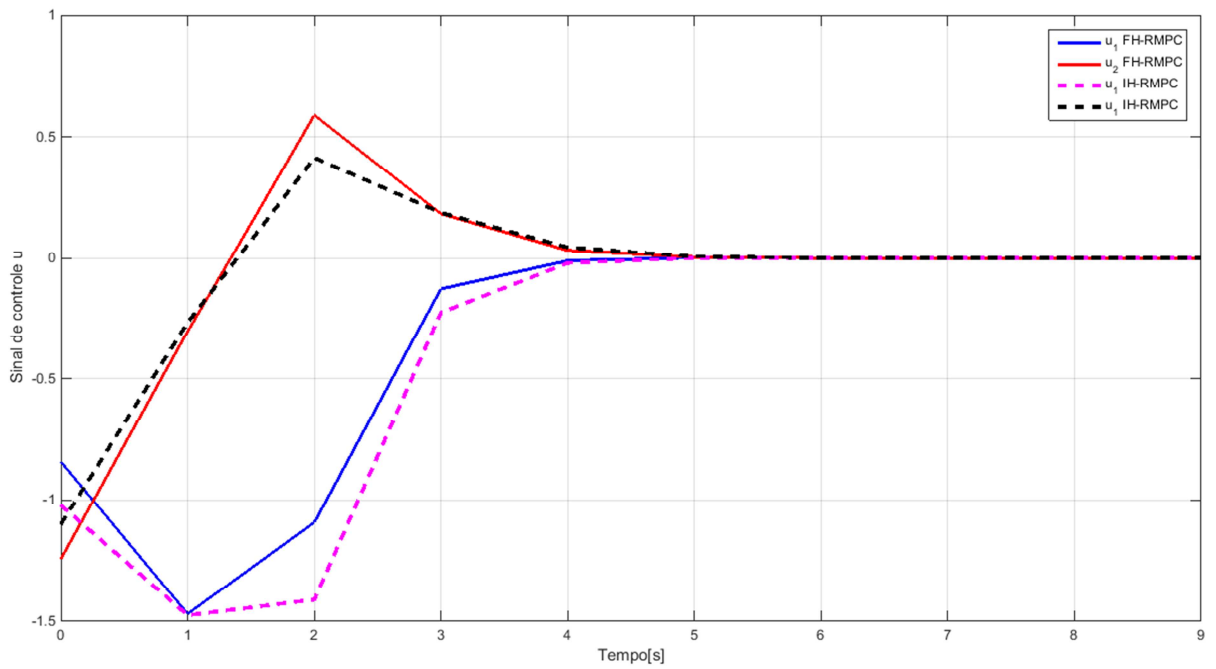


Figura 15 - Sinal de controle das estratégias FH-RMPC e IH-RMPC (sistema LTV).

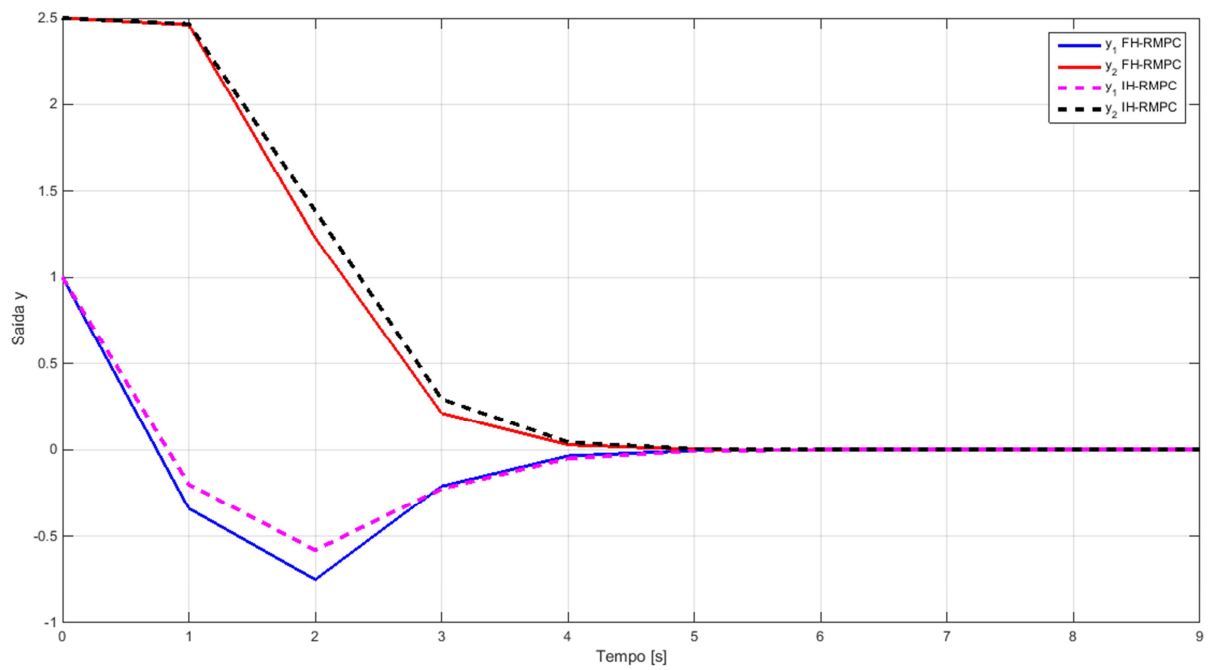


Figura 16- Saídas das estratégias FH-RMPC e IH-RMPC com sistema LTV.

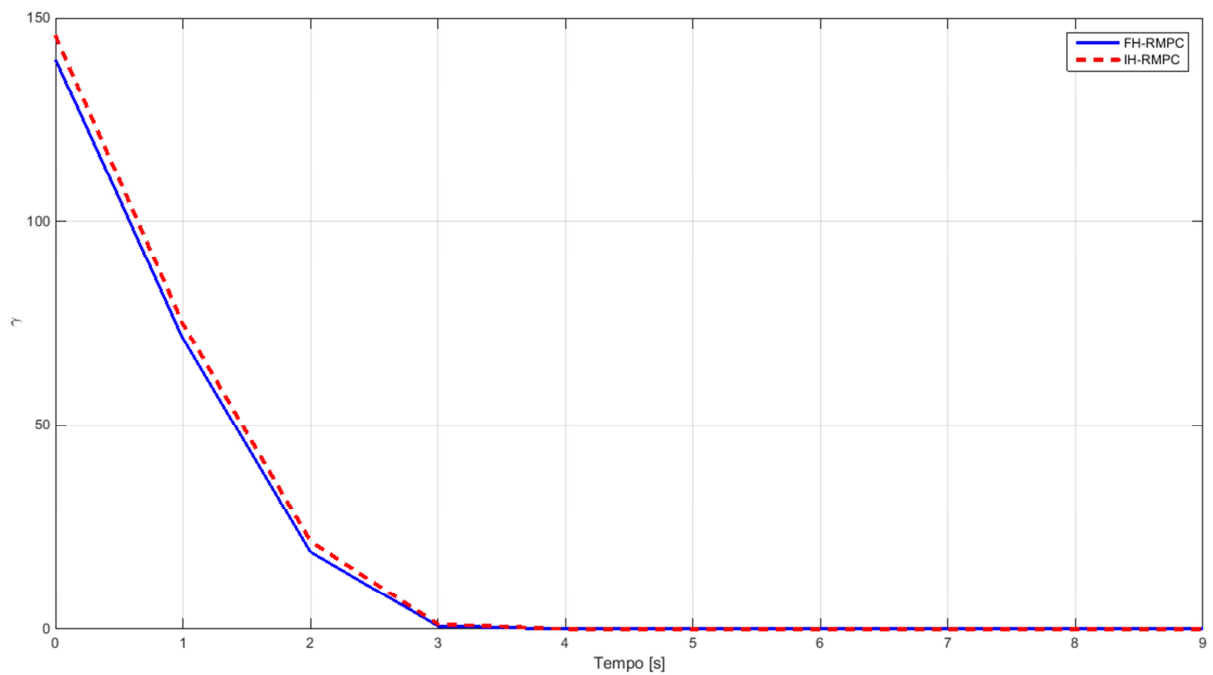


Figura 17- Coeficiente γ das estratégias FH-RMPC e IH-RMPC com sistema LTV.

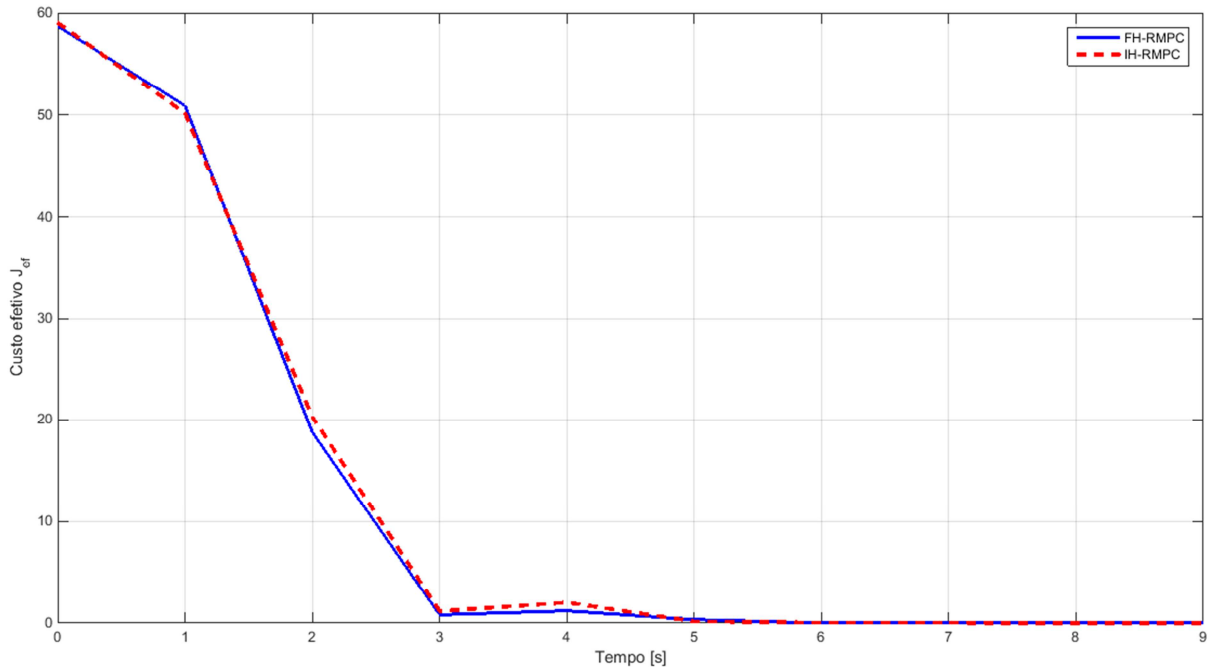


Figura 18 - Custo efetivo J_{ef} das estratégias FH-RMPC x IH-RMPC

Os índices de desempenho normalizados e o tempo médio de processamento de uma iteração das estratégias IH-RMPC e FH-RMPC, com horizonte de predição $N = 1$, $N = 2$, $N = 3$ e $N = 4$, são apresentados na Tabela 5. Analisando-se os resultados deste exemplo, observa-se que a estratégia FH-RMPC com $N = 1$ apresenta índices normalizados IAE, ITAE, ISE e ITSE para x_1 menores, e com $N = 2$, $N = 3$ e $N = 4$, apresenta índices normalizados IAE, ITAE, ISE e ITSE para x_2 menores, quando comparados com os da estratégia IH-RMPC. A estratégia FH-RMPC, com $N = 1$, apresentou menores valores do índice TCV normalizado e menor tempo médio de execução. Nota-se que o menor custo efetivo médio $\bar{J}_{ef}$ se dá para o FH-RMPC com o Teorma 5 e $N = 4$. Utilizando-se a técnica IH-RMPC de Kothare *et al.* (1996), obtêm-se $\bar{J}_{ef} = 13,390$, e com a técnica FH-RMPC com o teorema 03 e $N = 4$, $\bar{J}_{ef} = 13,318$.

Tabela 5 - Índices de desempenho normalizados.

Método		IAE	ITAE	ISE	ITSE	TCV	$\bar{J}_{ef}$	Tempo médio por iteração (seg)
IH-RMPC Mao (2003)	x_1	0,2067	0,4353	0,1431	0,2310	0,2145	13,29	0,0969
	x_2	0,6695	1,3012	1,4346	2,4548	0,2141		
FH-RMPC Teorema 5 ($N = 1$)	x_1	0,2047	0,4308	0,1413	0,2260	0,2138	13,31	0,0625
	x_2	0,6712	1,3071	1,4378	2,4648	0,2096		
FH-RMPC Teorema 5 ($N = 2$)	x_1	0,2388	0,5100	0,1776	0,3247	0,2356	13,23	0,0969
	x_2	0,6453	1,2130	1,4003	2,3367	0,2761		
FH-RMPC Teorema 5 ($N = 3$)	x_1	0,2375	0,5075	0,1765	0,3220	0,2334	13,22	0,1688
	x_2	0,6458	1,2150	1,4003	2,3382	0,2742		
FH-RMPC Teorema 5 ($N = 4$)	x_1	0,2342	0,4986	0,1721	0,3094	0,2334	13,07	0,3187
	x_2	0,6433	1,2113	1,3864	2,3086	0,2688		

4.4 Estudo de caso 04: sistema massa-mola

Seja o sistema de massa-mola acopladas (Cuzzola *et al.*, 2002), conforme Figura 19.

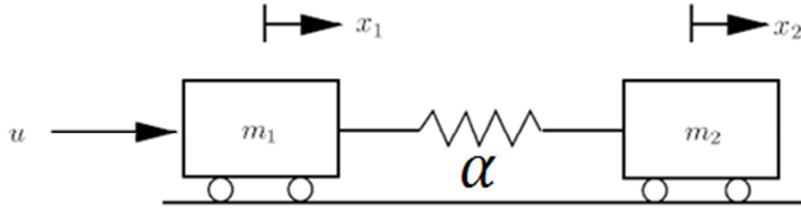


Figura 19 - Sistema massa-mola acoplado. Fonte: (Kothare *et al.*, 1996).

Seja a seguinte equação no espaço de estados em tempo discreto, obtida em Cuzzola *et al.* (2002) utilizando-se a aproximação de primeira ordem de Euler, com tempo de amostragem $T = 0,1s$:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,1 \\ \frac{-0,1\alpha}{m_1} & \frac{0,1\alpha}{m_1} & 1 & 0 \\ \frac{0,1\alpha}{m_2} & \frac{-0,1\alpha}{m_2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{0,1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} u(k),$$

na qual x_1 e x_2 são a posição do corpo 1 e 2, e x_3 e x_4 são suas velocidades, respectivamente. m_1 e m_2 são as massas dos dois corpos e α é a constante da mola. A força u atua em m_1 . A posição inicial é $x_0 = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$. As matrizes de ponderações da função custo são $Q = I$ e $R = I$ e a restrição de sinal de controle é dada por $|u(k)| \leq 1$ e $N = 3$.

Caso 1: considera-se o sistema incerto e invariante no tempo (LTI) e que o sistema nominal tem $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ e $\alpha = 1$, com as unidades apropriadas. A matriz A apresenta incertezas paramétricas, com $0,5 \leq \alpha \leq \alpha_M$ e $1 \leq m_2 \leq 10$. O valor do parâmetro α_M é variado para testar a factibilidade;

Caso 2: considera-se o mesmo sistema LTI do caso 01, com exceção que somente o parâmetro α é incerto, formando o politopo com $0,5 \leq \alpha \leq 10$. Considera-se $m_1 = 1$

e $m_2 = 1$. O sistema nominal tem $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ e $\alpha = 1$, com as unidades apropriadas.

Caso 3: considera-se o sistema LPV incerto com $m_1 = 1$ e $m_2 = 1$ e que α varia aleatoriamente no tempo, no intervalo $\alpha \in [0,5; 10]$ e o politopo de incertezas é definido por $0,5 \leq \alpha \leq 10$.

- **Simulações**

Inicialmente, é realizado um teste para determinar o maior valor de α_M (**Caso 01**) para o qual as técnicas IH-RMPC, de Kothare *et al.* (1996), Cuzzola *et al.* (2002) e Mao (2003), e a FH-RMPC, proposta neste trabalho sem a matriz de folga (Teorema 3) e com a matriz de folga (Teorema 5), apresentam soluções factíveis. Observa-se que para a técnica IH-RMPC de Kothare *et al.* (1996) não há solução factível para valores de $\alpha_M > 60,4$, para a técnica de Cuzzola *et al.* (2002) não há solução factível para valores de $\alpha_M > 91,2$ e para a técnica de Mao (2003) não há solução factível para valores de $\alpha_M > 91,2$. Para a estratégia FH-RMPC sem matriz de folga com $N = 3$ não há solução factível para valores de $\alpha_M > 59,9$ e para a técnica de FH-RMPC com matriz de folga e $N = 3$ não há factibilidade com $\alpha_M > 91,2$.

Na sequência, são realizadas simulações para o estudo de caso do sistema massa-mola utilizando os algoritmos FH-RMPC sem matriz de folga (Teorema 3) e o IH-RMPC baseado em Cuzzola *et al.* (2002), considerando-se o sistema descrito no **Caso 02** acima, com restrições no sinal de controle. Os resultados destas simulações são apresentados nas Figuras 20 a 25. Nas figuras 20 e 21 são apresentados os comportamentos dos estados. Nas Figuras 22 e 23, são apresentados os sinais de controle e as saídas, respectivamente, e, nas Figuras 24 e 25, são apresentados os comportamentos do coeficiente γ e do custo efetivo J_{ef} resultantes das simulações dos algoritmos FH-RMPC sem matriz de folga e o IH-RMPC baseado em Cuzzola *et al.* (2002).

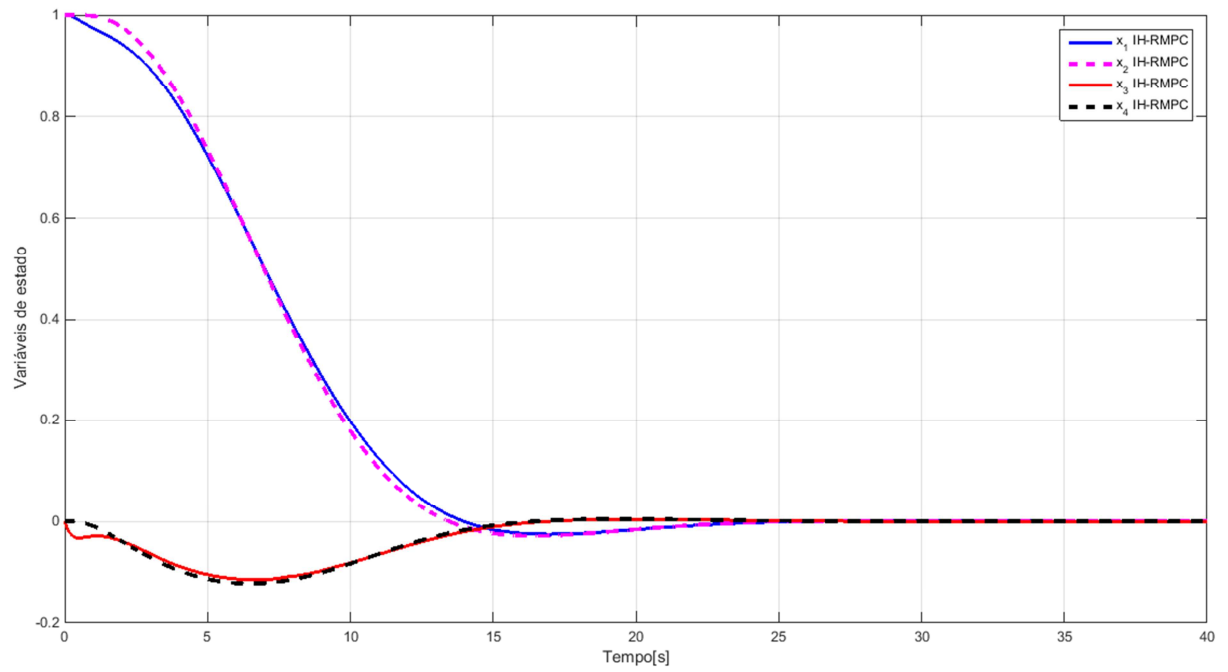


Figura 20- Estados da estratégia IH-RMPC conforme Cuzzola *et al.*(2002) (Caso 02).

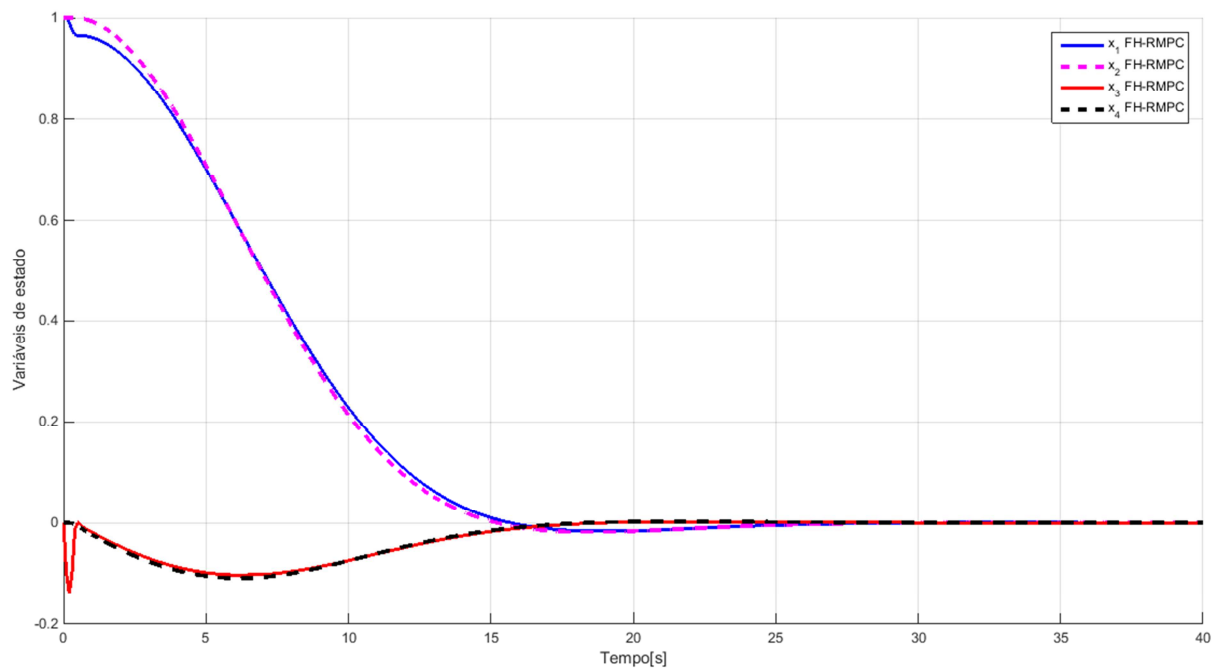


Figura 21- Estados da estratégia FH-RMPC sem matriz de Folga e $N = 3$ (Caso 02).

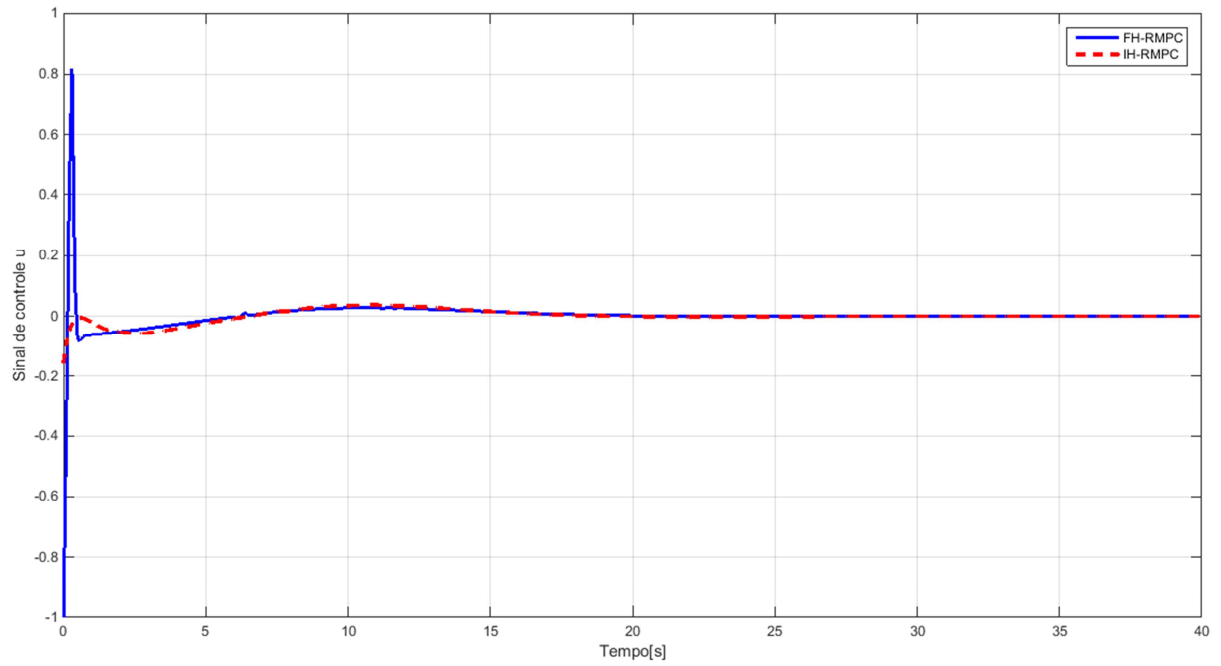


Figura 22 - Sinal de Controle das estratégias IH-RMPC x FH-RMPC (Caso 02)

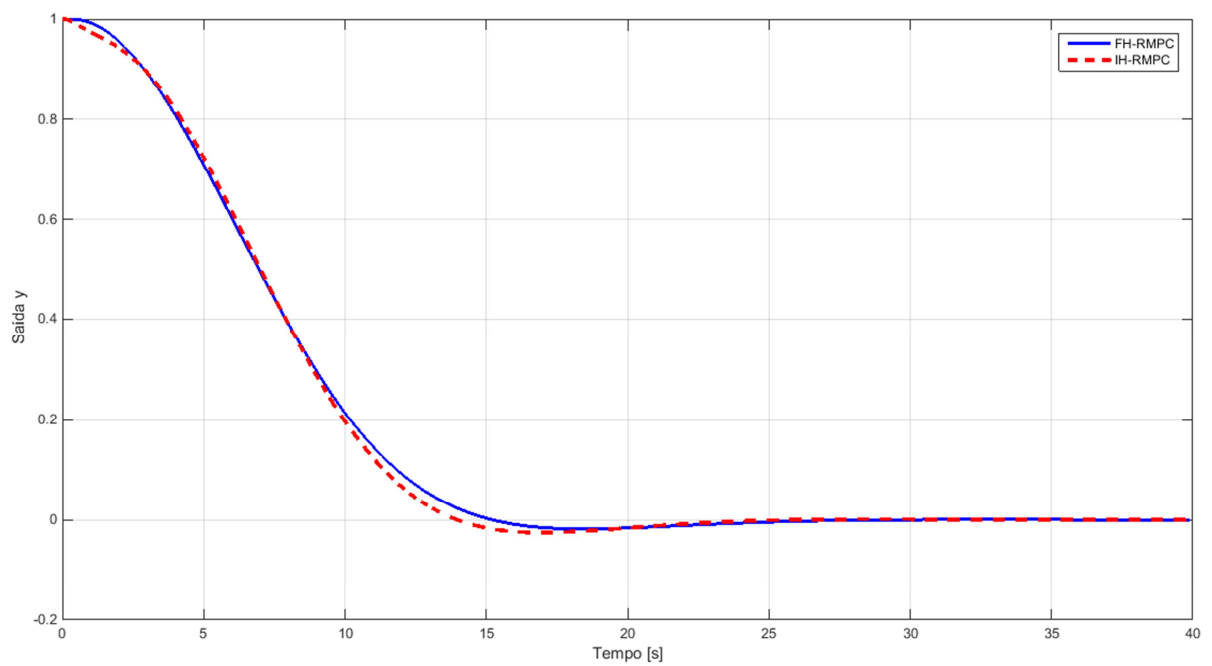


Figura 23 - Saídas das estratégias IH-RMPC x FH-RMPC (Caso 02)

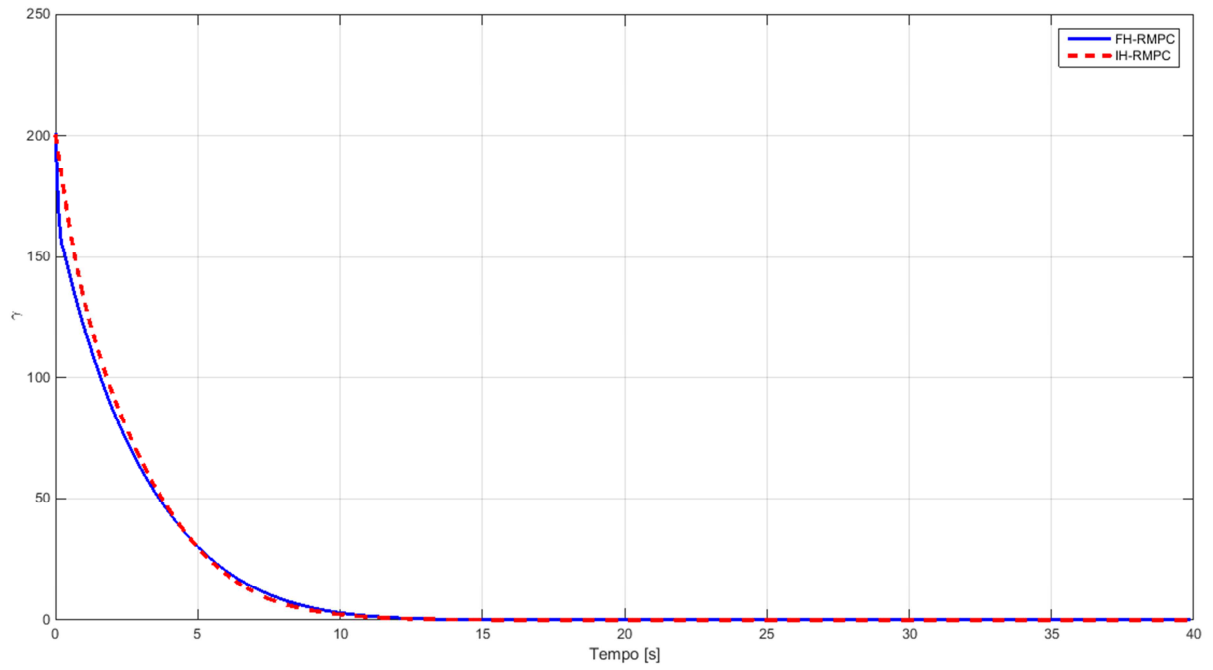


Figura 24 - Coeficiente γ das estratégias IH-RMPC x FH-RMPC (Caso 02)

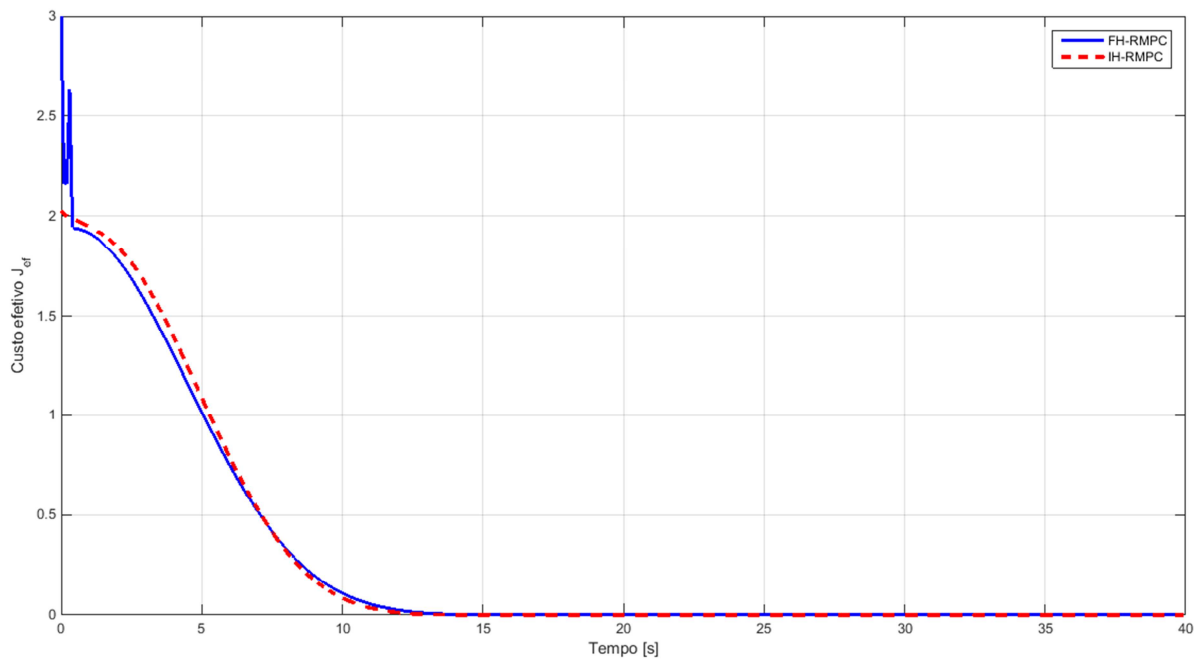


Figura 25 - Custo efetivo J_{ef} das estratégias FH-RMPC x IH-RMPC (Caso 02)

Os índices de desempenho normalizados e o tempo médio de processamento de uma iteração das estratégias IH-RMPC baseada em Cuzzola *et al.* (2002) e FH-RMPC sem matriz de folga (Teorema 3) com horizontes de predição $N = 1$, $N = 2$ e $N = 3$ das simulações do **caso 02**, são apresetados na Tabela 6. Analisando-se os resultados deste exemplo, observa-se que a estratégia FH-RMPC sem matriz de folga, com $N = 1$, apresenta índices IAE, ITAE, ISE e ITSE maiores para x_1 e x_2 , e ITAE maior e IAE, ISE e ITSE menores para x_3 e x_4 , quando comparados com aqueles da estratégia IH-RMPC. A estratégia FH-RMPC sem matriz de folga, com $N = 2$, apresenta índices IAE, ITAE, ISE e ITSE maiores para x_1 e x_2 , e ITAE maior e IAE, ISE, e ITSE menores para x_3 , e IAE, ITAE, ISE, e ITSE menores para x_4 , quando comparados com aqueles da estratégia IH-RMPC. A estratégia FH-RMPC sem matriz de folga, com $N = 3$, apresenta índices IAE e ITAE maiores e ISE e ITSE menores para x_1 e x_2 , e IAE, ITAE, ISE e ITSE menores para x_3 e x_4 , quando comparados com aqueles da estratégia IH-RMPC. A estratégia IH-RMPC, apresentou menor tempo médio de execução. A estratégia FH-RMPC sem matriz de folga e $N = 1$ apresentou menor índice normaliado TCV. Nota-se que o menor custo efetivo médio $\bar{J}_{ef}$ se dá para o FH-RMPC com o Teorma 3 e $N = 3$.

Ainda considerando-se o caso 02, o problema é resolvido utilizando-se a estratégia FH-RMPC com matriz de folga (Teorema 5). Na Tabela 7 apresenta-se a comparação do custo efetivo médio $\bar{J}_{ef}$ obtido pelas estratégias FH-RMPC com matriz de folga (Teorema 5) e IH-RMPC (Cuzzola *et al.*, (2002)). Observa-se que o menor custo efetivo médio $\bar{J}_{ef}$ se dá para o FH-RMPC com o Teorma 5 e $N = 2$.

Tabela 6 - Índices de desempenho normalizados do caso 02.

Método		IAE	ITAE	ISE	ITSE	TCV	$\bar{J}_{ef}$	Tempo médio por iteração (seg)
IH-RMPC Cuzzola(2002)	x_1	0,1819	8,4260	0,1327	4,4259	0,0008	0,2750	0,1292
	x_2	0,1829	8,3161	0,1373	4,4966			
	x_3	0,0263	2,0218	0,0022	0,1533			
	x_4	0,0265	2,0494	0,0024	0,1663			
FH-RMPC Teorema 3 ($N = 1$)	x_1	0,2186	11,8706	0,1615	6,4637	0,0006	0,3307	0,1629
	x_2	0,2192	11,7212	0,1652	6,5270			
	x_3	0,0258	2,3384	0,0018	0,1521			
	x_4	0,0259	2,3562	0,0019	0,1609			
FH-RMPC Teorema 3 ($N = 2$)	x_1	0,1882	9,1906	0,1341	4,6717	0,0031	0,2781	0,4793
	x_2	0,1889	9,0365	0,1381	4,7050			
	x_3	0,0259	2,0295	0,0019	0,1374			
	x_4	0,0259	2,0467	0,0021	0,1461			
FH-RMPC Teorema 3 ($N = 3$)	x_1	0,1832	8,8031	0,1292	4,4037	0,0073	0,2719	0,9845
	x_2	0,1838	8,6469	0,1333	4,4292			
	x_3	0,0258	1,9759	0,0020	0,1339			
	x_4	0,0259	1,9928	0,0021	0,1421			

Tabela 7 - $\bar{J}_{ef}$ das estratégias IH-RMPC x FH-RMPC (Teorema 5), caso 02.

Método	IH-RMPC Cuzzola(2002)	FH-RMPC Teorema 5 ($N = 1$)	FH-RMPC Teorema 5 ($N = 2$)	FH-RMPC Teorema 5 ($N = 3$)
$\bar{J}_{ef}$	0,2750	0,2750	0,2216	0,2278

São realizadas simulações para o estudo de caso do sistema massa-mola utilizando os algoritmos FH-RMPC com matriz de folga (Teorema 5) e o IH-RMPC baseado em Mao (2003), considerando-se o sistema descrito no **Caso 03**, com restrições no sinal de controle. Os resultados destas simulações são apresentados nas Figuras 26 a 31. Nas figuras 26 e 27 são apresentados os comportamentos dos estados. Nas Figuras 28 e 29, são apresentados os sinais de controle e as saídas, respectivamente, e, nas Figuras 30 e 31, são apresentados os comportamentos do coeficiente γ e do custo efetivo J_{ef} resultantes das simulações dos algoritmos FH-RMPC com matriz de folga e o IH-RMPC baseado em Mao (2003).

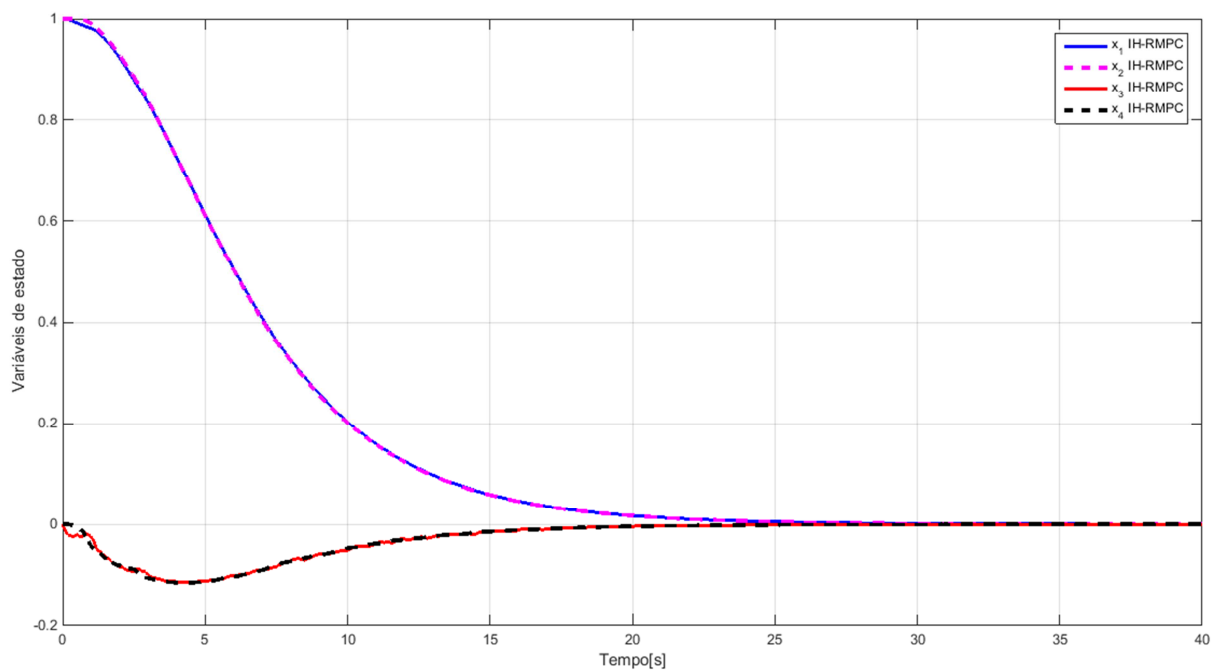


Figura 26 - Estados da estratégia IH-RMPC conforme Mao (2003) (Caso 03).

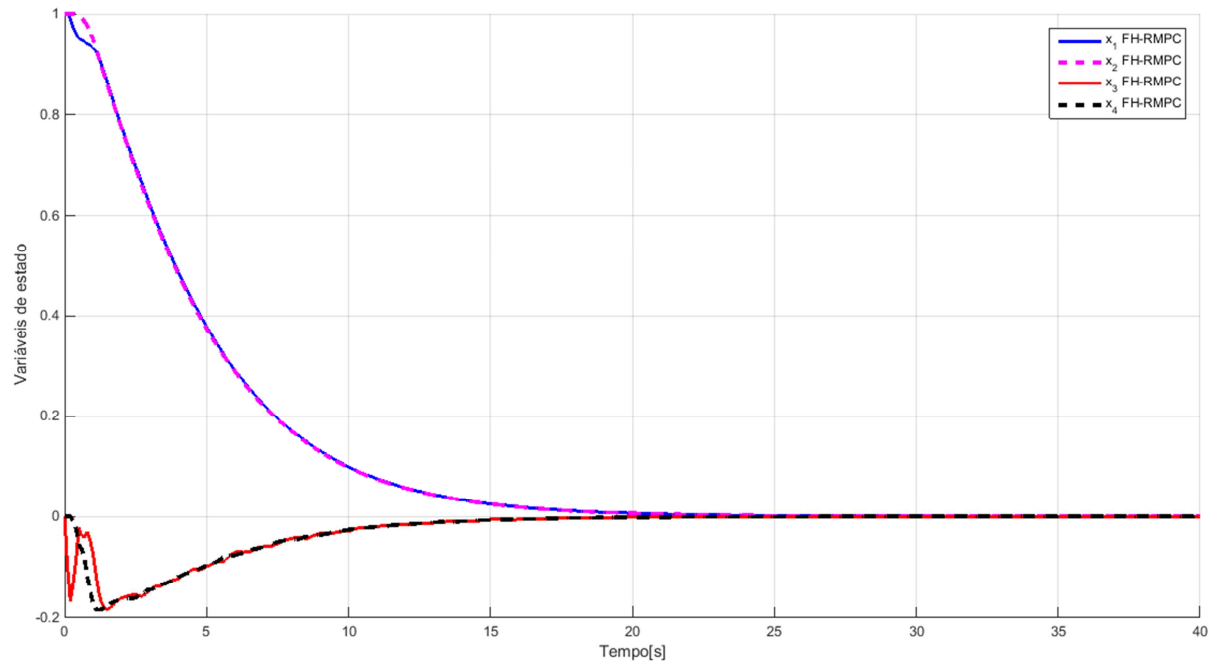


Figura 27 - Estados da estratégia FH-RMPC com matriz de Folga e $N = 3$ (Caso 03).

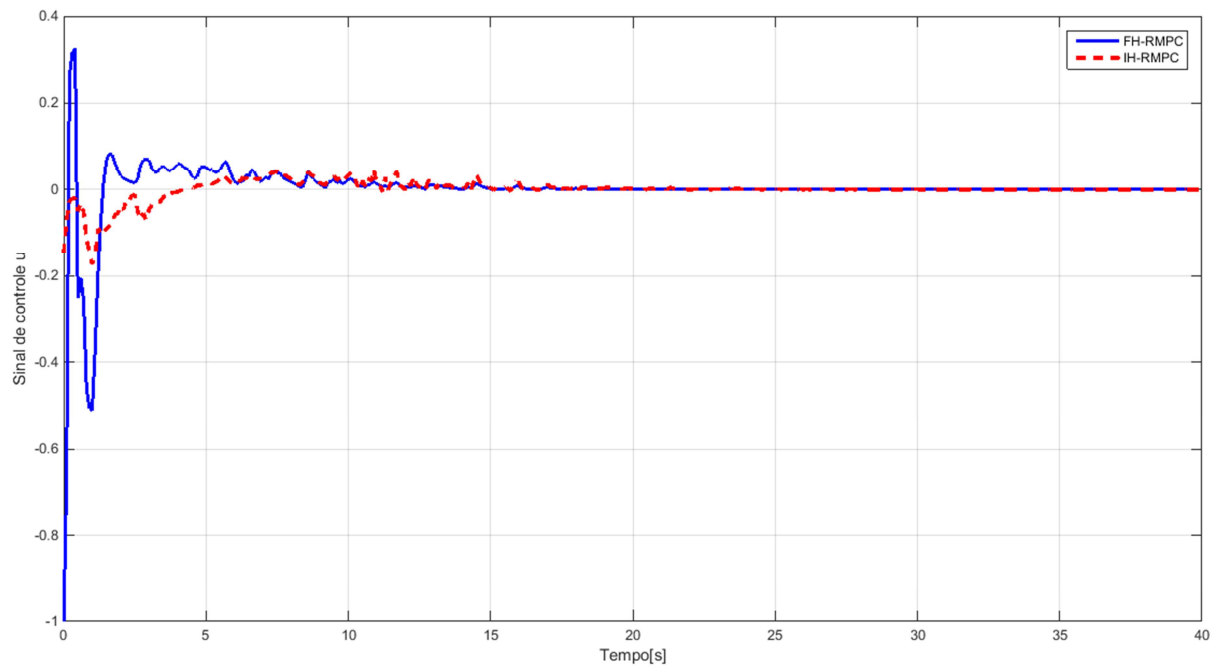


Figura 28 - Sinal de Controle das estratégias IH-RMPC x FH-RMPC (Caso 03).

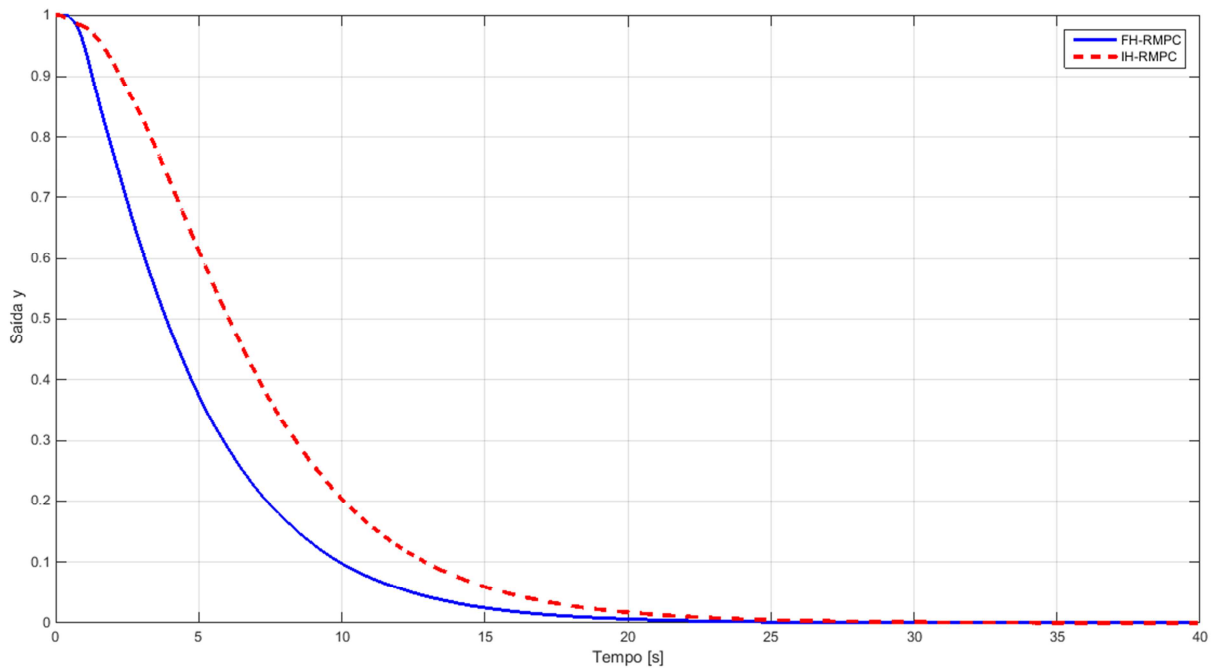


Figura 29 - Saídas das estratégias IH-RMPC x FH-RMPC (Caso 03)

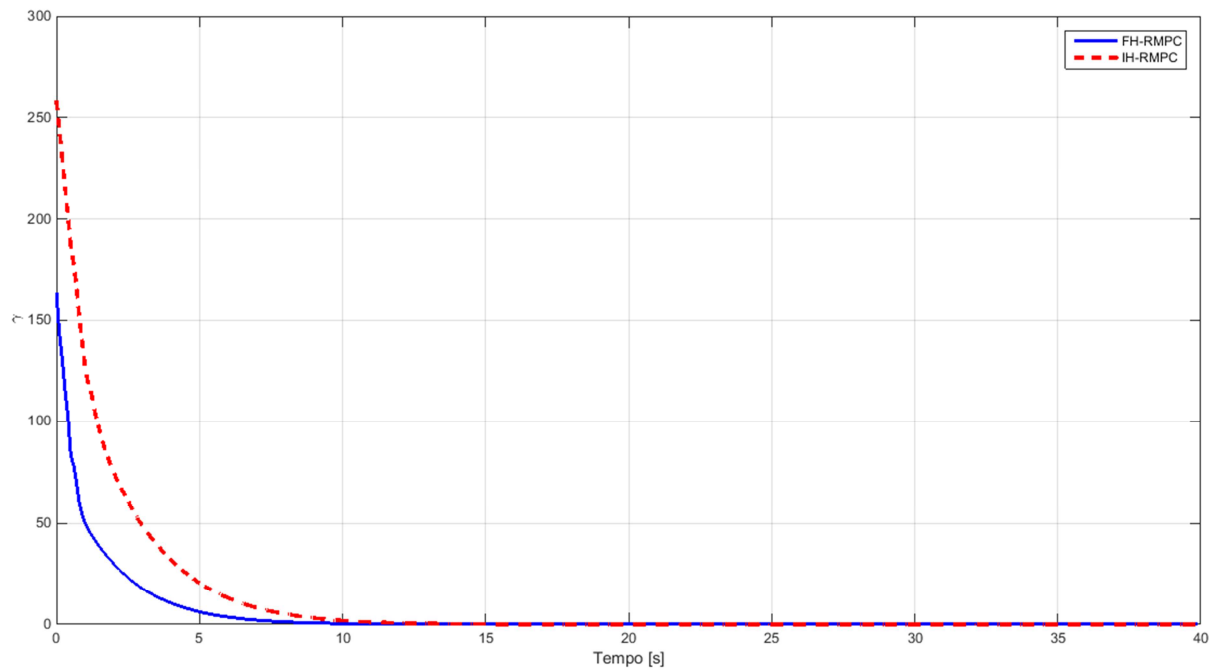


Figura 30 - Coeficiente γ das estratégias FH-RMPC e IH-RMPC (Caso 03).

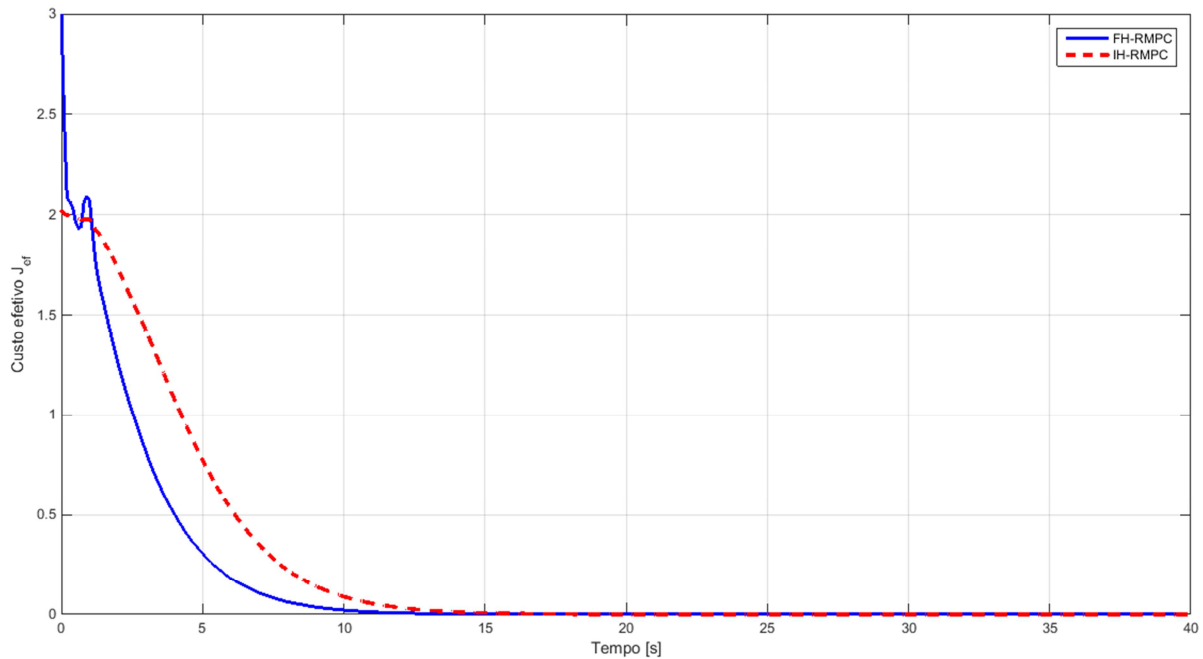


Figura 31 - Custo efetivo J_{ef} das estratégias FH-RMPC x IH-RMPC (Caso 03).

Os índices de desempenho normalizados e o tempo médio de processamento de uma iteração das estratégias IH-RMPC baseada em Mao (2003) e FH-RMPC com matriz de folga (Teorema 05) com horizontes de predição $N = 1$, $N = 2$ e $N = 3$ das simulações do **caso 03**, são apresetados na Tabela 8. Analisando-se os resultados deste exemplo, observa-se que a estratégia FH-RMPC, com $N = 1$, apresenta índices IAE, ITAE, ISE e ITSE menores para x_1 , x_2 , e IAE iguais e ITAE menores para x_3 e x_4 , quando comparados com aqueles da estratégia IH-RMPC. A estratégia FH-RMPC, com $N = 2$ e $N = 3$, apresenta índices IAE, ITAE, ISE e ITSE menores para x_1 , x_2 , e IAE iguais e ITAE e ITSE menores para x_3 e x_4 , quando comparados com aqueles da estratégia IH-RMPC. A estratégia FH-RMPC, com $N = 1$, apresentou menor tempo médio de execução e menor índice normalizado TCV. Nota-se que o menor custo efetivo médio $\bar{J}_{ef}$ se dá para o FH-RMPC com o Teorma 5 e $N = 3$.

Tabela 8 - Índices de desempenho normalizados do caso 03.

Método		IAE	ITAE	ISE	ITSE	TCV	$\bar{J}_{ef}$	Tempo médio por iteração (seg)
IH-RMPC Cuzzola(2002)	x_1	0,1765	8,8994	0,1166	3,6736	0,0044	0,2384	0,2997
	x_2	0,1765	8,8499	0,1172	3,6659			
	x_3	0,0250	1,7640	0,0019	0,1081			
	x_4	0,0250	1,7633	0,0020	0,1094			
FH-RMPC Teorema 5 ($N = 1$)	x_1	0,1601	7,2605	0,1065	3,0447	0,0028	0,2188	0,2198
	x_2	0,1600	7,2106	0,1071	3,0360			
	x_3	0,0250	1,6002	0,0021	0,1101			
	x_4	0,0250	1,5991	0,0022	0,1116			
FH-RMPC Teorema 5 ($N = 2$)	x_1	0,1261	5,1093	0,0764	1,7548	0,0105	0,1636	0,7046
	x_2	0,1258	5,0585	0,0770	1,7362			
	x_3	0,0250	1,2606	0,0026	0,0908			
	x_4	0,0250	1,2582	0,0028	0,0928			
FH-RMPC Teorema 5 ($N = 3$)	x_1	0,1244	5,0314	0,0745	1,7033	0,0092	0,1624	1,5777
	x_2	0,1242	4,9822	0,0752	1,6867			
	x_3	0,0250	1,2432	0,0026	0,0889			
	x_4	0,0250	1,2418	0,0027	0,0903			

Capítulo 5

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Uma nova abordagem para Controle Preditivo Robusto Baseado em Modelo de Horizonte Finito para sistemas lineares com incertezas politópicas variantes no tempo foi apresentada. As restrições nos sinais de controle e saída também podem ser levadas em consideração na formulação do problema. Devido à propriedade de monotonicidade das RDEs, a sequência de controle obtida como solução do problema de otimização estabiliza o sistema em malha fechada. Diferentemente de outras abordagens conhecidas, não há necessidade de se impor uma condição terminal, embora o problema também possa ser resolvido levando-se em conta uma matriz de ponderação fixa no custo associado ao estado terminal.

Outro aspecto importante além da estabilidade, no contexto de Controle Preditivo, também foi abordado: a factibilidade. Esta foi provada para ambas as abordagens: considerando-se o conjunto finito de funções de Lyapunov e com as matrizes de folga. Esta última reduz consideravelmente o conservadorismo da abordagem que usa um conjunto único de matrizes de Lyapunov associado aos vértices do politopo de incertezas. Ambas fazem uso das desigualdades matriciais lineares e, portanto, o problema a ser otimizado pode ser solucionado com algoritmos *on-line* eficientes, em tempo polinomial.

Os exemplos numéricos de sistemas variantes no tempo demonstraram o bom desempenho do controlador FH-RMPC proposto e, na sua comparação com a técnica IH-RMPC através de índices de desempenho baseados no erro, apresentaram valores menores na maioria dos índices. Foi observado em um dos exemplos testados, que a estratégia FH-RMPC mostrou-se mais robusta do que a

estratégia IH-RMPC. Foi verificado que a estratégia FH-RMPC com matriz de folga e horizonte de predição $N = 1$ apresentou menor tempo de processamento médio de uma iteração, para os quatro estudos de caso. Uma desvantagem dessa abordagem é que o tempo de processamento tende a aumentar com o aumento do horizonte de previsão, em função do consequente crescimento do número de LMIs no problema de otimização.

5.1 Perspectivas futuras

Como perspectiva de continuidade deste trabalho, sugere-se a análise dos seguintes tópicos:

- avaliar a estratégia FH-RMPC para sistemas com atrasos;
- avaliar o comportamento da estratégia FH-RMPC com a inclusão de perturbações;
- comparar a estratégia FH-RMPC proposta neste trabalho com outras estratégias FH-RMPC existentes;
- considerar a formulação do problema com incertezas na matriz C .
- estender as análises da técnica para o caso seguidor de referência;
- incluir restrições de estados na formulação FH-RMPC;
- realizar estudos para reduzir custo computacional das técnicas RMPC;
- realizar teste experimental da técnica FH-RMPC.

Por fim, é importante ressaltar que parte dos resultados desta dissertação deu origem ao artigo “Controle Preditivo Robusto com Horizonte Finito de sistemas lineares variantes no tempo” (Batista, A; Araújo, H. X., 2019) no 14º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI) em 2019.

Capítulo 6

REFERÊNCIAS

Afonso, R. J. M.; Galvão, R. K. H. (2012); Uso de conjuntos terminais parametrizados para tratamento de problemas de não factibilidade em controle preditivo. Revista Controle & Automação, v.23, n.6;

Arnold, W. F; Laub, A. J. (1984); Generalized Eigenproblem Algorithms and software for algebraic Riccati Equations. Proceedings of IEEE, v.72, n.12;

Batista, A. M.; Araújo, H. X. (2019); Controle Preditivo Robusto com Horizonte Finito de sistemas lineares variantes no tempo. 14º Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente; v.1, pp.3014~3019; DOI: 10.17648/sbai-2019-111600; Disponível em: <<https://proceedings.science/sbai-2019/papers/controle-preditivo-robusto-com-horizonte-finito-de-sistemas-lineares-variantes-no-tempo>> Acesso em: 13 jun. 2020.

Bemporad, A.; Morari, M. (1999); Robust Model Predictive Control: A survey. Springer, pp.207-226;

Bitmead, R. R.; Gevers, M.; Wertz, V. (1990); Adaptive Optimal Control: The Thinking Man's GPC. Prentice Hall. Englewood Cliffs, NJ;

Bitmead, R.; Gevers, M.; Petersen, I. R.; Kaye, R. J. (1985); Monotonicity and stabilizability Properties of Solutions of Riccati Difference Equation. Systems and Control Letters, v.5, pp.309-315;

Boyd, S.; Le Ghaoui, L.; Balakrishnan, V. (1994); Linear Matrix Inequalities. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia;

Camacho, E. F.; Bordons, C. (2007); Model Predictive Control. Springer-Verlag, 2 ed., London;

Cassavola, A.; Formularo, D.; Franzé, G. (2004); Robust Constrained predictive control of uncertain norm-bounded linear systems. *Automatica*, v.40, pp.1865-1876;

Chu, D.; Chen, T.; Marquez, H. J. (2006a); Finite horizon robust model predictive control with terminal cost constraints, *IEE Proceedings D: Control Theory Applications*, v.153, pp.156-166;

Chu, D.; Chen, T.; Marquez, H. J. (2006b); Explicit robust model predictive control using recursive closed-loop prediction, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v.16: pp.519-546;

Cuzola, F.; Geromel, J. C.; Morari, M.(2002); An improved approach for constrained robust model predictive control. *Automatica*, v.38, pp.1183-1189;

Ding, B.; Xi, Y.; Li, S. (2004); A Synthesis approach of on-line constrained robust model predictive control. *Automatica*, v.40, pp.163-167;

De Souza, C. E.; Gevers, M.; Goodwin, G. C. (1986); Riccati Equations in Optimal Filtering of Nonstabilizable Systems having Singular State Transition Matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.31, pp 831-838;

De Souza, C. E (1989); Monotonicity and Stabilizability results for the solution of the Riccati Difference Equation. *Proc. Workshop on the Riccati Equation in Control, Systems and Signals*, S Bittanti (ed.), Como, Italy, pp. 38-41;

De Oliveira, M. C.; Bernussou, J.; Geromel, J. C. (1999); A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, v.37, pp. 261-265;

Kanev, S; Verhaegen, M. (2006); Robustly asymptotically stable finite-horizon MPC. *Automatica*, v.42, pp.2189-2194;

Kim, K. B.; (2002); Implementation of stabilizing receding horizon controls for time-varying systems. *Automatica*, v.38, pp.1705-1711;

Khalil, H. K. (1996); *Nonlinear Systems*. Prentice Hall. England;

Kothare, M. V.; Balakrishman, V.; Morari, M. (1996); Robust Constrained Model Predictive Control using Linear Matrix Inequalities, *Automatica*, v.32, pp.1361-1379;

Kwon, W.; Pearson, A. (1977); A modified quadratic cost problem and feedback stabilization of a linear system. *IEEE, Transactions on Automatic Control*, v.22, n.5, pp.838-842;

Kwon, W.; Pearson, A. (1978); On feedback stabilization of time-varying discrete linear systems. *IEEE, Transactions on Automatic Control*, v.23, n.3, pp.479-481;

Kwon, W. H.; Han, S. (2005); *Receding Horizon Predictive Control Model Predictive Control*. Springer-Verlag, London;

Lee, J-W.; Kwon, W. H.; Choi, J. (1998); On stability of constrained receding horizon control with finite terminal weighting matrix. *Automatica*, v.34, pp.1607-1612;

Leite, V. J. S.; Montagner, V. F.; Oliveira, P. J., Oliveira, R. C. L. F.; Ramos, D. C. W.; Peres, P. L. D. (2004); Estabilidade robusta de sistema lineares através de desigualdades matriciais lineares. *Controle & Automação*, v.15, n.1/jan;

Maciejowski, J. M. (2002); *Predictive Control with Constraints*. Prentice Hall. England;

Magni, L.; De Nicolao, G.; Scattolini, R.; Algower (2003); Robust model predictive control for nonlinear discrete-time systems, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v.13: pp.229–246;

Marzaki, M. H., Tajjudin, M., Rahiman, M. H. F., Adnan, R (2015); Performance of FOPI with Error filter Based on Controllers Performance Criterion (ISE, IAE and ITAE). 10th Asian Control Conference (ASCC), pp. 1-6;

Mao, W.-J. (2003); Robust stabilization of uncertain time-varying discrete systems and comments on "an improved approach for constrained robust model predictive control". *Automatica*, v.39, pp.1109-1112;

Mayne, D. Q.; Rawlinings, J. B.; Rao, C. V., Scokaert, P. O. M. (2000); Constrained model predictive control: Stability and Optimality. *Automatica*, v.36, pp.789-814;

Polak, E.; Yang, T. (1993); Moving horizon control of linear systems with input saturation and plant uncertainty part 1. Robustness. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v.58, n.3, pp.613-638;

Scokaert, P.O.M; Mayne, D.Q (1998), Min-max feedback model predictive control of constrained linear systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v.43, pp. 1136~1142;

Oravec, J.; Bakosová, M. (2015); Alternative LMI-based Robust MPC Design Approaches. *8th International Federation of Automatic Control (IFAC) on Robust Control Design*, Bratislava, Slovakia , V.48, n.14, pp. 180-185;

Otoni, A. G. S. ; Barbosa, A. M. ; Takahashi, R. H. C. ; Aguirre, L. A. (2013). Controle preditivo baseado em modelo linear com incerteza intervalar: formulação e análise de estabilidade. *Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*, Fortaleza. Anais do SBAI, 2013;

Uwe, M. (2004); *Robust Control Systems: Theory and Case Studies*. Springer-Verlag, 1 ed., Berlin Heidelberg;

Wan, Z.; Kothare, M. V. (2003); Efficient robust constrained model predictive control with a time varying terminal constraint set. *Systems & Control Letters*, v.48, pp.375-383;

Wada, N.; Saito, K.; Saeki, M. (2006); Model Predictive Control for Linear Parameter Varying Systems Using Parameter Dependent Lyapunov Function. IEEE Transactions on Circuits and Systems, v.53, n.12, pp. 1446-1450;

Wimmer, H. K. (1992); A Comparison theorem for matrix Riccati difference equations. Systems & Control Letters, North-Holland, v.19, pp.223-239;