



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica



CÉSAR AUGUSTO PEÑA FERNÁNDEZ

CONTROLADOR DE TRAJETÓRIA SUPORTADO POR
UM CRITÉRIO DE ROLAMENTO PARA BASES MÓVEIS:
UMA ABORDAGEM BASEADA EM PERTURBAÇÕES
SINGULARES

Salvador - BA
2016



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica



CONTROLADOR DE TRAJETÓRIA SUPORTADO POR UM CRITÉRIO DE ROLAMENTO PARA BASES MÓVEIS: UMA ABORDAGEM BASEADA EM PERTURBAÇÕES SINGULARES

Autor: M.Sc César Augusto Peña Fernández
Orientador: Prof. Dr. Jês de Jesus Fiais Cerqueira
Co-Orientador: Prof. Dr. Antônio Marcos Nogueira Lima

*Tese de doutorado apresentada ao Departamento de Engenharia
Elétrica como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do
título de*

DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Banca Examinadora

Dr. Jês de Jesus Fiais Cerqueira - **UFBA** (Presidente)
Dr. Antonio Marcos Nogueira de Lima - **UFCG**
Dr. Liu Hsu - **UFRJ**
Dr. André G. Scolari Conceição - **UFBA**
Dr. Humberto Xavier de Araújo - **UFBA**
Dr. Pablo Javier Alsina - **UFRN**

Salvador-BA
2016

FICHA CATALOGRÁFICA

Peña Fernández, César Augusto

Controlador de trajetória suportado por um critério de rolamento para bases móveis: uma abordagem baseada em perturbações singulares [tese] /

César Augusto Peña Fernández - Salvador, BA:[s.n.], 2016

203 p.

Orientadores: Jês de Jesus Fiais Cerqueira.

Antônio Marcus Nogueira Lima

Tese (Doutorado) - Universidade Federal da Bahia, 2016

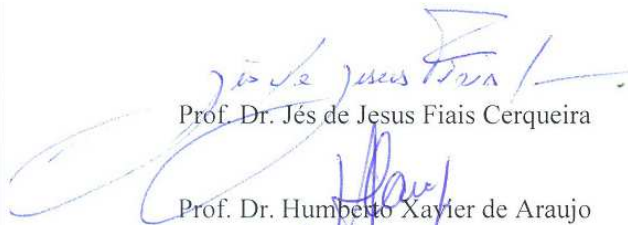
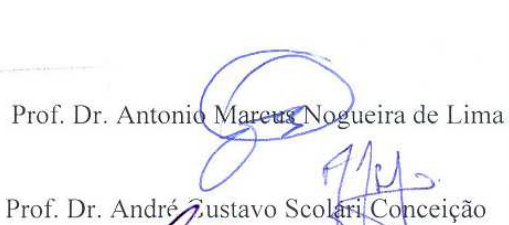
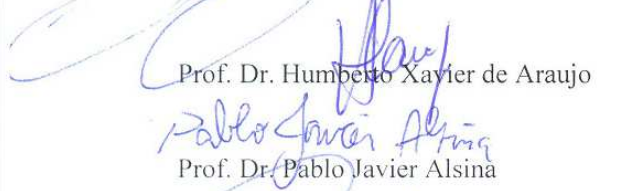
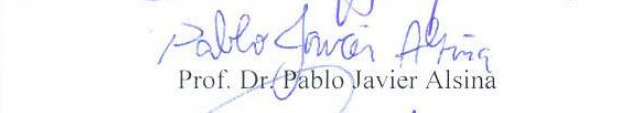
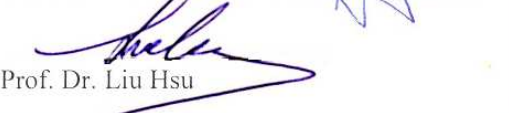
Escola Politécnica, Departamento de Engenharia Elétrica.

1. Restrições holonômicas. 2. Restrições não-holonômicas.
3. Bases móveis com rodas. 4. Dinâmicas rápidas. 5. Dinâmicas lentas
6. Perturbações singulares. 7. Ações corretivas. 8. Desempenho da tração
8. Escorregamento. 9. Derrapagem. 10. Deslizamento. I. Cerqueira,
Jês de Jesus Fiais. II. Lima, Antônio Marcus Nogueira
III. Universidade Federal da Bahia. Programa de Pós-graduação em
Engenharia Elétrica. IV. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Candidato: CÉSAR AUGUSTO PEÑA FERNÁNDEZ

Tese defendida e julgada em 22/07/2016 perante a Comissão Julgadora composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. Jês de Jesus Fiais Cerqueira (Orientador e Presidente da Seção), Prof. Dr. Antonio Marcus Nogueira de Lima (co-orientador), Prof. Dr. Humberto Xavier de Araujo (membro interno), Prof. Dr. André Gustavo Scolari Conceição (membro interno), Prof. Dr. Pablo Javier Alsina (membro externo) Prof. Dr. Liu Hsu (membro externo). A Banca Examinadora reuniu-se para a elaboração dos pareceres tendo **APROVADO, por unanimidade, a proposta** do candidato.

 Prof. Dr. Jês de Jesus Fiais Cerqueira	 Prof. Dr. Antonio Marcus Nogueira de Lima
 Prof. Dr. Humberto Xavier de Araujo	 Prof. Dr. André Gustavo Scolari Conceição
 Prof. Dr. Pablo Javier Alsina	 Prof. Dr. Liu Hsu

Agradecimentos

Agradeço,

- Ao DEE da UFBA por ter proporcionado a oportunidade de realização do curso de Doutorado em Engenharia Elétrica.
- À **CAPES** pela concessão de uma bolsa de estudos durante a realização do curso.
- Ao Prof. Dr. Jês de Jesus Fiais Cerqueira e ao Prof. Dr. Antônio Marcos Nogueira Lima, orientadores deste trabalho, por terem me aceito como orientando, e pela compreensão emprestada.
- Aos comentários e as sugestões dos membros da banca examinadora desta tese: Prof. Dr. Jês de Jesus Fiais Cerqueira, da UFBA; Prof. Dr. Antonio Marcus Nogueira de Lima, da UFCG; Prof. Dr. Liu Hsu da UFRJ; Prof. Dr. André G. Scolari Conceição da UFBA; Prof. Dr. Humberto Xavier da UFBA; Prof. Dr. Pablo Javier Alsina da UFRN.
- Ao Prof. Dr. Claude Samson do Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA) pela cooperação dada nesse projeto.
- Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Bahia pelas aulas ministradas. Da mesma forma, aos colegas que tive a oportunidade de conhecer no programa de pós-graduação de Engenharia Elétrica da UFBA durante minha formação como Doutor em Engenharia Elétrica.
- A minha família, meu pai César Peña, minha mãe Blanca Fernández, minha irmã Alexandra Peña; e a minha noiva, Mirian Lima das Mercês; pela tolerância e apoio.
- A Deus e à medicina pelo apoio e cuidados frente ao problema de saúde que marcou minha vida.

Não há nada no mundo que esteja melhor distribuído do que a razão: toda a gente está convencida de que a tem de sobra.

René Descartes

Resumo

A principal contribuição desta tese é uma lei de controle alternativa baseada em um critério de rolamento para bases móveis com no mínimo duas rodas ativas quando as restrições cinemáticas [que podem ser holonômicas ou não-holonômicas] não são satisfeitas e a presença de escorregamento é iminente para velocidades superiores. O método aqui apresentado consiste na utilização da teoria de perturbações singulares para descrever os efeitos fenomenológicos, e suas naturezas de comportamento, dentro da dinâmica geral do sistema mecânico quando as restrições cinemáticas não são satisfeitas. Com a teoria de perturbações singulares é possível projetar controladores que incluem um grau de robustez e que convenientemente permitem analisar a mitigação gradual das dinâmicas associadas à insatisfação das restrições cinemáticas, sempre que algum critério de rolamento seja apropriadamente aplicado. A definição desse critério é uma formulação teórica dos fenômenos físicos diretamente ligados com a tração de bases móveis e supostos matemáticos coerentes com a teoria de controladores não-lineares. Os resultados são consequência de testes de simulação feitos em *Simulink* do MATLAB® para exemplos de configuração em bases móveis reais e um teste experimental baseado em uma base omnidirecional.

Palavras-chave: Restrições holonômicas, restrições não-holonômicas, bases móveis com rodas, dinâmicas rápidas, dinâmicas lentas, perturbações singulares, ações corretivas, desempenho da tração, escorregamento, derrapagem, deslizamento.

Abstract

The main contribution of this thesis is an alternative control law based on a rolling criterion for wheeled mobile bases when the kinematic constraints [which can be holonomic or nonholonomic] are not satisfied and the presence of the slip is imminent for higher speed. The method presented here is based on the singular perturbation theory. This theory allows us to describe the phenomenological effects, and their dynamics within the overall dynamics of the mechanical system when the kinematic constraints are not satisfied. With the singular perturbation theory is possible to design controllers that include a degree of robustness and, conveniently, allow us to analyze the gradual mitigation of the dynamics associated with the insatisfaction of the kinematic constraints, whenever some rolling criterion is properly applied. The definition of this criterion is a theoretical formulation of the physical phenomena directly linked with the traction of mobile bases and assumptions consistent with the mathematical theory for nonlinear controllers. The results are consequences of simulations made in *Simulink* of MATLAB[®] for examples of real configurations in wheeled mobile bases and experimental tests in real omnidirectional mobile base.

Keywords: Holonomic constraints, non-holonomic constraints, wheeled mobile bases, fast dynamics, slow dynamics, singular perturbation, corrective actions, traction performance, slipping, slip, skidding.

Lista de Figuras

1.1	Robôs: (a) SHAKEY do <i>Stanford Research Institute</i> , (b) POWERBOT da <i>Active Media Robotics</i> , (c) PATROLBOT da <i>Active Media Robotics</i> , (d) Aspiradora de pó SCOOBA da <i>IRobot</i> , (e) Cortador de grama autônomo RL855 da <i>Robonow</i> , (f) AIBO e g) QRIO da <i>Sony</i>	2
1.2	Duas BMRs a serem consideradas nesta tese de doutorado: (a) BMR com três rodas suecas do Laboratório de Robótica da Universidade Federal da Bahia; (b) BMR com duas rodas padrão e uma roda castor de apoio.	7
2.1	Movimento sobre um colchete de Lie. A variável δt na representação é um valor de tempo infinitesimal, tal que $\delta t f(q)$ e $\delta t g(q)$ representam posições do estado q no espaço de configurações $\mathbb{R}^n$. Da mesma forma, $-\delta t f(q)$ e $-\delta t g(q)$ representam posições do estado q mas em posições opostas a $\delta t f(q)$ e $\delta t g(q)$	12
2.2	Exemplo de posicionamento de uma BMR dentro de um marco fixo.	15
2.3	Esquema de configuração de posição para: (a) roda padrão fixa/orientável no centro, (b) roda orientável fora do centro, e (c) roda sueca.	16
2.4	Centro Instantâneo de Curvatura: (a) para uma base com duas rodas orientáveis no centro, (b) para uma base com duas rodas padrão fixas e uma roda orientável no centro, do tipo <i>triciclo</i> , e (c) para uma base com uma roda padrão fixa e uma roda orientável no centro, tipo <i>bicicleta</i>	18
2.5	Classificação das BMRs pelo seu grau de mobilidade δ_m e grau de direcionabilidade δ_d . Bases (a) e (d) do Tipo (3,0) são conhecidas como bases omnidirecionais. O valor de l equivale à distância perpendicular desde o centro da BMR até o ponto de acoplamento da roda com a estrutura. O número de rodas motorizadas em cada BMR está sujeito a uma implementação tecnicamente viável do projetista, sendo no mínimo uma roda motorizada e máximo três. . . .	21
2.6	Exemplos de BMRs usadas por robôs móveis.	22
3.1	Representação dos vetores usados na Subseção 3.3.1.	42
3.2	Exemplo de representação gráfica dos mapas $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$ para: (a) força de tração longitudinal e (b) força de tração lateral. Nos dois casos $F_N = 2000N$. Parâmetros tomados de (Bakker <i>et al.</i> 1987).	44
3.3	Exemplo de representação gráfica do mapa $F_i(s_i, \delta_{x,i}) = Gs_i + D\delta_{x,i}$ para $G = D = 10000$ N considerando a Suposição 3.6.	45
3.4	Evolução de $\hat{\mu}$ para os modelos singularmente perturbados [vista em três dimensões: $\hat{\mu}_1 \times \hat{\mu}_2 \times \hat{\mu}_3$].	49
3.5	Esquema de geração dos componentes para a variedade flexível $\mu = H(x, \varepsilon)$ e a lei de controle por ações corretivas $\tau_\varepsilon(x, \varepsilon)$ pelo uso de (3.87) e (3.88), respectivamente.	56
3.6	Esquema de controle não-linear baseado na composição de (2.44), (3.64) e a lei de controle baseada em ações corretivas (3.78), representada na Figura 3.5	57
3.7	Controlador PI com Anti Wind-up de ação integral. O tempo T_t pode ser interpretado como a constante de tempo que determina o quão rápido a ação integral será levada a zero.	58
3.8	Seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (2,0) quando é aplicada a lei de controle (3.65) no modelo rígido (2.43) (linha tracejada) e no modelo flexível definido por (3.69)-(3.70) (linha sólida).	59

3.9	Evolução do erro de seguimento $\tilde{h}$ e da lei de controle $\tau_0(x)$ para seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (2,0) quando é aplicada a lei de controle (3.65) no modelo rígido (2.43) (linha tracejada) e no modelo flexível definido por (3.69)-(3.70) (linha sólida).	60
3.10	(Acima) Simulação do custo computacional da lei de controle (3.78) segundo o valor de ε , de acordo com a expressão $\varepsilon = 10^{-n\varepsilon} + N_\varepsilon 10^{-n\varepsilon+1}$ e seguimento de trajetória para $\varepsilon = 9 \times 10^{-11}$. (Abaixo) Seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (2,0) e evolução do erro de controle $\tilde{h} = [\tilde{x} \ \tilde{y}]^T$ na BMR tipo (2,0) quando é aplicada a lei de controle aumentada (3.78), para $N_r = 1$, $\varepsilon = 10^{-15}$, e a lei de controle rígida (3.65).	62
3.11	Comparação dos vetores $A^T(q)A(q)\varepsilon\mu$ e $A^T(q)\dot{q}$ quando é aplicada a lei de controle (3.78) (com grau $N_r = 1$, $\varepsilon = 10^{-15}$ e $D_0 = G_0 = 1$ N) no modelo flexível da BMR tipo (2,0) e o vetor $A^T(q)\dot{q}$ quando é aplicada a lei de controle (3.65).	63
3.12	Comparação da evolução das leis de controle $\tau_\varepsilon(x, \varepsilon) = \tau_0(x)$ (linha sólida) e $\tau_\varepsilon(x, \varepsilon) = \tau_0(x) + \varepsilon\tau_1(x)$ (linha tracejada, $N_r = 1$) para seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (2,0).	64
3.13	Seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (3,0) quando é aplicada a lei de controle (3.65) no modelo rígido (2.43) (linha tracejada) e no modelo flexível definido por (3.69)-(3.70) (linha sólida).	65
3.14	Evolução do erro de seguimento $\tilde{h}$ e da lei de controle $\tau_0(x)$ para seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (3,0) quando é aplicada a lei de controle (3.65) no modelo rígido (2.43) (linha tracejada) e no modelo flexível definido por (3.69)-(3.70) (linha sólida).	66
3.15	(Acima) Simulação do custo computacional da lei de controle (3.78) segundo o valor de ε , de acordo com a expressão $\varepsilon = 10^{-n\varepsilon} + N_\varepsilon 10^{-n\varepsilon+1}$ e seguimento de trajetória para $\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$. (Abaixo) Seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (3,0) e evolução do erro de controle $\tilde{h} = [\tilde{x} \ \tilde{y}]^T$ na BMR tipo (3,0) quando é aplicada a lei de controle aumentada (3.78), para $N_r = 1$, $\varepsilon = 10^{-5}$, e a lei de controle rígida (3.65).	67
3.16	Comparação dos vetores $A^T(q)A(q)\varepsilon\mu$ e $A^T(q)\dot{q}$ quando é aplicada a lei de controle (3.78) (com grau $N_r = 1$, $\varepsilon = 10^{-5}$ e $D_0 = G_0 = 1$ N) no modelo flexível da BMR tipo (3,0) e o vetor $A^T(q)\dot{q}$ quando é aplicada a lei de controle (3.65).	68
3.17	Comparação da evolução das leis de controle $\tau_\varepsilon(x, \varepsilon) = \tau_0(x)$ (linha sólida) e $\tau_\varepsilon(x, \varepsilon) = \tau_0(x) + \varepsilon\tau_1(x)$ (linha tracejada, $N_r = 1$) para seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (3,0).	69
4.1	Seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (2,0) com aumento gradativo de $\ V_i\ _{\text{med}}$	75
4.2	Seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (3,0) com aumento gradativo de $\ V_i\ _{\text{med}}$	75
4.3	Seguimento de trajetória executado para os modelos rígidos das BMRs tipo (3,0) e (2,0) para $V_i = 1.18$ m/s.	77
4.4	Seguimento de trajetória executado para os modelos flexíveis das BMRs tipo (3,0) e (2,0) para $V_i = 1.18$ m/s.	77
4.5	Representação gráfica do Teorema 4.2. Como consequência de (4.63), o plano, π_1 , é definido por $\ V_t\ - \gamma_{21}\ \dot{S}_t\ ^{-1} - \gamma_{22}\ \dot{\Delta}_t\ ^{-1} = 0$; e o plano, π_2 , é definido por $\ V_t\ - \gamma_{11}\ \dot{S}_t\ ^{-1} - \gamma_{12}\ \dot{\Delta}_t\ ^{-1} = 0$. As regiões planas na cor cinza representa os conjuntos em (4.61).	93
4.6	Representação gráfica do Teorema 4.2 para $N = 2$ e $N = 3$. As regiões planas na cor cinza representa os conjuntos em (4.61) para $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$	95
4.7	Evolução de g_ε durante o seguimento de trajetória para a BMR tipo (2,0) com lei de controle flexível (3.78) quando $\ V_i\ _{\text{med}} = 1.18$ m/s e $\ V_i\ _{\text{med}} = 2.36$ m/s.	104
4.8	Evolução de g_ε durante o seguimento de trajetória para a BMR tipo (3,0) com lei de controle flexível (3.78) quando $\ V_i\ _{\text{med}} = 1.18$ m/s e $\ V_i\ _{\text{med}} = 2.36$ m/s.	106
4.9	Representação de g_ε (linha sólida) e g_ε^{-1} (linha tracejada) para condições de alta e leve sensibilidade às perturbações. A Subfigura 4.9(a) representa as quantidades no Procedimento 4.1 para computação do parâmetro α^*	108

4.10	(a)Trajetória de referência (4.139) com seus componentes paramétricos x_{ref} , y_{ref} e θ_{ref} . (b) Evolução da função h_γ definida em (4.136) para a trajetória de referência (4.139) com $T = 15\text{s}$ e $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} = 1$	112
4.11	Esquema de controle não-linear baseado na composição de (2.44), a lei de controle auxiliar modificada (4.137) e a lei de controle baseada em ações corretivas (3.78), representada na Figura 3.5. A função h_γ é calculada por meio de (4.136) usando a trajetória referência.	113
4.12	Evolução de $g_{\varepsilon,h}$ para BMR tipo (2,0) e seguimento de trajetória usando v e v^* . Redução pelo reajuste de K_1 e K_2 (linhas vermelhas na Subfigura 4.12(d)) e caso de instabilidade quando $\ V_i\ _{\text{med}} = 61.25 \text{ m/s}$ (linha vermelha na Subfigura 4.12(c)).	114
4.13	Espaço confinado U_V quando $\ V_i\ $ é incrementado no seguimento da trajetória de referência (4.139) pelo uso de v^* na BMR tipo (2,0).	118
4.14	Evolução de $g_{\varepsilon,h}$ para BMR tipo (3,0) e seguimento de trajetória usando v e v^* . Redução pelo reajuste de K_1 e K_2 (linhas vermelhas na Subfigura 4.14(d)) e caso de instabilidade quando $\ V_i\ _{\text{med}} = 1.93 \text{ m/s}$ (linha vermelha na Subfigura 4.14(c)).	119
4.15	Espaço confinado U_V quando $\ V_i\ $ é incrementado no seguimento da trajetória de referência (4.139) pelo uso de v^* na BMR tipo (3,0).	122
4.16	Comparação da lei de controle auxiliar v e a lei de controle auxiliar modificada v^* na redução dos picos de $\ V_i\ $ para as BMRs tipo (2,0) e (3,0).	122
4.17	Comparação do seguimento de trajetória para as BMRs tipo (2,0) e (3,0) quando $D \neq G$	124
4.18	Comparação do seguimento de trajetória para a BMR tipo (3,0) quando $\ V_i\ _{\text{med}} = 1.18 \text{ m/s}$ e $\ V_i\ _{\text{med}} = 1.48 \text{ m/s}$	125
4.19	BMR (3,0) do Axebot do Laboratório de Robótica da Universidade Federal da Bahia.	125
4.20	Comparação do seguimento de trajetória para a BMR tipo (3,0) quando $\ V_i\ _{\text{med}} = 0.6 \text{ m/s}$ e $\ V_i\ _{\text{med}} = 0.8 \text{ m/s}$. Comparação quando aplicadas as leis de controle auxiliar v^* e v	127
A.1	Diagrama de fase para o vetor $\dot{\xi}$ na BMR do HILARE e do AXEBOT. Ambas sujeitas à distribuição regular $\Delta(z)$ (linha sólida) e ao fechamento involutivo $\bar{\Delta}(z)$ (linha tracejada).	151
A.2	Verificação da simetria de duas funções suaves em q , $\tilde{r}_1$ e $\tilde{r}_2$, tal que a sua soma $\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2$ permanece constantemente nula ao longo de uma trajetória com forma de losango sujeita às restrições de uma BMR não-degenerada. As funções apresentam simetria com relação ao eixo horizontal $\tilde{r} = 0$, consequentemente a sua soma é zero.	153
B.1	Representação das variáveis cinemáticas e dinâmicas da BMR tipo (2,0) com duas rodas fixas do robô HILARE. A roda livre é não-controlável e desconsiderada na modelagem.	157
B.2	Evolução dos vetores μ e $\bar{\mu}$ para o modelo singularmente perturbado de uma BMR não-degenerada tipo (2,0).	159
B.3	Diagrama de fase do vetor $\hat{\mu}$ para o modelo singularmente perturbado de uma BMR não-degenerada tipo (2,0).	159
B.4	Comparação dos vetores $A^T(q)A(q)\varepsilon\mu$ e $A^T(q)\dot{q}$ em uma BMR tipo (2,0) quando $\varepsilon = 10^{-3}$ e $D_0 = G_0 = 1 \text{ N}$ ($D = G = 1000 \text{ N}$).	160
B.5	Representação das variáveis cinemáticas e dinâmicas da BMR tipo (3,0) com três rodas suecas do robô AXEBOT. O ângulo de direção com respeito ao plano de rotação da roda é $\gamma = 0$	161
B.6	Evolução dos vetores μ e $\bar{\mu}$ para o modelo singularmente perturbado de uma BMR não-degenerada tipo (3,0).	163
B.7	Diagrama de fase do vetor $\hat{\mu}$ para o modelo singularmente perturbado de uma BMR não-degenerada tipo (3,0).	163
B.8	Comparação dos vetores $A^T(q)A(q)\varepsilon\mu$ e $A^T(q)\dot{q}$ em uma BMR tipo (3,0) quando $\varepsilon = 10^{-3}$ e $D_0 = G_0 = 1 \text{ N}$ ($D = G = 1000 \text{ N}$).	164

C.1	Trajétórias de referência com seus componentes paramétricos x_{ref} , y_{ref} e θ_{ref} (esquerda). Evolução da função h_γ definida em (4.133) para as trajetórias de referência da Tabela C.1 com $T = 15\text{s}$ e $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} = 1$ (direita).	172
C.2	Seguimento da trajetória lemniscata para BMR tipo (2,0) usando v e v^* . Redução pelo re-ajuste de K_1 e K_2 (linhas vermelhas na Subfigura C.3(b)). Caso de instabilidade quando $\ V_i\ _{\text{med}} = 61.25 \text{ m/s}$ (linha vermelha na Subfigura C.2(c)).	173
C.3	Seguimento da trajetória espiral para BMR tipo (2,0) usando v e v^* . Caso de instabilidade quando $\ V_i\ _{\text{med}} = 61.25 \text{ m/s}$ (linha vermelha na Subfigura C.3(a)).	174
C.4	Espaço confinado U_V quando $\ V_i\ $ é incrementado no seguimento da trajetória de referência lemniscata pelo uso de v^* na BMR tipo (2,0).	175
C.5	Espaço confinado U_V quando $\ V_i\ $ é incrementado no seguimento da trajetória de referência espiral pelo uso de v^* na BMR tipo (2,0).	175
C.6	Seguimento das trajetórias espiral e lemniscata para BMR tipo (3,0) usando v e v^* . Caso de instabilidade quando $\ V_i\ _{\text{med}} = 1.93 \text{ m/s}$ (linha vermelha tracejada nas Subfiguras C.6(a) e C.6(c)).	176
C.7	Espaço confinado U_V quando $\ V_i\ $ é incrementado no seguimento da trajetória de referência lemniscata pelo uso de v^* na BMR tipo (3,0).	177
C.8	Espaço confinado U_V quando $\ V_i\ $ é incrementado no seguimento da trajetória de referência espiral pelo uso de v^* na BMR tipo (3,0).	177

Lista de Tabelas

2.1	Modelos cinemáticos de posição cartesiana para as BMRs	24
2.2	Modelos cinemáticos de configuração para as BMRs	27
3.1	Relação dos parâmetros μ, ε com a configuração cinemática de uma BMR não-degenerada.	48
3.2	Parâmetros de simulação dos motores para as BMRs do tipo (2,0) e (3,0)	59
4.1	Desvios de trajetória nas BMRs tipo (2,0) e (3,0) com aumento gradativo de $\ V_i\ _{\text{med}}$	75
4.2	Casos de sintonia para K_1 e K_2 ($D_0 = G_0 = 1$ N).	78
4.3	Critério IAE para as BMRs tipo (2,0) e (3,0) usando a lei de controle flexível (3.78) e a lei de controle auxiliar (3.64) para diferentes casos de sintonia de K_1 e K_2	78
4.4	Condição de rolamento total apropriado para as configurações cinemáticas das BMRs apresentadas na Tabela 2.2.	85
4.5	Desvio e índice IAE para uma BMR do tipo (2,0) com $\ V_i\ _{\text{med}} = 1.18$ m/s no seguimento da trajetória de referência (4.139) por meio da lei de controle auxiliar modificada (4.140).	115
4.6	Desvio e índice IAE para uma BMR do tipo (2,0) com incrementos em $\ V_i\ _{\text{med}}$ no seguimento da trajetória de referência (4.139) por meio da lei de controle auxiliar modificada (4.140) com $\alpha^* \tilde{G}_{\text{dif}} = 300.8$ e $\alpha^* \tilde{G}_{\text{dif}} \lambda^* = 12.35$	115
4.7	Desvio e índice IAE para uma BMR do tipo (3,0) com $\ V_i\ _{\text{med}} = 1.18$ m/s no seguimento da trajetória de referência (4.139) por meio da lei de controle auxiliar modificada (4.143).	120
4.8	Desvio e índice IAE para uma BMR do tipo (3,0) com incrementos em $\ V_i\ _{\text{med}}$ no seguimento da trajetória de referência (4.139) por meio da lei de controle auxiliar modificada (4.143) com $\alpha^* \tilde{G}_{\text{dif}} = 10.42$ e $\alpha^* \tilde{G}_{\text{dif}} \lambda^* = 10^{-25}$	121
4.9	Desvio e índice IAE para BMR tipo (3,0) do Axebot com incrementos em $\ V_i\ _{\text{med}}$ no seguimento da trajetória de referência (4.144) por meio da lei de controle auxiliar modificada (4.143) com $\alpha^* \tilde{G}_{\text{dif}} = 10.42$ e $\alpha^* \tilde{G}_{\text{dif}} \lambda^* = 10^{-25}$	127
A.1	Parâmetros de simulação para as BMRs do tipo (2,0) e (3,0).	150
C.1	Trajетórias de referência.	171
C.2	Índice IAE para uma BMR do tipo (2,0) com incrementos em $\ V_i\ _{\text{med}}$ no seguimento das trajetórias da Tabela C.1 por meio da lei de controle auxiliar modificada (4.140) com $\alpha^* \tilde{G}_{\text{dif}} = 300.8$ e $\alpha^* \tilde{G}_{\text{dif}} \lambda^* = 12.35$	173
C.3	Índice IAE para uma BMR do tipo (3,0) com incrementos em $\ V_i\ _{\text{med}}$ no seguimento das trajetórias da Tabela C.1 por meio da lei de controle auxiliar modificada (4.143) com $\alpha^* \tilde{G}_{\text{dif}} = 10.42$ e $\alpha^* \tilde{G}_{\text{dif}} \lambda^* = 10^{-25}$	176

Lista de Acrônimos e Notação

BMR	Base Móvel com Rodas
GDL	Graus de liberdade
IAE	Integral Absolute Error
$\text{gen}\{\cdot\}$	indica a varredura ou base criada pelos vetores especificados dentro de $\{\cdot\}$
$\ker\{\cdot\}$	indica o espaço nulo da matriz especificada dentro de $\{\cdot\}$
$\text{Im}\{\cdot\}$	indica o espaço nulo da matriz especificada dentro de $\{\cdot\}$
$\nu\{\cdot\}$	indica a nulidade da matriz especificada dentro de $\{\cdot\}$
$\text{rank}\{\cdot\}$	indica o posto da matriz especificada dentro de $\{\cdot\}$
$\text{col}\{\cdot\}$	indica as colunas da matriz especificada dentro de $\{\cdot\}$
$\text{lin}\{\cdot\}$	indica as linhas da matriz especificada dentro de $\{\cdot\}$
$\text{dim}\{\cdot\}$	indica dimensão do espaço vetorial dentro de $\{\cdot\}$
A^T	$(^T)$, transposição de uma matriz
A^+	$(^+)$, pseudo-inversa de uma matriz
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}_+$	conjunto dos números reais positivos
$\mathbb{R}^{m \times n}$	conjunto das matrizes de dimensão $m \times n$
$I_{k \times k}$	matriz identidade de dimensão $k \times k$
$0_{k \times p}$	matriz de zeros de dimensão $k \times p$
1_k	vetor de uns de dimensão $k \times 1$
N	número de rodas
N_f	número de rodas fixas padrão
N_c	número de rodas orientáveis no centro
N_o	número de rodas orientáveis fora do centro
N_s	número de rodas suecas
N_{ind}	número de rodas controláveis independentemente
$\Delta(q)$	distribuição
$\bar{\Delta}(q)$	fechamento involutivo de $\Delta(q)$
$\Omega(q)$	co-distribuição
$\{R\}$	marco local da BMR
$\{W\}$	marco global da BMR
x_R, y_R	coordenadas da BMR no marco global $\{W\}$
θ	orientação da BMR no marco local $\{R\}$
φ	posição angular das rodas da BMR $(=[\varphi_1, \dots, \varphi_N]^T)$
β_c	ângulo das rodas orientáveis no centro $(=[\beta_{c,1}, \dots, \beta_{c,N}]^T)$
β_o	ângulo das rodas orientáveis fora do centro $(=[\beta_{o,1}, \dots, \beta_{o,N}]^T)$
ξ	especificação de posição da BMR no marco global $\{W\}$ $(=[x_R, y_R, \theta]^T)$
q	vetor de coordenadas generalizadas $(=[\xi, \beta_c, \beta_o, \varphi]^T)$
u	vetor de velocidades lineares e angulares da BMR no marco local $\{R\}$

ζ	vetor de velocidades angulares de orientação das rodas orientáveis no centro
η	vetor de velocidades da BMR no marco local $\{R\}$ ($= [u, \zeta]^T$)
z	vetor de configuração cinemática de posição da BMR no marco global $\{W\}$ ($= [\xi, \beta_c]^T$)
δ_m	grau de mobilidade
δ_d	grau de direcionabilidade
δ_u	grau de manobrabilidade
x	vetor de estados com variáveis lentas
$\bar{x}$	vetor de estados com variáveis lentas na versão rígida
μ	vetor de estados com variáveis rápidas
$\bar{\mu}$	vetor de estados com variáveis rápidas na versão rígida
$\hat{\mu}$	vetor de estados do modelo de camada limite
t^*	variável de tempo escalonada pelo parâmetro ε
τ	lei de controle [ou entrada] do sistema da BMR
$\tau(x, \varepsilon)$	lei de controle flexível [ou entrada] do sistema da BMR
$\tau_i(x)$	i -ésima ação de controle corretivo
$H(x, t)$	variedade flexível
$H(x, \varepsilon)$	variedade lenta
ε	parâmetro de perturbação singular
$A(q)$	matriz de restrições pfaffianas [as colunas geram uma co-distribuição $\Omega(q)$]
$S(q)$	matriz que representa o jacobiano de transformação de velocidades do marco local $\{R\}$ ao marco global $\{W\}$ [as colunas geram uma distribuição $\Delta(q)$]
$F(q, \dot{q})$	vetor de forças generalizadas
$K(q, \dot{q})$	matriz definida positiva. Quando $\frac{1}{\varepsilon}K(q, \dot{q})$ é conhecida como matriz de rigidez [ou flexibilidade]
s_i	deslizamento da i -ésima roda
$\delta_{x,i}$	derrapagem da i -ésima roda
V_i	velocidade do centro da i -ésima roda
$V_{x,i}$	componente transversal do centro da i -ésima roda
$V_{y,i}$	componente longitudinal do centro da i -ésima roda
$V_{c,i}$	velocidade do ponto de contato da i -ésima roda
r	raio da roda
$F_{x,i}$	força de tração transversal
$F_{y,i}$	força de tração longitudinal
D	coeficiente de rigidez transversal
G	coeficiente de rigidez longitudinal
h	vetor de posição cartesiana do ponto P [no marco $\{R\}$] com relação ao marco $\{W\}$
h_{ref}	vetor de posição cartesiana do ponto P_{ref} [no marco $\{R\}$] com relação ao marco $\{W\}$
v	lei de controle auxiliar
v^*	lei de controle auxiliar modificada
S_t	matriz de deslizamentos da BMR
Δ_t	matriz de derrapagens da BMR
V_t	matriz de velocidades nos centros das rodas
V_x	matriz de componentes transversais das velocidades dos centros das rodas
$\bar{q}$	vetor de coordenadas generalizadas aparente
h_γ	função que contem o efeito conjunto de deslizamentos e derrapagens da BMR
g_{ref}	função da condição de rolamento apropriado em $\bar{q}$
$\alpha^*, \lambda, \bar{G}_{\text{dif}}$	parâmetros de v^*

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Visão geral	1
1.2	Formulação do problema	6
1.3	Contribuições da tese	8
1.4	Estrutura da tese	8
2	BMRs: Configuração cinemática e dinâmica	9
2.1	Introdução	9
2.2	Restrições pfaffianas	9
2.3	Modelo genérico de configuração cinemática	14
2.3.1	Rodas e as suas restrições cinemáticas	15
2.3.2	Restrições pfaffianas para BMRs	17
2.3.3	Grau de mobilidade δ_m e direcionabilidade δ_d	18
2.3.4	Classificação das BMRs segundo o par (δ_m, δ_d)	19
2.3.5	Modelo cinemático de posição para BMRs	23
2.3.6	Grau de manobrabilidade δ_u	24
2.3.7	Redutibilidade do modelo cinemático de posição definido por (2.27)	25
2.3.8	Modelo cinemático de configuração para BMRs	26
2.3.9	Redutibilidade do modelo cinemático de configuração	28
2.3.10	Grau de não-holonomia δ_h	28
2.4	Controlabilidade do modelo cinemático de configuração	29
2.5	Modelo genérico de configuração dinâmica: formalismo de Euler-Lagrange	30
2.5.1	Forças de restrição	31
2.5.2	Modelo genérico de linearização por realimentação não-linear de estados	31
2.6	Resumo	32
3	Controle de trajetória: uma abordagem de perturbações singulares	33
3.1	Introdução	33
3.2	Modelo singularmente perturbado para BMRs	34
3.2.1	Forças de restrição dissipativas	34
3.2.2	Modelo dinâmico genérico singularmente perturbado para BMRs	35
3.2.3	Modelo de camada limite: dilatação temporal das dinâmicas rápidas	37
3.3	Inclusão de escorregamento e deformação sobre o rolamento das rodas	40
3.3.1	Força de tração e escorregamento	41
3.3.2	Modelagem genérica singularmente perturbada para BMRs	47
3.4	Controle de trajetória: versão genérica por realimentação de estados não-linear	50
3.4.1	Problema do seguimento de trajetória	50
3.4.2	Procedimento da <i>variedade lenta</i>	52
3.4.3	Ações corretivas: método de perturbação de Poincaré-Lindstedt	53
3.4.4	Controlador de trajetória não-linear para BMRs: ações corretivas sobre o modelo (3.55) - (3.56)	54
3.5	Resumo	70

4 Rolamento total apropriado e compensação das remanescências	73
4.1 Introdução	73
4.2 Compensação de escorregamento	74
4.2.1 Remanescências de deslizamento e derrapagem	74
4.2.2 Lei de controle auxiliar (3.64) modificada	78
4.3 Rolamento total apropriado	84
4.3.1 Variações de deslizamento e derrapagem: derivadas $\dot{\mathbf{s}}$ e $\dot{\delta}_x$	84
4.3.2 Formulação de $\mathbf{v}^* = \Delta_{\sigma}^{-1}\mathbf{v}$: utilização das variações de deslizamento e derrapagem.	92
4.4 Técnica de compensação para as remanescências de deslizamento e derrapagem .	98
4.4.1 Critério de rolamento baseado em $\dot{\Delta}_t$ e $\dot{S}_t$	99
4.4.2 Esquema de compensação para as remanescências: projeção da função h_{γ} e ação antecipativa	105
4.5 Controle com compensação das remanescências: resultados	112
4.5.1 Controle de trajetória com compensação das remanescências em uma BMR tipo (2,0)	112
4.5.2 Controle de trajetória com compensação das remanescências em uma BMR tipo (3,0)	118
4.5.3 Resultados experimentais: BMR tipo (3,0) do Axebot	124
4.6 Resumo	127
5 Considerações finais	129
5.1 Conclusões e comentários finais	129
5.1.1 Divulgação de resultados	131
5.2 Sugestões para pesquisas futuras	132
Bibliografia	133
A Anexos do Capítulo 2	147
A.1 Restrições pfaffianas: formulação de (2.14) usando condição de rolamento puro e não-derrapagem	147
A.1.1 Cálculo das posições angulares $[\dot{\varphi}]$ e ângulos das rodas orientáveis fora do centro $[\beta_o]$	148
A.2 Redutibilidade dos modelos cinemáticos para BMRs	149
A.2.1 Redutibilidade dos modelos cinemáticos de posição: utilização do colchete de Lie e a Proposição 2.7	149
A.2.2 Redutibilidade do modelo cinemático de configuração: consequência da Proposição 2.4	151
A.3 Controlabilidade do modelo cinemático de configuração para BMRs	153
B Anexos do Capítulo 3	155
B.1 Modelo dinâmico genérico singularmente perturbado para BMRs	155
B.1.1 Modelo singularmente perturbado para BMR tipo (2,0)	156
B.1.2 Modelo singularmente perturbado para BMR tipo (3,0)	161
C Anexos do Capítulo 4	171
C.1 Observações adicionais	171

Introdução

1.1 Visão geral

Os projetos desenvolvidos no campo do controle para bases de robôs móveis tem sido nos últimos anos a razão de muitos estudos. Em geral, os robôs móveis terrestres, também chamados de AGV's [do inglês *Autonomous Guided Vehicles*], são veículos motorizados e com diversos tipos de sistemas para locomoção (Ortigoza *et al.* 2012, Siegwart & Nourbakhsh 2004, Batlle & Barjau 2009, Braunl 2003). Esses tipos de veículos interagem com o ambiente de trabalho usando diferentes tipos de sensores: de distância, posição, velocidade, força, visão artificial, etc. Em relação à localização eles podem ser externos ou internos (Everett 1995). Os sensores internos são aqueles que estão posicionados no próprio corpo do robô e se movimentam juntamente com o mesmo, enquanto que os sensores externos são fixos ao ambiente ou em algum outro sistema móvel e observam o movimento do veículo¹ (Spong & Vidyasagar 1989, Sanca 2006, Smith 2001, Nicosia *et al.* 2001, Angeles 2003, Siegwart & Nourbakhsh 2004).

De forma geral, a robótica móvel é a área que trabalha com mecanismos que podem se mover pelo seu ambiente, não estando restritos como uma base fixa. Uma categoria importante de robôs móveis são os robôs terrestres, que se movimentam não só configurações de rodas, como também esteiras, pernas, anéis de pressão, entre outras projeções. Neste trabalho serão abordados os robôs móveis terrestres projetados sobre bases móveis com rodas, chamados de BMRs², e suas diferentes propriedades estruturais.

Trabalhos pioneiros em robótica móvel, usando rodas, foram realizados por pesquisadores como Nikola Tesla no final do século XIX e W. Grey Walter nos anos 50, entretanto, o primeiro robô móvel a ser criado considerando-se os padrões atuais foi o *Shakey* (Nilson 1991). Desenvolvido por pesquisadores do *Stanford Research Institute* no final da década de 60, o *Shakey* era equipado com uma câmera de vídeo e sensores óticos de distância. Ele utilizava técnicas clássicas de inteligência artificial para construir um mapa de seu ambiente e realizar tarefas simples como achar um objeto e movê-lo para algum lugar predeterminado. Outros projetos pioneiros na robótica móvel foram o HILARE, desenvolvido no Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (Giralt *et al.* 1984), e a dupla *Stanford Cart* e *CMU Rover* (Moravec 1983) nas décadas de 70 e 80. A partir de meados da década de 80, vários robôs móveis foram construídos em diversas universidades e laboratórios de pesquisa. Algumas empresas passaram também a desenvolver e comercializar robôs móveis voltados à pesquisa (*Active Media Robotics* 2011, Salcedo *et al.* 2012) e mais recentemente, voltados para uso doméstico como aspiradores de pó (*IRobot* 2011), cortadores de grama autônomos (*Robomow* 2011) e robôs para entretenimento (*Sony AIBO* 2012, *Sony QRIO* 2013) [Ver Figura 1.1].

Os robôs móveis baseados em BMRs possuem uma estrutura dinâmica descrita usualmente na forma de *Lagrange* (Lewis *et al.* 1999b, Selmic & Lewis 2000, Gu & Loh 1985, Yun & Sarkar 1998), *hamiltoniana* (Bloch *et al.* 2000) ou *Newtoniana* (Altpeter 1999, Wei *et al.* 2004, Gu & Loh 1988); o que conduz ao desenvolvimento de equações de movimento para diversas localizações

¹Além dessa classificação, os sensores podem fornecer um conhecimento local [estados internos do robô, ex: velocidades e posições dos motores], ou um conhecimento global [estados do robô em relação ao ambiente de trabalho, ex: velocidade e posição cartesiana do robô].

²Acrônimo: Bases Móveis com Rodas.

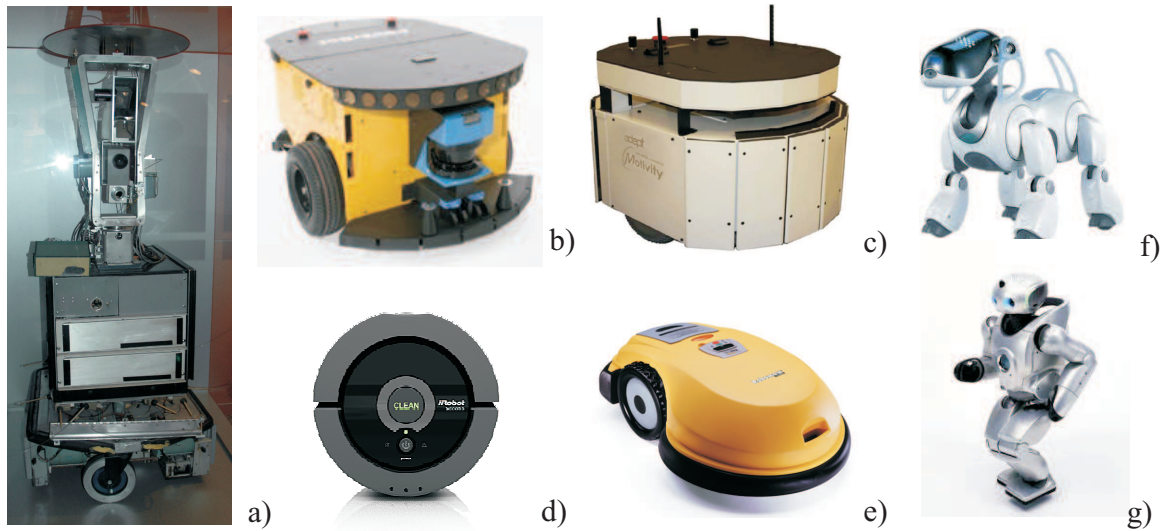


Figura 1.1: Robôs: (a) SHAKEY do *Stanford Research Institute*, (b) POWERBOT da *Active Media Robotics*, (c) PATROLBOT da *Active Media Robotics*, (d) Aspiradora de pó SCOOPA da *IRobot*, (e) Cortador de grama autônomo RL855 da *Robonow*, (f) AIBO e (g) QRIO da *Sony*.

do veículo em termos de parâmetros inerciais de seus elementos. Métodos convencionais como as formulações de *Lagrange-Euler* e *Newton-Euler* podem também ser aplicadas sistematicamente para desenvolver equações de movimentos dinâmicos (Spong & Vidyasagar 1989, Figueiredo & Jota 2004, Vidyasagar 1993, Lewis *et al.* 1999a). Particularmente, os sistemas mecânicos que requerem controle de movimento são descritos matematicamente de forma lagrangeana e muitas vezes precedidos por algumas não-linearidades na entrada que podem ser caracterizadas nos tipos: zona morta; saturação; ou histerese do tipo *backlash* (Spong & Vidyasagar 1989, Sage *et al.* 1999, Tao & Kokotovic 1995, Fernández 2009, Sanca 2006, Fernández & Cerqueira 2009b).

Em um sistema, a não-linearidade do tipo zona morta é entendida como a faixa operacional do atuador que não produz resposta na dinâmica no sistema quando um sinal de controle é aplicado em qualquer instante de tempo. Logo, nessa faixa, o sistema opera como um sistema dinâmico não forçado (Khalil 2002, Close & Frederick 1995, Spong & Vidyasagar 1989). Essa característica é encontrada em muitos atuadores, sendo comuns em servo-válvulas hidráulicas e servo-motores elétricos (Tao & Kokotovic 1996, Jang 2001). Esse tipo de não-linearidade é de complexa modelagem podendo inclusive ser variante no tempo (Tao & Kokotovic 1994, Lewis *et al.* 1997, Lewis *et al.* 1999b, Laura *et al.* 2006b). Caso a presença da zona morta na entrada de um sistema não seja considerada no projeto do sistema de controle, este pode atingir comportamentos no seu espaço de estado sujeitos a ciclos limites (Jang *et al.* 2005, Ortega *et al.* 2000, Dumitriu *et al.* 2006, Fang *et al.* 2005, Tan *et al.* 2001, Balakrishna & Ghosal 1995).

Em uma BMR, acionada por rodas acopladas a motores elétricos, a não linearidade do tipo zona morta é em geral decorrente de forças de reação inerentes aos componentes do atrito nos eixos do movimento, e das condições da superfície de contato (Lewis *et al.* 1999b, Jang *et al.* 2005, Tan *et al.* 2001).

O atrito é um fenômeno de complexa modelagem que pode ser dividido em diferentes sub-componentes fenomenológicos, entre os mais relevantes encontramos os seguintes: *Stiction*; Histerese; *Stribeck*; *Stick-Slip*; Viscosidade; Rigidez; e dependência da frequência de entrada (Olsson *et al.* 1997, D'Andréa-Novel *et al.* 1995, Canudas de Wit *et al.* 2003, Olson *et al.* 2003). Quando se trabalha com um sistema mecânico em movimento, como é o caso das BMRs, em aplicações de posicionamento de elevada precisão [ao redor de $0.1 \mu\text{m}$] a baixas velocidades os resultados não são satisfatórios quando o atrito é desconsiderado (Canudas de Wit *et al.* 1995, Selmic & Lewis 2000, Selmic *et al.* 2003, Burckhardt & Reimpell 1993). Por exemplo, um tipo particular de atrito, o atrito seco, faz com que o sistema apresente comportamento característico de zona morta em condições iniciais (Ray 1997, Hirschorn & Miller 1999, Alvarez *et al.* 2005). Armstrong-Hélouvry *et al.* (1994) apresentaram uma pesquisa de 280 publicações associadas com ferramentas de análise, modelagem e compensação de atrito. Dentre essas publicações, é possível destacar a compensação de atrito baseada em modelos estáticos e não

estáticos para problemas de posicionamento. No entanto, o comportamento marginalmente estável do erro sugere aprimoramento do modelo adotado para tal compensação (Olsson *et al.* 1997, Hirschorn & Miller 1999, Tan *et al.* 2001, Freidovich *et al.* 2010).

Por outro lado, a não-linearidade do tipo saturação é caracterizada por uma restrição imposta ao atuador que impede que seu funcionamento permaneça fora de uma faixa de operação [ou seja, existe um limite máximo e um limite mínimo de operação]. Essa restrição atua de forma a deteriorar o desempenho do sistema fazendo com que existam estados inalcançáveis e comportamentos dinâmicos não rastreáveis. A grande maioria dos projetistas desconsideram esse fenômeno objetivando simplificar suas análises e soluções (Perez *et al.* 2003, Hindi & Boyd 1998, Selmic *et al.* 2003, Jang *et al.* 2005, Cao *et al.* 2001). As vezes é comum considerar que os motores elétricos usados nas BMRs são alimentados por uma fonte de alimentação que não considera a faixa de saturação. Embora essa especificação simplifique a síntese de controladores torna impraticável a sua implementação, sendo preciso então considerar que os motores elétricos estão acionados com o auxílio de uma fonte de alimentação cujo ganho é sujeito à restrição imposta pela saturação, como é o caso dos circuitos PWM³ (Sage *et al.* 1999, Laura *et al.* 2006b, Laura *et al.* 2006a, Cruz *et al.* 2008, Fernández 2009, Fernández *et al.* 2012, Fernández & Cerqueira 2009b, Fernández & Cerqueira 2009a). Assim, uma BMR passa a apresentar restrições de entrada e, como consequência, a produzir uma degradação no seu desempenho. Portanto, a modelagem correta dessas restrições é muito importante para quantificar e entender os aspectos operacionais dessa degradação.

Complementarmente, a não-linearidade histerese do tipo *backlash* é um tipo de não linearidade na qual o comportamento depende tanto do estado de solicitação atual quanto de suas solicitações passadas (Khalil 2002). Esse tipo de fenômeno aparece em várias áreas, tais como magnetismo, elasticidade, plasticidade, sistemas de spins, oscilações em redes cristalinas, etc. Em BMRs este tipo de não-linearidade é comum pelo desgaste das engrenagens nas caixas redutoras usadas no acoplamento do motor com a roda (Fernández 2009, Laura *et al.* 2006b, Cruz 2007). Nesta tese não será considerada devido à existência comercial de acoplamentos mecânicos que compensam esse efeito, como pode ser visto em FAULHABER Group (2005).

Os robôs móveis baseados em BMRs constituem uma classe de sistemas mecânicos caracterizados por restrições cinemáticas que podem ou não ser integráveis. No primeiro caso são chamadas de *restrições holonômicas* e no segundo caso chamadas de *restrições não-holonômicas*. Essas restrições não podem ser eliminadas do modelo geral do sistema de movimento, do contrário, a síntese de controladores de trajetória não será muito eficiente. Por esse motivo, algoritmos de planejamento de trajetórias e controle dinâmico desenvolvidos para robôs móveis sem restrições não são mais aplicáveis (Yun & Sarkar 1998, Jiang 2000a, Brockett 1999, Khaneja & Brockett 1999, Kolmanovsky & McClamroch 1995, Mazur 2010, Chang & Chen 2000, D'Andréa-Novel *et al.* 1992, D'Andréa-Novel *et al.* 1991, Fukao *et al.* 2000, Chwa 2004). Na década de 90, essa situação criou uma grande motivação nos pesquisadores da área em gerar resultados científicos que dessem soluções para o controle de trajetória de BMRs, entre os que se destacam o controle de BMRs com duas rodas ativas [acionamento diferencial] ou com três rodas ativas [do tipo triciclo]; em uma visão rígida [sem restrições cinemáticas] e uma visão flexível [com restrições cinemáticas] do problema (D'Andréa-Novel *et al.* 1991, D'Andréa-Novel *et al.* 1995, Leroquais & D'Andrea-Novel 1996, Campion *et al.* 1991b, Campion *et al.* 1996). Entretanto, BMRs disponíveis no mercado têm geralmente uma estrutura construtiva que é muito mais complexa que as mencionadas anteriormente ou que o veículo clássico de quatro rodas, no qual os modelos e as considerações das suas restrições de movimento continuam sendo um desafio na síntese de controladores de trajetória (Goel *et al.* 1999, Moballegh *et al.* 2004, Song & Wang 2009, Zhou & Huang 2011, Ivankjo *et al.* 2004, Song & Wang 2009, Bahari *et al.* 2008, Wang *et al.* 2009, Menegaldo *et al.* 2009, Nandy *et al.* 2011).

Nas BMRs, as restrições cinemáticas são associadas com as propriedades estruturais do conjunto de rodas usadas para locomoção e com o tipo de limitações de movimento que cada roda possui em relação ao seu plano de rotação e o eixo de rotação (Campion *et al.* 1996, Li *et al.* 2008, Shekhar 1997, Klančar & Škrjanc 2007). Limitações com respeito ao plano de rotação são conhecidas como *restrições cinemáticas de rolamento puro*, e as limitações com respeito ao eixo de rotação são conhecidas como *restrições cinemáticas de não-derrapagem*. Dependendo do número e do tipo de rodas essas restrições podem ser reduzidas, simplificando assim o modelo

³Os circuitos PWM [do inglês *Pulse Width Modulation*] são encarregados de modular por largura pulso um sinal analógico.

dinâmico e a síntese do controlador (Campion *et al.* 1996).

A locomoção de BMRs, sujeitas às restrições cinemáticas impostas pelas rodas, sugerem dar uma maior importância às alterações presentes nos componentes tangencial [correspondente ao movimento longitudinal] e ortogonal [correspondente ao movimento transversal] das velocidades do ponto de contato entre a roda e a superfície de contato (Tian *et al.* 2009). Uma das alterações comumente abordadas na literatura associada a sistemas mecânicos de movimento é o *escorregamento* [ou *Slip*, em inglês]. Nas rodas, o escorregamento é dividido em: *deslizamento*, para as componentes longitudinais, e *derrapagem*, para as componentes transversais. Ambos podem provocar erros no rastreamento, ciclos limite e movimentos indesejados no seguimento de trajetória (Balakrishna & Ghosal 1995, Williams *et al.* 2002, Li *et al.* 2008, Tian & Sarkar 2012, Nandy *et al.* 2011, Trojnacki 2013). Dessa forma, um bom modelo para o escorregamento é essencial para analisar a estabilidade das BMRs, prever ciclos limites e encontrar parâmetros adequados para os controladores de trajetória.

Em situações práticas, quando BMRs executam movimentos acelerados, desacelerados, ou contornos de curvas em alta velocidade, as restrições de rolamento puro e de não-derrapagem são violadas, degradando assim, a precisão e exatidão do controlador projetado (Dong 2010, Dixon *et al.* 2000). Quando essas restrições são violadas as forças de tração não podem ser obtidas pelos clássicos multiplicadores de Lagrange, e é necessário levar em consideração equações que caracterizam a natureza física do contato entre a roda e a superfície (Bakker *et al.* 1987, Bakker *et al.* 1989, Balakrishna & Ghosal 1995, Motte & Campion 2000, D'Andréa-Novel *et al.* 1995, Hong *et al.* 2006).

Para garantir a precisão e a exatidão dos controladores projetados, é fundamental conhecer e compreender o sistema de movimento antes de controlá-lo. Para esse propósito, o sistema pode ser estudado usando um modelo, que também pode ser considerado um pré-requisito para que uma estrutura de controle possa ser posta em operação (Cerqueira 2001, Fernández 2009, Fernández & Cerqueira 2009a). Na literatura técnica, vários esquemas de controle adaptativos têm sido propostos para estimar e compensar o escorregamento, veja por exemplo: Shekhar (1997), Stonier *et al.* (2007), Williams *et al.* (2002), Fernández *et al.* (2012), Fernández *et al.* (2013) e Fernández & Cerqueira (2009a).

A maioria dos controladores são projetados em função de modelos aproximados do escorregamento e de funções contínuas ou suaves para a modelagem e o controle do sistema mecânico. Para tal propósito, na década de 90, alguns pesquisadores analisaram a regulação (Corradini *et al.* 1999) juntamente com os problemas de controle de trajetória (Leroquais & D'Andrea-Novel 1996) sujeitos a perturbações no modelo cinemático que violassem as restrições de rolamento puro ou não-derrapagem. Balakrishna & Ghosal (1995) consideraram a força longitudinal da tração, associada com o componente tangencial de velocidade do ponto de contato, dentro de um modelo dinâmico para uma BMR omnidirecional usando medidas da magnitude do escorregamento em diferentes condições de rugosidade da superfície de contato. Sobre esses testes foi projetado um controlador adaptativo que assumia como referência a satisfação da condição de rolamento puro. D'Andréa-Novel *et al.* (1995) e Leroquais & D'Andrea-Novel (1996) propuseram usar uma formulação baseada em perturbações singulares⁴ que permite analisar a robustez das leis de controle, fazendo uma relação entre as subdinâmicas decorrentes da violação das restrições cinemáticas [como resultado da inclusão do escorregamento] e a flexibilidade relacionada com a fenomenologia do contato.

Em (Corradini *et al.* 1999) foi proposto um controlador baseado na técnica *Sliding-mode* para regular a posição de uma BMR sujeita a perturbações na vizinhança da origem. Entretanto, além de não ser regulada a orientação da BMR, as leis de controle propostas não eram diferenciáveis, que torna o controlador impraticável, visto que o procedimento conhecido como *Backstepping*, geralmente usado para incorporar a dinâmica do sistema, necessita que o controlador seja diferenciável [Essa discussão pode ser mais detalhada em (M'Closkey & Murray 1997)]. Motte & Campion (2000) representam um dos primeiros trabalhos do começo do século XXI no qual o escorregamento é considerado no modelo dinâmico pelo uso da abordagem teórica apresentada em (D'Andréa-Novel *et al.* 1995). Os autores levam em consideração pequenos valores de escorregamento tal que as forças de tração sejam quase linearmente dependentes. Dessa forma,

⁴Teoria com interessantes contribuições para o controle de sistemas mecânicos no final da década de 80 até hoje (Liu *et al.* 2008, Taghirad & Khosravi 2002, Spong 1989, Mills 1989, Ghorbel & Spong 1992b, Ghorbel & Spong 1992a, Sobolev 1987).

pelo uso das contribuições já existentes para robôs manipuladores, uma variedade⁵ baseada em perturbações singulares é projetada para linearizar o sistema.

Em Dixon *et al.* (2000), o escorregamento foi considerado como uma pequena mensurável e limitada perturbação dentro do modelo cinemático da BMR. Logo em seguida uma lei de controle é desenvolvida para mitigar tal perturbação. Tarokh & McDermott (2005) e Volpe (1999) usaram o escorregamento como um estado dentro de um modelo cinemático generalizado. Jung & Hsia (2005) introduziram a força lateral de tração, que é linearmente dependente ao escorregamento lateral [ou derrapagem], para o seguimento da posição lateral em um modelo de duas rodas [do tipo bicicleta]. E a fim de garantir convergência do erro foi aplicada uma abordagem de controle para a direcionabilidade. Lin *et al.* (2007) introduziram o fator anti-escorregamento para representar a porcentagem da velocidade angular da roda que é refletida na velocidade linear efetiva da mesma. Com esse fator foi representada a porcentagem da força de tração da roda refletida efetivamente no atrito. Técnicas em redes neurais foram usadas para realizar o controle ótimo de velocidade nos atuadores e o seguimento de trajetória. Stonier *et al.* (2007) consideraram a dinâmica do escorregamento longitudinal [ou deslizamento] em uma BMR omnidirecional, entretanto, para a derivação da lei de controle dinâmico foram assumidas condições ideais de rolamento [ou seja, foi assumido que as restrições cinemáticas eram satisfeitas].

Cruz *et al.* (2008), apresentaram o modelo para uma BMR com três rodas omnidirecionais considerando as não-linearidades do tipo zona morta e saturação. Considerou como entradas as larguras de pulso e como saídas as velocidades angulares das rodas. Forneceu-se assim um conhecimento local do sistema. Nos testes por simulação do modelo, observou-se que as imperfeições nas velocidades são decorrentes de perturbações principalmente ocasionadas pelo escorregamento e limitantes associados às forças de atrito estático e os ciclos de trabalho dos circuitos PWM que acionavam os motores. Ploeg *et al.* (2008) introduziram as forças de tração longitudinal e lateral linearmente dependentes com o deslizamento e a derrapagem, respectivamente, para um modelo reduzido de uma BMR com quatro rodas motorizadas e um grau de direcionabilidade. Em (Sidek & Sarkar 2008), a dinâmica de deslizamento das rodas laterais foi explicitamente modelada em uma dinâmica global para BMRs, e uma lei de controle por realimentação de estados foi aplicada para fazer o seguimento da trajetória.

Fernández (2009) e Fernández & Cerqueira (2009a) apresentaram um modelo de compensação de escorregamento, no qual ele foi considerado uma entrada exógena e foi usado um controlador adaptativo projetado com redes neurais para que o erro de controle na velocidade nos atuadores convergisse para zero. Fernández *et al.* (2012) apresentaram um modelo dinâmico para o escorregamento longitudinal em uma BMR omnidirecional com três rodas e contribuíram com uma alternativa de interpretação: as condições de rolamento apropriadas. Em (Fernández *et al.* 2013) é considerada a abordagem em Fernández *et al.* (2012) para projetar um controlador baseado em uma variedade integrável que lineariza o sistema e mantém as condições de rolamento apropriadas.

Embora muitas estratégias para estimação e compensação de escorregamento têm sido propostas, atualmente o fato de exigir um melhor rastreamento [com erros cada vez menores], continua demarcando a importância de aprimorar as técnicas existentes a fim de mitigar a interferência do escorregamento em sistemas mecânicos de movimento (Bazzi *et al.* 2014, Yokoyama 2013, Yoo 2012, Tian & Sarkar 2013, Kelly & Seegmiller 2013). Em posse dessa iniciativa e com o propósito de modelar a dinâmica geral de uma BMR, levando em consideração a interrelação entre o escorregamento⁶ e a violação das restrições cinemáticas [sendo elas holonômicas ou não-holonômicas], leis de controle diferenciáveis e variantes no tempo tem sido projetadas em uma mesma abordagem/técnica de controle para garantir que o erro esteja limitado em uma vizinhança da origem (Dong 2010, Dixon *et al.* 2000, Dong & Kuhnert 2005). Com esse fim, a teoria de perturbações singulares ofereceu um conjunto de ferramentas sólidas que permitiu interpretar a dinâmica de uma BMR quando esta não satisfaz as restrições cinemáticas em função dos efeitos degenerativos do problema de controle e que estão relacionados com a natureza de contato, como é o caso da flexibilidade do contato entre roda e superfície (D'Andréa-Novel *et al.* 1995).

D'Andréa-Novel *et al.* (1995) e Leroquais & D'Andrea-Novel (1996) mostraram como a abordagem baseada em teoria de perturbações singulares permite modelar a dinâmica de uma

⁵Conhecida também pelo termo em inglês *Manifold*.

⁶Nos seus componentes longitudinal e lateral, previamente citadas como deslizamento e derrapagem.

BMR com restrições não-holonômicas em duas parcelas, sendo uma associada com as dinâmicas lentas e uma outra associada com as dinâmicas rápidas. As dinâmicas rápidas foram assumidas como uma consequência direta da violação das restrições cinemáticas. Sobre essa suposição, o modelo é usado para síntese de uma lei de controle por realimentação de estados robusta e não-linear tal que a influência do escorregamento no sistema mecânico pudesse ser compensado e a convergência do erro a zero fosse garantida. Já em outras contribuições que utilizam a mesma abordagem teórica, foram adotadas metodologias de compensação corretiva, conhecidas na literatura como *controle por ações corretivas*, de tal forma que o desempenho da lei de controle pudesse ser aprimorado em função do grau de robustez da ação de controle. Em trabalhos precedentes, como em Spong *et al.* (1987), Khorasani & Kokotovic (1985), Ghorbel & Spong (1992b) e Ghorbel & Spong (1992a) foram propostos esquemas de linearização para sistemas de juntas em robôs manipuladores com restrições de movimento associadas à flexibilidade das mesmas. Complementarmente, foram utilizadas ações de controle corretivas diferenciáveis a fim de que o erro permanecesse limitado em uma vizinhança da origem e que a influência da flexibilidade no modelo dinâmico pudesse ser reduzida gradativamente. Nesta tese propõe-se interpretar a interrelação entre o escorregamento e violação das restrições cinemáticas de uma BMR como uma consequência da flexibilidade do contato, esperando então que existam ações de controle corretivas diferenciáveis que aprimorem o desempenho do controlador. Entretanto, para problemas de seguimento de trajetórias, outras considerações serão necessárias para complementar o conjunto de especificações que o controlador necessita para compensar os efeitos do escorregamento, como será descrito na seguinte seção.

1.2 Formulação do problema

A dificuldade das BMRs está no fato destas serem, em geral, multivariáveis⁷, com não-linearidades na entrada e com restrições cinemáticas holonômicas e/ou não-holonômicas (Giralt *et al.* 1984, D'Andréa-Novel *et al.* 1995, Leroquais & D'Andrea-Novel 1996, Fernández & Cerqueira 2009a, Fernández *et al.* 2013, Muir & Neuman 1987, Stonier *et al.* 2007, Tian *et al.* 2009). Na maioria da literatura consultada [ponderando os recentes desenvolvimentos de sistemas robóticos baseados em BMRs] em planejamento do movimento, seguimento de trajetória e estabilização em um ponto de equilíbrio, foram projetados sistemas de controle sem o conhecimento do comportamento local do robô frente às não-linearidades de entrada; ou foram projetados controladores por realimentação que linearizam o sistema e fazem com que o erro permaneça limitado mas sem convergência a zero [veja por exemplo: (D'Andréa-Novel *et al.* 1991, D'Andréa-Novel *et al.* 1992, D'Andréa-Novel *et al.* 1995, Motte & Campion 2000, Campion *et al.* 1991b, Campion *et al.* 1996, Leroquais & D'Andrea-Novel 1996, Sanca 2006, Cruz *et al.* 2008, Laura *et al.* 2006b, Laura *et al.* 2006a, Barreto *et al.* 2013)].

Nos casos particulares de (D'Andréa-Novel *et al.* 1991, D'Andréa-Novel *et al.* 1992, D'Andréa-Novel *et al.* 1995, Motte & Campion 2000, Campion *et al.* 1991b, Campion *et al.* 1996, Leroquais & D'Andrea-Novel 1996), onde a síntese de controladores foi feita utilizando métodos de perturbações singulares, para incluir o deslizamento e a derrapagem, foi necessário assumir que estes eram representados por sinais pequenamente limitados [≤ 0.1]. Tais sinais foram usados para fazer aproximações lineares das forças de tração longitudinal e transversal. No entanto, para valores de deslizamento e derrapagem superiores tais aproximações já não são válidas, levando-se assim, à instabilidade do sistema. Nessa situação, o controlador assume que o escorregamento nas rodas é muito inferior ao real, gerando então uma desproporção entre a ação compensadora e o efeito compensado. Sem dúvida, essa desproporção se reflete no erro de rastreamento, que tenderá facilmente à instabilidade.

Contudo, estabelecendo-se limites no deslizamento e na derrapagem, pode ser assumido que as velocidades do ponto de contato, entre a roda e a superfície, e a velocidade do centro da roda sejam iguais; o que é uma aproximação cuidadosamente praticável sempre que levados em consideração o tipo de material da roda, sua geometria e a constituição da superfície de contato. Por exemplo, em situações práticas com rodas pneumáticas, o ângulo de derrapagem não passa de 15°, facilitando que a suposição anterior possa ser considerada. Entretanto, para um crescimento proporcional de velocidade na BMR, a mesma suposição poderia levá-la à instabilidade. O mesmo acontece com o deslizamento em situações de maior velocidade (Thuilot 1995).

⁷A característica multivariável é evidente quando são acionados por dois ou mais atuadores independentes.

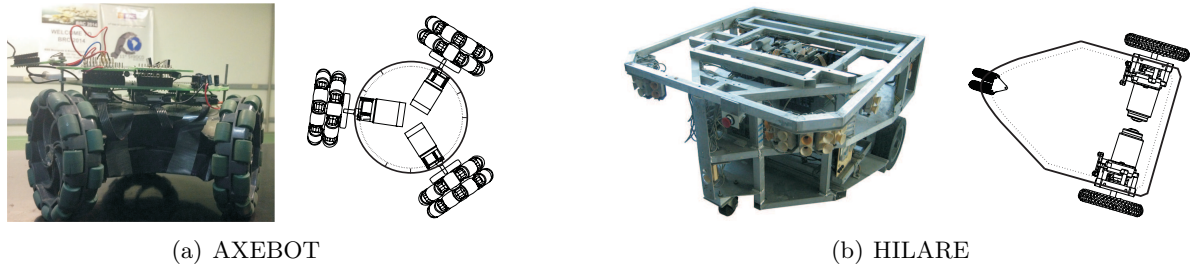


Figura 1.2: Duas BMRs a serem consideradas nesta tese de doutorado: (a) BMR com três rodas suecas do Laboratório de Robótica da Universidade Federal da Bahia; (b) BMR com duas rodas padrão e uma roda castor de apoio.

Em termos gerais, derrapagem e deslizamento precisam ser cuidadosamente considerados na dinâmica das BMRs; valores pequenos desses efeitos degenerativos podem aproximar casos reais de certos tipos de BMR em específicas condições de movimento, sempre que sejam deixados de fora casos de maior velocidade, onde a dinâmica do erro pode ser instável. Assim, sabendo que o erro de seguimento de trajetória permanece limitado, ou no pior dos casos, permanece longe da origem, se faz necessário a síntese de uma lei de controle que mitigue apropriadamente a violação das restrições cinemáticas, compense valores de deslizamento e derrapagem; e que permita com que o erro permaneça em uma vizinhança da origem de raio *muito* pequeno (Dixon *et al.* 2000, Dong 2010).

Com o propósito de estudar a interrelação do escorregamento com a violação das restrições cinemáticas, será usada a teoria de perturbações singulares para associar a influência do escorregamento com o grau de robustez da lei de controle projetada. Como foi dito na Seção 1.1, a teoria de perturbações singulares permite dar uma outra interpretação, não só aos modelos dinâmicos para BMRs, mas também à síntese de leis de controle com um grau de robustez cujo erro de controle permanece limitado, perto da origem e em função da flexibilidade. Dessa forma, a contribuição inicial apresentada nesta tese é uma lei de controle não-linear com um conjunto de ações corretivas diferenciáveis que atenuam o efeito das dinâmicas rápidas associadas com a violação das restrições cinemáticas [ou a presença de escorregamento e/ou derrapagem]. Vale salientar que devido à presença da não-linearidade tipo saturação na entrada do sistema, uma especificação importante é que a lei de controle não-linear deve respeitar os limites de saturação.

Visto que para aumentos da velocidade da BMR [e consequentemente da velocidade do centro das rodas] as contribuições degenerativas do deslizamento e da derrapagem na dinâmica do sistema são maiores, nesta tese será introduzido o conceito *rolamento total apropriado*. Este conceito permitirá caracterizar uma condição de movimento desejável para uma BMR que se movimenta sobre uma trajetória em termos do escorregamento e a velocidade de movimento. Finalmente, uma lei de controle auxiliar, cujo robustez é baseada nas variações de deslizamento e derrapagem, complementará o esquema de controle dinâmico projetado na primeira contribuição e, por meio de simulações, será feita sua validação.

A fim de exemplificar a lei de controle proposta, serão consideradas todas as BMRs que possuem no mínimo duas rodas ativas; o que significa que no mínimo duas rodas são motorizadas. Em alguns casos, certa quantidade das rodas de uma BMR podem ser assumidas de apoio e sua influência no desempenho do rolamento pode ser desconsiderado. Com o propósito de estudar esse tipo de BMRs foram feitos estudos de simulação sobre os modelos da BMR omnidirecional do robô AXEBOT presente no Laboratório de Robótica da Universidade Federal da Bahia e da BMR de acionamento diferencial do robô HILARE desenvolvido no Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes - LAAS, cujos resultados de simulação baseados em abordagens alternativas estão presentes em diversas fontes bibliográficas [Veja por exemplo Giralt *et al.* (1984), Leroquais & D'Andrea-Novet (1996) e Laumond (1993)]. Na Figura 1.2(a), é apresentado o robô AXEBOT, uma BMR com três rodas omnidirecionais [também chamadas de rodas *suecas*] que são acionadas independentemente por motores CC e dispostas a 120° umas das outras⁸ e possui três graus de liberdade [GDL], que são representados pelas

⁸Nesta BMR, o subsistema de detecção digital de velocidade, que é o hardware usado para medição da velocidade angular das rodas, utiliza um tempo de atualização muito maior [ao redor de 10 ms] que a constante de tempo da dinâmica de cada motor [ao redor de 20 μ s]. O que certamente dificulta a projeção de controladores

velocidades nas rodas (Fernández 2009, Santos 2014). Já na Figura 1.2(b), é apresentado o robô HILARE com duas rodas padrão acionadas independentemente por motores CC e desenvolvido no Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes - LAAS (Giralt *et al.* 1984). Nas duas configurações, a problemática fundamental em seguimento de trajetórias se restringe à presença de escorregamento nas rodas. Na BMR do AXEBOT, por estar equiparada com rodas cujo perímetro têm rolamentos de livre rotação e inclinados em relação ao plano de rotação da roda⁹, os seus movimentos são afetados pelo deslizamento e a derrapagem [isto é, o movimento produzido pela roda não é inteiramente convertido em um movimento da estrutura da BMR]. Da mesma forma, na configuração diferencial da BMR do HILARE a problemática é principalmente associada a movimentos em sentido paralelo ao eixo de rotação da roda padrão¹⁰.

1.3 Contribuições da tese

A principal contribuição desta tese é uma lei de controle para problemas de seguimento de trajetória em BMRs com no mínimo duas rodas ativas e usando métodos de perturbações singulares a fim de garantir a permanência do erro em uma vizinhança da origem de raio muito pequeno. Ao redor dessa contribuição, as principais sub-contribuições são:

1. critério de rolamento total apropriado;
2. esquema de linearização por realimentação de estados não-linear baseada em uma abordagem de perturbações singulares;
3. esquema de compensação para deslizamento e derrapagem frente aumentos de velocidade.

1.4 Estrutura da tese

O texto está organizado da seguinte forma:

1. No Capítulo 2, são apresentadas as preliminares teóricas associadas com BMRs, e as restrições cinemáticas [holonômicas e não-holonômicas] associadas a diferentes configurações de rodas. Complementarmente, serão citados os modelos genéricos cinemático e dinâmico das BMRs.
2. No Capítulo 3, é feita uma revisão da teoria de perturbações singulares com o objetivo de estabelecer os fundamentos matemáticos necessários para compreender a utilidade dessa teoria na síntese de controladores de trajetória, da mesma forma que a flexibilidade é utilizada para compreender a interrelação entre a violação das restrições cinemáticas [associadas com as dinâmicas rápidas] e o escorregamento.
3. No Capítulo 4, é apresentado o desenvolvimento de um esquema para compensação de escorregamento levando em consideração a velocidade de movimento da BMR. Para tal propósito é inserido o conceito de rolamento total apropriado e, sobre ele, é sintetizada uma lei de controle auxiliar que compensa os efeitos do escorregamento. A validação da lei de controle é discutida usando simulações.
4. No Capítulo 5, são feitas as considerações finais e são enunciados os trabalhos futuros em relação aos resultados obtidos.

de força.

⁹O ângulo exato entre o plano de rolamento da roda e os rolamentos é definido como γ , e no AXEBOT é de 0 rad. No capítulo 2 são explicadas as restrições cinemáticas da base móvel em termos desse ângulo.

¹⁰Mais detalhes sobre o robô HILARE estão presentes em Leroquais & D'Andrea-Novet (1996), D'Andréa-Novet *et al.* (1995) e Giralt *et al.* (1984).

Configuração cinemática e dinâmica para BMRs

BMRs apresentam restrições cinemáticas decorrentes do tipo e geometria da roda. O número de graus de liberdade que o sistema possui para se movimentar dentro do conjunto de coordenadas generalizadas do seu espaço de trabalho está fortemente ligado com estas restrições, de tal forma que a locomoção do sistema é limitada.

2.1 Introdução

Os robôs móveis podem ser classificados de diversas maneiras, dentre as quais podemos destacar a forma de locomoção, os tipos de tarefas executadas e o seu grau de autonomia. Neste capítulo, os robôs serão classificados pela forma como se locomovem em seu ambiente. De forma geral, os robôs móveis podem pertencer a três grandes grupos: terrestres, aquáticos e aéreos. Dentro de cada grupo, pode-se caracterizar os robôs de acordo com seu sistema de locomoção. Aqui serão tratados os robôs móveis terrestres, mais especificamente, aqueles cuja estrutura de movimento principal é uma base móvel com rodas [BMR].

Um grande número de características influencia a escolha do sistema de locomoção a ser utilizado em uma tarefa para uma BMR, entre elas pode-se citar: manobrabilidade, controlabilidade, estabilidade, eficiência e tração (Everett 1995, Laumond 1993, Campion *et al.* 1996, Spong & Vidyasagar 1989, Tian *et al.* 2009). O sistema de locomoção de uma BMR pode ser representado por modelos cinemáticos e dinâmicos. Aqui serão apresentados o modelo cinemático e o modelo dinâmico associado às BMRs.

A análise de BMRs é comumente baseada na hipótese de que o conjunto de restrições do sistema é satisfeito em cada instante de tempo ao longo de uma trajetória. Tal é o caso do exemplo típico de um robô móvel com duas rodas, de acionamento diferencial, onde o ponto de contato de cada roda com a superfície de movimento é assumido se deslocar sem derrapagem [ou seja, é assumido que as restrições de *não-derrapagem* são satisfeitas] (Campion *et al.* 1996, Samson & Ait-Abderrahim 1990, Bloch *et al.* 1992, Walsh *et al.* 1994, Campion *et al.* 1991a). Modelos como esse não são uma boa aproximação para o sistema, não somente por negligenciar os efeitos de derrapagem, mas também por negligenciar a deformabilidade das rodas. Dessa forma, podemos dizer que para uma BMR as restrições cinemáticas não são estritamente satisfeitas. A deformabilidade é uma característica que pode ser incluída no modelo geral dependendo da relevância de seu comportamento em determinada configuração, como será visto no Capítulo 3.

Este capítulo dará importância aos tipos de restrições de velocidade nas rodas que de alguma forma têm relação com dinâmicas impostas pelo escorregamento na dinâmica geral do sistema.

2.2 Restrições pfaffianas

Em um corpo rígido, o movimento deve ser de tal forma que a distância entre as partículas que compõem o corpo seja preservada. Esse movimento é representado por uma família de mapeamentos $a(t) : O \rightarrow \mathbb{R}^3$ [onde O é o conjunto de vetores-eixos ortogonais no corpo]. Uma condição necessária e suficiente para que $a(t)$ seja um mapeamento de um movimento rígido é que

ambos, o produto vetorial e a norma entre vetores pertencentes ao corpo, sejam preservadas. Essa condição impõe uma limitação sobre os graus de liberdade do sistema. Tal limitação é definida como uma restrição que pode ser representada por uma função $a_j : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$a_j(q_1, \dots, q_n) = 0, \quad j = 1, \dots, k,$$

onde os q_i [para $i = 1, \dots, n$] são as coordenadas das n partículas. Tal restrição define uma hiper-superfície (Dubrovin *et al.* 1984) ou variedade. Logo, o movimento será limitado a essa hiper-superfície¹. Tal restrição é chamada de *holonômica*², ou integrável.

Uma restrição de tipo particularmente diferente ocorre sempre que os movimentos permissíveis do sistema estão limitados por restrições de velocidade da forma

$$A^T(q)\dot{q} = 0, \quad (2.1)$$

onde $A^T(q) \in \mathbb{R}^{k \times n}$ representa um conjunto de k restrições de velocidade. Uma restrição dessa forma é chamada de *restrição Pfaffiana* (Figueiredo & Jota 2004, Murray *et al.* 1994). Uma vez que uma restrição pfaffiana limita as velocidades permissíveis do sistema, mas não necessariamente as configurações, não se pode em geral representá-la como uma restrição algébrica sobre o espaço de configuração. Uma restrição pfaffiana é dita ser integrável se existir uma função vetorial $g : Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ [sendo Q um espaço vetorial qualquer] tal que

$$A^T(q)\dot{q} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial q}\dot{q} = 0.$$

Assim, uma restrição pfaffiana integrável é equivalente a uma restrição holonômica. Uma restrição Pfaffiana que não é integrável é um exemplo de uma *restrição não-holonômica*. O fato de uma restrição pfaffiana ser não-holonômica implica que as velocidades instantâneas do sistema são limitadas a um subespaço de dimensão $n - k$, porém o conjunto de configurações atingíveis não está restrito a uma superfície de dimensão $n - k$ no espaço de configuração.

Determinar se um sistema é ou não holonômico não é uma tarefa trivial. Veja, por exemplo o caso no qual existe uma única restrição de velocidade (Murray *et al.* 1994):

$$a(q)\dot{q} = \sum_{i=1}^n a_i(q)\dot{q}_i = 0.$$

Esta restrição é integrável se existe uma função $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$a(q)\dot{q} = 0 \quad \leftrightarrow \quad g(q) = 0.$$

Se a restrição pfaffiana é holonômica, diferenciando-se $g(q) = 0$ em relação ao tempo, segue então que:

$$\sum_{i=1}^n a_i(q)\dot{q}_i = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial g(q)}{\partial q_i} \dot{q}_i = 0.$$

Por sua vez, isto implica que existe alguma função $\kappa(q)$ chamada de fator de integração, tal que:

$$\kappa(q)a_i(q) = \frac{\partial g(q)}{\partial q_i} \quad i = 1, \dots, n.$$

Ou seja, uma restrição pfaffiana é uma restrição holonômica se, e somente se, existe um fator de integração $\kappa(q)$ tal que $\kappa(q)a(q)$ é a derivada de uma função $g(q)$. Para facilitar a verificação

¹Se considera-se as restrições como hiper-superfícies suaves em $\mathbb{R}^n$, as forças de restrição são normais a esta hiper-superfície e restringem a velocidade do sistema a ser tangente a esta superfície em qualquer instante de tempo. Uma vez as restrições holonômicas definindo uma hiper-superfície suave no espaço de configuração é possível eliminar essas restrições pela escolha de novas coordenadas apropriadas à hiper-superfície (Murray *et al.* 1994). Essas novas coordenadas parametrizam todos os movimentos permitidos do sistema e não estão sujeitas a qualquer outra restrição.

²O termo holonômico é atribuído ao Físico alemão H. Hertz (Arnol'd 1994), e significa literalmente, pela sua etimologia do grego, “*holo*”=inteiro [totalidade] e “*nomos*”=lei.

pode-se usar o fato de que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i}$$

para obter

$$\frac{\partial^2(\kappa a_j)}{\partial q_i} = \frac{\partial^2(\kappa a_i)}{\partial q_j} \quad i, j = 1, \dots, n,$$

que é equivalente à afirmação de que $g(q) = 0$ se existir algum fator de integração $\kappa(q)$ que satisfaça a equação acima.

A situação complica ainda mais para o caso de múltiplas restrições pfaffianas. Para um conjunto de k equações de restrição, deve-se não apenas verificar a integrabilidade de cada uma mas também a de combinações linearmente independentes destas. Assim, podem existir funções g_i para $i = 1, \dots, p$ com $p \leq k$ tal que

$$\text{gen} \left\{ \frac{\partial g_1}{\partial q}(q), \frac{\partial g_2}{\partial q}(q), \dots, \frac{\partial g_p}{\partial q}(q) \right\} \subset \text{gen} \{a_1(q), a_2(q), \dots, a_k(q)\}$$

para todo q , onde o operador $\text{gen} \{ \cdot \}$ indica a base criada pelos vetores especificados. Se for possível achar estas funções, o movimento do sistema estará restrito a superfícies de nível de g . Se $p = k$, então as restrições são holonômicas. Quando $p < k$, as restrições não são holonômicas, porém os pontos atingíveis do sistema continuam sendo restritos. Logo, as restrições são parcialmente holonômicas. Quando os pontos atingíveis do sistema não são restritos então $p = 0$ e dizemos que as restrições são completamente não holonômicas.

Para o tratamento de problemas com restrições holonômicas ou não-holonômicas é conveniente analisar o movimento desde o ponto de vista das direções dos movimentos possíveis. Para isto, escolhe-se uma base para o espaço nulo à direita das restrições, denotado por $\underline{s}_j(q) \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n - k$. Por construção, esta base satisfaz

$$a_i(q) \underline{s}_j(q) = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, k \\ j = 1, \dots, n - k, \end{array}$$

e as trajetórias permissíveis para o sistema podem ser escritas como as possíveis soluções do sistema de controle

$$\dot{q} = \underline{s}_1(q) \eta_1 + \underline{s}_2(q) \eta_2 + \dots + \underline{s}_{n-k}(q) \eta_{n-k} \quad (2.2)$$

onde $\eta = [\eta_1 \ \dots \ \eta_{n-k}]^T \in \mathbb{R}^{n-k}$ é o vetor com os controles.

Definição 2.1 (Restrição completamente não-holonômica (Murray et al. 1994)). *A restrição definida pelas superfícies de nível $a_1(q), a_2(q), \dots, a_k(q)$ é **completamente não-holonômica** se os estados do sistema correspondente, definidos por q , podem ser deslocados de um ponto inicial para outro qualquer, usando o controle η , tal que o espaço de atingibilidade das configurações do sistema **não estejam confinadas**.*

Definição 2.2 (Restrição holonômica (Murray et al. 1994)). *A restrição definida pelas superfícies de nível $a_1(q), a_2(q), \dots, a_k(q)$ é **holonômica** se os estados do sistema correspondente, definidos por q , podem ser deslocados de um ponto inicial para outro qualquer, usando o controle η , tal que o espaço de atingibilidade das configurações do sistema **estejam confinadas** pelas superfícies de nível $\partial g_1 / \partial q, \partial g_2 / \partial q, \dots, \partial g_k / \partial q$.*

Usando as Definições 2.1 e 2.2, e a equação (2.2) pode-se estudar a natureza das restrições Pfaffianas. Para facilitar este estudo, serão apresentadas as seguintes definições:

Definição 2.3 (Campo vetorial suave (Khalil 2002, Murray et al. 1994)). *Seja $T_q \mathbb{R}^n$ o espaço tangente a $\mathbb{R}^n$ no ponto $q \in \mathbb{R}^n$. Um **campo vetorial** sobre $\mathbb{R}^n$ é um mapa suave que atribui a cada ponto $q \in \mathbb{R}^n$ um vetor tangente $f(q) \in T_q \mathbb{R}^n$, tal que*

$$\dot{q} = f(q) \triangleq \begin{bmatrix} f_1(q) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad (2.3)$$

onde cada $f_i(q)$ (para $i = 1, \dots, n$) é uma função suave.

Definição 2.4 (Fluxo de um capo vetorial (Murray *et al.* 1994)). Define-se como **fluxo** a representação da solução da equação diferencial (2.3).

Definição 2.5 (Campo vetorial completo (Murray *et al.* 1994)). Um campo vetorial $f(q)$ é dito ser **completo** se seu fluxo está definido para todo t .

Definição 2.6 (Taxa de variação de uma função suave ao longo de um fluxo (Murray *et al.* 1994)). A taxa de variação de uma função suave $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ao longo de um fluxo de $f(q)$ é dada por:

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial q} f(q) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_i} f_i(q).$$

Definição 2.7 (Derivada de Lie (Murray *et al.* 1994)). A derivada no tempo de V ao longo de $f(q)$ é referenciada como a **derivada de Lie** de V ao longo de $f(q)$ e denotada por $L_f V$:

$$L_f V \triangleq \frac{\partial V}{\partial q} f(q).$$

Definição 2.8 (Difeomorfismo (Khalil 2002, Murray *et al.* 1994)). Um mapeamento $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um **difeomorfismo** sobre D se ele for inversível sobre D , isto é, existe uma função $f^{-1}(q)$ tal que $f^{-1}(f(q)) = q$ para todo $q \in D$, e tanto $f^{-1}(q)$ como $f(q)$ são diferenciáveis.

Definição 2.9 (Colchete de Lie (Dubrovin *et al.* 1984)). Define-se uma operação denominada **colchete de Lie** sob $V \subset \mathbb{R}^n$ como:

$$[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V,$$

que satisfaz as seguintes propriedades: $[A + \lambda B, C] = [A, C] + \lambda[B, C]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (Bilinearidade); $[A, B] = -[B, A]$ (Anticomutatividade); e $[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0$ (Identidade de Jacobi).

Definição 2.10 (Colchete de Lie para campos vetoriais (Murray *et al.* 1994)). O colchete de Lie para dois campos vetoriais f e g é definido como

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial q} f(q) - \frac{\partial f}{\partial q} g(q).$$

Observação 2.1 (Interpretação colchete de Lie): O colchete de Lie pode ser interpretado, como o movimento infinitesimal resultante do fluxo em torno de um quadrado definido por dois campos vetoriais, no caso da Definição 2.10 estes campos são f e g . Se este movimento for nulo, diz-se que os campos comutam. Na Figura 2.1, é representado o movimento sobre o colchete de Lie de dois campos vetoriais $f(q)$ e $g(q)$.

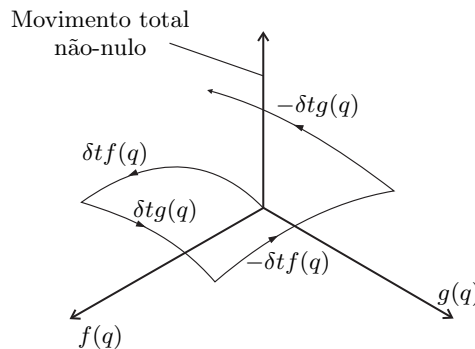


Figura 2.1: Movimento sobre um colchete de Lie. A variável δt na representação é um valor de tempo infinitesimal, tal que $\delta t f(q)$ e $\delta t g(q)$ representam posições do estado q no espaço de configurações $\mathbb{R}^n$. Da mesma forma, $-\delta t f(q)$ e $-\delta t g(q)$ representam posições do estado q mas em posições opostas a $\delta t f(q)$ e $\delta t g(q)$.

Lema 2.1 (Distribuição (Murray *et al.* 1994)). Uma **distribuição** $\Delta(q)$ atribui um subespaço de $T_q\mathbb{R}^n$ suavemente a cada $q \in \mathbb{R}^n$. Seja $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_k$ campos vetoriais sobre $V \subset \mathbb{R}^n$ então para qualquer ponto fixo $q \in V$, $\underline{s}_1(q), \underline{s}_2(q), \dots, \underline{s}_k(q)$ são vetores em $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\Delta(q) = \text{gen}\{\underline{s}_1(q), \underline{s}_2(q), \dots, \underline{s}_k(q)\} \subset T_q\mathbb{R}^n$$

é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.2 (Distribuição regular (Murray *et al.* 1994)). Uma distribuição é **regular** se a dimensão do subespaço $\Delta(q)$ não varia com q .

Lema 2.3 (Distribuição involutiva (Murray *et al.* 1994)). Uma distribuição é **involutiva** se ela for fechada sob o colchete de Lie, isto é,

$$\forall f, g \in \Delta(q) \rightarrow [f, g] \in \Delta(q).$$

Lema 2.4 (Fechamento involutivo (Murray *et al.* 1994)). O **fechamento involutivo** de uma distribuição, denotado por $\bar{\Delta}(q)$, é a menor distribuição involutiva contendo $\Delta(q)$ tal que se $f, g \in \bar{\Delta}(q)$ então $[f, g] \in \bar{\Delta}(q)$.

Definição 2.11 (Álgebra de Lie (Murray *et al.* 1994)). Seja $\underline{s}_1, \underline{s}_2, \dots, \underline{s}_m$ uma coleção de campos vetoriais suaves em $V \subset \mathbb{R}^n$; $\Delta(q)$ a distribuição definida por estes campos vetoriais; e $\bar{\Delta}(q)$ o fechamento involutivo de $\Delta(q)$. Logo, $\bar{\Delta}(q)$ é uma **álgebra de Lie**, denotado por $\mathcal{L}(\underline{s}_1, \dots, \underline{s}_m)$.

Lema 2.5 (Distribuição integrável (Murray *et al.* 1994)). Uma distribuição $\Delta(q)$ regular é dita ser **integrável** se, para todo ponto $q \in \mathbb{R}^n$, existe um conjunto de funções suaves $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n - k$ tal que os vetores linha $\partial g_i / \partial q$ são linearmente independentes em q , e para todo $f \in \Delta(q)$

$$L_f g_i = \frac{\partial g_i}{\partial q} f(q) = 0, \quad i = 1, \dots, n - k.$$

Definição 2.12 (Variedades integrais (Murray *et al.* 1994)). As hiper-superfícies definidas pelos conjuntos nêveis

$$\{q : g_1(q) = c_1, \dots, g_{n-k}(q) = c_{n-k}\}$$

são chamadas de **variedades integrais** da distribuição $\Delta(q)$.

Variedades integrais estão relacionadas com distribuições involutivas pelo teorema de Frobenius:

Teorema 2.1 (Teorema de Frobenius (Arnol'd 1994, Murray *et al.* 1994)). Uma distribuição regular $\Delta(q)$ é integrável se e somente se ela for involutiva.

Assim, se $\Delta(q)$ é uma distribuição involutiva k -dimensional, então localmente existem $n - k$ funções $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que as variedades integrais de $\Delta(q)$ são dadas pelas superfícies de nível de $g_1, \dots, g_{n-k}$.

Definição 2.13 (Espaço dual (Murray *et al.* 1994)). O espaço dual $T_q^*\mathbb{R}^n$ é o conjunto de funções lineares sobre o espaço tangente $T_q\mathbb{R}^n$.

Definição 2.14 (Uma-forma (Murray *et al.* 1994)). Uma **uma-forma** é um mapa que atribui a cada ponto $q \in \mathbb{R}^n$ um **covetor** $a(q) \in T_q^*\mathbb{R}^n$.

Em coordenadas locais representa-se uma **uma-forma** suave como um vetor linha

$$a(q) = [a_1(q) \ a_2(q) \ \dots \ a_n(q)].$$

Diferenciais de funções suaves são bons exemplos de uma-forma. Por exemplo, se $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, então a uma-forma $d\beta$ é dada por

$$d\beta = \left[\frac{\partial \beta}{\partial q_1} \ \frac{\partial \beta}{\partial q_2} \ \dots \ \frac{\partial \beta}{\partial q_n} \right].$$

Definição 2.15 (Co-distribuição (Murray *et al.* 1994)). Uma **co-distribuição** $\Omega(q)$ atribui um subespaço de $T_q^*\mathbb{R}^n$ suavemente a cada $q \in \mathbb{R}^n$.

Um caso especial é uma co-distribuição obtida com uma base de um conjunto de umas-forma,

$$\Omega(q) = \text{gen} \{a_1(q), \dots, a_n(q)\},$$

onde a base está sobre o conjunto de funções suaves.

Definição 2.16 (Co-distribuição regular (Murray *et al.* 1994)). A co-distribuição é dita ser regular se a dimensão do subespaço $\Omega(q)$ não varia com q .

No planejamento de BMRs com restrições pfaffianas, sejam holonômicas ou não, a primeira tarefa é converter as restrições dadas em *umas-forma*. Para isto, considera-se o problema de construir um caminho $q \in \mathbb{R}^n$ entre um dado q_0 [inicial] e um dado q_f [final] sujeito às restrições pfaffianas

$$a_i(q)\dot{q} = 0 \quad i = 1, \dots, k.$$

Considerando-se que as funções $a_i(q)$ são suaves e linearmente independentes, a proposição que segue formaliza a relação existente entre uma distribuição e uma co-distribuição.

Proposição 2.1 (Distribuição aniquiladora de restrições (Murray *et al.* 1994)). Dado um conjunto de umas-formas $a_i(q)$, $i = 1, \dots, k$, existem campos vetoriais suaves, linearmente independentes $s_j(q)$, $j = 1, \dots, n - k$, tal que $a_i(q) \cdot s_j(q) = 0$ para todo i e j .

Os resultados dessa proposição são expressos definindo-se a co-distribuição $\Omega(q) = \text{gen} \{a_1, \dots, a_k\}$ e a distribuição $\Delta(q) = \text{gen} \{s_1, \dots, s_{n-k}\}$, e declarando que $\Delta(q) = \Omega^\perp(q)$. Diz-se que a distribuição $\Delta(q)$ aniquila a co-distribuição $\Omega(q)$. Logo, o sistema de controle associado com a distribuição $\Delta(q)$ é da forma

$$\dot{q} = s_1(q)\eta_1 + \dots + s_{n-k}(q)\eta_{n-k},$$

com os controles η_i a serem livremente especificados.

Lema 2.6 (Integrabilidade de restrições Pfaffianas (Murray *et al.* 1994)). Um conjunto de restrições pfaffianas suaves é integrável se e somente se a distribuição que aniquila as restrições é involutiva.

A seguir serão derivados e interpretados os modelos de configuração cinemático e dinâmico das BMRs e as suas restrições cinemáticas.

2.3 Modelo genérico de configuração cinemática

Uma BMR pode ser especificada em seu espaço de trabalho por seu vetor de configurações ξ . A dimensão de ξ é o número de graus de liberdade [GDL, ou DOF do inglês *degrees of freedom*] do robô que representa o número mínimo de variáveis independentes que, juntamente com a sua geometria, são necessárias para especificar completamente a posição do robô. Para uma BMR, ξ pode ser definido como $\xi = [x_R, y_R, \theta]^T$, com 3 GDL ou $\xi = [x_R, y_R, \theta, \beta_{c,1}, \dots, \beta_{c,N_c}]^T$, com $3 + N_c$ GDL. No caso em que o número de graus de liberdade é $3 + N_c$, o valor N_c é associado aos ângulos de orientação das rodas que podem ser controladas independentemente³. Os valores x_R, y_R representam a posição do marco local $\{R\}$ da BMR em relação a um marco referencial fixo $\{W\}$, ou global, e θ especifica a sua orientação [ver Figura 2.2].

Aos movimentos rotacionais da base móvel para cada (x_R, y_R) fixo associamos a matriz ortogonal

$$R(\theta) \triangleq \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

tal que a posição de um ponto ξ' dentro de $\{W\}$ após aplicada uma rotação de θ graus é dada por $\xi'' = R(\theta)\xi'$ sendo ξ'' a posição resultante.

³Como será visto posteriormente neste Seção [veja equação (2.26)], uma BMR com $N_c > 0$ implica que há ações independentes sobre algumas rodas da BMR que podem ser orientadas indiferentemente da rotação das outras rodas, mas que influenciam na configuração cinemática de posição da BMR no marco global $\{W\}$.

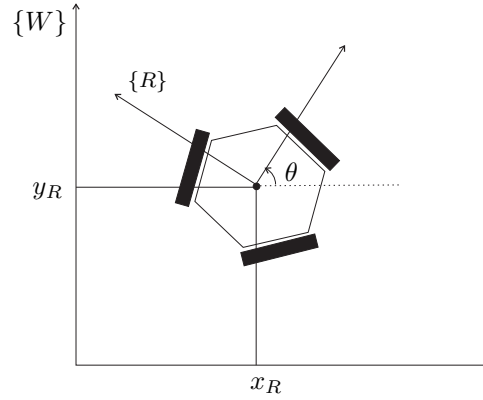


Figura 2.2: Exemplo de posicionamento de uma BMR dentro de um marco fixo.

As rodas que não podem ser controladas de forma independentemente, em $\{R\}$, são definidas por outro vetor de configuração adicional, que aqui definiremos como $\varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_N]^T$, sendo N o número de rodas não controláveis independentemente. No presente trabalho, N terá um valor máximo que está relacionado com as limitações técnicas de configuração de uma BMR, como será discutido posteriormente neste capítulo. O vetor resultante da concatenação de ξ e φ é conhecido como vetor de coordenadas generalizadas de dimensão $n = 3 + N_c + N$, e será definido neste trabalho como:

$$q = \begin{bmatrix} \xi \\ \varphi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3+N_c+N}. \quad (2.5)$$

Frequentemente é assumido que uma BMR está sujeita a restrições pfaffianas, ou seja, restrições de velocidade na forma (2.1), onde $A^T(q)$ é uma matriz de posto completo. As restrições de velocidade estão associadas com as rodas e sua geometria de movimento, neste trabalho a combinação tecnicamente possível dessas rodas em uma BMR gera um tipo especial de movimento, sobre o qual, definem-se formalmente as restrições Pfaffianas associadas.

2.3.1 Rodas e as suas restrições cinemáticas

Aqui é assumido que durante o movimento de uma BMR o plano de cada roda permanece vertical com respeito à superfície de movimento; gira ao redor de seu eixo, cuja orientação com relação ao marco local $\{R\}$ pode ser fixa ou variante. Aqui serão distinguidas duas classes de rodas: as rodas *padrão* e as rodas *suecas* (Indiveri 2009). Em cada caso, é comum supor que o contato entre a roda e a superfície é um ponto do plano. No entanto, como será visto nos capítulos posteriores, a natureza desse contato⁴ pode conter deformação.

Existem dois tipos de restrições cinemáticas associadas dependendo do tipo de movimento executado em relação ao plano da roda:

Definição 2.17 (Restrição cinemática de rolamento puro (Campion *et al.* 1996)). *Definindo-se como $V_c = [V_{c,x} \ V_{c,y}]^T \in \mathbb{R}^2$ a velocidade do ponto de contato da roda com a superfície, então a restrição cinemática de rolamento puro é $V_{c,y} = 0$. O que equivale a dizer: o componente de velocidade do ponto de contato paralelo ao plano de rotação da roda é igual a zero.*

Definição 2.18 (Restrição cinemática de não-derrapagem (Campion *et al.* 1996)). *Definindo-se como $V_c = [V_{c,x} \ V_{c,y}]^T \in \mathbb{R}^2$ a velocidade do ponto de contato da roda com a superfície, então a restrição cinemática de não-derrapagem é $V_{c,x} = 0$. O que equivale a dizer: o componente de velocidade do ponto de contato ortogonal ao plano de rotação da roda é igual a zero.*

Existem três tipos de rodas padrão: a roda *fixa*, roda *orientável no centro* e a roda *orientável fora do centro*. Para uma *roda padrão*, as restrições de rolamento puro e não-derrapagem representam que a velocidade do ponto de contato entre a roda e a superfície é zero. Para uma *roda sueca* somente o vetor de velocidade do ponto de contato, na direção do movimento [

⁴No Capítulo 3 será introduzida a deformação de contato, o que certamente anula a suposição de que as rodas sempre terão um ponto de contato com a superfície.

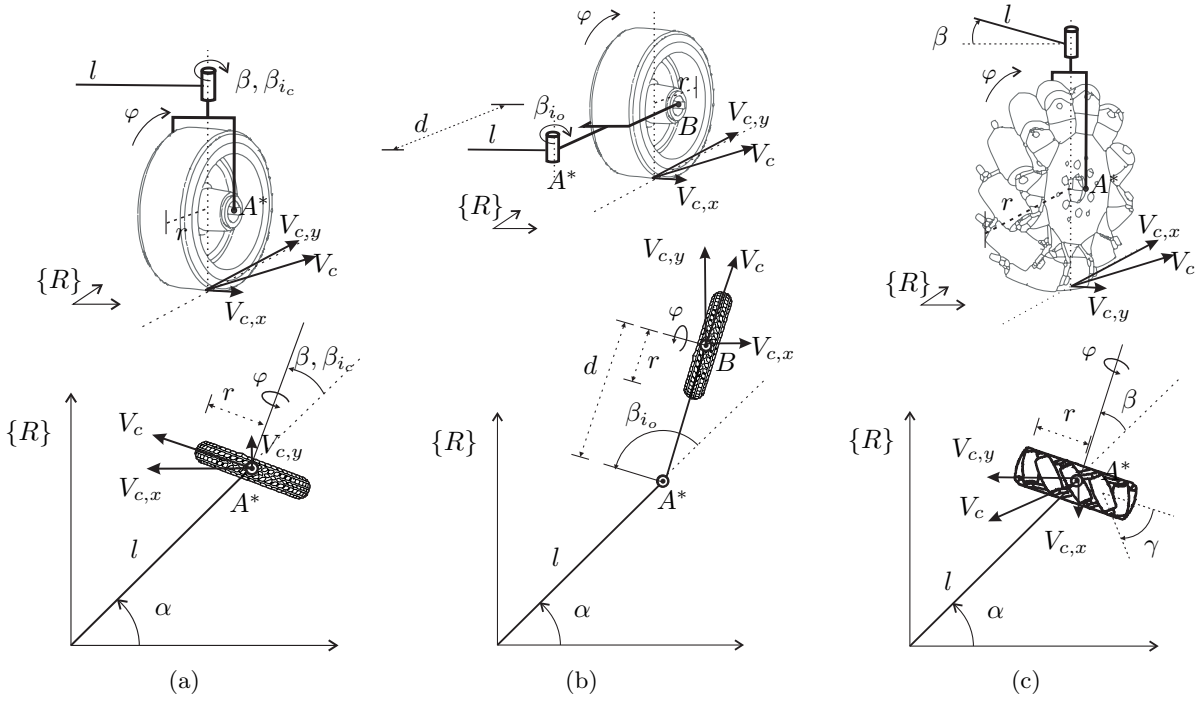


Figura 2.3: Esquema de configuração de posição para: (a) roda padrão fixa/orientável no centro, (b) roda orientável fora do centro, e (c) roda sueca.

ou seja, paralelo ao plano de rotação da roda], é zero. Dessa forma, a direção desse componente é assumida ser arbitraria mas fixa com respeito ao plano da roda. A seguir, serão apresentadas as expressões para as restrições associadas às Definições 2.17 e 2.18 nas rodas padrão e sueca.

Roda padrão fixa: O centro da roda, denotado por A^* , é um ponto fixo no marco $\{R\}$. A posição de A^* dentro de $\{R\}$ é caracterizada usando-se as coordenadas polares (l, α) . A orientação do plano da roda com respeito a l é definida pelo ângulo β , o ângulo de rotação da roda é definido por φ e seu raio definido por r [ver Figura 2.3(a)]. Então a posição da roda é definida pelas quatro variáveis α, β, l, r e o ângulo φ . Para a roda padrão fixa a restrição de rolamento puro é definida como

$$V_{c,y} = [-\sin(\alpha + \beta) \quad \cos(\alpha + \beta) \quad l \cos \beta] R(\theta) \dot{\xi} + r \dot{\varphi} = 0 \quad (2.6)$$

e a restrição de não-derrapagem é definida como

$$V_{c,x} = [\cos(\alpha + \beta) \quad \sin(\alpha + \beta) \quad l \sin \beta] R(\theta) \dot{\xi} = 0. \quad (2.7)$$

O número total de rodas padrão fixas será indicado no trabalho com N_f .

Roda orientável no centro: O movimento de uma roda orientável no centro é tal que o movimento do plano de rotação da roda tem um giro de β_{ic} graus com respeito ao segmento l [ver Figura 2.3(a)]. As variáveis de configuração da roda são as mesmas usadas para a roda padrão fixa com a exceção de que o ângulo β , re-definido como β_{ic} , que é variável no tempo. Para a roda orientável no centro a restrição de rolamento puro é definida como

$$V_{c,y} = [-\sin(\alpha + \beta_{ic}(t)) \quad \cos(\alpha + \beta_{ic}(t)) \quad l \cos \beta_{ic}(t)] R(\theta) \dot{\xi} + r \dot{\varphi} = 0 \quad (2.8)$$

e a restrição de não-derrapagem é definida como

$$V_{c,x} = [\cos(\alpha + \beta_{ic}(t)) \quad \sin(\alpha + \beta_{ic}(t)) \quad l \sin \beta_{ic}(t)] R(\theta) \dot{\xi} = 0. \quad (2.9)$$

Nota-se que aqui β_{ic} depende explicitamente do tempo. O número total de rodas orientáveis no centro será indicado no trabalho com N_c .

Roda orientável fora do centro: Uma roda orientável fora do centro é conhecida comercialmente como roda *castor*. Nesta roda, a configuração de posição necessita de variáveis adicionais. O centro da roda agora é denotado por B e é conectado ao corpo da base móvel, em A , por uma conexão de comprimento d . Esta conexão gira entorno do segmento l por um ângulo β_{i_o} [ver Figura 2.3(b)]. Para a roda orientável fora do centro a restrição de rolamento puro é definida como

$$V_{c,y} = [-\sin(\alpha + \beta_{i_o}(t)) \quad \cos(\alpha + \beta_{i_o}(t)) \quad l \cos \beta_{i_o}(t)] R(\theta) \dot{\xi} + r \dot{\varphi} = 0 \quad (2.10)$$

e a restrição de não-derrapagem é definida como

$$V_{c,x} = [\cos(\alpha + \beta_{i_o}(t)) \quad \sin(\alpha + \beta_{i_o}(t)) \quad d + l \sin \beta_{i_o}(t)] R(\theta) \dot{\xi} + d \dot{\beta}_{i_o}(t) = 0. \quad (2.11)$$

Nota-se que aqui β_{i_o} depende explicitamente do tempo. O número total de rodas orientáveis fora do centro será indicado no trabalho com N_o .

Roda sueca: Da mesma forma que com os três tipos de rodas apresentadas anteriormente a descrição da posição da roda sueca é definida pelas três constantes α, β, l [ver Figura 2.3(c)]. Um parâmetro adicional γ é requerido para caracterizar a direção com respeito ao plano de rotação da roda e que está diretamente associado com o componente nulo da velocidade de contato. Dessa forma, a roda sueca apresenta uma restrição associada com o rolamento e que é definida como

$$V_c = [-\sin(\alpha + \beta + \gamma) \quad \cos(\alpha + \beta + \gamma) \quad l \cos(\beta + \gamma)] R(\theta) \dot{\xi} + r \cos \gamma \dot{\varphi} = 0. \quad (2.12)$$

O número total de rodas suecas será indicado no trabalho com N_s .

2.3.2 Restrições pfaffianas para BMRs

Considerando-se as rodas e as suas respectivas restrições cinemáticas apresentadas na Seção 2.3.1, serão abordadas BMRs com a combinação tecnicamente possível dessas rodas tal que os movimentos da base no plano sejam realizáveis. Então, assumindo que $n = 3 + N + N_c$, tem-se:

$$q = [\xi \quad \beta_c \quad \varphi_{1_f} \quad \dots \quad \varphi_{N_f} \quad \varphi_{1_c} \quad \dots \quad \varphi_{N_c} \quad \varphi_{1_o} \quad \dots \quad \varphi_{N_o} \quad \varphi_{1_s} \quad \dots \quad \varphi_{N_s}]^T \in \mathbb{R}^{3+N+N_c} \quad (2.13)$$

onde N , dependendo do tipo de rodas usadas e sua quantidade, é definido como:

$$N = N_f + N_c + N_o + N_s,$$

e $\beta_c = [\beta_{1_c} \quad \dots \quad \beta_{N_c}] \in \mathbb{R}^{N_c}$, sendo que cada par $(\beta_{i_c}, \varphi_{i_c})$ é associado a uma roda orientável no centro, para $i = 1_c, \dots, N_c$.

A reformulação do vetor de coordenadas generalizadas em (2.13) só tem sentido para rodas padrão fixas, rodas orientáveis no centro e suecas. Para as rodas orientáveis fora do centro é preciso levar em consideração β_{i_o} e $\dot{\beta}_{i_o}$ como indicam as equações (2.8) a (2.11), assim para uma i -ésima roda orientável fora do centro existem pares (φ_i, β_{i_o}) tal que q deve ser reescrito como indica a seguinte proposição:

Proposição 2.2 (Vetor de coordenadas generalizadas para BMRs). *Assumindo que há N_c rodas orientáveis no centro e N_o rodas orientáveis fora do centro então a dimensão de q é $3 + N + N_c + N_o$ tal que*

$$q = [\xi \quad \beta_c \quad \beta_o \quad \varphi_{1_f} \quad \dots \quad \varphi_{N_f} \quad \varphi_{1_c} \quad \dots \quad \varphi_{N_c} \quad \varphi_{1_o} \quad \dots \quad \varphi_{N_o} \quad \varphi_{1_s} \quad \dots \quad \varphi_{N_s}]^T \in \mathbb{R}^{3+N+N_c+N_o}$$

onde $\beta_o = [\beta_{1_o} \quad \dots \quad \beta_{N_o}] \in \mathbb{R}^{N_o}$, sendo que cada par $(\beta_{i_o}, \varphi_{i_o})$ é associado a uma roda orientável fora do centro, para $i = 1_o, \dots, N_o$.

Usando-se a reformulação para o vetor de coordenadas generalizadas mostrada na Proposição 2.2 e assumindo que existem as matrizes $D(q) \in \mathbb{R}^{(3+N+N_c+N_o) \times K_{r,1}}$ e $R(q) \in \mathbb{R}^{(3+N+N_c+N_o) \times K_{r,2}}$ para representar as restrições de rolamento puro e não-derrapagem, respectivamente, então as equações (2.6) - (2.12) podem ser reescritas, para N rodas, na seguinte

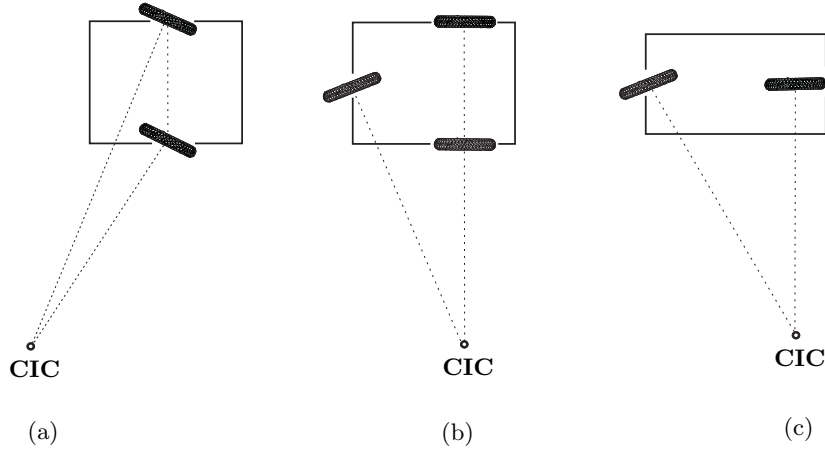


Figura 2.4: Centro Instantâneo de Curvatura: (a) para uma base com duas rodas orientáveis no centro, (b) para uma base com duas rodas padrão fixas e uma roda orientável no centro, do tipo *triciclo*, e (c) para uma base com uma roda padrão fixa e uma roda orientável no centro, tipo *bicicleta*.

forma compacta:

$$A^T(q)\dot{q} = \begin{bmatrix} D^T(q) \\ R^T(q) \end{bmatrix} \dot{q} = 0, \quad (2.14)$$

onde $A^T(q) \in \mathbb{R}^{K_r \times (3+N+N_c+N_o)}$ é a matriz de restrições pfaffianas, sendo $K_r = K_{r,1} + K_{r,2}$ o total de restrições. No Apêndice A, Seção A.1, são apresentados os elementos das matrizes $D(q) \in \mathbb{R}^{(3+N+N_c+N_o) \times K_{r,1}}$ e $R(q) \in \mathbb{R}^{(3+N+N_c+N_o) \times K_{r,2}}$ em função das equações (2.6) - (2.12).

Em (Shekhar 1997) é apresentado um resultado analítico sobre a natureza do rolamento nas rodas, e é afirmado que quando as restrições cinemáticas são violadas então deve existir deslizamento e derrapagem. Dessa forma, a restrição pfaffiana definida em (2.14) pode ser analisada para classificar as BMRs em termos da capacidade de locomoção, o que significa analisar a composição de rodas da BMR e saber como as restrições de rolamento puro e não-derrapagem modelam seu movimento.

Similarmente a (Campion *et al.* 1996), é definida

$$A_N^T(q) = \begin{bmatrix} {}^0A_N^T(q) \\ {}^1A_N^T(q) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N_f+N_c) \times 3},$$

como a submatriz de $D^T(q)$ que expressa as restrições de não-derrapagem em termos de $\dot{\xi}$ [ou seja, em termos da velocidade da BMR no marco global $\{W\}$], onde ${}^0A_N^T(q) \in \mathbb{R}^{N_f \times 3}$ e ${}^1A_N^T(q) \in \mathbb{R}^{N_c \times 3}$ representam as restrições de não-derrapagem das rodas padrão fixas e orientáveis no centro, respectivamente. Logo, a partir de (2.14), tem-se que:

$$A_N^T(q)\dot{\xi} = 0. \quad (2.15)$$

De (2.15) podemos dizer que, para $\dot{\xi} \neq 0$, é válido afirmar que $\dot{\xi} \in \ker \{A_N^T(q)\}$, $\nu \{A_N^T(q)\} \leq 3$, $\dot{\xi} \notin \text{Im} \{A_N^T(q)\}$, $\text{rank} \{A_N^T(q)\} \leq 3$, onde $\ker \{\cdot\}$, $\text{Im} \{\cdot\}$, $\nu \{\cdot\}$ e $\text{rank} \{\cdot\}$ representam o núcleo, a imagem, a nulidade e o posto da matriz $A_N^T(q)$, respectivamente. Ou seja, se $\text{rank} \{A_N^T(q)\} = 3$ então $\dot{\xi} = 0$ e nenhum movimento na BMR poderia ser executado [detalhe os elementos de $A_N^T(q)$ no Apêndice A, Seção A.1]. Dessa forma, as limitações de mobilidade são relacionadas com o posto da matriz $A_N^T(q)$. A seguir será analisado esse assunto.

2.3.3 Grau de mobilidade δ_m e direcionabilidade δ_d

A condição definida por (2.15) tem uma importante interpretação geométrica. Em cada instante de movimento da BMR podemos assumir uma rotação em torno de um centro instantâneo de curvatura, CIC [ou ICC, do inglês *Instantaneous center of curvature*], cuja posição é variante com respeito ao marco global $\{W\}$ (Dudek & Jenkin 2000, Campion *et*

al. 1996). Por outro lado, os vetores instantâneos de velocidade em um ponto da roda são ortogonais à linha de conexão entre esse ponto e o CIC [ver Figura 2.4]. Devido a condição (2.15) considerar as restrições de não-derrapagem somente das rodas padrão fixas e orientáveis no centro, então, podemos dizer, que a ortogonalidade dos vetores de velocidade longitudinal dessas rodas são uma consequência direta da satisfação das restrições de não-derrapagem. Assim, uma condição necessária e suficiente para que em uma BMR com rodas padrão fixas e rodas orientáveis no centro as restrições de não-derrapagem sejam satisfeitas é:

$$\text{rank} \{A_N^T(q)\} \leq 2. \quad (2.16)$$

Do número de rodas padrão fixas e orientáveis no centro usadas na configuração de uma BMR dependerá o posto da matriz $A_N^T(q)$. Por um princípio algébrico que relaciona a nulidade com o posto (Grossman 1987), tem-se que

$$\nu \{A_N^T(q)\} + \text{rank} \{A_N^T(q)\} = 3,$$

ou

$$\nu \{A_N^T(q)\} = 3 - \text{rank} \{A_N^T(q)\}. \quad (2.17)$$

sendo a nulidade $\nu \{A_N^T(q)\}$ conhecida como *grau de mobilidade* (Campion et al. 1996).

Definição 2.19 (Grau de mobilidade de uma BMR). *Seja δ_m o grau de mobilidade de uma BMR definido por:*

$$\delta_m = 3 - \text{rank} \{A_N^T(q)\}.$$

Agora, da equação (2.15), pode-se analisar o caso em que $\text{rank} \{^0A_N^T(q)\} = 2$ que implica que a BMR tem ao menos 2 rodas padrão fixas e se houver mais de 2 rodas padrão fixas então seus eixos serão concorrentes a um CIC cuja posição dentro do marco global $\{W\}$ é fixa. Em tal caso é evidente que o único possível movimento é uma rotação ao redor do CIC. Essa limitação não é aceitável na prática, assumindo então que

$$\text{rank} \{^0A_N^T(q)\} \leq 1.$$

De forma similar, da equação (2.15), o valor de $\text{rank} \{^1A_N^T(q)\}$ significa o número de rodas orientáveis no centro que podem ser controladas independentemente para direcionar a BMR. Pela definição da matriz $A_N^T(q)$ em (2.15) e pela equação (2.16) tem-se que

$$\text{rank} \{A_N^T(q)\} = \text{rank} \{^0A_N^T(q)\} + \text{rank} \{^1A_N^T(q)\} \leq 2$$

e como foi assumido que $\text{rank} \{^0A_N^T(q)\} \leq 1$ então $\text{rank} \{^1A_N^T(q)\} \leq 2$. O posto de $^1A_N^T(q)$ é chamado de *grau de direcionabilidade*.

Definição 2.20 (Grau de direcionabilidade de uma BMR). *Seja δ_d o grau de direcionabilidade de uma BMR definido por:*

$$\delta_d = \text{rank} \{^1A_N^T(q)\}.$$

Se uma BMR tem um número de rodas orientáveis no centro maior que δ_d , o número extra de rodas deve ser coordenado para garantir a existência de um CIC em cada instante de tempo.

2.3.4 Classificação das BMRs segundo o par (δ_m, δ_d)

A fim de classificar uma BMR é preciso levar em consideração os graus de mobilidade e direcionabilidade do tipo de configuração projetada. Neste trabalho, serão abordadas BMRs que possuem apropriadas configurações de rodas tal que a BMR seja *não-degenerada* (Campion et al. 1996, Wang & Low 2008, Wang et al. 2009). A seguinte definição estabelece formalmente essa característica:

Definição 2.21 (BMR não-degenerada). *Uma BMR é não-degenerada se*

$$\text{i) } \text{rank} \{^0A_N^T(q)\} \leq 1$$

$$\text{ii)} \quad \text{rank} \{A_N^T(q)\} = \text{rank} \{{}^0A_N^T(q)\} + \delta_d \leq 2$$

$$\text{iii)} \quad \dim \{A^T(q)\} = K_r (3 + N + N_c + N_o), \text{ sendo } K_r = 2N - \text{rank} \{{}^0A_N^T(q)\} - \delta_d - N_s.$$

A definição anterior é equivalente a dizer que se: *a)* o robô possui mais de uma roda padrão fixa, ou seja $N_f > 1$, então todas elas têm um eixo comum; *b)* que os centros das rodas orientáveis no centro não pertencem ao mesmo eixo comum das rodas padrão fixas; e *c)* que o número apropriado de rodas orientáveis fora do centro é definido por δ_d .

Então, com relação à Definição 2.21 o grau de mobilidade δ_m satisfaz a inequação linear:

$$1 \leq \delta_m \leq 3, \quad (2.18)$$

onde o limite superior 3 é deduzido de (2.17) e o limite inferior 1 é apenas o necessário para $\delta_m \neq 0$.

O grau de direcionabilidade δ_d satisfaz

$$0 \leq \delta_d \leq 2 \quad (2.19)$$

onde limite inferior 0 significa que a BMR não possui rodas orientáveis no centro, ou seja $N_c = 0$, e o limite superior 2 significa que a BMR que não possui rodas padrão fixas, ou seja $N_f = 0$ [pelo uso do item (ii) da Definição 2.21 é imediato que $\text{rank} \{{}^0A_N^T(q)\} = 0$].

Somando-se as inequações (2.18) e (2.19), tem-se:

$$1 \leq \delta_m + \delta_d \leq 5$$

porém nessa inequação há incluídas algumas anomalias de implementação técnicas. Se $\delta_m + \delta_d = 1$ implica, pelo uso da equação (2.17), que $\text{rank} \{A_N^T(q)\} = 2$, o que não é uma condição não aceitável tecnicamente, pois corresponde a um movimento rotacional ao redor de um CIC, como foi explicado anteriormente. Os casos em que $4 \leq \delta_m + \delta_d \leq 5$ [ou seja, $2 \leq \delta_m \leq 3$ e $\delta_d = 2$] são excluídos porque, de acordo com o item (ii) da Definição 2.21 e a Definição 2.19, quando $\delta_d = 2$ então $\delta_m = 1$. Assim, $\delta_m + \delta_d > 3$ são casos inconsistentes. Assim, a equação anterior é redefinida como:

$$2 \leq \delta_m + \delta_d \leq 3. \quad (2.20)$$

Dessa forma, existem somente 5 tipos de BMRs não-degeneradas correspondentes aos cinco pares (δ_m, δ_d) que satisfazem as inequações (2.18), (2.19) e (2.20). A Figura 2.5 apresenta a classificação das BMRs não-degeneradas de acordo com os valores de δ_m e δ_d .

BMR tipo (3,0): Essas BMRs não possuem rodas padrão fixas, ou seja $N_f = 0$, e não possuem rodas orientáveis no centro, ou seja $N_c = 0$ [ver Figura 2.5a e Figura 2.5d]. Essas BMRs são chamadas de omnidirecionais porque elas têm uma mobilidade completa [ou $\delta_m = 3$] o que significa que pode se movimentar em qualquer direção sem precisar de reorientação (Pin & Killough 1994, Tadakuma *et al.* 2007, Costa & Costa 2006). A projeção pode ser feita com rodas suecas ou rodas orientáveis fora do centro. Exemplo desse tipo de BMRs é o AXEBOT apresentado em (Fernández *et al.* 2012) [ver Figura 2.6a e Figura 2.6b] e o OMNIBOT [ver Figura 2.6a].

BMR tipo (2,0): Estas BMRs não possuem rodas orientáveis no centro, ou seja $N_c = 0$. Essas estruturas podem ter no mínimo uma roda padrão fixa, e se tiver mais de uma roda padrão fixa os eixos dessas rodas devem pertencer a um eixo comum [caso contrário teríamos que $\text{rank} \{{}^0A_N^T(q)\} > 1$], veja Figura 2.5e. Aplicando o critério (2.17) e devido a $\delta_m = 2$ então $\text{rank} \{A_N^T(q)\} = 1$. Pelo item (ii) da Definição 2.21 e devido que $\delta_d = 0$, então $\text{rank} \{{}^0A_N^T(q)\} = 1$. Aplicando o critério (2.17) somente para ${}^0A_N^T(q)$ mostra que $\nu \{{}^0A_N^T(q)\} = 2$. Logo $\ker \{{}^0A_N^T(q)\} = \text{gen} \{{}^0a_1(q), {}^0a_2(q)\}$ para $\forall q \in \mathbb{R}^{3+N+N_c+N_o}$, onde ${}^0a_1(q), {}^0a_2(q)$ formam uma base para o núcleo de ${}^0A_N^T(q)$. Dessa forma, pelo uso da equação (2.15) e pelo Lema 2.1, podemos dizer que qualquer configuração de velocidade $\dot{\xi}$ deve estar confinada em uma distribuição 2-dimensional $\Delta_N(q)$ gerada por dois campos vetoriais ${}^0a_1(q)$ e ${}^0a_2(q)$, ou seja $\Delta_N(q) = \text{gen} \{{}^0a_1(q), {}^0a_2(q)\}$ que é o próprio conjunto $\ker \{{}^0A_N^T(q)\}$. Um exemplo de uma BMR do tipo (2,0) é a usada pelo robô HILARE apresentado e analisado por Laumond (1993) e Giralt *et al.* (1984) [ver Figura 2.6c].

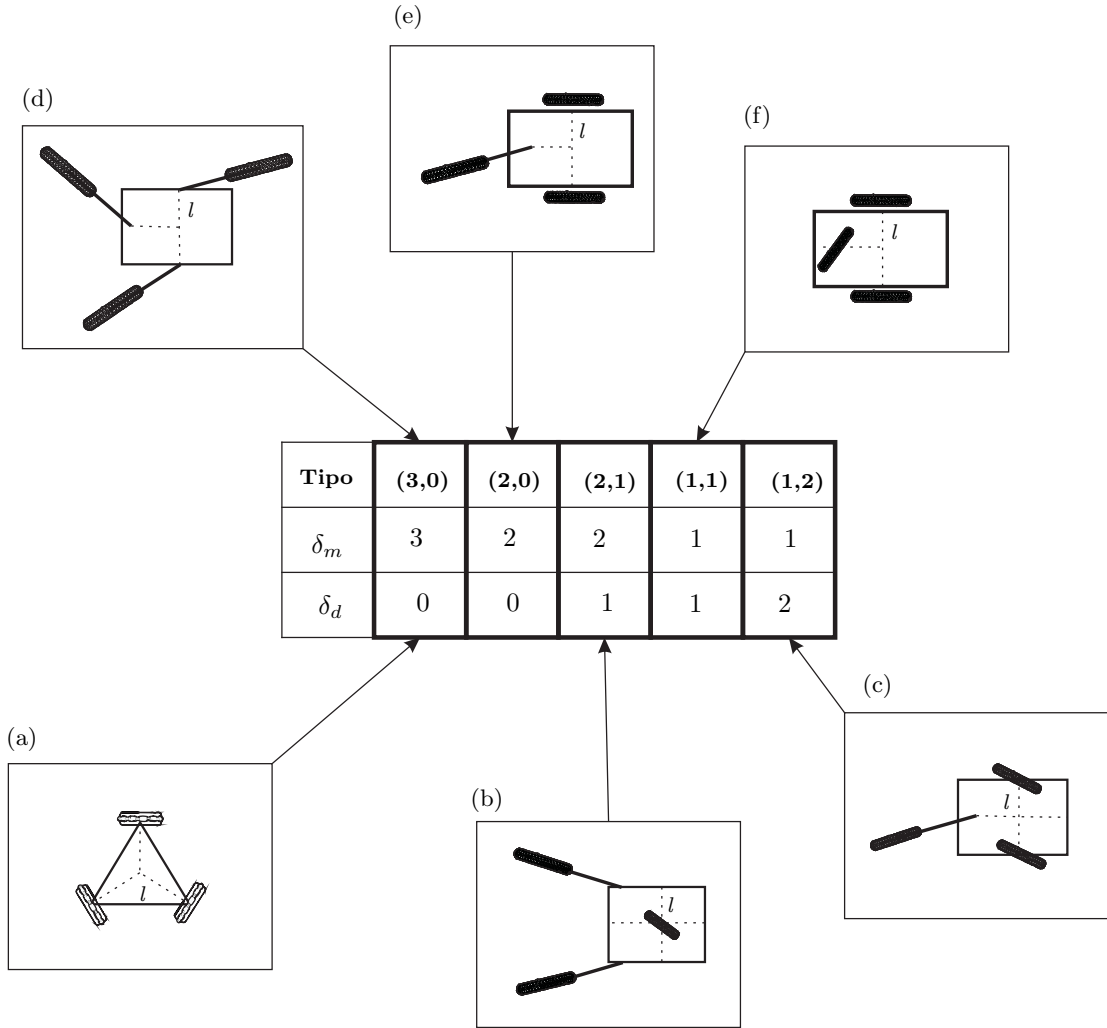


Figura 2.5: Classificação das BMRs pelo seu grau de mobilidade δ_m e grau de direcionabilidade δ_d . Bases (a) e (d) do Tipo (3,0) são conhecidas como bases omnidirecionais. O valor de l equivale à distância perpendicular desde o centro da BMR até o ponto de acoplamento da roda com a estrutura. O número de rodas motorizadas em cada BMR está sujeito a uma implementação técnica viável do projetista, sendo no mínimo uma roda motorizada e máximo três.

BMR tipo (2,1): Esta configuração de BMR não possui rodas padrão fixas, ou seja $N_f = 0$, e possui no mínimo uma roda orientável no centro, ou seja $N_c \geq 1$ [ver Figura 2.5b]. Pelo uso da equação (2.17), tem-se que $\delta_m = 2 = 3 - \text{rank} \{A_N^T(q)\}$, logo $\text{rank} \{A_N^T(q)\} = 1$ e pelo item (ii) da Definição 2.21 tem-se que $\text{rank} \{{}^1A_N^T(q)\} = \delta_d = 1$ e $\text{rank} \{{}^1A_N^T(q)\} = 0$. Assim, usando a Definição 2.20, se houver mais de uma roda orientável no centro as orientações [os ângulos $\beta_{ic}(t)$] devem ser controlados de tal forma que $\text{rank} \{{}^1A_N^T(q)\} = 1$ para $\forall q \in \mathbb{R}^{3+N+N_c+N_o}$. Da mesma forma que foi analisado para o tipo (2,0), aplicando o critério (2.17) somente para ${}^1A_N^T(q)$, podemos assegurar que qualquer configuração de velocidade $\dot{\xi}$ deve estar confinada em uma distribuição 2-dimensional $\Delta_N(q)$ gerada por dois campos vetoriais ${}^1a_1(q)$ e ${}^1a_2(q)$, ou seja $\Delta_N(q) = \text{gen} \{{}^1a_1(q), {}^1a_2(q)\}$, ou mais especificamente $\Delta_N(\beta_{1c}) = \text{gen} \{{}^1a_1(\beta_{1c}), {}^1a_2(\beta_{1c})\}$ devido à parametrização pelo ângulo de orientação β_{1c} de uma das rodas orientáveis no centro. Uma BMR do tipo (2,1) é usada pelo robô SENTRY, destinado para serviço (Denning Branch International 2009) [ver Figura 2.6d].

BMR tipo (1,1): Este tipo de BMR tem uma ou várias rodas padrão fixas com um eixo comum, ou seja $N_f \geq 1$ e tem uma ou várias rodas orientáveis no centro, ou seja

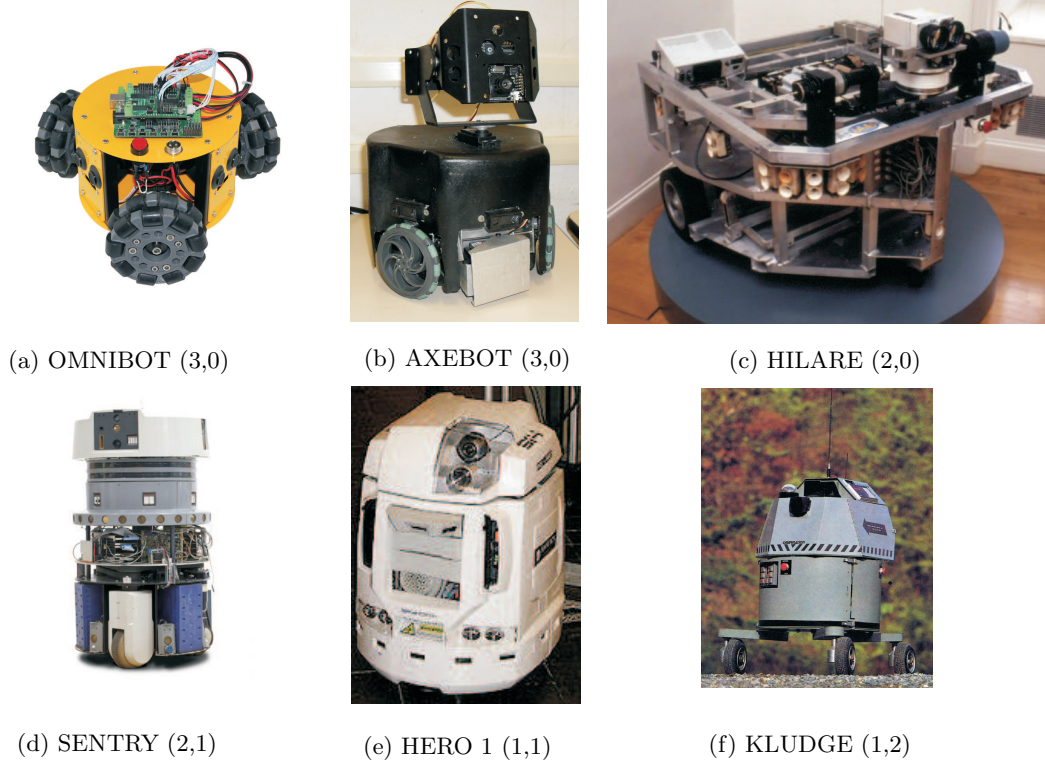


Figura 2.6: Exemplos de BMRs usadas por robôs móveis.

$N_c \geq 1$, com a condição que o eixo de uma delas não esteja sobre o eixo das rodas padrão fixas [do contrário a estrutura seria singular] e suas orientações sejam controladas tal que $\text{rank} \{ {}^1A_N^T(q) \} = \delta_d = 1$. Pela equação (2.17) tem-se que $\nu \{ A_N^T(q) \} = 3 - \text{rank} \{ A_N^T(q) \} = 1$ para $\text{rank} \{ A_N^T(q) \} = 2$ [do item (ii) da Definição 2.21 usando $\text{rank} \{ {}^0A_N^T(q) \} = \text{rank} \{ {}^1A_N^T(q) \} = 1$]. Logo o núcleo de $A_N^T(q)$ é gerado por um campo vetorial $a_1(q)$ para $\forall q \in \mathbb{R}^{3+N+N_c+N_o}$. Dessa forma podemos dizer que qualquer configuração de velocidade $\dot{\xi}$ deve estar confinada em uma distribuição 1-dimensional $\Delta_N(q)$ gerada por um campo vetorial $a_1(q)$, ou seja $\Delta_N(\beta_{1_c}) = \text{gen} \{ a_1(\beta_{1_c}) \}$ lembrando que o vetor é parametrizado pelo ângulo $\beta_{1_c}(t)$ de uma das rodas orientáveis no centro. Um exemplo de uma BMR do tipo (1,1) é a usada pelo bem conhecido robô HERO 1 (Robillard 1983) [ver Figura 2.6e].

BMR tipo (1,2): Esta BMR não possui rodas padrão fixas, ou seja $N_f = 0$ e $\text{rank} \{ {}^0A_N^T(q) \} = 0$, e possui no mínimo duas rodas orientáveis no centro, ou seja $N_c \geq 2$. Se houver mais de duas rodas orientáveis no centro suas orientações [ângulos $\beta_{i_c}(t)$] devem ser controladas tal que $\text{rank} \{ {}^1A_N^T(q) \} = 2$. Aplicando o critério (2.17) para a matriz ${}^1A_N^T(q)$ tem-se que $\nu \{ {}^1A_N^T(q) \} = 1$, dessa forma qualquer configuração de velocidade $\dot{\xi}$ deve estar confinada em uma distribuição 1-dimensional $\Delta_N(q)$ gerada por um campo vetorial $a_1(q)$, ou seja $\Delta_N(q) = \text{gen} \{ a_1(q) \}$. Parametrizando pelos dois ângulos de duas das rodas orientáveis no centro da BMR tem-se que $\Delta_N(\beta_{1_c}, \beta_{2_c}) = \text{gen} \{ a_1(\beta_{1_c}, \beta_{2_c}) \}$. Uma BMR desse tipo bem conhecida foi projetada e publicada na revista *Robotics Age* com o nome KLUDGE (Holland 1985) [ver Figura 2.6f].

Nos tipos (2,1), (1,1) e (1,2), o ajuste apropriado dos ângulos $\beta_{1_c}(t)$ ou $\beta_{1_c}(t), \beta_{2_c}(t)$ deve garantir, respectivamente, que $\text{rank} \{ {}^1A_N^T(q) \} = 1$, $\text{rank} \{ {}^1A_N^T(q) \} = 1$ e $\text{rank} \{ {}^1A_N^T(q) \} = 2$. De outra forma, usando-se o Lema 2.2, se esses ângulos não forem ajustados apropriadamente, as distribuições resultantes $\Delta_N(\beta_{1_c})$ ou $\Delta_N(\beta_{1_c}, \beta_{2_c})$ correm o risco de se tornarem irregulares. O problema de trabalhar com BMRs que possuem restrições pfaffianas resulta em uma tarefa mais simples de abordar quando consideram-se distribuições regulares porque a complexidade de cálculo do sinal de controle η em (2.2) é reduzida.

Por outra lado, com a definição dessas cinco configurações, algo deve ser estabelecido sobre o número de rodas. Como pode ser verificado na Figura 2.5, o máximo número de rodas é 3, ou seja

$$N = N_f + N_c + N_o + N_s = N_f + \delta_d + N_o + N_s \leq 3, \quad (2.21)$$

onde dedutivamente podemos garantir que

$$\delta_d = N_c. \quad (2.22)$$

2.3.5 Modelo cinemático de posição para BMRs

Nesta subseção, é discutida a mobilidade da BMR associada apenas com a posição cartesiana em relação ao marco local $\{R\}$ [ou seja, somente o vetor $\xi \in \mathbb{R}^3$]. Como foi visto na Seção 2.3.4, não importa o tipo de BMR; a velocidade $\dot{\xi}$ está restrita a permanecer confinada em uma distribuição $\Delta_N(q)$ definida pelos campos vetoriais que geram $\ker \{A_N^T(q)\}$, isto é:

$$\dot{\xi} \in \Delta_N(q) \triangleq \ker \{A_N^T(q)\}. \quad (2.23)$$

Proposição 2.3 (Velocidade restrita a uma distribuição regular). *Para $\forall t$ existe um vetor de controle variante no tempo $u \neq 0$ tal que:*

$$\dot{\xi} = B_N^T(q)u. \quad (2.24)$$

onde as colunas de $B_N^T(q) \in \mathbb{R}^{3 \times \delta_m}$ formam uma base para $\ker \{A_N^T(q)\}$.

A dimensão da distribuição $\Delta_N(q)$ como a do vetor u são definidas pelo grau de mobilidade δ_m . Pela Proposição 2.1, assumindo-se que cada linha $a_{N,i}(q)$, para $i = 1, \dots, k$, de $A_N^T(q)$ é do tipo *uma-forma*, então a distribuição $\Delta_N(q)$ aniquila a co-distribuição formada pelas linhas de $A_N^T(q)$.

Levando-se em consideração (2.21), a solução de (2.15), nos cinco tipos de configurações nos permite calcular campos vetoriais que definem a base para $\ker \{A_N^T(q)\}$ [ou a distribuição $\Delta_N(q)$]. A fim de formalizar os resultados desses cálculos, pelo uso da proposta em (Campion *et al.* 1996), obtém-se em forma compacta que

$$B_N^T(q) = R^T(\theta)\Sigma(\beta_c)$$

onde $\Sigma(\beta_c) \in \mathbb{R}^{3 \times \delta_m}$ é uma matriz conhecida (Campion *et al.* 1996).

Dessa forma, a equação (2.24) pode ser reescrita como

$$\dot{\xi} = R^T(\theta)\Sigma(\beta_c)u,$$

ou em forma de sistema de equações como:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = R^T(\theta)\Sigma(\beta_c)u \\ \dot{\beta}_c = \zeta \end{cases} \quad (2.25)$$

$$(2.26)$$

As representações (2.25) e (2.26) podem ser consideradas como uma representação espaço-estado da posição cartesiana ξ e das coordenadas angulares das rodas orientáveis no centro [contidas em β_c]. As variáveis u e ζ são consideradas conjuntamente e formam o vetor de controles na Proposição 2.3⁵. É importante lembrar que o modelo cinemático é somente um subsistema do sistema dinâmico geral da BMR, como será apresentando na seção seguinte.

Retomando o sistema definido por (2.25) - (2.26), no caso em que $\delta_d = 0$, ele pode ser reduzido à equação (2.25). No caso em que $\delta_d \geq 0$ o sistema pode ser definido como:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} R^T(\theta)\Sigma(\beta_c) & 0_{3 \times \delta_d} \\ 0_{\delta_d \times 3} & I_{\delta_d \times \delta_d} \end{bmatrix} \eta, \quad (2.27)$$

⁵Essa consideração não deve ser confundida com a terminologia técnica que define como controles de uma BMR os torques provenientes dos motores embarcados no sistema de locomoção.

Tabela 2.1: Modelos cinemáticos de posição cartesiana para as BMRs

TIPO	z	$\Sigma(\beta_c)$	MODELO (2.27)
(3,0)	$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \end{bmatrix}$	$I_{3 \times 3}$	$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$
(2,0)	$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$
(2,1)	$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \\ \beta_{1c} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\sin \beta_{1c} & 0 \\ \cos \beta_{1c} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{1c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta+\beta_{1c}) & 0 & 0 \\ \cos(\theta+\beta_{1c}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \zeta_1 \end{bmatrix}$
(1,1)	$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \\ \beta_{1c} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ l \sin \beta_{1c} \\ \cos \beta_{1c} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{1c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l \sin \theta \sin \beta_{1c} & 0 \\ l \cos \theta \sin \beta_{1c} & 0 \\ \cos \beta_{1c} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \zeta_1 \end{bmatrix}$
(1,2)	$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \\ \beta_{1c} \\ \beta_{2c} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2l \sin \beta_{1c} \sin \beta_{2c} \\ l \sin(\beta_{1c}+\beta_{2c}) \\ \sin(\beta_{2c}-\beta_{1c}) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{1c} \\ \dot{\beta}_{2c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l(\sin \beta_{1c} \sin(\theta+\beta_{2c})+\sin \beta_{2c} \sin(\theta+\beta_{1c})) & 0 & 0 \\ l(\sin \beta_{1c} \cos(\theta+\beta_{2c})+\sin \beta_{2c} \cos(\theta+\beta_{1c})) & 0 & 0 \\ \sin(\beta_{2c}-\beta_{1c}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$

onde $z = [\xi \ \beta_c]^T \in \mathbb{R}^{3+\delta_d}$ e $\eta = [u \ \zeta]^T \in \mathbb{R}^{\delta_m+\delta_d}$. Na Tabela 2.1 é apresentado o modelo cinemático para a posição cartesiana dos cinco tipos de configurações possíveis para BMRs.

Observação 2.2 (Interpretação vetor η): O vetor $\eta = [u \ \zeta]^T \in \mathbb{R}^{\delta_m+\delta_d}$ representa: a velocidade linear da BMR [dada pelo componente u_1 de u]; a velocidade angular da BMR [dada pelo componente u_2 de u]; e a velocidade dos ângulos de orientação das rodas orientáveis no centro [dadas pelos componentes em ζ]. Particularmente, para BMRs do tipo (3,0), o vetor u esta dividido em três componentes: u_1 , u_2 usados para representar os componentes da velocidade linear; e u_3 para representar a velocidade angular. O componente ζ não existe para esse tipo de BMR devido à ausência de rodas orientáveis no centro.

2.3.6 Grau de manobrabilidade δ_u

O modelo (2.27) permite tratar o número de graus de liberdade que uma BMR possui dependendo da sua configuração. O grau de mobilidade δ_m é o número de grau de liberdade que pode ser manipulado pelas entradas u sem precisar reorientação das rodas orientáveis no centro [ou seja, sem precisar modificar os ângulos contidos no vetor β_c]. Intuitivamente esse número representa a quantidade de graus de liberdade instantâneos que uma BMR possui sem direcionar qualquer das rodas orientáveis no centro. Dessa forma, o δ_m não pode ser considerado o número de grau de liberdade total da BMR que pode ser manobrável por u e ζ . O número total então é definido como a soma de δ_m com δ_d .

Definição 2.22 (Grau de manobrabilidade (Campion *et al.* 1996)). *Seja δ_u o grau de manobrabilidade de uma BMR definido por:*

$$\delta_u = \delta_m + \delta_d.$$

Da equação (2.20), pode-se dizer também que o grau de manobrabilidade é limitado superior e inferiormente. A ação de ζ sobre as coordenadas ξ é indireto devido à sua configuração

ser definida somente pelos ângulos das rodas orientáveis no centro e contidos em β_c , que ao mesmo tempo estão relacionados a ζ por uma ação integral. Isso explica porque orientação das BMRs com rodas orientáveis no centro não pode ser alcançada de forma rápida (Campion *et al.* 1996, Campion *et al.* 1991b, Campion *et al.* 1991a, D'Andréa-Novel *et al.* 1995, D'Andréa-Novel *et al.* 1991).

A manobrabilidade de uma BMR depende de δ_u , ou mais especificamente de quantos graus de liberdade particionados em δ_m e δ_d estão disponíveis para executar uma determinada configuração. Duas BMRs com o mesmo δ_u e diferente δ_m não são equivalentes. Para BMRs com $\delta_u = 3$ é possível associar livremente uma posição do CIC através da mudança direta dos valores de η [no caso de BMRs do tipo (3,0)], ou com a orientação de uma das rodas orientáveis no centro [no caso de BMRs do tipo (2,1) e (1,2)]. Para BMRs com $\delta_u = 2$, o CIC é restringido a pertencer a uma linha reta, ou seja, o eixo das rodas padrão fixas. No caso particular de BMRs do tipo (1,1), a posição do CIC dentro desse eixo é definida pela orientação [ângulo $\beta_{1c}(t)$] da roda orientável no centro.

Similarmente, duas BMRs com o mesmo δ_m mas diferente δ_u não são equivalentes. Uma BMR com maior δ_u significa uma BMR com maior número de graus de liberdade manobráveis. Comparemos as BMRs do tipo (1,1) e (1,2), com $\delta_m = 1$, e respectivamente, $\delta_u = 2$ e $\delta_u = 3$. No tipo (1,2), a posição do CIC deve ser alocada no plano, dependendo da orientação simultânea de duas rodas orientáveis [os seus ângulos $\beta_{1c}(t)$ e $\beta_{2c}(t)$], enquanto que para BMRs do tipo (1,1) o CIC deve ser alocado no plano alinhado com o eixo das rodas padrão fixas cuja posição sobre esse eixo é definida pela orientação de $\beta_{1c}(t)$. A situação ideal é para as BMRs omnidirecionais, onde $\delta_m = \delta_u = 3$.

2.3.7 Redutibilidade do modelo cinemático de posição definido por (2.27)

O modelo (2.27) é redutível se existe uma transformação de coordenadas tal que algumas das novas coordenadas possam ser relacionadas por uma identidade que é igual a zero ao longo do movimento da BMR. De outra forma, as colunas da matriz em (2.27) formam uma base em $\mathbb{R}^{3+\delta_d}$, e se alguma dessas colunas puder ser reescrita como combinação linear das restantes, então tem-se que a base pode ser reduzida em um campo vetorial, e o espaço gerado por essas colunas então seria uma distribuição. Chamando-se essa distribuição de $\Delta(z)$, e assumindo-a regular [pelo Lema 2.2], pode-se formalmente expressá-la como

$$\Delta(z) \triangleq \text{gen} \left\{ \text{col} \left\{ \begin{bmatrix} R^T(\theta)\Sigma(\beta_c) & 0_{3 \times \delta_d} \\ 0_{\delta_d \times 3} & I_{\delta_d \times \delta_d} \end{bmatrix} \right\} \right\} \quad (2.28)$$

onde o operador $\text{col} \{ \cdot \}$ significa as colunas da matriz contida em $\{ \cdot \}$.

Se uma das colunas da matriz em (2.28) é uma combinação linear das restantes, então, pelos Lemas 2.3 e 2.4, o fechamento involutivo $\bar{\Delta}(z)$ é definido pelas colunas linearmente independentes de $\Delta(z)$ e seus colchetes de Lie. Intuitivamente, como consequência do Teorema 2.1 [Teorema de Frobenius], podemos dizer que a redutibilidade do espaço de configurações pode ser definida pela proposição seguinte:

Lema 2.7 (Redutibilidade do modelo cinemático de posição cartesiana (Campion *et al.* 1996)). *Uma BMR com espaço de configuração cartesiano definido pelo modelo (2.27) é redutível se, e somente se,*

$$\dim \{ \bar{\Delta}(z) \} < \dim \{ z \} = 3 + \delta_d.$$

No Apêndice A, Subseção A.2.1, é verificado através de dois exemplos que o modelo de postura cinemática de duas BMRs não-degeneradas é sempre irredutível. Similarmente a esses exemplos e por meio da mesma linha de raciocínio, pode-se verificar a irredutibilidade de todos os modelos da Tabela 2.1.

Lema 2.8 (Irredutibilidade do modelo (2.27) para BMRs (Campion *et al.* 1996)). *Para uma BMR não-degenerada com modelo cinemático de posição cartesiana irredutível então:*

- i) $\text{rank} \left\{ \begin{bmatrix} R^T(\theta)\Sigma(\beta_c) & 0_{3 \times \delta_d} \\ 0_{\delta_d \times 3} & I_{\delta_d \times \delta_d} \end{bmatrix} \right\} = \delta_m + \delta_d = \delta_u,$
- ii) $\dim \{ \bar{\Delta}(z) \} = 3 + \delta_d.$

2.3.8 Modelo cinemático de configuração para BMRs

Embora o modelo (2.27) nos permita fazer uma análise dos graus de liberdade e sua redutibilidade para a posição cartesiana de uma BMR, esse não leva em consideração os ângulos de direcionabilidade das rodas orientáveis fora do centro [os ângulos β_{i_o}] e as posições angulares de todas as rodas [os ângulos φ_i]. Dessa forma, do Apêndice A, Subseção A.1.1, tem-se que

$$\begin{cases} \dot{\beta}_o = D_o(q)\Sigma(\beta_c)u \\ \dot{\varphi} = D_\varphi(q)\Sigma(\beta_c)u, \end{cases} \quad (2.29)$$

$$(2.30)$$

onde $D_o(q) = -\frac{1}{d}I_{N_o \times N_o}D_\xi^T(q)R^T(\theta)$; $D_\varphi(q) = -E^+(q)R_\xi^T(q)R^T(\theta)$ e $E^+(q)$ é a pseudo-inversa da matriz $E(q)$ [mostrada no Apêndice A, Subseção A.1.1].

Agora, para o vetor de configuração q definido na Proposição 2.2, e pelo uso dos sistemas (2.25)-(2.26) e (2.30)-(2.29), as coordenadas de configuração podem ser descritas pelo modelo compacto

$$\dot{q} = S(q)\eta, \quad \left(\text{ou, } \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\beta}_o \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1(q) \\ S_2(q) \end{bmatrix} \eta \right) \quad (2.31)$$

onde

$$S(q) \triangleq \begin{bmatrix} S_1(q) \\ S_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T(\theta)\Sigma(\beta_c) & 0_{3 \times \delta_d} \\ 0_{\delta_d \times 3} & I_{\delta_d \times \delta_d} \\ D_o(q)\Sigma(\beta_c) & 0_{N_o \times \delta_d} \\ D_\varphi(q)\Sigma(\beta_c) & 0_{N \times \delta_d} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(3+N_o+\delta_d+N) \times \delta_u}. \quad (2.32)$$

Na Tabela 2.2, são apresentados os modelos cinemáticos de configuração para os cinco tipos de BMRs da Tabela 2.1 por meio da utilização da equação (2.32) para os modelos cinemáticos na forma (2.27) detalhados na Tabela 2.1.

Pelas restrições pfaffianas associadas às BMRs, nos cinco tipos de configurações possíveis, definidas na forma compacta (2.14) e pelo modelo cinemático de configuração para BMRs (2.31), podemos verificar que

$$A^T(q)\dot{q} = A^T(q)S(q)\eta = 0,$$

e como $\eta \neq 0$ para $\forall t > 0$ [consequência direta da Proposição 2.3, onde $u \neq 0$] então

$$A^T(q)S(q) = 0. \quad (2.33)$$

A equação (2.33) permite concluir a partir das Definições 2.14 e 2.15 que as linhas da matriz $A^T(q)$ são uma-formas suaves que geram uma co-distribuição $\Omega(q)$ definida por

$$\Omega(q) = \text{gen} \{ \text{lin} \{ A^T(q) \} \}, \quad (2.34)$$

onde $\text{lin} \{ \cdot \}$ define o conjunto de linhas da matriz contida em $\{ \cdot \}$.

Levando em consideração que os ângulos associados com rodas orientáveis no centro sejam apropriadamente manipulados para garantir que a BMR seja não-degenerada, e consequentemente uma-formas linearmente independentes, a co-distribuição $\Omega(q)$ deveria ser regular [Definição 2.16]. Similarmente, obtém-se a mesma conclusão sobre as colunas de $S(q)$, sendo $\Delta(q)$ a distribuição gerada e aqui definida por:

$$\Delta(q) = \text{gen} \{ \text{col} \{ S(q) \} \}. \quad (2.35)$$

A equação (2.33) comprova então [pela Proposição 2.1] que a distribuição $\Delta(q)$ em (2.35) aniquila as restrições [*uma-formas*] da co-distribuição $\Omega(q)$ em (2.35). Aniquilar as restrições tem seu significado importante, já que se o conjunto de restrições em $A^T(q)$ e o modelo de configuração cinemático da BMR [definido pelas colunas de $S(q)$] satisfazem (2.33) então pode-se garantir que para qualquer movimento da BMR as restrições pfaffianas são satisfeitas.

Observação 2.3 (Distribuição aniquiladora $\Delta(q)$ incompleta): Até aqui está-se considerando que as restrições pfaffianas são satisfeitas pela existência *a priori* de uma distribuição aniquiladora. Mas como será visto no Capítulo 3, essas restrições não são satisfeitas quando acrescentam-se efeitos de degradação nas rodas [como escorregamento, flexibilidade e/ou deformação (Shekhar 1997, Hong *et al.* 2006)]. Dessa forma, esses efeitos sugerem que as

Tabela 2.2: Modelos cinemáticos de configuração para as BMRs

TIPO	q	MODELO (2.31)
(3,0)	$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \\ \beta_{1o} \\ \beta_{2o} \\ \beta_{3o} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2r} & \frac{1}{2r} & \frac{l}{r} \\ 0 & -\frac{1}{r} & \frac{l}{r} \\ \frac{\sqrt{3}}{2r} & \frac{1}{2r} & \frac{l}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \text{ ou }$ $\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{1o} \\ \dot{\beta}_{2o} \\ \dot{\beta}_{3o} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{d} \cos \beta_{1o} & -\frac{1}{d} \sin \beta_{1o} & -\frac{l}{d} \sin \beta_{1o} - 1 \\ \frac{1}{d} \cos \beta_{2o} & \frac{1}{d} \sin \beta_{2o} & -\frac{l}{d} \sin \beta_{2o} - 1 \\ -\frac{1}{d} \sin \beta_{3o} & -\frac{1}{d} \cos \beta_{3o} & -\frac{l}{d} \sin \beta_{3o} - 1 \\ \frac{1}{r} \sin \beta_{1o} & -\frac{1}{r} \cos \beta_{1o} & -\frac{l}{r} \cos \beta_{1o} \\ -\frac{1}{r} \sin \beta_{2o} & \frac{1}{r} \cos \beta_{2o} & -\frac{l}{r} \cos \beta_{2o} \\ -\frac{1}{r} \cos \beta_{3o} & -\frac{1}{r} \sin \beta_{3o} & -\frac{l}{r} \cos \beta_{3o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$
(2,0)	$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \\ \beta_{3o} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \text{ ou }$ $\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{3o} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{d} \cos \beta_{3o} & -\frac{l}{d} \sin \beta_{3o} - 1 \\ -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} \\ -\frac{1}{r} \sin \beta_{3o} & -\frac{l}{r} \cos \beta_{3o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$
(2,1)	$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \\ \beta_{1c} \\ \beta_{2o} \\ \beta_{3o} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{1c} \\ \dot{\beta}_{2o} \\ \dot{\beta}_{3o} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta+\beta_{1c}) & 0 & 0 \\ \cos(\theta+\beta_{1c}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{d} \cos(\pi/4+\beta_{1c}-\beta_{2o}) & -\frac{\sqrt{2}}{d} l \sin \beta_{2o} - 1 & 0 \\ \frac{1}{d} \cos(\pi/4+\beta_{1c}-\beta_{3o}) & -\frac{\sqrt{2}}{d} l \sin \beta_{3o} - 1 & 0 \\ -\frac{1}{r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} \cos(\beta_{1c}-\pi/4-\beta_{2o}) & -\frac{\sqrt{2}}{r} l \cos \beta_{2o} & 0 \\ \frac{1}{r} \cos(\pi/4+\beta_{3o}) \cos(\beta_{1c}+\sin \beta_{1c}) & -\frac{\sqrt{2}}{r} l \cos \beta_{3o} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \zeta_1 \end{bmatrix}$
(1,1)	$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \\ \beta_{1c} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{1c} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l \sin \theta \sin \beta_{1c} & 0 \\ l \cos \theta \sin \beta_{1c} & 0 \\ \cos \beta_{1c} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{r} l (\cos \beta_{1c} + \sin \beta_{1c}) & 0 \\ \frac{1}{r} l (\cos \beta_{1c} - \sin \beta_{1c}) & 0 \\ -\frac{l}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \zeta_1 \end{bmatrix}$
(1,2)	$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \\ \beta_{1c} \\ \beta_{2c} \\ \beta_{3o} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{1c} \\ \dot{\beta}_{2c} \\ \dot{\beta}_{3o} \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l(\sin \beta_{1c} \sin(\theta+\beta_{2c}) + \sin \beta_{2c} \sin(\theta+\beta_{1c})) & 0 & 0 \\ l(\sin \beta_{1c} \cos(\theta+\beta_{2c}) + \sin \beta_{2c} \cos(\theta+\beta_{1c})) & 0 & 0 \\ \sin(\beta_{2c}-\beta_{1c}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ * & 0 & 0 \\ -\frac{2l}{r} \sin \beta_{2c} & 0 & 0 \\ -\frac{2l}{r} \sin \beta_{1c} & 0 & 0 \\ ** & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$
$* = \frac{l}{d} \sin(\beta_{1c} + \beta_{2c}) \cos \beta_{3o} - \frac{1}{d} \sin(\beta_{2c} - \beta_{1c})(d + l \sin \beta_{3o}) + \frac{2l}{d} \sin \beta_{1c} \sin \beta_{2c} \sin \beta_{3o}$		
$** = -\frac{l}{r} (\cos \beta_{3o} \sin(\beta_{2c} - \beta_{1c}) \sin(\beta_{1c} + \beta_{2c}) \sin \beta_{3o} - 2 \cos \beta_{3o} \sin \beta_{1c} \sin \beta_{2c})$		

restrições pfaffianas na forma (2.14) não são reais e que é preciso procurar um campo vetorial complementar para a distribuição aniquiladora $\Delta(q)$, tal que o comportamento desse campo vetorial no tempo permita a aniquilação completa da co-distribuição $\Omega(q)$.

2.3.9 Redutibilidade do modelo cinemático de configuração

De forma similar ao que foi analisado para o modelo (2.27), o modelo de configuração cinemática definido por (2.31) é redutível se existe uma transformação de coordenadas tal que algumas das novas coordenadas podem ser relacionadas por uma identidade que é igual a zero ao longo do movimento da BMR. De outra forma, as colunas da matriz $S(q)$ definem uma base em $\mathbb{R}^{3+\delta_d+N_o+N}$, e se alguma dessas colunas puder ser reescrita como combinação linear das restantes, então tem-se que a base pode ser reduzida em *um* campo vetorial, e o espaço gerado por essas colunas seria a distribuição $\Delta(q)$ em (2.35); que pode ser regular sempre que seja garantida uma apropriada configuração dos ângulos contidos no vetor β_c .

Pelos Lemas 2.3 e 2.4, o fechamento involutivo $\bar{\Delta}(q)$ é definido pelas colunas linearmente independentes de $\Delta(q)$ e seus colchetes de Lie. Da mesma forma que no Lema 2.7 a redutibilidade do modelo cinemático de configuração é formalmente definida pela proposição seguinte:

Proposição 2.4 (Redutibilidade do modelo cinemático de configuração (Campion *et al.* 1996)). *Uma BMR com modelo cinemático de configuração definido pelo modelo (2.31) é redutível se, e somente se,*

$$\dim \{\bar{\Delta}(q)\} < \dim \{q\} = 3 + \delta_d + N_o + N.$$

A redutibilidade de (2.31) significa que existe no mínimo uma função suave em q , envolvendo explicitamente no mínimo um dos vetores variáveis β_c e φ , que é constante ao longo das trajetórias executadas pela BMR e, *a priori*, sujeitas às restrições definidas por (2.14). Essa discussão é ilustrada novamente com os exemplos do AXEBOT e do HILARE no Apêndice A, Subseção A.2.2.

2.3.10 Grau de não-holonomia δ_h

Pelo Teorema 2.1 [Teorema de Frobenius] e o Lema 2.6, a distribuição $\Delta(q)$ deve ser involutiva para ser integrável, ou holonômica. Em princípio pode-se calcular o fechamento involutivo $\bar{\Delta}(q)$ e verificar se possui igual dimensão que a distribuição $\Delta(q)$. Do contrário, a diferença de dimensão existente entre as duas distribuições é uma consequência direta de que algumas das restrições pfaffianas contidas em $A^T(q)$ sejam não integráveis, ou mesmo dizer, não-holonômicas (Campion *et al.* 1996).

Se as colunas de $S(q)$ são linearmente independentes para $\forall q$, e os ângulos em β_c são apropriadamente configurados, então a distribuição $\Delta(q)$ possui dimensão igual ao grau de manobrabilidade δ_u (pois $\eta \in \mathbb{R}^{\delta_m+\delta_d}$ em (2.31)), ao mesmo tempo que o modelo (2.31) pode ser holonômico ou não. Isso pode ser formalmente estabelecido como:

$$\delta_m + \delta_d = \delta_u = \dim \{\Delta(q)\} \leq \dim \{\bar{\Delta}(q)\} \leq 3 + \delta_d + N_o + N. \quad (2.36)$$

Claramente a inequação direita de (2.36) é associada com a redutibilidade do modelo cinemático de configuração (2.31) e a inequação esquerda é associada com a sua integrabilidade (Campion *et al.* 1996).

Proposição 2.5 (Grau de não-holonomia). *Uma BMR com modelo cinemático de configuração definido pelo modelo (2.31) tem um grau de não-holonomia definido por*

$$\delta_h = \dim \{\bar{\Delta}(q)\} - \dim \{\Delta(q)\}.$$

O número δ_h representa o número de campos vetoriais que não fazem parte da distribuição involutiva e, por consequência, do fechamento involutivo $\bar{\Delta}(q)$. Mas, pelo Lema 2.6 e sabendo que $\Delta(q)$ é uma distribuição aniquiladora das uma-formas em $\Omega(q)$, então δ_h está associado com o número de restrições de velocidade que não são integráveis e que não podem ser eliminadas independentemente do sistema de coordenadas usado.

Dos exemplos apresentados no Apêndice A, Seção A.2, pode-se calcular os graus de não-holonomia para o AXEBOT e o HILARE, sendo $\delta_h = 2$ para as duas BMRs. Este resultado

permite assegurar que o AXEBOT possui duas restrições não-holonômicas e uma holonômica [essa BMR pode ser projetada com três rodas suecas ou três rodas orientáveis fora do centro e uma restrição para cada roda]. Ou seja, a BMR é parcialmente holonômica e os pontos atingíveis no espaço de configurações são restritos. No caso do HILARE, ele possui duas restrições não-holonômicas que são apenas suficientes para garantir que nenhum ponto atingível do espaço de configurações seja restrito, devido a essa BMR possuir duas rodas padrão fixas, uma para cada restrição.

Observação 2.4 (Interpretação sobre δ_h e redutibilidade do modelo cinemático de configuração): O grau de não-holonomia fornece então informação necessária sobre o espaço de configurações que é restrito quando uma BMR executa uma trajetória e a redutibilidade nos permite executar esse movimento com um número menor de coordenadas generalizadas, o que também coopera na redução dimensional dos problemas associados com síntese de controladores de trajetória para tais BMRs.

2.4 Controlabilidade do modelo cinemático de configuração

O modelo cinemático de configuração para BMRs definido por (2.31) é dito *livre de deriva*, o que significa dizer que quando os controles são colocados em zero, os estados do sistema não se alteram.

Da mesma forma que já foi apresentado na equação (2.2), o modelo (2.31) pode ser representado na forma:

$$\dot{q} = \underline{s}_1(q)\eta_1 + \underline{s}_2(q)\eta_2 + \dots + \underline{s}_{\delta_u}(q)\eta_{\delta_u}, \quad q \in \mathbb{R}^{3+N_o+\delta_d+N}, \eta \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{\delta_u}. \quad (2.37)$$

Considerando-se cada $\underline{s}_i(q)$ como um campo vetorial suave, linearmente independentes sobre $\mathbb{R}^{3+N_o+\delta_d+N}$ e com fluxos definidos para todo tempo, deseja-se determinar, pela escolha de um sinal η adequado, as condições sob as quais pode-se deslocar o sistema de $q_0 \in \mathbb{R}^{3+N_o+\delta_d+N}$ para um $q_f \in \mathbb{R}^{3+N_o+\delta_d+N}$ arbitrário.

O sistema definido por (2.37) é controlável se para qualquer $q_0, q_f \in \mathbb{R}^{3+N_o+\delta_d+N}$ existe um $T > 0$ e $\eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{U}$ tal que o sistema satisfaz $q(0) = q_0$ e $q(T) = q_f$. Um sistema é dito ser *localmente controlável* a curto tempo em q_0 se pontos próximos podem ser atingidos num intervalo de tempo arbitrariamente curto e o mesmo permanece sempre próximo de q_0 .

Dado um conjunto aberto $V \subseteq \mathbb{R}^{3+N_o+\delta_d+N}$, define-se $\mathcal{R}^V(q_0; T)$ como sendo o conjunto de estados q tal que existe $\eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{U}$ que desloca o sistema de $q(0) = q_0$ até $q(T) = q_f$ e satisfaz $q(t) \in V$ para $0 \leq t \leq T$. Também define-se

$$\mathcal{R}^V(q_0; t \leq T) = \bigcup_{0 \leq \tau^* \leq T} \mathcal{R}^V(q_0; \tau^*)$$

como sendo os estados atingíveis até o tempo T . Um sistema é localmente controlável a curto tempo se $\mathcal{R}^V(q_0; t \leq T)$ contém uma vizinhança de q_0 para todas as vizinhanças de V de q_0 e $T > 0$.

Dependendo da configuração apropriada de η é possível se movimentar ao longo de todos os colchetes de Lie gerados pelo campos vetoriais $\underline{s}_1(q), \underline{s}_2(q), \dots, \underline{s}_{\delta_u}(q)$. Esse fato foi originalmente sustentado por W.-L. Chow em 1940 por meio do teorema a seguir

Teorema 2.2 (Teorema de Chow (Murray *et al.* 1994)). *O sistema definido por (2.37) é localmente controlável em $q \in \mathbb{R}^{3+N_o+\delta_d+N}$ se $\bar{\Delta}(q) = T_q \mathbb{R}^{3+N_o+\delta_d+N}$.*

O teorema de Chow comprova que um sistema sem deriva é controlável se o posto da matriz de controlabilidade da álgebra de Lie é $3 + N_o + \delta_d + N$. A condição do Teorema 2.2 [Teorema de Chow] consiste em verificar o posto da álgebra de Lie de controlabilidade e será aqui referenciado como *condição de posto de controlabilidade*.

Proposição 2.6 (Condição de posto de controlabilidade). *Se $\bar{\Delta}(q) = T_q \mathbb{R}^{3+N_o+\delta_d+N}$ para todo q em alguma vizinhança de q_0 , então para qualquer $T > 0$ e uma vizinhança V de q_0 , $\mathcal{R}^V(q_0; \leq T)$ é não-vazio.*

Prova: A demonstração da Proposição 2.6 é feita por recursão e pode ser encontrada em Murray *et al.* (1994) (pp. 330). ■

No Apêndice A, Seção A.3, é verificada a controlabilidade do modelo cinemático de configuração (2.31) para as BMRs dos robôs HILARE e AXEBOT.

Em princípio, tem-se agora um método para resolver o problema do planejamento de movimento para sistemas que satisfaçam a condição de posto de controlabilidade. Seja este método definido pela proposição seguinte:

Proposição 2.7 ((Murray *et al.* 1994)). *Dado um ponto inicial q_0 e um ponto final q_f , encontra-se um número finito de caminhos intermediários $q_1, q_2, \dots, q_p \in \mathbb{R}^{3+N_o+\delta_d+N}$ e vizinhanças de $\mathbb{V}_i$ tal que*

$$\bigcup_{i=1}^p \mathcal{R}^{\mathbb{V}_i}(q_i; \leq T)$$

contenha segmentos de linha reta conectando q_0 a q_f .

Observação 2.5 (Interpretação Teorema de Chow): Com o Teorema 2.2 e a condição de posto de controlabilidade, existe uma lei de controle com p segmentos que desloca o sistema de q_0 até q_f . A dificuldade desse procedimento é que eles não mostram como construir o caminho juntando q_0 a q_f , só provam sua existência.

2.5 Modelo genérico de configuração dinâmica: formalismo de Euler-Lagrange

As restrições cinemáticas, integráveis ou não, associadas com a velocidade das coordenadas generalizadas, definidas em forma compacta por (2.14), são asseguradas pelas forças de restrição [por instância, são as forças aplicadas pela superfície de contato por meio das rodas à BMR em uma trajetória qualquer] (Lemos 2007, Figueiredo & Jota 2004). O cálculo dessas forças requer da derivação de um modelo dinâmico para a BMR.

Os modelos dinâmicos geralmente estão na forma Euler-Lagrange (Lewis *et al.* 1999b, Selmic & Lewis 2000), Hamiltoniana (Bloch *et al.* 2000, Bétourné & Campion 1996, Yun & Sarkar 1998, Gu & Loh 1985) ou Newtoniana (Altpeter 1999, Wei *et al.* 2004); o que conduz ao desenvolvimento de equações de movimento para diversas localizações da BMR em termos de parâmetros associados a seus elementos estruturais⁶. Um fato importante sobre tais modelos dinâmicos é a suposição de que todos os seus elementos estruturais são rígidos. Ou seja, que não estão sujeitos a nenhum tipo de deformação ou carecem de natureza flexível. Métodos convencionais como as formulações de Euler-Lagrange e Newton-Euler podem ser aplicados para obter sistematicamente equações de movimentos dinâmicos (Spong & Vidyasagar 1989, Lewis *et al.* 1999a). Aqui não é apresentada a derivação do modelo dinâmico já que existem várias fontes literárias nas quais essa derivação tem sido demonstrada e aplicada para sistemas robóticos [veja por exemplo: Murray *et al.* (1994) e Bloch *et al.* (2000)].

As equações de Lagrange para BMRs usualmente tem a seguinte forma padrão:

$$M(q)\ddot{q} = C(q, \dot{q}) + B(q)\tau + F(q) \quad (2.38)$$

onde $M(q) \in \mathbb{R}^{(3+\delta_d+N_o+N) \times (3+\delta_d+N_o+N)}$ é a matriz de inércia da BMR; $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{(3+\delta_d+N_o+N)}$ é o vetor com os torques de força centrífuga/coriolis e decorrentes da gravitação; $\tau \in \mathbb{R}^N$ é o vetor que possui os torques aplicados pelos atuadores à BMR.

Aqui é assumido que a BMR é completamente manobrável, ou seja, que existem δ_u controles disponíveis. $B(q) \in \mathbb{R}^{(3+\delta_d+N_o+N) \times \delta_u}$ é assumida ser uma matriz de posto completo e $F(q) \in \mathbb{R}^{3+\delta_d+N_o+N}$ é o vetor de forças generalizadas correspondentes às forças de restrição que asseguram que (2.14) seja satisfeita. No caso particular das BMRs, pela interpretação dada na literatura associada a locomoção de BMRs, essas forças estão fortemente associadas com as *forças de tração* (Balakrishna & Ghosal 1995, Williams *et al.* 2002), que por sua vez representam a natureza do contato entre a roda e a superfície.

⁶Ex: rodas, base móvel, sistemas de engrenagens, etc.

2.5.1 Forças de restrição

Assumindo que uma BMR é um sistema totalmente rígido, então, pelo uso da equação (2.14), podemos dizer, se assumido que as restrições são satisfeitas, que a potência das forças de restrição são iguais a zero para qualquer trajetória executada pela BMR, ou seja:

$$A^T(q)\dot{q} = F^T(q)\dot{q} = 0.$$

Pela expressão anterior, pode-se dizer que $F(q)$ é paralelo a $A(q)$, ou seja que deve existir um vetor $\lambda \in \mathbb{R}^{K_r}$ chamado de *vetor de multiplicadores de Lagrange* tal que

$$F(q) = A(q)\lambda. \quad (2.39)$$

O sistema da BMR é então modelado completamente pelo modelo cinemático de configuração (2.31) e as equações de Lagrange em (2.38), onde $F(q)$ tem sido formulado como (2.39):

$$M(q)\ddot{q} = C(q, \dot{q}) + B(q)\tau + A(q)\lambda. \quad (2.40)$$

Pela multiplicação à esquerda de $S^T(q)$ em (2.40), e pelo uso da equação (2.33), os multiplicadores de Lagrange λ podem ser eliminados, resultando em

$$S^T(q)M(q)\ddot{q} = S^T(q)[C(q, \dot{q}) + B(q)\tau]. \quad (2.41)$$

De (2.31), tem-se que

$$\ddot{q} = \frac{\partial S}{\partial q}\dot{q}\eta + S(q)\dot{\eta} = \left[\frac{\partial S}{\partial q}S(q)\eta \right] \eta + S(q)\dot{\eta}$$

e substituindo este resultado em (2.41), pode-se reescrever este último como

$$[S^T(q)M(q)S(q)] \dot{\eta} = S^T(q) \left\{ -M(q) \left[\frac{\partial S}{\partial q}S(q)\eta \right] \eta + C(q, S(q)\eta) + B(q)\tau \right\}. \quad (2.42)$$

As equações (2.31) e (2.42) constituem a descrição completa do modelo dinâmico da BMR, e pode ser, ainda, expressada em forma de espaço-estados com o vetor de estados:

$$[q \ \eta]^T \in \mathbb{R}^{3+\delta_d+N_o+N+\delta_u},$$

tal que

$$\begin{bmatrix} I_{(3+\delta_d+N_o+N) \times (3+\delta_d+N_o+N)} & 0_{(3+\delta_d+N_o+N) \times \delta_u} \\ 0_{\delta_u \times (3+\delta_d+N_o+N)} & S^T(q)M(q)S(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(q)\eta \\ -S^T(q)M(q) \left[\frac{\partial S}{\partial q}S(q)\eta \right] \eta + S^T(q)C(q, S(q)\eta) + S^T(q)B(q)\tau \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Vale salientar que o modelo (2.43) equivale ao *modelo rígido* da BMR, ou seja que não está sujeito a um tipo de deformação ou propriedade flexível. O valor dos multiplicadores de Lagrange λ pode ser deduzido depois de multiplicar à esquerda por $A^T(q)$ em (2.40) e usando (2.31):

$$A^T(q)A(q)\lambda = [A^T(q)M(q)S(q)] \dot{\eta} + A^T(q) \left\{ M(q) \left[\frac{\partial S}{\partial q}S(q)\eta \right] \eta - C(q, S(q)\eta) - B(q)\tau \right\}$$

onde $A^T(q)A(q)$ é uma matriz não-singular.

2.5.2 Modelo genérico de linearização por realimentação não-linear de estados

Visto que o posto de $B(q)$ foi assumido ser completo [ou seja, igual a δ_u], o posto de $S^T(q)B(q)$ pode também ser assumido completo. Logo, a matriz $S^T(q)M(q)S(q)$ é não-singular e, por dinâmica inversa, podemos sintetizar a seguinte lei de controle para linearização por

realimentação:

$$\tau = [S^T(q)B(q)]^{-1} \left\{ S^T(q) \left[M(q)S(q)v + M(q) \left[\frac{\partial S}{\partial q} S(q)\eta \right] \eta - C(q, S(q)\eta) \right] \right\}. \quad (2.44)$$

Observação 2.6 (Condição de linearização): Claramente, por substituição de (2.44) em (2.42), observa-se que a lei de controle (2.44) garante que

$$\dot{\eta} = v \quad (2.45)$$

sendo $v \in \mathbb{R}^{\delta_u}$ uma entrada de referência arbitrária.

Nota-se que τ em (2.44) é uma lei por realimentação de estados que depende de q e η . Mas as quantidades que são usualmente medidas, em casos práticos, são as coordenadas generalizadas q e as velocidades generalizadas $\dot{q}$. Não obstante, usando-se (2.31), η pode ser obtido de q e $\dot{q}$ como segue:

$$\eta = S^+(q)\dot{q} = [S^T(q)S(q)]^{-1} S^T(q)\dot{q}$$

sendo $S^+(q)$ a pseudo-inversa de $S(q)$.

O modelo linearizado definido por (2.31) e (2.45) não é realista na prática. Em situações reais, as restrições cinemáticas não são satisfeitas pelas BMRs. Tal acontecimento não garante que as forças de restrição tenham os valores adequados para permitir que as restrições cinemáticas sejam satisfeitas. No próximo Capítulo, será apresentada uma formulação que envolve equações físicas admissíveis para as forças de restrição e que considera pequenos desvios em relação ao modelo real.

2.6 Resumo

Neste capítulo, foi observado que as restrições cinemáticas para as BMR, modeladas na sua formulação pfaffiana, são satisfeitas sempre que não exista deslizamento e derrapagem [veja Subseção 2.3.2]. Essas restrições foram classificadas como integráveis e não-integráveis ou, mesmo dizer, holonômicas e não-holonômicas, respectivamente. Dentre os cinco tipos de configuração possíveis com no mínimo duas rodas ativas [mencionadas na Subseção 2.3.1] o modelo cinemático de posição (2.27) é sempre irredutível. Dentre os sete modelos cinemáticos de configuração [apresentados na Tabela 2.2] foi verificado que a redutibilidade do modelo cinemático de configuração equivale à diferença entre a dimensão do espaço de coordenadas generalizadas e o fechamento involutivo do espaço gerado por uma distribuição $\Delta(q)$ [veja Proposição 2.4]. O grau de não-holonomia, em conjunto com a redutibilidade do modelo cinemático de configuração, pode ser usado para estabelecer a informação sobre as restrições de velocidade que não são integráveis no momento de executar um movimento sobre uma trajetória e com a utilização de um número menor de coordenadas generalizadas. Adicionalmente, no que corresponde à controlabilidade de BMRs, foi observado que o Teorema de Chow [Teorema 2.2] permite verificar a controlabilidade de uma BMR para uma trajetória qualquer dentro do espaço de fase das coordenadas generalizadas, mas não apresenta uma solução formal a esse seguimento. Na Seção 2.5, é citada e feita uma reconstrução rápida do modelo dinâmico sobre as coordenadas generalizadas usando uma abordagem lagrangeana e considerando-se forças de restrição que satisfazem as restrições cinemáticas. Logo, usando dinâmica inversa, a modelagem dinâmica de uma BMR pode ser linearizada na técnica comumente conhecida como torque calculado. Como resultado dessa linearização a aceleração da BMR no marco local $\{R\}$ será equivalente a uma ação de controle auxiliar que contém a dinâmica desejada.

Controle de trajetória: Uma abordagem baseada em perturbações singulares

Embora os modelos para BMRs totalmente rígidos tenham sido úteis em muitas aplicações de controle de trajetória, quando é assumido que as restrições cinemáticas são satisfeitas é preciso mudar a abordagem para uma aproximação que considere a flexibilidade e a violação das restrições. Essa consideração permite utilizar a teoria de perturbações singulares para descrever dinâmicas lentas e dinâmicas rápidas associadas respectivamente com a dinâmica rígida da BMR e com a violação das restrições cinemáticas.

3.1 Introdução

Pela existência de contribuições bibliográficas com soluções propostas para o problema de seguimento de trajetória de BMRs, é bem sabido que não existe uma lei de controle por realimentação de estados não-linear e suave tal que o estado do sistema associado convirja à origem¹ (Brockett 1983, Dong 2010, Dixon *et al.* 2000, Arnol'd 1994, Khaneja & Brockett 1999, D'Andréa-Novel *et al.* 1992). Para superar essa dificuldade, têm sido propostos vários tipos de controladores, tais como leis de controle variáveis no tempo, leis de controle descontínuas e leis de controle híbridas (Kolmanovsky & McClamroch 1995, Sira Ramirez & Lischinsky Arenas 1990, Walsh *et al.* 1994, Jiang & Pomet 1994, Jiang & Praly 1998, Jiang 2000a, Wei *et al.* 2007, Yun & Yamamoto 1993, Zhao *et al.* 2009, Low & Wang 2008, Low & Wang 2010, Perez *et al.* 2003, Wang *et al.* 2012, Michalek *et al.* 2009, Fernández *et al.* 2013, Lewis *et al.* 1999b, Jang *et al.* 2005, Barreto *et al.* 2013).

As técnicas para controle de trajetória têm sido baseadas em técnicas de linearização para controladores locais de trajetória (Kanayama *et al.* 1990, Walsh *et al.* 1994, Fierro & Lewis 1998); em técnicas de linearização por realimentação de estados não-linear com parâmetros singulares (D'Andréa-Novel *et al.* 1991, D'Andréa-Novel *et al.* 1995, Leroquais & D'Andrea-Novel 1996, Motte & Campion 2000, Liu *et al.* 2008); ou também, em técnicas baseadas em *backstepping* (Jiang 2000b, Jiang & Nijmeijer 1999, Jiang & Pomet 1994, Fierro & Lewis 1995, Dong & Kuhnert 2005).

Um fato de grande relevância é quando levam-se em consideração efeitos degenerativos às soluções do problema de seguimento de trajetória, tais como, escorregamento [nos seus dois componentes: derrapagem e deslizamento], e deformação de contato [ou flexibilidade]. Sobre essas considerações é preciso reformular as equações físicas que modelam as forças de restrição (Canudas de Wit *et al.* 2003). Como consequência disso, a dinâmica do sistema adquire uma nova representação e aparece uma interrelação entre os efeitos degenerativos e a violação das restrições cinemáticas (Shekhar 1997, Dong 2010, D'Andréa-Novel *et al.* 1995). Assim, nesta tese serão levados em consideração pequenos desvios com relação ao caso ideal, ou seja o caso onde

¹Verificar o Teorema 1, pp. 186 em Brockett (1983).

as restrições cinemáticas são satisfeitas. Tais desvios serão modeladas por um pequeno fator de escala positivo que tem um papel importante na caracterização da violação das restrições cinemáticas, na influência do escorregamento e na flexibilidade dentro do modelo dinâmico.

Em algumas contribuições encontradas nas referências bibliográficas, foram derivadas formulações baseadas em teoria de perturbações singulares que permitiam fazer um estudo da robustez de leis de controle para linearização por realimentação não-linear de estados que utilizavam o fator de escala para representar a deformação das rodas. Os controladores projetados faziam com que o erro de seguimento permanecesse limitado, no entanto, sem convergência a zero (D’Andréa-Novel *et al.* 1995, Leroquais & D’Andrea-Novel 1996, Liu & Zhu 2007).

Em (Motte & Campion 2000), o problema da convergência foi abordado usando a teoria de perturbações singulares para síntese de leis de controle robustas que incluíam dinâmicas rápidas, associadas com a violação das restrições cinemáticas, e com a deformação das rodas em uma BMR tipo (2,0). Já em (Liu *et al.* 2008), um controlador não-linear de trajetória foi desenvolvido e projetado para uma BMR tipo (3,0) por meio da metodologia TLC [do inglês *Trajectory Linearization Control*] que consiste em um laço externo de controle cinemático e um laço interno de controle dinâmico; assumindo sempre que o laço interno é exponencialmente estável².

3.2 Modelo singularmente perturbado para BMRs

Quando as restrições cinemáticas não são satisfeitas não é mais possível representar as forças de restrição pelos multiplicadores de Lagrange [como foi apresentado em (2.39)], senão por equações que caracterizem a natureza do contato entre a roda e a superfície (Motte & Campion 2000). Consequentemente, as forças de restrição são modeladas de acordo com suas propriedades dissipativas, da mesma forma que as forças de tração estão fortemente relacionadas com a derrapagem e o deslizamento [Veja para exemplificar D’Andréa-Novel *et al.* (1995), Leroquais & D’Andrea-Novel (1996), Motte & Campion (2000), Dong (2010), Bazzi *et al.* (2014), Tian & Sarkar (2012), Tian & Sarkar (2013) e Thuilot (1995)].

3.2.1 Forças de restrição dissipativas

Considerando que as restrições pfaffianas não são satisfeitas e assumindo que as forças de restrição são sempre não-nulas, é possível introduzir uma hipótese que assegure a dissipação dessas forças.

Suposição 3.1 (Forças de restrição dissipativas (D’Andréa-Novel *et al.* 1995)). *A potência das forças é, conjuntamente, uma função semi-definida negativa das velocidades generalizadas; ou mesmo dizer*

$$W(\dot{q}) \leq 0. \quad (3.1)$$

A Suposição 3.1 quer dizer precisamente que $W(\dot{q})$ é zero quando as restrições cinemáticas são satisfeitas, e negativa quando não. De acordo com ela, é conveniente expressar $W(\dot{q})$ como uma forma quadrática das restrições pfaffianas; ou seja

$$W(\dot{q}) = -\frac{1}{\varepsilon} [\dot{q}^T A(q)] K(q, \dot{q}) [A^T(q) \dot{q}] \quad (3.2)$$

sendo $K(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{(2N-N_s) \times (2N-N_s)}$ uma matriz definida positiva e $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ um fator de escala positivo, cuja interpretação dentro da dinâmica da BMR será discutida posteriormente.

A força generalizada F associada com as forças de restrição pode ser deduzida de (3.2) como

$$W(\dot{q}) = \dot{q}^T F(q) \quad (3.3)$$

o que implica que

$$F(q, \dot{q}) = -\frac{1}{\varepsilon} A(q) K(q, \dot{q}) A^T(q) \dot{q}. \quad (3.4)$$

²Dessa forma, o laço externo pode ser projetado ignorando a dinâmica do laço interno. Tal abordagem tem sido usada em conjunto com a teoria de perturbações singulares para conseguir estabilidade robusta [veja p.ex.: (Liu & Zhu 2007, Liu *et al.* 2008)]

O fator de escala ε , na abordagem baseada em perturbações singulares, representa o *parâmetro de perturbação* (Khalil 2002). De (3.4) pode-se observar que a força $F(q, \dot{q})$ é proporcional a $A^T(q)\dot{q}$ e a uma matriz de ponderação $\frac{1}{\varepsilon}K(q, \dot{q})$, que é usada para inserir deformação [flexibilidade ou rigidez]. Quando $\varepsilon \rightarrow 0$ os elementos da matriz $\frac{1}{\varepsilon}K(q, \dot{q})$ tendem para infinito. No caso particular em que as forças de restrição são nulas então $A^T(q)\dot{q}$ tende para zero. Ou seja, as restrições cinemáticas são satisfeitas.

3.2.2 Modelo dinâmico genérico singularmente perturbado para BMRs

Como as restrições cinemáticas não são satisfeitas, $\dot{q}$ não pode ser gerada completamente pela distribuição $\Delta(q)$ definida em (2.35) e deve existir uma base de campos vetoriais complementar tal que a configuração cinemática seja totalmente descrita. Dessa forma, $\dot{q}$ tem um complemento no espaço ortogonal³ ao espaço gerado por $\Delta(q)$, ou seja, $\text{Im}\{A(q)\} \in \Omega(q) \subseteq \mathbb{R}^{3+N_o+\delta_d+N}$. Logo, $\dot{q}$ pode ser reescrito como:

$$\dot{q} = S(q)\eta + A(q)c,$$

sendo $c \in \mathbb{R}^{K_r}$ [para $A(q)c \in \text{Im}\{A(q)\}$] um vetor conhecido.

No caso particular das BMRs com restrições de movimento, o vetor c pode ser representado pelo produto $\varepsilon\mu$ (D'Andréa-Novet *et al.* 1995, Spong *et al.* 1987). Assim,

$$\dot{q} = S(q)\eta + A(q)\varepsilon\mu = \begin{bmatrix} S(q) & A(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \varepsilon\mu \end{bmatrix}, \quad \left(\text{ou, } \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\beta}_o \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1(q) \\ S_2(q) \end{bmatrix} \eta + \begin{bmatrix} A_1(q) \\ A_2(q) \end{bmatrix} \varepsilon\mu \right) \quad (3.5)$$

sendo $\mu \in \mathbb{R}^{K_r}$ um vetor associado com o grau de violação das restrições cinemáticas, e $\begin{bmatrix} S(q) & A(q) \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada não-singular. Agora, multiplicando-se à esquerda por $A^T(q)$ em (3.5) obtém-se

$$A^T(q)\dot{q} = A^T(q)S(q)\eta + A^T(q)A(q)\varepsilon\mu$$

e aplicando-se (2.33), tem-se:

$$A^T(q)\dot{q} = A^T(q)A(q)\varepsilon\mu.$$

Lema 3.1 (Restrição Pfaffiana com parâmetro de perturbação). *Assumindo-se que para uma BMR a Suposição 3.1 é satisfeita, as restrições pfaffianas são modeladas por:*

$$A^T(q)\dot{q} = A^T(q)A(q)\varepsilon\mu, \quad (3.6)$$

sendo ε o parâmetro de perturbação.

Usando (3.6), a expressão (3.4) pode ser reescrita como:

$$F(q, \dot{q}) = -A(q)K(q, \dot{q})A^T(q)A(q)\mu \quad (3.7)$$

sendo que $K(q, \dot{q}) = K(q, \eta, \varepsilon\mu) = K(q, S(q)\eta + A(q)\varepsilon\mu)$.

Observação 3.1 (Restrições pfaffianas escalonadas por ε): A equação (3.6) mostra que as restrições pfaffianas [ou $A^T(q)\dot{q}$] podem ser expressas em termos da magnitude de ε . De outra forma, a violação das restrições de velocidade pode ser medida pelo vetor $\varepsilon\mu$ sendo que ε é o fator que escala essa violação. Obviamente, o caso em que $\varepsilon = 0$ equivale ao caso ideal [em (2.31)].

Modelo singularmente perturbado: formulação espaço-estados

O modelo dinâmico genérico, dentro da abordagem de perturbações singulares para BMRs, é definido pelo seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} = Z(x, \mu, \varepsilon, t), & x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{\mu} = G(x, \mu, \varepsilon, t), & \mu(0) = \mu_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

³Lembrando que $\Omega(q) \approx \Delta^\perp(q)$. Assim as colunas de $A(q)$ [ou linhas de $A^T(q)$] são ortogonais às colunas de $S(q)$.

onde $x = [q \ \eta]^T \in \mathbb{R}^{3+\delta_d+N_o+N+\delta_u}$ é o vetor de variáveis lentas, $\mu \in \mathbb{R}^{K_r}$ é o vetor de variáveis rápidas (D'Andréa-Novel *et al.* 1995); os campos vetoriais $Z(x, \mu, \varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{3+\delta_d+N_o+N+\delta_u}$ e $G(x, \mu, \varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{K_r}$ são definidos como

$$Z(x, \mu, \varepsilon, t) = \begin{bmatrix} S(q)\eta + A(q)\varepsilon\mu \\ D_1(q)\tau + \rho_1(q, \eta, \mu, \varepsilon) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G(x, \mu, \varepsilon, t) = D_2(q)\tau + \rho_2(q, \eta, \mu, \varepsilon);$$

e assumidos continuamente diferenciáveis em seus parâmetros $(x, \mu, \varepsilon, t) \in D_x \times D_\mu \times [0, \varepsilon_0] \times [0, t]$, onde $D_x \subseteq \mathbb{R}^{3+\delta_d+N_o+N+\delta_u}$ e $D_\mu \subseteq \mathbb{R}^{K_r}$ são conjuntos conexos e abertos. A entrada τ é uma ação de controle por realimentação de estados no tempo t , ou seja,

$$\tau \triangleq \tau(q, \eta). \quad (3.10)$$

Observação 3.2 (Notação): Visto que $x = [q \ \eta]^T$ neste documento considera-se que uma função qualquer que dependa explicitamente de q , η ou ambos possa ser expressa como uma função de x ; p.ex: $\tau(x) = \tau(q, \eta)$, $\rho_2(q, \eta, \mu, \varepsilon) = \rho_2(x, \mu, \varepsilon)$, etc.

No Apêndice B, Seção B.1, é mostrado em detalhe o desenvolvimento do modelo (3.8) - (3.9) [os elementos das matrizes $D_1(q)$, $D_2(q)$, $\rho_1(q, \eta, \mu, \varepsilon)$ e $\rho_2(q, \eta, \mu, \varepsilon)$] e suas propriedades.

Diferentemente do modelo (2.43) que descreve a dinâmica da BMR no espaço de configuração $D_x [\subseteq \mathbb{R}^{3+\delta_d+N_o+N+\delta_u}]$, o sistema (3.8) - (3.9) descreve a configuração dinâmica da BMR dentro do espaço de configuração $D_x \times D_\mu [\subseteq \mathbb{R}^{3+\delta_d+N_o+N+\delta_u+K_r}]$, ou seja, um espaço com K_r variáveis de estado adicionais. Nesse sentido, o modelo (3.8) - (3.9) representa um modelo robusto e conhecido na literatura como *modelo singularmente perturbado padrão* (D'Andréa-Novel *et al.* 1995, Khorasani & Kokotovic 1985, Spong *et al.* 1987, Sobolev 1987, Khalil 2002, Fernández *et al.* 2014c).

Quando $\varepsilon = 0$, a dimensão do sistema (3.8) - (3.9) é reduzida a $3 + \delta_d + N_o + N$, enquanto que (3.9) é reduzida a uma equação algébrica; ou seja:

$$G(x, \mu, 0, t) = 0. \quad (3.11)$$

Definição 3.1 (Modelo singularmente perturbado padrão (Khalil 2002)). *O sistema definido por (3.8) - (3.9) é um **modelo singularmente perturbado padrão** se, e somente se, a equação (3.11) tem $k \geq 1$ raízes distintas isoladas, denotadas por:*

$$\bar{\mu}_i = H_i(\bar{x}, t), \quad i = 1, \dots, k, \quad (3.12)$$

onde $\bar{x} \approx x$.

Para cada i -ésima função $\bar{\mu}_i$ é definido o seguinte sistema reduzido:

$$\dot{\bar{x}} = Z(\bar{x}, H_i(\bar{x}, t), 0, t), \quad \bar{x}(0) = x_0, \quad (3.13)$$

que corresponde ao caso $\varepsilon = 0$.

No espaço de configuração $D_x \times D_\mu [\subseteq \mathbb{R}^{3+\delta_d+N_o+N+\delta_u+K_r}]$ associado com o par (x, μ) o sistema (3.8) - (3.9) é conhecido como *modelo flexível* e o modelo reduzido (3.13) é conhecido como *modelo rígido* [definido na equação (2.43) do Capítulo 2]. No modelo rígido, o conjunto de equações algébricas em (3.12) define uma restrição sobre a configuração de x . Tal restrição faz com que μ e $\dot{\mu}$ sejam funções de x , $\dot{x}$ e τ [τ também é função de x em (3.10)].

Por outro lado, as funções μ e $\dot{\mu}$ definem uma variedade, aqui chamada de *variedade rígida* e denotada por $\mathcal{M}_R$, para descrever a dinâmica da BMR dentro do espaço de configurações $D_x [\subseteq \mathbb{R}^{3+\delta_d+N_o+N+\delta_u}]$. Já no caso do modelo flexível, tal variedade, aqui chamada de *variedade flexível* e denotada por $\mathcal{M}_\mu$, tem uma dependência explícita de x e t .

Definição 3.2 (Variedade flexível (Khalil 2002)). *Para o sistema (3.8) - (3.9) a variedade flexível $\mathcal{M}_\mu$ é definida pela seguinte equação:*

$$\mathcal{M}_\mu : \quad \mu = H(x, t). \quad (3.14)$$

Segundo a literatura associada (Sobolev 1987, Khalil 2002, Khorasani & Kokotovic 1985, Spong *et al.* 1987, Kokotovic & Khalil 1986, Kokotovic *et al.* 1999) perturbações singulares causam um comportamento composto de transitórios rápidos e lentos na resposta do sistema à estímulos externos. Formalmente, o fluxo [solução] de (3.13) é conhecido como *resposta lenta* e o fluxo [solução] de (3.14) é conhecido como *resposta rápida*. Dessa forma, a dinâmica representada por (3.13) é chamada de *dinâmica lenta* [ou *modelo lento*], e a dinâmica representada por (3.14) é chamada de *dinâmica rápida* [ou *modelo rápido*].

Quando as dinâmicas rápidas são assintoticamente estáveis a equação (3.14) será “quase” satisfeita após o decaimento dos transitórios rápidos, da mesma forma que será equivalente com a resposta do modelo (3.13). Logo, o fluxo do sistema (3.8) - (3.9) se aproximará rapidamente da variedade $\mathcal{M}_\mu$ e permanecerá nela. De outra forma, fazendo com que $\varepsilon \rightarrow 0$ o fluxo do sistema (3.8) - (3.9) tenderá à variedade rígida $\mathcal{M}_R$. Esse princípio é a técnica fundamental na qual se baseia a síntese de controladores robustos baseados em teoria de perturbações singulares, como será visto nas sessões posteriores.

3.2.3 Modelo de camada limite: dilatação temporal das dinâmicas rápidas

Pode acontecer que, para pequenos⁴ valores de ε , o fluxo $\bar{x}$ em (3.13) seja uma boa aproximação de x em (3.8) para $\forall t \in [0, T]$, $T \in \mathbb{R}_+$, mas não que $\bar{\mu}$ seja uma boa aproximação de μ para $\forall t$ perto de zero devido que $\mu(0) \neq \bar{\mu}(0) = H_i(x_0, 0)$. Tal aproximação sugere impor um limite sobre t e um modelo reduzido da dinâmica rápida, conhecido na literatura como *modelo de camada limite*. Para entender melhor, e pelo uso de (3.12), seja definida a seguinte transformação de variáveis, assumindo $k = 1$ na Definição 3.1:

$$\hat{\mu}(t) = \mu(t) - \bar{\mu}(t) = \mu(t) - H(\bar{x}, t). \quad (3.15)$$

Definição 3.3 (Modelo de camada limite (D’Andréa-Novell *et al.* 1995, Khalil 2002, Kokotovic & Khalil 1986)). *Seja o modelo de camada limite, definido sobre as coordenadas $\hat{\mu}$, expressado como*

$$\frac{d\hat{\mu}}{dt^*} = G(x_0, \hat{\mu} + H(x_0, t_0), 0, t_0), \quad \hat{\mu}(0) = \mu_0 - H(x_0, t_0) \quad (3.16)$$

onde x_0, t_0 são interpretados como parâmetros fixos e $t^* = t/\varepsilon$.

O tempo t^* na Definição 3.3 representa uma dilatação no eixo temporal governada pelo parâmetro ε . Para efeitos de análise no domínio do tempo, tal dilatação nos permite “desacelerar” a dinâmica rápida e facilita a procura de um limite de tempo que garanta com que $\mu - \bar{\mu} \rightarrow 0$ para $\forall t \in [0, T]$, $T \in \mathbb{R}_+$.

Observação 3.3 (Aproximação de variáveis singularmente perturbadas): Embora a Definição 3.3 seja postulada em relação ao vetor μ , também pode ser aplicada sobre qualquer outra variável de estado de nosso interesse. Imaginemos que x seja uma outra variável de estado de nosso interesse e que existe uma relação como (3.15) associada. Assim, também podemos afirmar que sobre uma dilatação da variável temporal [$t^* = t/\varepsilon$] teremos que $X = \bar{X}$.

Agora, sejam consideradas uma bola aberta centrada na origem e com raio $\bar{r}$ no espaço de configurações das dinâmicas lentas D_x [$\subseteq \mathbb{R}^{3+\delta_d+N_o+N+\delta_u}$], $B_{\bar{r}}(0 : \bar{r})$, e uma bola aberta centrada na origem e com raio $\bar{\rho}$ no espaço de configurações das dinâmicas rápidas D_μ [$\mathbb{R}^{K_r}$], $B_{\bar{\rho}}(0 : \bar{\rho})$. Assim, sejam consideradas as seguintes condições:

Condição 3.1 ((Khalil 2002)). *Existem $T, \bar{r}, \bar{\rho}, \varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que:*

- i) $Z(x, \mu, \varepsilon, t)$, $G(x, \mu, \varepsilon, t)$ e suas derivadas parciais com respeito a x, μ e ε são contínuas em $B_{\bar{r}} \times B_{\bar{\rho}} \times [0, \varepsilon_0] \times [0, T]$,
- ii) A função $H(x, t)$ e o Jacobiano $\partial G(x, \mu, 0, t)/\partial \mu$ têm primeiras derivadas parciais contínuas, e,
- iii) O modelo reduzido (3.13) tem uma única solução $\bar{x}$ definida sobre $[0, T]$ que pertence a $B_{\bar{r}}$.

⁴Na ordem de 10^{-20} .

Condição 3.2 ((Khalil 2002)). *Existe $t^* \geq 0$ tal que:*

- i) $\hat{\mu} = 0$ é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável do modelo de camada limite (3.16), uniformemente limitado nos parâmetros x_0 e t_0 , e,
- ii) $\mu_0 - \bar{\mu}(0)$ pertence ao seu domínio de atração, ou seja, $\lim_{t^* \rightarrow \infty} \hat{\mu}(t^*) = 0$.

O próximo teorema, conhecido como teorema de Tikhonov⁵, estabelece uma relação entre x e $\bar{x}$, por um lado, e entre μ , $\bar{\mu}$ e $\hat{\mu}$, por outro.

Teorema 3.1 (Teorema de Tikhonov (Khalil 2002, D'Andréa-Novel *et al.* 1995)). *Para um sistema na forma padrão (3.8) - (3.9), se as Condições 3.1 e 3.2 são satisfeitas, então existem constantes positivas $\nu_1 \in \mathbb{R}_+$, $\nu_2 \in \mathbb{R}_+$ e $\varepsilon^* \in \mathbb{R}_+$ tal que se $\|x_0\| < \nu_1$, $\|\mu_0 - H(x_0, 0)\| < \nu_2$ e $\varepsilon < \varepsilon^*$, então as seguintes aproximações são válidas para $\forall t \in [0, T]$, $T \in \mathbb{R}_+$:*

$$x(t) = \bar{x}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.17)$$

$$\mu(t) = \bar{\mu}(t) + \hat{\mu}(t^*) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.18)$$

onde $\mathcal{O}(\varepsilon)$ representa um polinômio em termos de ε .

A equação (3.18) implica que existe um tempo $t_1 > 0$ tal que a aproximação

$$\mu(t) = \bar{\mu}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

é válida para $t \in [t_1, T]$. Ambas equações, (3.17) e (3.18), implicam que a diferença entre x e $\bar{x}$, e, entre μ e $\bar{\mu} + \hat{\mu}$ sejam na ordem de ε , mas não que elas sejam limitadas para $t \rightarrow \infty$. Para cada valor de tempo T , a aproximação permanecerá em uma vizinhança de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon)$ que não é uniforme com respeito a T . A condição seguinte assegura a uniformidade:

Condição 3.3 ((D'Andréa-Novel *et al.* 1995)). *A origem do sistema rígido [ou reduzido] (3.13) é exponencialmente estável.*

Com as três condições definidas é possível garantir uma solução para o sistema singularmente perturbado que seja uniforme e, para isso, é citado o seguinte teorema⁶ que estende o Teorema 3.1 ao intervalo de tempo infinito [ou seja, quando $T \rightarrow \infty$].

Teorema 3.2 (Uniformidade com respeito a T (D'Andréa-Novel *et al.* 1995)). *Para um sistema na forma singularmente perturbada padrão (3.8) - (3.9), se as Condições 3.1, 3.2 e 3.3 são satisfeitas, então as aproximações (3.17) e (3.18) são satisfeitas uniformemente com respeito a T .*

Podemos conferir que para o sistema definido por (3.8) - (3.9) o Teorema 3.2 é satisfeito. Com esse propósito, seja postulada a suposição seguinte sobre as forças de restrição, modeladas por (3.7), que facilita com que o Teorema 3.1 seja satisfeito.

Suposição 3.2. *Existe um valor $\alpha > 0$ tal que*

$$K(x, 0) \geq \alpha I_{K_r \times K_r}, \quad \forall x. \quad (3.19)$$

Pela Definição 3.1 e usando a equação (B.5) [do modelo singularmente perturbado mostrado no Apêndice B, Seção B.1], tem-se que para $\varepsilon = 0$ existe a raiz isolada

$$H(x, t) = [A^T(q)A(q)]^{-1} K^{-1}(q, \eta, 0) [A^T(q)A(q)]^{-1} R_{22}^{-1}(q) \\ [R_{12}^T S^T(q) + R_{22}(q)A^T(q)] \left[C(q, S(q)\eta) + B(q)\tau - M(q) \frac{\partial S}{\partial q} S(q)\eta \right] \quad (3.20)$$

que é solução de (3.12). Assim, o modelo definido por (3.8) - (3.9) é um modelo singularmente perturbado padrão e como decorrência da diferenciabilidade dos termos envolvidos em suas equações⁷ e da equação (3.20), a Condição 3.1 é satisfeita.

⁵Veja outras versões do Teorema de Tikhonov em (Kokotovic & Khalil 1986, Kokotovic *et al.* 1999, Khalil 2002).

⁶Em Khalil (2002) [Teorema 10.4 Capítulo 10], é definido um conjunto de especificações técnicas que garantem soluções assintoticamente exponencialmente estáveis e uniformes para sistemas singularmente perturbados.

⁷Veja item (iv) do Lema B.1 mostrada no Apêndice B, Seção B.1

Nesse sentido, modelo de camada limite associado é

$$\frac{d\hat{\mu}}{dt^*} = D_2(q_0)\tau_0 + \rho_2(q_0, \eta_0, \hat{\mu} + H(q_0, \eta_0, \tau_0, t_0), 0, t_0),$$

ou ainda, simplificando-o, como

$$\frac{d\hat{\mu}}{dt^*} = -R_{22}(q_0)A^T(q_0)A(q_0)K(q_0, \eta_0, 0)A^T(q_0)A(q_0)\hat{\mu}, \quad (3.21)$$

onde $\tau_0 = \tau(q_0, \eta_0, t_0)$.

De (3.15), para $\hat{\mu} = 0$, tem-se que

$$0 = D_2(q_0)\tau_0 + \rho_2(q_0, \eta_0, H(q_0, \eta_0, \tau_0, t_0), 0, t_0).$$

Logo, $\hat{\mu} = 0$ é um ponto de equilíbrio.

Assim, de (3.21) é afirmativo dizer que o modelo de camada limite é um sistema linear e invariante no tempo, exponencialmente estável e uniforme em (q_0, η_0) ; ou mesmo dizer em x_0 . Como consequência disso a Condição 3.2 é satisfeita e, pelo Teorema 3.1, as aproximações (3.17) e (3.18) são satisfeitas para $\forall t \in [0, T]$.

Observação 3.4 (A origem do sistema rígido não é exponencialmente estável): O sistema reduzido representa o modelo dinâmico de uma BMR que não satisfaz as restrições pfaffianas [holonômicas ou não-holonômicas], e como foi apresentado na literatura associada, este tipo de sistemas não são estabilizáveis através de leis de controle por realimentação contínuas (Brockett 1983, D'Andréa-Novell *et al.* 1995, Motte & Campion 2000, Campion *et al.* 1991a). Em alguns casos onde as restrições pfaffianas são não-holonômicas, leis de controle por realimentação e difeomorfismos de classe $\mathbb{C}^1$ asseguram a estabilização assintótica. No entanto, tal estabilização não é exponencial, ou seja, a Condição 3.3 não é satisfeita.

Uma forma de garantir que a Condição 3.3 seja satisfeita é assumir que o objetivo de controle é um subconjunto de coordenadas generalizadas do vetor q . No caso de controladores de trajetória o objetivo principal é controlar o vetor z definido em (2.27). Assim, vamos particionar o sistema definido por (3.8) - (3.9) em três partes:

$$\begin{cases} \dot{z} = Z_a(z, w, \mu, \varepsilon, t), & z(0) = z_0 \\ \dot{w} = Z_b(z, w, \mu, \varepsilon, t), & w(0) = w_0 \\ \varepsilon \dot{\mu} = G(z, w, \mu, \varepsilon, t), & \mu(0) = \mu_0 \end{cases} \quad (3.22)$$

$$(3.23)$$

$$(3.24)$$

onde $w = [\beta_o \ \varphi \ \eta]^T \in \mathbb{R}^{N_o+N+\delta_u}$ e os campos vetoriais, $Z_a(z, w, \mu, \varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{3+\delta_d}$ e $Z_b(z, w, \mu, \varepsilon, t) \in \mathbb{R}^{N_o+N+\delta_u}$, são definidos como

$$Z_a(z, w, \mu, \varepsilon, t) = S_1(q)\eta + A_1(q)\varepsilon\mu \quad \text{e} \quad Z_b(z, w, \mu, \varepsilon, t) = \begin{bmatrix} S_2(q)\eta + A_2(q)\varepsilon\mu \\ D_1(q)\tau + \rho_1(q, \eta, \mu, \varepsilon) \end{bmatrix};$$

sendo $A(q) = [A_1(q) \ A_2(q)]^T$; $A_1(q) \in \mathbb{R}^{(3+\delta_d) \times K_r}$ e $A_2(q) \in \mathbb{R}^{(N_o+N+\delta_u) \times K_r}$.

Suposição 3.3. *Existem constantes $T, \bar{r}, \bar{\rho}, \varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $z \in B_{\bar{r}}$; $\mu(t) - H(z, w, t) \in B_{\bar{\rho}}$; $Z_a(z, w, \mu, \varepsilon, t)$, $G(z, w, \mu, \varepsilon, t)$, e suas derivadas parciais são limitadas uniformemente com respeito a w, t e $\varepsilon < \varepsilon_0$.*

Suposição 3.4. *As Condições 3.1 e 3.2 são satisfeitas para o sistema (3.22) - (3.24).*

Suposição 3.5. *Para o sistema*

$$\dot{\hat{z}} = Z_a(z, w, H(z, w, t), 0, t) \quad (3.25)$$

a origem é exponencialmente uniformemente estável com respeito a qualquer função suave w .

Em posse das três suposições anteriores e pelo Teorema 3.1, existem três constantes positivas $\nu_1 \in \mathbb{R}_+$, $\nu_2 \in \mathbb{R}_+$ e $\varepsilon^* \in \mathbb{R}_+$ tal que se $\|z_0\| < \nu_1$, $\|\mu_0 - H(z_0, w_0, 0)\| < \nu_2$ e $\varepsilon < \varepsilon^*$ então as

seguintes aproximações são válidas para $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} z(t) &= \bar{z}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \mu(t) &= \bar{\mu}(t) + \hat{\mu}(t^*) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Devido que $t^* = t/\varepsilon$, e como existe $\varepsilon^* \in \mathbb{R}_+$, então $t^* = t/\varepsilon^*$ é a máxima dilatação possível tal que para $t_1 = t_1^* \varepsilon^* > 0$,

$$\mu(t) = \bar{\mu}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.27)$$

para $\forall t \in [t_1, T]$, $T \in \mathbb{R}_+$. Vale salientar que a condição $\varepsilon < \varepsilon^*$ no Teorema 3.1 [Teorema de Tikhonov] garante que a dilatação temporal da dinâmica rápida seja o suficiente para garantir que (3.26) e (3.27) sejam satisfeitas simultaneamente.

Dessa forma, para o sistema definido somente por (3.22) e (3.24), é garantido que o Teorema 3.1 seja satisfeito, e, pela Suposição 3.5, é assegurado que a Condição 3.3 seja satisfeita. Com as três condições satisfeitas, e pelo Teorema 3.2, pode-se garantir a existência do lema seguinte:

Lema 3.2. *Uma BMR modelada como um sistema singularmente perturbado padrão com restrições pfaffianas possui uma estabilidade exponencial, sempre que o objetivo de controle seja uma parcela das coordenadas generalizadas.*

3.3 Inclusão de escorregamento e deformação sobre o rolamento das rodas

Modelar um sistema físico como um sistema singularmente perturbado não é uma tarefa trivial porque nem sempre é óbvia a escolha das variáveis que são consideradas parte da dinâmica rápida, ou seja, as variáveis estritamente associadas com o parâmetro ε . Felizmente, em muitas aplicações, nosso conhecimento sobre processos físicos nos oferece informação suficiente para fazer uma apropriada interpretação do que pode ser considerado uma dinâmica rápida. Em relação às BMRs, ao final da década de 1980 e durante a década de 1990, apareceram trabalhos teóricos que usavam a teoria de perturbações singulares para estabelecer modelos na forma padrão (3.8) - (3.9), assumindo que as dinâmicas rápidas podiam estar associadas com efeitos degenerativos das forças de tração, como a deformação dos pneus [associada com flexibilidade], o deslizamento e a derrapagem (Leroquais & D’Andrea-Novel 1996, D’Andréa-Novel *et al.* 1991, D’Andréa-Novel *et al.* 1992, D’Andréa-Novel *et al.* 1995, Campion *et al.* 1991b, Campion *et al.* 1991a, Campion *et al.* 1996, Khorasani & Kokotovic 1985, Spong *et al.* 1987, Fernández *et al.* 2014b, Fernández *et al.* 2014c).

As considerações sobre as violações das restrições cinemáticas podem ser classificadas de acordo com o tipo de roda e o seu efeito degenerativo. Geralmente, quando são usadas rodas padrão [sejam fixas, orientáveis no centro ou fora do centro] baseadas em pneus ou materiais elásticos um efeito degenerativo importante é a deformação da roda e o fato da área de contato entre a roda e a superfície não poder ser reduzida a um ponto (D’Andréa-Novel *et al.* 1995). Dessa forma, pode ser adotado o modelo de “pseudo-escorregamento” [ou *pseudo-slipping*, em inglês], comumente abordado na literatura associada (Matsumoto & Tomizuka 1990, Mehrabi *et al.* 1991, Ackermann & Sienel 1993), onde as forças de tração transversal e de tração longitudinal são proporcionais ao ângulo de derrapagem e ao coeficiente de deslizamento, respectivamente. Nesse caso, existem mapeamentos que relacionam os componentes da força de tração com o escorregamento longitudinal e lateral (Bakker *et al.* 1987, Bakker *et al.* 1989, Canudas de Wit *et al.* 2003, Canudas de Wit *et al.* 1995, Burckhardt & Reimpell 1993).

As mesmas considerações são tomadas para rodas suecas, com exceção que a derrapagem não é considerada como um efeito degenerativo e sim uma propriedade intrínseca que garante o movimento omnidirecional da roda (Fernández *et al.* 2012). Entretanto, a presença de derrapagem nos rolamentos de livre rotação incorre diretamente na propagação de erros de medição das variáveis de movimento dos atuadores no sistema de controle implementado [ex., velocidade das rodas, velocidade do centro da BMR, etc]. Em BMRs como as usadas pelos robôs AXEBOT e AXEBOT, que usam rodas suecas, a derrapagem e o deslizamento tem sido estudado como uma consequência direta das observações de controle de velocidade nos atuadores, se tornando comum a síntese de controladores que minimizem a influência desses fenômenos no modelo dinâmico, entretanto, para problemas de seguimento de trajetória convergência

a zero do erro continua tendo uma maior exigência (Fernández & Cerqueira 2009a, Muir & Neuman 1987, Motte & Champion 2000, Nandy *et al.* 2011, Williams *et al.* 2002).

3.3.1 Força de tração e escorregamento

A força de tração de uma roda, geralmente, é obtida pelo produto entre o coeficiente de adesão e a força normal ao ponto de contato com a superfície. Dependendo do tipo de configuração da BMR, os componentes dessa força de tração são responsáveis pelos movimentos longitudinais e transversais (Balakrishna & Ghosal 1995). Os modelos de força de tração para rodas mais comuns são os de relacionamento algébrico: *força de tração vs. escorregamento*. Na literatura associada, algumas vezes os modelos usados são do tipo mapas estáticos ou, em outras situações, como uma equação diferencial para modelar a dinâmica da força de tração da roda por meio de parâmetros que envolvem o escorregamento. Aqui serão usados mapas estáticos devido ao seu reduzido custo numérico (Canudas de Wit *et al.* 2003).

Deslizamento s

O movimento de uma roda com deslizamento é um fenômeno físico complexo. Dessa forma, obter um modelo para BMRs com deslizamento incluído é uma tarefa que torna o problema de controle difícil; e para o qual não há solução até o presente momento que seja eficaz (Dixon *et al.* 2000, Dong 2010, Bazzi *et al.* 2014). A seguir será apresentada uma breve revisão conceitual sobre a inclusão do deslizamento com referência à literatura existente. Na Figura 3.1, é mostrada a representação dos vetores associados com o modelo de deslizamento e derrapagem para os diferentes tipos de rodas tratados na Subseção 2.3.1. A roda orientável no centro e fora do centro obedecem à mesma representação da Figura 3.1(a).

Observação 3.5 (Representação vetorial): Para uma melhor interpretação e consistência dos assuntos tratados, nesta Subseção serão definidas, apoiadas nas representações da Figura 3.1, as seguintes convenções de sinal:

Y : A intersecção do eixo do plano horizontal que passa pelo centro da roda e o plano de rotação da mesma. Quando a roda gira no sentido anti-horário, ela irá se mover ao longo do eixo Y ;

$\{X, Y, Z\}$: Triedro construído em X, Y, Z e que permanece no plano horizontal que passa pelo centro da roda;

$\{X', Y', Z'\}$: Triedro paralelo a $\{X, Y, Z\}$ com centro que passa pela origem do plano da região de contato da roda com a superfície;

$\dot{\phi}$: Velocidade angular da roda, será positiva se gira no sentido anti-horário indicado na Figura 3.1;

V_x, V_y : Componentes da velocidade linear do centro da roda V nos eixos X, Y , respectivamente. Serão positivas se V_x e V_y estão dirigidas pelo pela direção dos respectivos eixos X, Y da Figura 3.1;

F_x, F_y : Componentes da força de tração do solo com a roda, terão sinal positivo se são dirigidos pela direção dada aos respectivos eixos X', Y' da Figura 3.1;

δ_x : Ângulo de derrapagem associado com uma projeção da velocidade do centro da roda V nos eixos X, Y da Figura 3.1.

Sobre a suposição de rolamento puro e não-derrapagem nas Definições 2.17 e 2.18 a velocidade de contato da roda V_c com a superfície deve ser nula. Como apresentado em (Thuilot 1995), pela utilização da soma de vetores em um corpo rígido, pode ser verificado que as duas restrições podem ser redefinidas em termos da velocidade do centro da roda:

$$\begin{cases} \|V\| = r\|\dot{\phi}\| \end{cases} \quad (3.28)$$

$$\begin{cases} V \not\perp \pi_{\text{roda}}, \end{cases} \quad (3.29)$$

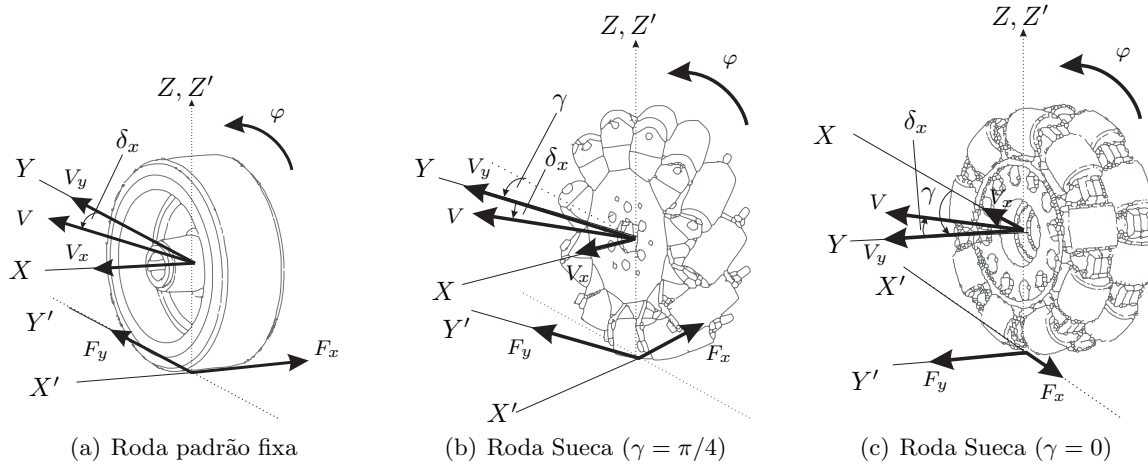


Figura 3.1: Representação dos vetores usados na Subseção 3.3.1.

onde π_{roda} representa o plano de rotação da roda.

A relação (3.28) é a restrição de rolamento puro e a proposição (3.29) é a restrição de não-derrapagem. Com essa outra alternativa de escrever as restrições de movimento da roda é definida a variável deslizamento.

Definição 3.4 (Deslizamento s (Canudas de Wit *et al.* 1995, Thuilot 1995)). *Uma roda em movimento caracteriza-se por: a velocidade linear do seu centro V e seus componentes V_x , V_y [veja Figura 3.1]; a velocidade angular $\dot{\varphi}$ e raio r . Nesse sentido, o deslizamento, denotado pela letra s , é uma quantidade escalar definida por*

$$\begin{cases} s = \frac{V_y - r\dot{\varphi}}{\|r\dot{\varphi}\|} & \text{se } V_y \text{ e } \dot{\varphi} \text{ tem o mesmo sinal, e } |\dot{\varphi}| \geq |V_y| \text{ (região de aceleração)} \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\begin{cases} s = \frac{V_y - r\dot{\varphi}}{\|V_y\|} & \text{se } V_y \text{ e } \dot{\varphi} \text{ tem o mesmo sinal, e } |\dot{\varphi}| < |V_y| \text{ (região de frenagem)} \end{cases} \quad (3.31)$$

mais os seguintes dois casos limite

$$\begin{cases} s = +1 & \text{então } V_y \text{ é negativo e } \dot{\varphi} \text{ positivo} \end{cases} \quad (3.32)$$

$$\begin{cases} s = -1 & \text{então } V_y \text{ é positivo e } \dot{\varphi} \text{ negativo.} \end{cases} \quad (3.33)$$

Se assumirmos que as duas condições limite não acontecem, podemos reescrever o par de equações (3.30), (3.31) na seguinte forma compacta:

$$s = \frac{V_y - r\dot{\varphi}}{\max\{\|V_y\|, \|r\dot{\varphi}\|\}}. \quad (3.34)$$

Observação 3.6 (Deslizamento normalizado): Na Definição 3.4, convenientemente $s \in [-1, 1]$. Assim, as seguintes situações podem ser postuladas:

Se $\dot{\varphi} \neq 0$ e $V_y = 0$, então $s = 1$. Esta situação é conhecida como *deslizamento total*. A roda tem rotação sem translação.

Se $\dot{\varphi} > \frac{V_y}{r} > 0$, então $s \in (0, 1]$. Esta situação representa a região de *aceleração*.

Se $\dot{\varphi} = \frac{V_y}{r} > 0$, então $s = 0$. Esta situação representa a situação de *rolamento puro*, ou movimento sem deslizamento. Sobre essa condição a velocidade linear do ponto de contato permanece constante ao longo do tempo.

Se $\frac{V_y}{r} > \dot{\varphi} > 0$, então $s \in [-1, 0)$. Esta situação representa a região de *frenagem*, ou desaceleração.

Se $\dot{\varphi} = 0$ e $V_y \neq 0$, então $s = -1$. Esta situação é conhecida como *bloqueio*. A roda não gira sobre seu eixo mas desliza sobre a superfície.

Pelo uso da Observação 3.6, o deslizamento s pode ser visto como um parâmetro instrumental de quanto a restrição cinemática de rolamento puro, apresentada na Definição 2.17 [ou, equivalentemente, definida em (3.28)], é satisfeita.

Observação 3.7 ($V \approx V_y$): Em situações práticas o ângulo de derrapagem δ_x mostrado na Figura 3.1 não é suficientemente grande [em casos comuns, no máximo 15°]. Dessa forma, a projeção V_x pode ser ignorada e afirmar que $V \approx V_y$ (Canudas de Wit *et al.* 2003, D’Andréa-Novel *et al.* 1995, Thuilot 1995, Leroquais & D’Andrea-Novel 1996). Sobre essa consideração, se as restrições definidas por (3.28) e (3.29) são satisfeitas então claramente $V \approx V_y = r\dot{\varphi}$ e assim $s \approx 0$ na equação (3.34). Por outro lado, quando a restrição (3.28) não é satisfeita, claramente $s \neq 0$.

Derrapagem δ_x

Na Figura 3.1 e na Observação 3.5 foram destacadas a presença do componente da força de tração F_x [perpendicular a F_y] e sua relação com a violação da restrição de não-derrapagem (3.29). Isto está relacionado com o fato do vetor de velocidade linear do centro da roda não estar no plano da mesma, ou seja, de existir um ângulo δ_x .

Definição 3.5 (Ângulo de derrapagem δ_x (Thuilot 1995)). *Uma roda em movimento caracteriza-se pela velocidade linear do seu centro V e seus componentes V_x , V_y [Figura 3.1]. Nesse sentido, o ângulo de derrapagem, denotado por δ_x , é uma quantidade escalar definida por:*

$$\delta_x = \tan^{-1} \left(\frac{V_x}{|V_y|} \right). \quad (3.35)$$

Observação 3.8 (Quando $V \not\perp \pi_{\text{roda}}$): Quando a restrição de não-derrapagem (3.29) é satisfeita então $V_x = 0$ e consequentemente, em (3.35), $\delta_x = 0$. Caso contrário, V_x não é nula e aparece um ângulo entre V e plano da roda [tal como apresenta a Figura 3.1].

O fato da velocidade do centro da roda, V , não pertencer ao plano da roda pode ser ocasionado por diferentes motivos associados com a natureza do contato. Para uma roda padrão fixa ou padrão, como apresentada na Figura 3.1(a), o motivo principal é o cisalhamento produzido pelo pneumático ou pelas deformações da superfície. Em rodas omnidirecionais, como apresentadas nas Figuras 3.1(b) e 3.1(c), o motivo principal é a contribuição do movimento adicional, em direção diferente à da velocidade do centro da roda, fornecido pelo rolamentos do perímetro. Como resposta a essas deformações e contribuições, uma força de reação, aqui denotada por F_x , e perpendicular ao plano da roda, é orientada em oposição ao componente de velocidade V_x [ou seja, se $V_x > 0$ então $F_x < 0$; e de forma inversa se $V_x < 0$ então $F_x > 0$, veja Figura 3.1].

Vetor força de tração $[F_x \ F_y]^T$

Os modelos existentes de *força de tração vs. escorregamento* podem ser descritos na forma de mapas estáticos

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_Y : s \rightarrow F_y \\ \mathcal{O}_X : \delta_x \rightarrow F_x \end{array} \right. \quad (3.36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_Y : s \rightarrow F_y \\ \mathcal{O}_X : \delta_x \rightarrow F_x \end{array} \right. \quad (3.37)$$

onde F_y e F_x são, respectivamente, os componentes longitudinal e transversal da força de tração. Um dos modelos mais conhecidos deste tipo é o de Pacejka (Canudas de Wit *et al.* 2003, Bakker *et al.* 1987, Bakker *et al.* 1989), um mapeamento não-linear que projeta numericamente as relações $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$. Este modelo tem sido aplicado em experimentos realizados sobre condições

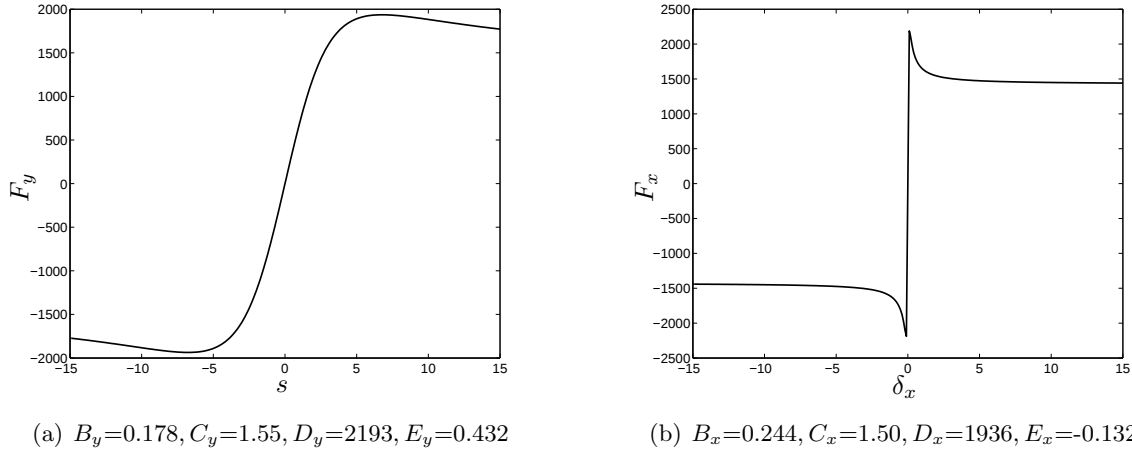


Figura 3.2: Exemplo de representação gráfica dos mapas $\mathcal{O}_X$ e $\mathcal{O}_Y$ para: (a) força de tração longitudinal e (b) força de tração lateral. Nos dois casos $F_N = 2000N$. Parâmetros tomados de (Bakker *et al.* 1987).

particulares de velocidade linear para veículos com pneumáticos. O modelo de Pacejka é definido pela expressão a seguir chamada de *Fórmula Mágica*:

$$F(x) = D \sin(C \tan^{-1}(Bx - E(Bx - \tan^{-1}(Bx)))), \quad (3.38)$$

sendo B , C , D e E , respectivamente, os coeficientes de *Rigidez*, *Forma*, *Pico* e *Curvatura*⁸(Olson *et al.* 2003, Bakker *et al.* 1987). O valor de x pode ser considerado o ângulo δ_x ou o deslizamento s , dependendo do interesse de modelagem. Em uma outra proposta, Bakker *et al.* (1987) propuseram funções similares a (3.38), definidas como

$$F_y = D_y \sin \left(C_y \tan^{-1} \left(B_y \left[(1 - E_y) 100s + \left(\frac{E_y}{B_y} \tan^{-1}(100B_y s) \right) \right] \right) \right) \quad (3.39)$$

$$F_x = D_x \sin \left(C_x \tan^{-1} \left(B_x \left[(1 - E_x) \delta_x + \left(\frac{E_x}{B_x} \tan^{-1}(B_x \delta_x) \right) \right] \right) \right) \quad (3.40)$$

onde B_x , C_x , D_x , E_x , B_y , C_y , D_y e E_y são dadas por

$$\begin{aligned} C_x &= 1.30 & C_y &= 1.65 \\ D_x &= -\alpha_1 F_N^2 - \alpha_2 F_N & D_y &= \alpha_1 F_N^2 + \alpha_2 F_N \\ B_x &= \frac{\alpha_3 \sin(\alpha_4 \tan^{-1}(\alpha_5 F_N))}{C_x D_x} & B_y &= \frac{\alpha_3 F_N^2 + \alpha_4 F_N}{C_x D_x e^{\alpha_5 F_N}} \\ E_x &= \alpha_6 F_N^2 + \alpha_7 F_N + \alpha_8 & E_y &= \alpha_6 F_N^2 + \alpha_7 F_N + \alpha_8 \end{aligned}$$

sendo $\alpha_1, \dots, \alpha_8$ constantes conhecidas e F_N a força normal à superfície de contato [veja (Bakker *et al.* 1987, Bakker *et al.* 1989, Thuijot 1995)]. Nas Figuras 3.2(a) e 3.2(b) são apresentados exemplos dos mapeamentos associados com as forças F_x e F_y em (3.40) e (3.39), respectivamente.

Observação 3.9 (Qual é a melhor aproximação das forças de tração?): Dado que (3.40) e (3.39) representam um mapeamento não-linear, uma soma de séries de potências de s [ou δ_x] pode ser usada em torno de $s = 0$ [ou $\delta_x = 0$] para aproximar o comportamento da força de tração. Por um lado, com essa aproximação é possível modelar o comportamento das forças de tração em todo o domínio de s [ou δ_x]. Mas por outro lado, uma aproximação desse tipo está sujeita à incerteza de qual é o melhor grau de aproximação a ser escolhido para representar

⁸Para o chão úmido, as características do escorregamento se incrementam até um valor pico μ_p quando é atingido um 10% do escorregamento longitudinal; e a força de freio atinge um 25%-50% da força vertical da carga. Para o chão seco isto acontece em um 20% do escorregamento e quando é atingido um 70%-90% da força vertical da carga.

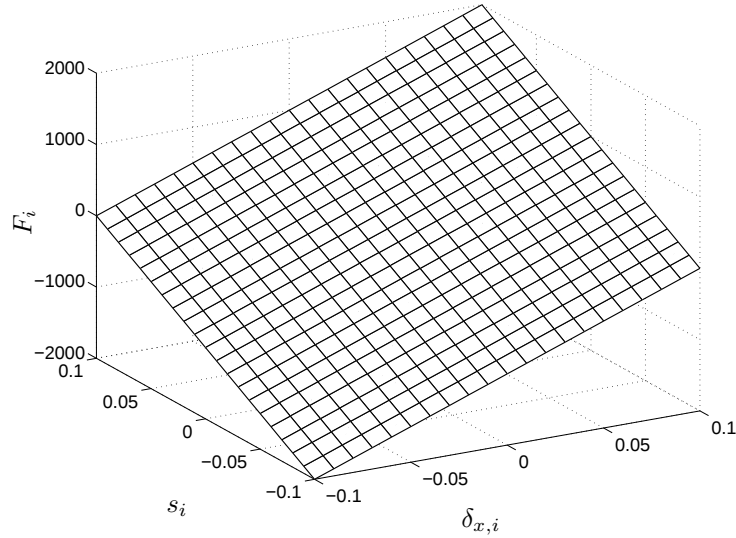


Figura 3.3: Exemplo de representação gráfica do mapa $F_i(s_i, \delta_{x,i}) = Gs_i + D\delta_{x,i}$ para $G = D = 10000$ N considerando a Suposição 3.6.

a relação *tração vs. escorregamento* [ou mesmo dizer, sobre qual é o apropriado número de termos utilizados na série de potências para aproximar s ou δ_x].

A fim de garantir que as forças de tração F_x , F_y pertençam à região linear das equações (3.40) e (3.39), seja considerada a suposição seguinte:

Suposição 3.6 ((D'Andréa-Novel *et al.* 1995, Leroquais & D'Andrea-Novel 1996, Motte & Champion 2000)). *Sejam deslizamento e derrapagem sinais limitados tal que*

$$\|s\| \leq \Delta_y \quad e \quad \|\delta_x\| \leq \Delta_x,$$

onde $\Delta_y < 1$ e $\Delta_x < 1$.

Pelo uso da Suposição 3.6, o componente de velocidade do centro da i -ésima roda paralelo ao plano da roda, $V_{i,y}$, é aproximadamente igual à V_i [ou seja, $V_{i,y} \approx V_i$]. Assim, o deslizamento s_i , associado com a i -ésima roda, pode ser reescrito como

$$s_i = \frac{\|V_{i,y} - r\dot{\varphi}_i\|}{\|V_i\|}; \quad (3.41)$$

e da mesma forma, para a i -ésima roda, a função $\tan^{-1}(\cdot)$ em (3.35) pode ser substituída por $\sin^{-1}(\cdot)$, ou seja,

$$\delta_{x,i} = \sin^{-1} \left(\frac{\|V_{i,x}\|}{\|V_i\|} \right) \quad \text{ou} \quad \sin \delta_{x,i} = \frac{\|V_{i,x}\|}{\|V_i\|}. \quad (3.42)$$

Novamente, pelo uso da Suposição 3.6, as funções $\sin(\cdot)$ e $\tan^{-1}(\cdot)$ [uma vez que os resultados sejam expressados em radianos] podem ser substituídas pela função linear [ou identidade] nas equações (3.39) e (3.40). Dessa forma as novas expressões para $F_{i,x}$ e $F_{i,y}$ na i -ésima roda seriam:

$$F_{i,x} = D_x C_x B_x \delta_x = D \delta_{x,i} \quad (3.43)$$

$$F_{i,y} = 100 D_y C_y B_y s = G s_i \quad (3.44)$$

onde $D = D_x C_x B_x$ e $G = 100 D_y C_y B_y$ são o *coeficiente de rigidez transversal* e o *coeficiente de rigidez longitudinal*, respectivamente. Ambos coeficientes dependem da natureza da roda e da superfície de movimento.

Pela característica linear dos componentes da força de tração $F_{i,x}$ e $F_{i,y}$ é possível associar um mapa $F_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ para representar a força de tração total de cada roda. Seja esse

mapa definido por

$$F_i(s_i, \delta_{x,i}) = Gs_i + D\delta_{x,i}. \quad (3.45)$$

Na Figura 3.3 é mostrada uma representação do mapa (3.45) nos intervalos definidos pela Suposição 3.6. Pela mesma Suposição 3.6, podemos dizer que $\delta_x \simeq \sin \delta_x$. Assim, para a i -ésima roda de uma BMR, os componentes da força de tração podem ser escritos como

$$\begin{aligned} F_{i,x} &= D \frac{V_{i,x}}{\|V_i\|} \\ F_{i,y} &= G \frac{V_{i,y} - r\dot{\varphi}_i}{\|V_i\|}, \end{aligned}$$

ou ainda, na seguinte forma compacta:

$$\begin{bmatrix} F_{i,x} \\ F_{i,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\|V_i\|} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i,x} \\ V_{i,y} - r\dot{\varphi}_i \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.46)$$

sendo $V_{c,i} = [V_{i,x} \ V_{i,y} - r\dot{\varphi}_i]^T \in \mathbb{R}^2$ o vetor que representa a velocidade linear do ponto de contato da i -ésima roda com a superfície.

Seja $L_i(q) \in \mathbb{R}^{2 \times K_r}$ uma matriz tal que

$$V_{c,i} \triangleq \begin{bmatrix} V_{i,x} \\ V_{i,y} - r\dot{\varphi}_i \end{bmatrix} = L_i(q)A^T(q)\dot{q}, \quad (3.47)$$

então

$$\begin{bmatrix} F_{i,x} \\ F_{i,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\|V_i\|} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} L_i(q)A^T(q)\dot{q} \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.48)$$

Em (D'Andréa-Novell *et al.* 1995) o vetor $F(q, \dot{q})$ definido em (3.4), que representa as forças de contato da roda com a superfície, não são soma direta dos vetores $[F_{i,x} \ F_{i,y}]^T$, mas sim a soma das forças generalizadas associadas com cada um dos vetores $[F_{i,x} \ F_{i,y}]^T$. A i -ésima energia generalizada associada ao vetor $[F_{i,x} \ F_{i,y}]^T$ é definida como:

$$W_i(q) = \begin{bmatrix} F_{i,x} \\ F_{i,y} \end{bmatrix} L_i(q)A^T(q)\dot{q}. \quad (3.49)$$

A contribuição de $[F_{i,x} \ F_{i,y}]^T$ à energia generalizada $W(q)$, mas especificamente ao componente $F_i(q)$, é definida por

$$W_i(q) = F_i^T(q, \dot{q})\dot{q}. \quad (3.50)$$

Por comparação de (3.49) com (3.50), e usando (3.48), pode ser deduzido que a i -ésima força generalizadas é:

$$F_i(q, \dot{q}) = -A(q)L_i^T(q)\frac{1}{\|V_i\|} \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} L_i(q)A^T(q)\dot{q}$$

onde V_i é usada para denotar a velocidade do centro da i -ésima roda e o sinal negativo representa o fato da energia ser dissipativa.

Pelo uso de (3.6) e (3.7) também podemos deduzir a seguinte expressão para a matriz $\frac{1}{\varepsilon}K_i(q, \eta, \varepsilon\mu)$, associada com a i -ésima roda:

$$\frac{1}{\varepsilon}K_i(q, \eta, \varepsilon\mu) \triangleq \frac{1}{\|V_i\|} L_i^T(q) \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} L_i(q). \quad (3.51)$$

Logo, para a configuração de uma BMR com N rodas, as forças de tração, em correspondência com (3.7), podem ser escritas em função da matriz definida positiva $K(q, \eta, \varepsilon\mu)$ como

$$F(q, \dot{q}) = -A(q) \left[\sum_{i=1}^N K_i(q, \eta, \varepsilon\mu) \right] A^T(q)A(q)\mu,$$

tal que

$$K(q, \eta, \varepsilon \mu) \triangleq \sum_{i=1}^N K_i(q, \eta, \varepsilon \mu). \quad (3.52)$$

O fato da matriz $K(q, \eta, \varepsilon \mu)$ depender dos coeficientes de rigidez D e G é o motivo pelo que esta matriz é conhecida na literatura como *matriz de rigidez* (D'Andréa-Novel *et al.* 1995, Motte & Campion 2000).

Parâmetro de perturbação ε

O parâmetro de perturbação ε pode ser concebido como um valor de escala associado com a diferença entre as condições reais de movimento e o pressupostos das restrições cinemáticas de rolamento puro e não-derrapagem apresentadas nas Definições 2.17 e 2.18 serem satisfeitas. Tal interpretação é conhecida como *flexibilidade* do sistema (D'Andréa-Novel *et al.* 1995, Spong *et al.* 1987, Khalil 2002, Fernández *et al.* 2014b, Fernández *et al.* 2014c). Quando o valor de ε tende a zero a matriz de rigidez tende a infinito [ou seja, os coeficientes de rigidez aumentam e a variedade flexível $\mathcal{M}_\mu$ do sistema (3.8) - (3.9) tende para a variedade rígida $\mathcal{M}_R$]. Dessa forma, uma representação simplificada das condições de movimento associadas com o parâmetro de perturbação ε [ou a flexibilidade] podem ser fornecidas pelos coeficientes de rigidez longitudinal e transversal. Uma forma de relacionar essas quantidades é definida pela expressão

$$\varepsilon = \min \left\{ \min_i \frac{1}{D_i}, \min_i \frac{1}{G_i} \right\} \quad i = 1, \dots, N \quad (3.53)$$

sendo D_i e G_i os coeficientes de rigidez transversal e longitudinal de cada uma das rodas presentes na BMR.

Até aqui, já é possível estabelecer uma relação fenomenológica entre o vetor μ e o parâmetro ε para as configurações apresentadas na Tabela 2.2. Dependendo do tipo de configuração cinemática da BMR, o vetor μ está relacionado com o conjunto completo de manifestações degenerativas do rolamento, como derrapagem e deslizamento, enquanto que ε escala a deformação do contato entre a roda e a superfície⁹. Na Tabela 3.1 é apresentada a associação do vetor μ com o deslizamento e a derrapagem das rodas segundo a configuração cinemática de BMRs não-degeneradas.

3.3.2 Modelagem genérica singularmente perturbada para BMRs

O modelo singularmente perturbado definido por (3.8) - (3.9) é projetado usando o modelo cinemático de configuração (2.31) para cada BMR. Com esse propósito, a projeção apropriada do modelo dinâmico dependerá da escolha apropriada do vetor q e da associação correta das variáveis rápidas com as manifestações do escorregamento [já seja s e δ_x], tal como foi visto na Tabela 3.1.

Agora, sejam consideradas as seguintes suposições com respeito à velocidade dos centros das rodas e os coeficientes de rigidez longitudinal e transversal:

Suposição 3.7 ((D'Andréa-Novel *et al.* 1995, Campion *et al.* 1996, Motte & Campion 2000)). *As velocidades dos centros das rodas da BMR na expressão (3.46) são consideradas idênticas, e mais precisamente, iguais a sua média:*

$$\|V_i\| = \|V_i(q, \eta, \mu)\| = \left(\dot{x}_R^2 + \dot{y}_R^2 + \dot{\theta}^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\text{tr} \left(\dot{\xi} \dot{\xi}^T \right)}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Suposição 3.8 ((D'Andréa-Novel *et al.* 1995, Campion *et al.* 1996, Motte & Campion 2000)). *Os valores G_i e D_i associados aos coeficientes de rigidez longitudinal e transversal, são assumidos idênticos para todas as rodas da BMR.*

Pela Suposição 3.8 é válido afirmar então que $\min_i 1/D_i = 1/D$ e $\min_i 1/G_i = 1/G$ no critério (3.53), de tal forma que

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{1}{D}, \frac{1}{G} \right\}.$$

⁹Sabendo, também, que a deformação é uma consequência direta da flexibilidade da roda ou da superfície.

Tabela 3.1: Relação dos parâmetros μ , ε com a configuração cinemática de uma BMR não-degenerada.

TIPO	q	μ : Relacionado com ...	ε
(3,0)	$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \\ \beta_{1o} \\ \beta_{2o} \\ \beta_{3o} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$	Deslizamento s_1, s_2, s_3 das três rodas <i>suecas</i> [associadas com $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$] ou, na configuração alternativa, relacionado com o Deslizamento s_1, s_2, s_3 e a Derrapagem $\delta_{X,1}, \delta_{X,2}, \delta_{X,3}$ das três rodas <i>orientáveis fora do centro</i> [associadas com os pares $(\beta_{1o}, \varphi_1), (\beta_{2o}, \varphi_2), (\beta_{3o}, \varphi_3)$].	Deformação de contato.
(2,0)	$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \\ \beta_{3o} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$	Deslizamento s_1, s_2 e Derrapagem $\delta_{X,1}, \delta_{X,2}$ das duas rodas <i>fixas</i> [associadas com φ_1, φ_2] , ou na configuração alternativa, relacionado com o Deslizamento s_1, s_2, s_3 e a Derrapagem $\delta_{X,1}, \delta_{X,2}, \delta_{X,3}$ das duas rodas <i>fixas</i> [associadas com φ_1, φ_2] e a roda <i>orientável fora do centro</i> [associada com o par (β_{3o}, φ_3)].	Deformação de contato.
(2,1)	$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \\ \beta_{1c} \\ \beta_{2o} \\ \beta_{3o} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$	Deslizamento s_1, s_2, s_3 e Derrapagem $\delta_{X,1}, \delta_{X,2}, \delta_{X,3}$ das duas rodas <i>orientáveis fora do centro</i> [associadas com os pares $(\beta_{1o}, \varphi_1), (\beta_{2o}, \varphi_2)$] e a roda <i>orientável no centro</i> [associada com o par (β_{3c}, φ_3)].	Deformação de contato.
(1,1)	$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \\ \beta_{1c} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$	Deslizamento s_1, s_2, s_3 e Derrapagem $\delta_{X,1}, \delta_{X,2}, \delta_{X,3}$ das duas rodas <i>fixas</i> [associadas com φ_1, φ_2] e a roda <i>orientável no centro</i> [associada com β_{1c}].	Deformação de contato.
(1,2)	$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ \theta \\ \beta_{1c} \\ \beta_{2c} \\ \beta_{3o} \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$	Deslizamento s_1, s_2, s_3 e Derrapagem $\delta_{X,1}, \delta_{X,2}, \delta_{X,3}$ das duas rodas <i>orientáveis no centro</i> [associadas com os pares $(\beta_{1c}, \varphi_1), (\beta_{2c}, \varphi_2)$] e a roda <i>orientável fora do centro</i> [associada com o par (β_{3o}, φ_3)].	Deformação de contato.

Entretanto, assumindo os produtos εD e εG como versões normalizadas dos coeficientes de rigidez, então a equação anterior pode ser reescrita como

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{D_0}{D}, \frac{G_0}{G} \right\}, \quad (3.54)$$

tal que $D_0 = \varepsilon D$ e $G_0 = \varepsilon G$.

Como em (Fernández *et al.* 2015b), seguindo os procedimentos da Seção B.1, e em posse das Suposições 3.7 e 3.8, uma representação equivalente do modelo (3.8) - (3.9) para as BMRs da Tabela 2.31, pode ser definida como:

$$\begin{cases} \dot{x} = Z_0(q)\eta + \varepsilon Z_1(q)\mu + Z_2(q)\mu + Z_3(q)\tau \\ \varepsilon \dot{\mu} = G_0(q)\eta + \varepsilon G_1(q)\mu + G_2(q)\mu + G_3(q)\tau, \end{cases} \quad (3.55)$$

$$(3.56)$$

onde $Z(x, \mu, \varepsilon, t) = Z_0(q)\eta + \varepsilon Z_1(q)\mu + Z_2(q)\mu + Z_3(q)\tau$ e $G(x, \mu, \varepsilon, t) = G_0(q)\eta + \varepsilon G_1(q)\mu +$

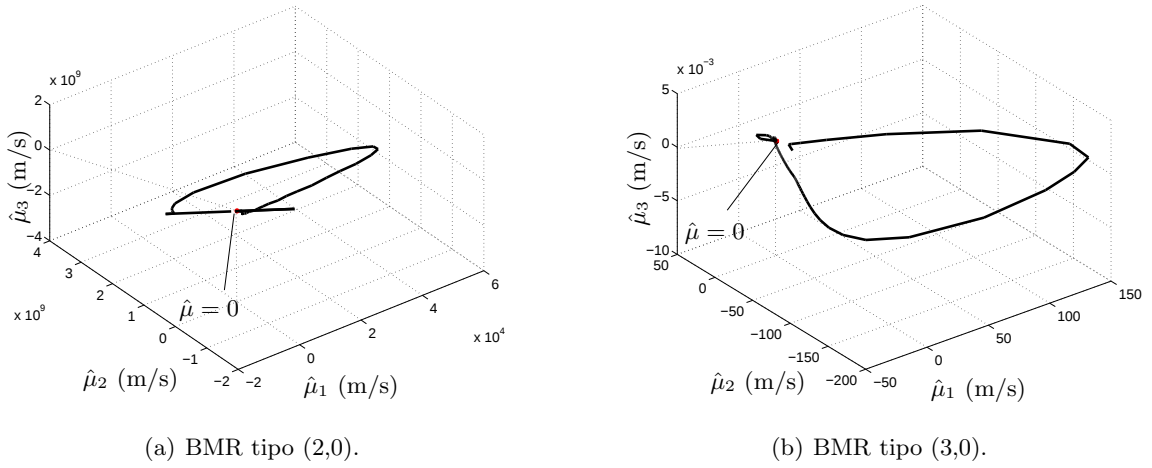


Figura 3.4: Evolução de $\hat{\mu}$ para os modelos singularmente perturbados [vista em três dimensões: $\hat{\mu}_1 \times \hat{\mu}_2 \times \hat{\mu}_3$].

$G_2(q)\mu + G_3(q)\tau$. Aqui será salientado, com o resultado dessas modelagens, a verificação das Condições 3.1, 3.2 e 3.3; a fim de que o Teorema 3.1 [Teorema de Tikhonov] seja satisfeito¹⁰. Dessa forma, de acordo com o Lema 3.2, o modelo (3.55) - (3.56) deve ser particionado tal como indicado pelo sistema (3.22) - (3.24) para garantir a Condição 3.3. Assim, seja este modelo reescrito como:

$$\begin{cases} \dot{z} = Z_0^a(q)\eta + \varepsilon Z_1^a(q)\mu + Z_2^a(q)\mu + Z_3^a(q)\tau \\ \dot{w} = Z_0^b(q)\eta + \varepsilon Z_1^b(q)\mu + Z_2^b(q)\mu + Z_3^b(q)\tau \\ \varepsilon \dot{\mu} = G_0(q)\eta + \varepsilon G_1(q)\mu + G_2(q)\mu + G_3(q)\tau, \end{cases} \quad (3.57)$$

$$\quad \quad \quad (3.58)$$

$$\quad \quad \quad (3.59)$$

onde $Z_a(z, w, \mu, \varepsilon, t) = Z_0^a(q)\eta + \varepsilon Z_1^a(q)\mu + Z_2^a(q)\mu + Z_3^a(q)\tau$ e $Z_b(z, w, \mu, \varepsilon, t) = Z_0^b(q)\eta + \varepsilon Z_1^b(q)\mu + Z_2^b(q)\mu + Z_3^b(q)\tau$.

Fazendo $\varepsilon = 0$ em (3.59), tem-se que existe uma raiz isolada

$$\bar{\mu} = H(x, t) = -G_2^{-1}(q) G_0(q)\eta - G_2^{-1}(q) G_3(q)\tau \quad (3.60)$$

que é solução de (3.11). Assim, o modelo definido por (3.55) -(3.56) é um modelo singularmente perturbado padrão, e como decorrência da diferenciabilidade dos termos envolvidos em suas equações¹¹ e da equação (3.60), podemos afirmar que a Condição 3.1 é satisfeita. Em seguida, o modelo de camada limite associado é definido por

$$\frac{d\hat{\mu}}{dt^*} = G_0(q_0)\eta_0 + G_2(q_0) [\hat{\mu} + H(q_0, \eta_0, t_0)] + G_3(q_0)\tau_0, \quad (3.61)$$

onde $\hat{\mu}(0) = \mu_0 - H(x_0, t_0)$, $x_0 = [q_0 \ \eta_0]^T$ e t_0 são interpretados como parâmetros fixos; $\tau_0 \triangleq \tau(q_0, \eta_0, \mu_0)$ é a condição inicial e $t^* = t/\varepsilon$.

Na Figura 3.4 é observada a evolução do vetor $\hat{\mu}$ para as duas BMRs apresentadas no Apêndice B, Subseções B.1.1 e B.1.2. Nota-se que o diagrama de fase converge uniformemente para $\hat{\mu} = 0$. Assim, a Condição 3.2 é satisfeita e, pelo Teorema 3.1 [Teorema de Tikhonov], existem $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$ e $\varepsilon^* > 0$ tal que o modelo reduzido definido por (3.57) - (3.58) [ou (3.55), com $\varepsilon = 0$, $x = [z \ w]^T$ e $H(x, t)$ em (3.60)], seja exponencialmente uniformemente estável.

Na modelagem de uma BMR usando uma abordagem baseada em perturbações singulares [veja o caso das modelagens apresentadas no Apêndice B, Subseções B.1.1 e B.1.2] o valor de ε pode ser decrementado a fim de ficar próximo de zero e consequentemente, por (3.6), satisfazer completamente as restrições cinemáticas e se tornar o modelo rígido (2.43); ou incrementado a fim de ficar próximo de ε^* . Entretanto a escolha apropriada do valor de ε , além de estar sujeita

¹⁰Um detalhamento maior sobre o modelo (3.55) - (3.56) pode ser verificado no Apêndice B, Subseções B.1.1 e B.1.2, onde é apresentada a modelagem das BMRs não-degeneradas do tipo (2,0) e (3,0) [correspondentes aos robôs HILARE e AXEBOT].

¹¹Veja por exemplo os termos no Apêndice B, Subseções B.1.1 e B.1.2

ao valor de ε^* , dependerá de outras considerações técnicas, como por exemplo, a velocidade da BMR e o custo computacional da lei de controle. Tais considerações serão detalhadas em sessões e capítulos posteriores.

3.4 Controle de trajetória: versão genérica por realimentação de estados não-linear

Especialmente, as equações de movimento para um corpo rígido podem ser linearizadas e desacopladas por uma realimentação de estados não-linear [em algumas ocasiões chamada de *torque calculado* ou *dinâmica inversa*] (Spong *et al.* 1987). Entretanto, alguns trabalhos mostram que os algoritmos de controle que assumem um modelo rígido são limitados em suas aplicações para robôs reais, onde a suposição de perfeita rigidez não é satisfeita (Spong *et al.* 1987, Spong & Vidyasagar 1989, Motte & Campion 2000, D'Andréa-Novel *et al.* 1995, Rivin 1985, Sweet & Good 1984, Spong 1989). Visto que o parâmetro de perturbação ε pode ser concebido como uma representação da deformação do ponto de contato da roda com a superfície de movimento [veja Tabela 3.1], então sua inclusão no modelo dinâmico geral permite associar o grau de deformação de contato (flexibilidade) com o comportamento dinâmico da BMR, já seja, para permanecer na variedade flexível $\mathcal{M}_\mu$ [quando $\varepsilon \neq 0$] ou na variedade rígida $\mathcal{M}_R$ [quando $\varepsilon = 0$]. No entanto, a inclusão da flexibilidade no modelo dinâmico geral da BMR por meio de um valor permisível¹², as restrições cinemáticas não serão satisfeitas [consequência direta de (3.6)]. Assim, é necessário estabelecer o problema de controle não-linear associado com o seguimento de trajetória a fim de conseguir uma lei de controle robusta que atenua a violação das restrições cinemáticas.

3.4.1 Problema do seguimento de trajetória

O problema de seguimento de trajetória objetiva encontrar uma lei de controle que permita com que um ponto qualquer P no marco local $\{R\}$ da BMR¹³ faça o seguimento, com estabilidade, de um ponto de referência em movimento, P_{ref} .

Seja $h_{\text{ref}}(t) = [x_{\text{ref}}(t) \ y_{\text{ref}}(t)]^T$ a posição do ponto P_{ref} e seja $h_{\text{ref}}(t)$ assumida um difeomorfismo de classe 2 [ou seja, $h_{\text{ref}} \in \mathcal{C}^2$] e definida como

$$\begin{bmatrix} x_{\text{ref}}(t) \\ y_{\text{ref}}(t) \end{bmatrix} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (3.62)$$

e seja definido

$$h(t) = h_z(z(t)) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_R - L \sin \theta \\ y_R + L \cos \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (3.63)$$

como as coordenadas cartesianas do ponto P em relação ao marco local $\{R\}$, sendo L a distância do centro da BMR a esse ponto.

O objetivo é encontrar uma lei de controle por realimentação de estados auxiliar $v(t)$ [apresentada na equação (2.44) do Capítulo 2] tal que

- i) Os erros de seguimento $\tilde{x}(t) = x'(t) - x_{\text{ref}}(t)$, $\tilde{y}(t) = y'(t) - y_{\text{ref}}(t)$ e o sinal de controle $v(t)$ sejam limitados para $\forall t$ (*cotação*);
- ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x'(t) - x_{\text{ref}}(t)\| = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y'(t) - y_{\text{ref}}(t)\| = 0$ (*convergência*);
- iii) Se $x'(0) = x_{\text{ref}}(0)$ e $y'(0) = y_{\text{ref}}(0)$, então $x'(t) = x_{\text{ref}}(t)$ e $y'(t) = y_{\text{ref}}(t)$ para $\forall t$ (*invariância*).

Assumindo o vetor $h(t)$ como o conjunto de saídas linearizadas do problema de controle, então sobre a referência $h_{\text{ref}}(t)$ é aplicada uma lei de controle auxiliar para solucionar o problema de seguimento do ponto em movimento. Seja esta lei de controle definida no seguinte lema:

¹²Veja critério definido em (3.53) e a condição $\varepsilon < \varepsilon^*$ do Teorema 3.1.

¹³Veja por exemplo as Figuras B.1 e B.5, no Apêndice B, Subseções B.1.1 e B.1.2.

Lema 3.3 (Lei de controle auxiliar (D’Andréa-Novel *et al.* 1995)). *Se a trajetória de referência definida em (3.62) é tal que $h_{\text{ref}}(t)$, $\dot{h}_{\text{ref}}(t)$, $\ddot{h}_{\text{ref}}(t)$ são limitados para $\forall t$, e $\dot{h}_{\text{ref}}(t)$ é integrável, então uma solução para o problema de seguimento de trajetória é a lei de controle auxiliar*

$$v(t) = \Delta_v^+(z) \left(\ddot{h}_{\text{ref}}(t) - K_1 \tilde{h}(t) - K_2 \dot{\tilde{h}}(t) - \dot{\Delta}_v(z) \eta(t) \right) \in \mathbb{R}^{\delta_u} \quad (3.64)$$

onde

$$\tilde{h}(t) = h(t) - h_{\text{ref}}(t),$$

é o erro de seguimento, $K_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $K_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ são matrizes arbitrárias definidas positivas e, pelo uso de (2.32), $\Delta_v(z)$ é uma matriz singular¹⁴ definida por

$$\Delta_v(z) = \frac{\partial h_z(z)}{\partial z} S_1(q) \in \mathbb{R}^{2 \times \delta_u}.$$

Em posse do Lema 3.3, e pelos resultados observados na literatura relacionada [veja por exemplo D’Andréa-Novel *et al.* (1995); Motte & Campion (2000), entre outras], é válido afirmar que aplicando-se a lei de controle auxiliar (3.64) o erro de seguimento $\tilde{h}(t)$ converge exponencialmente para uma vizinhança da origem. Assim, substituindo-se (3.64) em (2.44), uma lei de controle por realimentação de estados para assegurar o seguimento de trajetória na BMR, conhecida como *lei de controle rígida*, é definida por

$$\begin{aligned} \tau(x) = [S^T(q)B(q)]^{-1} \Big\{ S^T(q) \Big[M(q)S(q)\Delta_v^+(z) \left(\ddot{h}_{\text{ref}}(t) - K_1 \tilde{h}(t) \right. \\ \left. - K_2 \dot{\tilde{h}}(t) - \dot{\Delta}_v(z) \eta(t) \right) + M(q) \left[\frac{\partial S}{\partial q} S(q) \eta \right] \eta - C(q, S(q) \eta) \Big] \Big\}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Resultados similares à equação (3.65) podem ser observadas em Spong (1989), Mills (1989), Ghorbel & Spong (1992b), Ghorbel & Spong (1992a). Da mesma forma que em (2.44), a equação (3.65) depende de η , e é importante lembrar que as quantidades medidas são q e $\dot{q}$. Não obstante, multiplicando-se (3.5) pela esquerda por $S^T(q)$, e de (2.33), tem-se que

$$\eta = S^+(q) \dot{q} = [S^T(q)S(q)]^{-1} S^T(q) \dot{q}. \quad (3.66)$$

O próximo teorema enfatiza a existência de limites superiores sobre ε que garantem que as soluções do sistema realimentado pela lei de controle (3.65) sejam limitadas.

Teorema 3.3 ((D’Andréa-Novel *et al.* 1995)). *Se a trajetória de referência definida em (3.62) é tal que $h_{\text{ref}}(t)$, $\dot{h}_{\text{ref}}(t)$, $\ddot{h}_{\text{ref}}(t)$ são limitados para $\forall t$, e $\dot{h}_{\text{ref}}(t)$ é integrável, existem três constantes $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$, $\varepsilon^* > 0$, quando aplicada a lei de controle por realimentação de estados (3.65) ao sistema (3.57)-(3.59), tal que se $\|\tilde{h}_0\| < \nu_1$, $\|\mu_0 - H(\tilde{h}_0, w_{1,0}, 0)\| < \nu_2$ e $\varepsilon < \varepsilon^*$, então as aproximações*

$$\tilde{h}(t) = e^{Ut} \tilde{h}(0) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.67)$$

$$\mu(t) - H(\tilde{h}, w_1, t) = \hat{\mu}(t^*) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.68)$$

são válidas sobre intervalos de tempo infinito, sendo $\hat{\mu}(t^*)$ a solução ao modelo de camada limite:

$$\frac{d\hat{\mu}}{dt^*} = G_0(\tilde{h}_0, w_{1,0}) \eta_0 + G_2(\tilde{h}_0, w_{1,0}) \left[\hat{\mu} + H(\tilde{h}_0, w_{1,0}, 0) \right] + G_3(\tilde{h}_0, w_{1,0}) \tau_0$$

onde $\tau_0 = \tau(\tilde{h}_0, w_{1,0})$, U é uma matriz Hurwitz e w_1 é uma função conhecida e limitada.

Prova: Resultado conhecido, pois a prova a este teorema pode ser encontrada em (D’Andréa-Novel *et al.* 1995). ■

O Teorema 3.3 garante que (3.26) e (3.27) sejam satisfeitas simultaneamente e que o erro de seguimento $\tilde{h}(t)$ permaneça em uma vizinhança da origem, ainda que o valor de ε seja diferente de zero. Entretanto, valores diferentes de zero para ε impedem que as restrições cinemáticas

¹⁴Valendo com caso não-singular quando $\delta_u = 2$.

sejam satisfeitas [como decorrência de (3.6)]. Dessa forma, o problema de controle não-linear apresentado é aprimorar a lei robusta (3.65) para que as restrições cinemáticas sejam satisfeitas.

3.4.2 Procedimento da *variedade lenta*

Do modelo (3.8)-(3.9) tem-se que os campos vetoriais $Z(x, \mu, \varepsilon, t)$ e $G(x, \mu, \varepsilon, t)$ não têm uma dependência explícita do tempo t , ou seja, são sistemas autônomos que podem ser redefinidos como,

$$\begin{cases} \dot{x} = Z(x, \mu, \varepsilon), & x(0) = x_0 \\ \varepsilon \dot{\mu} = G(x, \mu, \varepsilon), & \mu(0) = \mu_0. \end{cases} \quad (3.69)$$

Agora, seja $\mu = H(x)$ uma raiz isolada de $G(x, \mu, 0) = 0$ e seja assumido que as Condições 3.1 e 3.2 são satisfeitas para essa raiz.

Pelos comportamentos do modelo de camada limite observados nas Figuras 3.4(a) e 3.4(b) [ou similarmente, nas Figuras B.3 e B.7 do Apêndice B, Subseções B.1.1 e B.1.2], e como consequência do Teorema 3.1 [Teorema de Tikhonov] as trajetórias de $\mu(t)$ que começam em uma vizinhança de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon)$ permanecem em uma vizinhança de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Dessa forma, existe uma variedade flexível $\mathcal{M}_\mu$ [veja Definição 3.2], para $\varepsilon > 0$, dentro da vizinhança de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon)$ definida como

$$\mathcal{M}_\mu : \quad \mu = H(x, \varepsilon). \quad (3.71)$$

Com o objetivo de aprimorar a lei de controle robusta (3.65) é implementado o procedimento da *variedade lenta* que está detalhado em Kokotovic (1984) e Khalil (2002). Em alguns trabalhos associados a perturbações singulares (Sobolev 1987, Finichel 1979, Khalil 2002, Kokotovic *et al.* 1999, Kokotovic & Khalil 1986), são definidas condições suficientes sobre as que o sistema (3.8) - (3.9) tem uma variedade flexível $\mathcal{M}_\mu$ como em (3.71).

Condição 3.4 (Variedade invariante no tempo (D'Andréa-Novel *et al.* 1995, Khalil 2002)). Para (3.71) ser uma variedade invariante do modelo (3.8) - (3.9) deve ser verdade que

$$\mu(0, \varepsilon) - H(x(0, \varepsilon), \varepsilon) = 0$$

para $\forall t \in J \subset [0, \infty)$

$$\mu(t, \varepsilon) - H(x(t, \varepsilon), \varepsilon) = 0$$

onde J é um intervalo de tempo sobre o que a solução [fluxo] do modelo (3.69) - (3.70) existe.

Derivando ambos lados de (3.71) com respeito ao tempo t , multiplicando por ε , substituindo $\dot{x}$ e $\varepsilon \dot{\mu}$ segundo (3.69) e (3.70), obtém-se a *condição de variedade*.

Condição 3.5 (Condição de variedade (D'Andréa-Novel *et al.* 1995, Khalil 2002)). Para $\forall x$ em uma região de interesse, a variedade flexível deve satisfazer

$$0 = G(x, H(x, \varepsilon), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial x} Z(x, H(x, \varepsilon), \varepsilon), \quad (3.72)$$

sendo $\varepsilon < \varepsilon_0$, para $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+$.

Para $\varepsilon = 0$, a equação diferencial parcial (3.72) resulta em

$$0 = G(x, H(x, 0), 0),$$

mostrando intuitivamente que $H(x, 0) \triangleq \hat{H}(x)$. Dado que $G(x, \mu, 0) = 0$ pode possuir mais de uma raiz isolada [veja Definição 3.1], é possível procurar uma variedade invariante para (3.69) - (3.70) na vizinhança de cada raiz (Khalil 2002). Assim, para todo $\varepsilon < \varepsilon^*$, com $\varepsilon^* \in \mathbb{R}_+$, existe uma função $H(x, \varepsilon)$ satisfazendo a Condição 3.5 e

$$H(x, \varepsilon) - \hat{H}(x) = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

para um x limitado. A variedade (3.71) que satisfaz as Condições 3.4 e 3.5 é conhecida como a *variedade lenta* do modelo (3.69) - (3.70). Substituindo a variedade $\mu = H(x, \varepsilon)$ em (3.69) obtém-se o seguinte modelo reduzido:

$$\dot{x} = Z(x, H(x, \varepsilon), \varepsilon), \quad (3.73)$$

também conhecido como *modelo flexível reduzido*, ou *modelo lento*, que permite descrever a trajetória dentro do diagrama de fase da dinâmica da BMR sobre a nova estrutura da variedade $\mathcal{M}_\mu$ usando apenas as variáveis lentas contidas no vetor de estados x [ou seja, q e η]. Diferentemente de (3.13), que leva a dinâmica da BMR à variedade $\mathcal{M}_R$, a equação (3.73) depende explicitamente de ε [na variedade flexível $H(x, \varepsilon)$ e no campo vetorial $Z(x, \mu, \varepsilon)$]. Assim, o modelo reduzido (3.73) propõe levar a dinâmica da BMR à variedade $\mathcal{M}_\mu$.

Quando a resposta associada com dinâmica do modelo flexível reduzido é assintoticamente estável, a Condição 3.5, se inicialmente violada, será satisfeita depois do decaimento dos transitórios associados com a dinâmicas rápidas, ou mesmo dizer, quando o modelo de camada limite (3.16) atingir o equilíbrio na origem.

3.4.3 Ações corretivas: método de perturbação de Poincaré-Lindstedt

Sobre o modelo flexível reduzido (3.73), uma técnica de controle que aprimora a lei (3.65) é conhecida como *lei de controle baseada em ações corretivas*. Essa técnica está baseada no método de Poincaré-Lindstedt e sua maior utilidade é expressar o modelo por termos diferenciais de grau superior associados com a flexibilidade. Sobre essa idéia, também podem ser projetadas técnicas para mitigar a presença desses termos (Kinceler & Meckl 1997, Mills 1989, Ghorbel & Spong 1992b, Ghorbel & Spong 1992a, Spong 1989, Kokotovic *et al.* 1999, Kevorkian, J. & Cole 1996).

Observação 3.10 (Série de potências de variáveis singularmente perturbadas): Na teoria de perturbação singulares, o método de Poincaré-Lindstedt é uma técnica para aproximar soluções uniformemente periódicas para equações diferenciais ordinárias quando abordagens baseadas em parâmetros regulares falham (Kokotovic *et al.* 1999). Pelo modelo de camada limite na Definição 3.3 e pela Observação 3.3, uma variável qualquer X pode ser ajustada à sua versão não-linear por meio de uma dilatação da variável temporal [denotada como t^* e governada pelo parâmetro de perturbação ε]. Então, no método de Poincaré-Lindstedt a variável X é expressa como uma série de potências do parâmetro ε : $X = X_0 + \varepsilon X_1 + \dots + \varepsilon^{n-1} X_{n-1} + \varepsilon^n X_n$, sendo $X_1, \dots, X_{n-1}, X_n$ termos diferenciais de grau superior para um valor $n \in \mathbb{Z}_+$.

Embora o método sugira uma aproximação para soluções periódicas, a sua aplicação em problemas de controle parte do pressuposto que quando a lei de controle τ é aplicada ao sistema singularmente perturbado padrão (3.69) - (3.70), a evolução das variáveis lentas, x , e rápidas, μ , permanecem em uma vizinhança de ordem $\mathcal{O}(\varepsilon)$ gerando uma resposta periódica e uniforme. Assim, tem-se pelo uso da Observação 3.10, que τ e μ podem ser aproximados pelo método de perturbação de Poincaré-Lindstedt.

Definição 3.6 (Lei de controle flexível). *Seja a ação de controle assumida uma função que não depende explicitamente do tempo e definida por*

$$\tau_\varepsilon(x, \varepsilon) = \tau(x) + \tau^*(x, \mu, \varepsilon) \quad (3.74)$$

sendo $\tau(x)$ a lei de controle rígida¹⁵ definida em (3.65) e $\tau^*(x, \mu, \varepsilon)$ o componente de controle corretivo. A lei de controle definida por (3.74) é chamada **lei de controle flexível**.

Do modelo (3.8) - (3.9) e verificando-se que a lei de controle (3.10) depende explicitamente de q e η , o sistema (3.69) - (3.70) sobre a lei de controle (3.74) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \dot{x} = Z(x, \tau_\varepsilon, \mu, \varepsilon), & x(0) = x_0 \\ \varepsilon \dot{\mu} = G(x, \tau_\varepsilon, \mu, \varepsilon), & \mu(0) = \mu_0. \end{cases} \quad (3.75)$$

$$(3.76)$$

A linearização da lei de controle (3.74) não é uma tarefa trivial devido à solução da equação diferencial (3.72) para $H(x, \varepsilon)$. Aqui será mostrado como aproximar a variedade lenta $H(x, \varepsilon)$ e a lei de controle (3.74) na ordem de ε tal que essa aproximação forneça uma técnica computacional para o controle do sistema flexível (3.75) - (3.76).

¹⁵Considerando-se sua definição na equação (3.10) sem a inclusão explícita da variável t .

Na maioria dos casos, uma forma de solucionar a equação (3.72) é aproximar $H(x, \varepsilon)$ como uma serie de Taylor para $\varepsilon = 0$, ou seja, uma consequência direta do método de Poincaré-Lindstedt:

$$H(x, \varepsilon) = H_0(x) + \varepsilon H_1(x) + \varepsilon^2 H_2(x) + \dots + \varepsilon^{N_r} H_{N_r}(x) \quad (3.77)$$

sendo $N_r \in \mathbb{R}_+$ um número que representa o *grau de aproximação* e

$$H_i(x) = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i H(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^i} \Big|_{\varepsilon=0} \quad \text{para } i = 1, \dots, N_r.$$

De (3.77) tem-se que quando $\varepsilon = 0$ então $H(x, 0) = H_0(x) = \hat{H}(x)$.

Da mesma forma, a lei de controle (3.74) é aproximada por uma serie de Taylor para $\varepsilon = 0$,

$$\tau_\varepsilon(x, \varepsilon) = \tau_0(x) + \varepsilon \tau_1(x) + \varepsilon^2 \tau_2(x) + \dots + \varepsilon^{N_r} \tau_{N_r}(x), \quad (3.78)$$

sendo N_r o mesmo grau de aproximação usado em (3.77) e

$$\tau_i(x) = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i \tau_\varepsilon(x, \varepsilon)}{\partial \varepsilon^i} \Big|_{\varepsilon=0} \quad \text{para } i = 1, \dots, N_r,$$

sendo $\tau_i(x)$ a i -ésima ação de controle corretiva.

De (3.78) tem-se que quando $\varepsilon = 0$ então $\tau_\varepsilon(x, 0) = \tau_0(x) = \tau(x)$, ou seja, $\tau(x)$ é a lei de controle (3.65), e $\tau^*(x, \varepsilon) = \varepsilon \tau_1(x) + \varepsilon^2 \tau_2(x) + \dots + \varepsilon^{N_r} \tau_{N_r}(x)$ é o componente de controle corretivo. Dessa forma, a lei de controle (3.65), chamada de *controle rígido* e projetada para o sistema rígido [definido por (3.69) - (3.70), para $\varepsilon = 0$], é agora um componente de controle corretivo para compensar os desvios da resposta do sistema flexível em relação às respostas no caso ideal [ou seja, onde $\varepsilon = 0$].

Usando as aproximações (3.77) e (3.78) sobre o sistema (3.75) - (3.76) a equação diferencial parcial (3.72) toma a forma:

$$\begin{aligned} 0 = & G(x, \tau_0(x) + \varepsilon \tau_1(x) + \varepsilon^2 \tau_2(x) + \dots + \varepsilon^{N_r} \tau_{N_r}(x), H_0(x) + \varepsilon H_1(x) + \varepsilon^2 H_2(x) \\ & + \dots + \varepsilon^{N_r} H_{N_r}(x), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial H(x, \varepsilon)}{\partial x} Z(x, \tau_0(x) + \varepsilon \tau_1(x) + \varepsilon^2 \tau_2(x) \\ & + \dots + \varepsilon^{N_r} \tau_{N_r}(x), H_0(x) + \varepsilon H_1(x) + \varepsilon^2 H_2(x) + \dots + \varepsilon^{N_r} H_{N_r}(x), \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Então, expandindo o lado direito de (3.79) e agrupando em termos com potências iguais de ε são obtidos conjuntos de equações relacionadas à $H_i(x)$ e $\tau_i(x)$, para $i = 1, 2, \dots, N_r$.

Observação 3.11 (Grau de robustez da lei de controle flexível): O grau de aproximação N_r , quando relacionado à expansão de Taylor (3.77) e (3.78), pode ser interpretado como um *grau de robustez*. Então, quanto maior N_r maior é a contribuição de termos diferenciais de ordem superior na variedade flexível (3.71) e na ação de controle flexível (3.74).

Para compreender melhor a técnica atrás da ideia das ações corretivas, na seção seguinte, serão representados os esquemas de controle de trajetória para as BMRs baseado no modelo (3.55) - (3.56).

3.4.4 Controlador de trajetória não-linear para BMRs: ações corretivas sobre o modelo (3.55) - (3.56)

Visto que os modelos dinâmicos para as configurações cinemáticas das BMRs apresentadas na Tabela 2.2 podem ser associadas com um único formalismo [veja Subseção 3.3.2], aqui será tratado o modelo (3.55) - (3.56). Assim, será projetado um controlador usando as matrizes $Z_0(q)$, $Z_1(q)$, $Z_2(q)$, $Z_3(q)$ e $G_0(q)$, $G_1(q)$, $G_2(q)$, $G_3(q)$, sabendo que a diferença do controlador associado para cada BMR esta nos componentes dessas matrizes.

Seja reescrito por conveniência o modelo (3.55) - (3.56), substituindo μ por $H(x, \varepsilon)$ e τ por $\tau_\varepsilon(x, \varepsilon)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = Z_0(q)\eta + \varepsilon Z_1(q)H(x, \varepsilon) + Z_2(q)H(x, \varepsilon) + Z_3(q)\tau_\varepsilon(x, \varepsilon) & (3.80) \\ \varepsilon \dot{H}(x, \varepsilon) = G_0(q)\eta + \varepsilon G_1(q)H(x, \varepsilon) + G_2(q)H(x, \varepsilon) + G_3(q)\tau_\varepsilon(x, \varepsilon) & (3.81) \end{cases}$$

com $Z_0(q) \in \mathbb{R}^{(3+\delta_d+N_o+N+\delta_u) \times \delta_u}$; $Z_1(q), Z_2(q) \in \mathbb{R}^{(3+\delta_d+N_o+N+\delta_u) \times K_r}$; $Z_3(q) \in \mathbb{R}^{(3+\delta_d+N_o+N+\delta_u) \times N}$; $G_0(q) \in \mathbb{R}^{K_r \times \delta_u}$; $G_1(q), G_2(q) \in \mathbb{R}^{K_r \times K_r}$ e $G_3(q) \in \mathbb{R}^{K_r \times N}$.

Substituindo (3.77) e (3.78) no modelo (3.80) - (3.81) obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{x} = & Z_0(q)\eta + \varepsilon Z_1(q) (H_0(x) + \varepsilon H_1(x) + \varepsilon^2 H_2(x) + \dots + \varepsilon^{N_r} H_{N_r}(x)) \\ & + Z_2(q) (H_0(x) + \varepsilon H_1(x) + \varepsilon^2 H_2(x) + \dots + \varepsilon^{N_r} H_{N_r}(x)) \\ & + Z_3(q) (\tau_0(x) + \varepsilon \tau_1(x) + \varepsilon^2 \tau_2(x) + \dots + \varepsilon^{N_r} \tau_{N_r}(x)) \end{aligned} \quad (3.82)$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\dot{H}_0(x) + \varepsilon \dot{H}_1(x) + \varepsilon^2 \dot{H}_2(x) + \dots + \varepsilon^{N_r} \dot{H}_{N_r}(x) \right) = & G_0(q)\eta \\ & + \varepsilon G_1(q) (H_0(x) + \varepsilon H_1(x) + \varepsilon^2 H_2(x) + \dots + \varepsilon^{N_r} H_{N_r}(x)) \\ & + G_2(q) (H_0(x) + \varepsilon H_1(x) + \varepsilon^2 H_2(x) + \dots + \varepsilon^{N_r} H_{N_r}(x)) \\ & + G_3(q) (\tau_0(x) + \varepsilon \tau_1(x) + \varepsilon^2 \tau_2(x) + \dots + \varepsilon^{N_r} \tau_{N_r}(x)). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Para $\varepsilon = 0$ em (3.81) tem-se que:

$$H_0(x) = -G_2^{-1}(q)G_0(q)\eta - G_2^{-1}(q)G_3(q)\tau_0(x), \quad (3.84)$$

o que é uma consequência direta da equação (3.60), já que se o modelo (3.55) - (3.56) é singularmente perturbado padrão então o modelo (3.80) - (3.81) também será.

Agrupando (3.82) - (3.83) pelos termos de ε com a mesma potência, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x} = & Z_0(q)\eta + Z_2(q)H_0(x) + Z_3(q)\tau_0(x) + \varepsilon [Z_1(q)H_0(x) + Z_2(q)H_1(x) + Z_3(q)\tau_1(x)] + \\ & \varepsilon^2 [Z_1(q)H_1(x) + Z_2(q)H_2(x) + Z_3(q)\tau_2(x)] + \dots + \varepsilon^{N_r} [Z_1(q)H_{N_r-1}(x) + Z_2(q)H_{N_r}(x) \\ & + Z_3(q)\tau_{N_r}(x)] \end{aligned} \quad (3.85)$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[\dot{H}_0 + \varepsilon \dot{H}_1(x) + \varepsilon^2 \dot{H}_2(x) + \dots + \varepsilon^{N_r} \dot{H}_{N_r}(x) \right] = & G_0(q)\eta + G_2(q)H_0(x) + G_3(q)\tau_0(x) + \\ & \varepsilon [G_1(q)H_0(x) + G_2(q)H_1(x) + G_3(q)\tau_1(x)] + \varepsilon^2 [G_1(q)H_1(x) + G_2(q)H_2(x) + \\ & G_3(q)\tau_2(x)] + \dots + \varepsilon^{N_r} [G_1(q)H_{N_r-1}(x) + G_2(q)H_{N_r}(x) + G_3(q)\tau_{N_r}(x)], \end{aligned} \quad (3.86)$$

e igualando os termos com potências iguais de ε em (3.86) obtém-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} H_1(x) &= G_2^{-1}(q) \left[\dot{H}_0(x) - G_1(q)H_0(x) - G_3(q)\tau_1(x) \right] \\ H_2(x) &= G_2^{-1}(q) \left[\dot{H}_1(x) - G_1(q)H_1(x) - G_3(q)\tau_2(x) \right] \\ &\vdots \\ H_{N_r}(x) &= G_2^{-1}(q) \left[\dot{H}_{N_r-1}(x) - G_1(q)H_{N_r-1}(x) - G_3(q)\tau_{N_r}(x) \right] \end{aligned}$$

ou na seguinte expressão recursiva $H_i(x)$, com $i = 1, 2, \dots, N_r$:

$$H_i(x) = G_2^{-1}(q) \left[\dot{H}_{i-1}(x) - G_1(q)H_{i-1}(x) - G_3(q)\tau_i(x) \right]. \quad (3.87)$$

De (3.85), é possível afirmar que cada um dos termos associados com as potências $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{N_r}$ deve ser zero para mitigar cada termo de maior grau associado com a flexibilidade. Assim, igualando cada um desses termos com zero, obtém-se as seguintes expressões para ações

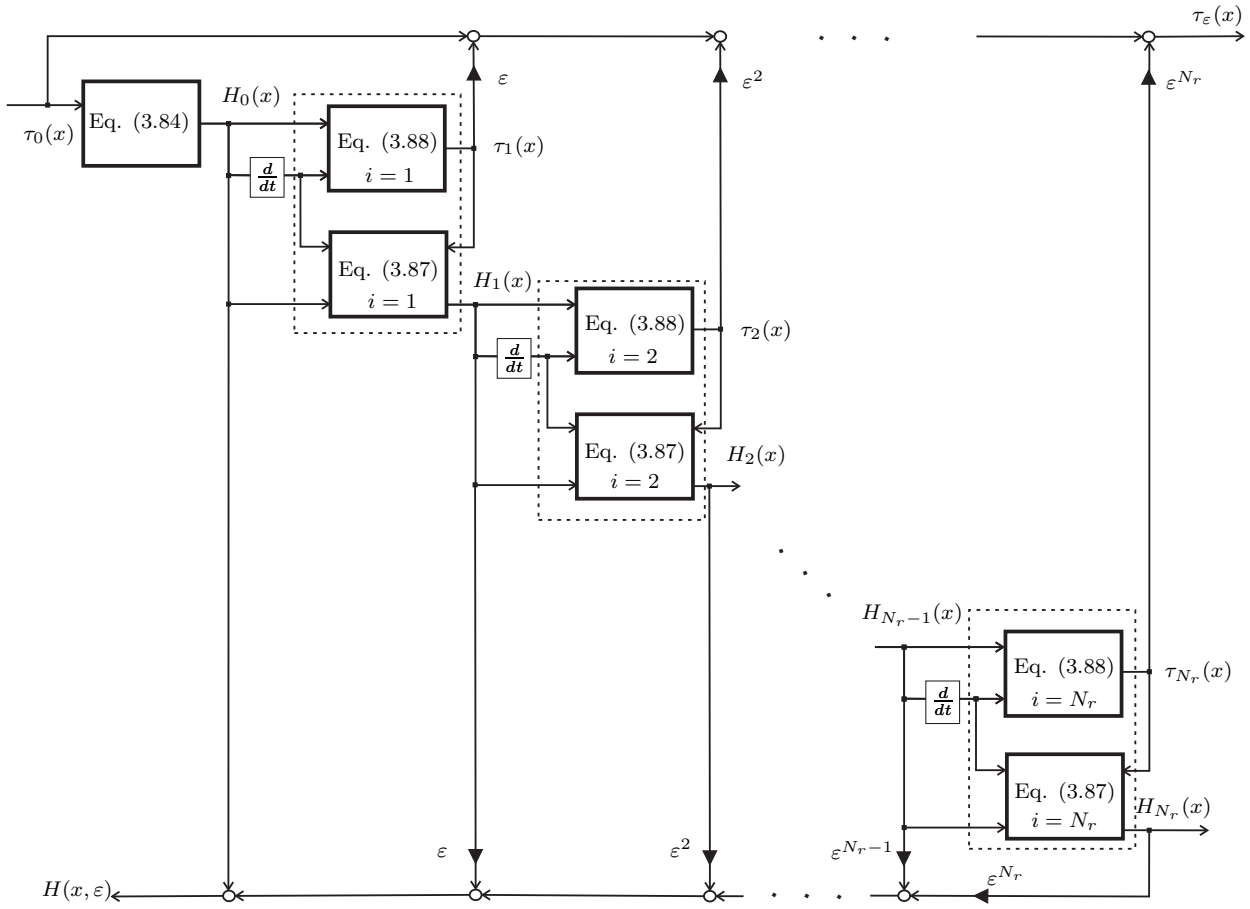


Figura 3.5: Esquema de geração dos componentes para a variedade flexível $\mu = H(x, \varepsilon)$ e a lei de controle por ações corretivas $\tau_\varepsilon(x, \varepsilon)$ pelo uso de (3.87) e (3.88), respectivamente.

corretivas de control $\tau_1(x), \tau_2(x), \dots, \tau_{N_r}(x)$:

$$\begin{aligned}\tau_1(x) &= -Z_3^+(q) [Z_1(q)H_0 + Z_2(q)H_1(x)] \\ \tau_2(x) &= -Z_3^+(q) [Z_1(q)H_1 + Z_2(q)H_2(x)] \\ &\vdots \\ \tau_{N_r}(x) &= -Z_3^+(q) [Z_1(q)H_{N_r-1}(x) + Z_2(q)H_{N_r}(x)],\end{aligned}$$

onde $Z_3^+(q)$ é matriz pseudo-inversa de $Z_3(q)$, e definida como:

$$Z_3^+(q) = [Z_3^T(q)Z_3(q)]^{-1} Z_3^T(q).$$

O conjunto de equações prévias para as ações corretivas são simplificadas, da mesma forma que (3.87), na seguinte expressão iterativa para $i = 1, 2, \dots, N_r$:

$$\tau_i(x) = -Z_3^+(q) [Z_1(q)H_{i-1}(x) + Z_2(q)H_i(x)]. \quad (3.88)$$

Na Figura 3.5 é representado o esquema recursivo para o cálculo dos componentes da variedade flexível $\mu = H(x, \varepsilon)$ e a lei de controle por ações corretivas $\tau_\varepsilon(x, \varepsilon)$. Na Figura 3.6 é apresentado o esquema de controle baseado na lei de controle (3.65) e a lei de controle baseada em ações corretivas (3.78) representada na Figura 3.5.

Saturação na entrada: limites $\tau_{\min}$ e $\tau_{\max}$

Tecnicamente, em aplicações de pequeno porte, os atuadores associados como o movimento das rodas nas BMRs são motores CC que apresentam limitações em corrente. Desta forma,

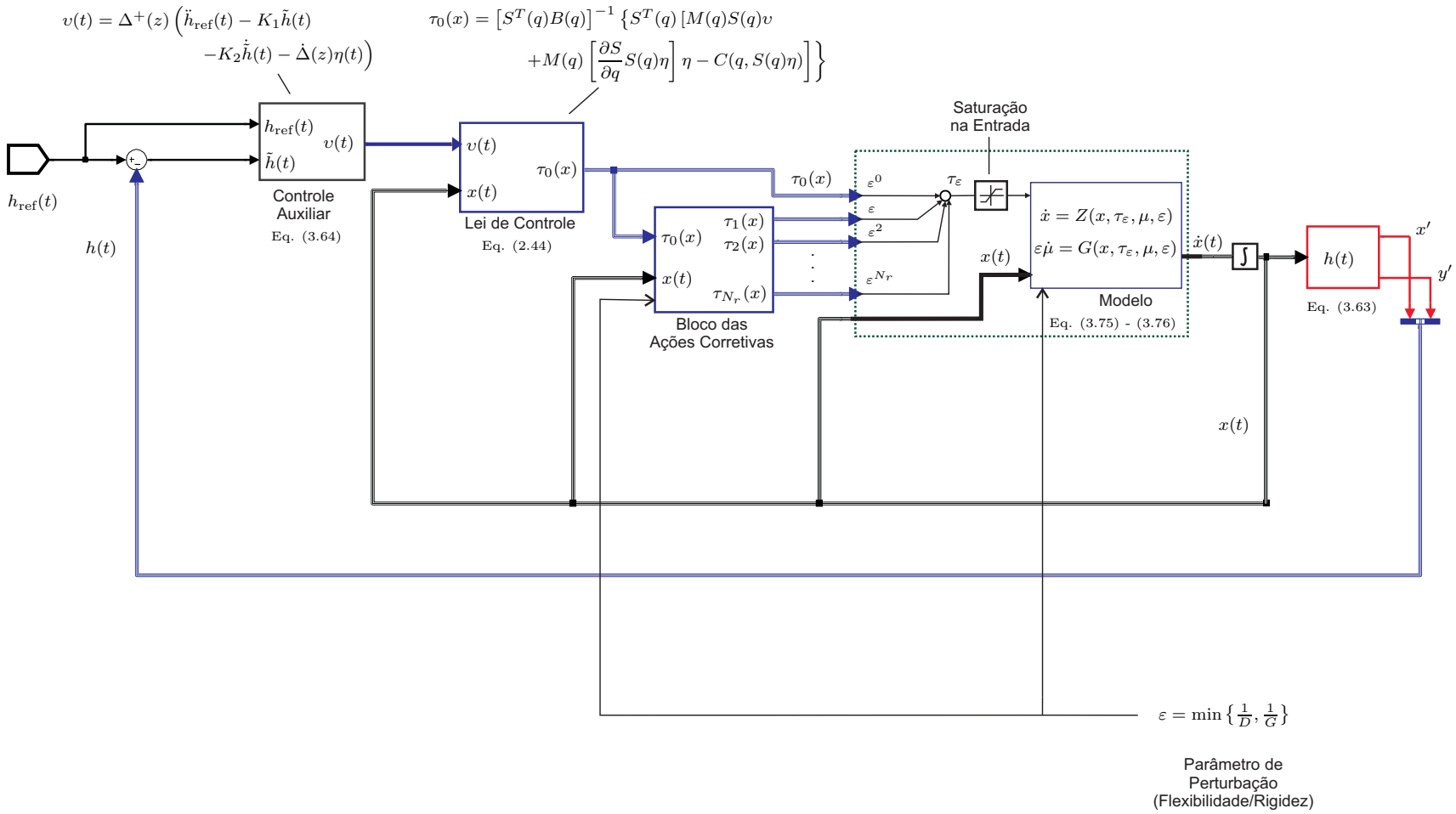


Figura 3.6: Esquema de controle não-linear baseado na composição de (2.44), (3.64) e a lei de controle baseada em ações corretivas (3.78), representada na Figura 3.5

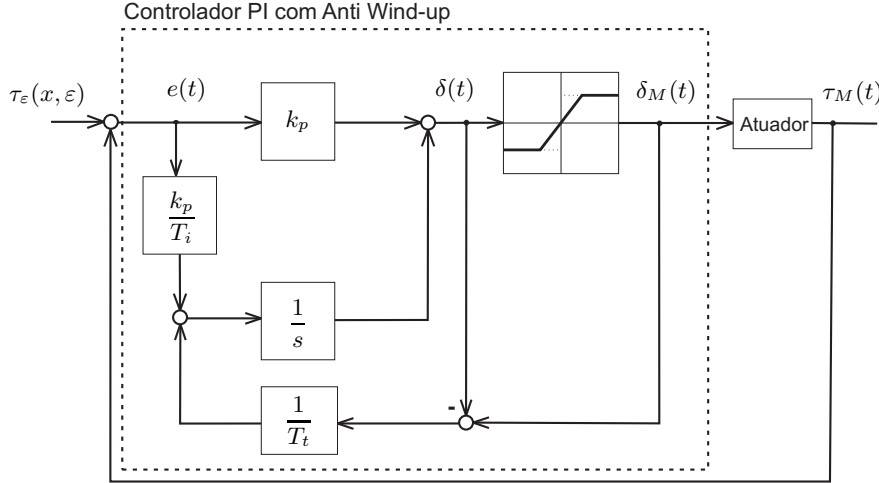


Figura 3.7: Controlador PI com Anti Wind-up de ação integral. O tempo T_t pode ser interpretado como a constante de tempo que determina o quão rápido a ação integral será levada a zero.

as entradas ao sistema possuem não-linearidade do tipo saturação. Assim, existe uma faixa de operação definida por um valor mínimo $\tau_{\min}$ e máximo $\tau_{\max}$ para o sinal de controle $\tau_\varepsilon(x, \varepsilon)$ tal que valores fora dessa faixa não podem ser atingidos.

De Fernández (2009), tem-se que para cada motor existe a equação no domínio da frequência

$$\frac{L_M}{R_M}sI_M(s) + I_M(s) = \frac{V'_M}{R_M}\delta_M(s), \quad (3.89)$$

sendo L_M a indutância da armadura, R_M a resistência da armadura do motor, I_M a corrente elétrica variante no tempo e s a variável de Laplace. Assumindo circuitos de acionamento por PWM com ponte H de transistores, então $\delta_M \in [-1, 1] \subset \mathbb{R}_+$ é o ciclo de trabalho, $V'_M = V_M - 2V_{\text{sat}} - \Delta V_M$ é a tensão elétrica de alimentação do motor, com V_M a tensão da fonte de alimentação, V_{sat} a tensão de saturação dos transistores e ΔV_M um valor associado com o desgaste da fonte de alimentação.

Considerando-se o torque de cada motor, no domínio da frequência, como $\tau_M(s) = K_M K_G I_M(s)$, e pelo uso de (3.89) podemos dizer que:

$$\tau_M(s) = K_M K_G \frac{\frac{V'_M}{R_M}}{\left(\frac{L_M}{R_M}s + 1\right)} \delta_M(s),$$

sendo K_M a constante de torque do motor e K_G a relação de acoplamento da caixa redutora instalada no motor.

Assumindo que a constante elétrica de tempo L_M/R_M é desprezível¹⁶, então

$$\tau_M(s) = K_M K_G \frac{V'_M}{R_M} \delta_M(s), \quad (3.90)$$

e devido que $\delta_M \in [-1, 1]$ então:

$$\tau_{\min} = -K_M K_G \frac{V'_M}{R_M}, \text{ para } \delta_M = -1 \quad \text{e} \quad \tau_{\max} = +K_M K_G \frac{V'_M}{R_M}, \text{ para } \delta_M = +1.$$

Convenientemente, para intervalos de tempo onde o desgaste da fonte de alimentação ΔV_M e as tensões de saturação V_{sat} possam ser desconsideradas, a quantidade V'_M/R_M pode ser

¹⁶Consequência direta do motor ter um tempo de resposta elétrico muito menor que 1 s, na ordem de 10^{-6} s (Fernández 2009).

¹⁷Parâmetros assumidos iguais para todos os motores que compõem uma BMR. Informação acessada em (Faulhaber 2011).

Tabela 3.2: Parâmetros de simulação dos motores para as BMRs do tipo (2,0) e (3,0)

Parâmetro		Descrição	BMR do tipo (2,0) HILARE	BMR do tipo (3,0) AXEBOT ¹⁷
$I_M^{\max}$	[A]	Corrente máxima do motor.	30	1.4
K_M	[N-m/A]	Constante de torque do motor.	0.2678	43.5×10^{-3}
K_G		Relação de redução.	124471:1	64:1
$\tau_{\min}$	[N-m]	Limite de torque mínimo.	-10^6	-3.8976
$\tau_{\max}$	[N-m]	Limite de torque máximo.	$+10^6$	$+3.8976$

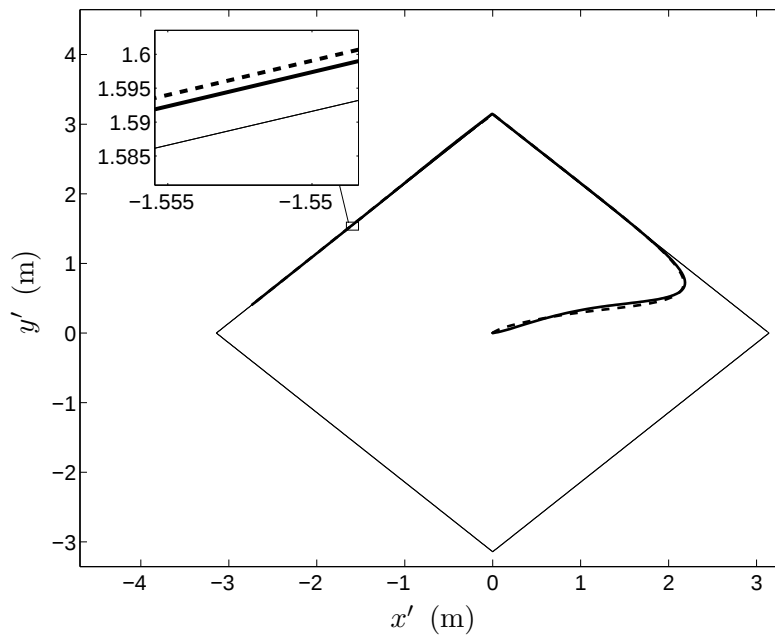


Figura 3.8: Seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (2,0) quando é aplicada a lei de controle (3.65) no modelo rígido (2.43) (linha tracejada) e no modelo flexível definido por (3.69)-(3.70) (linha sólida).

substituída pela capacidade máxima de corrente do motor CC, aqui definida como $I_M^{\max}$. Sobre tal suposição, então

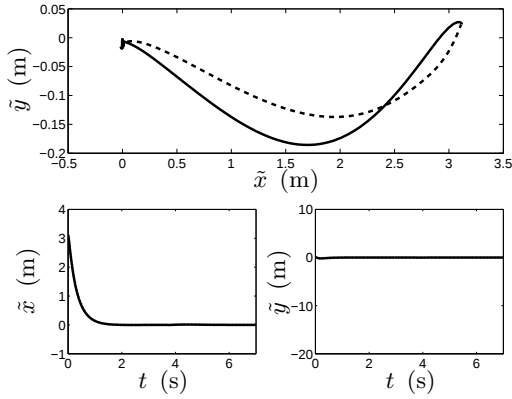
$$\tau_{\min} = -K_M K_G I_M^{\max}, \text{ para } \delta_M = -1 \quad \text{e} \quad \tau_{\max} = +K_M K_G I_M^{\max}, \text{ para } \delta_M = +1.$$

O ganho $K_M K_G \frac{V'_M}{R_M}$ em (3.90) pode ser compensado pelo uso de um controlador PI da forma

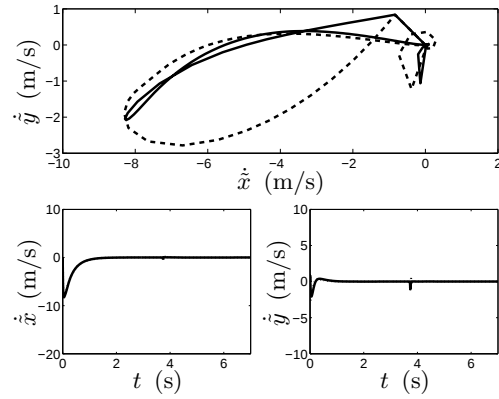
$$C_{PI}(s) = k_p + \frac{k_p}{T_i s}$$

sendo k_p a constante proporcional e T_i o tempo da ação integral. Mas, devido os atuadores apresentam entradas com a não-linearidade do tipo saturação, a ação de controle fornecida pelo controlador PI tem que pertencer ao intervalo $[-1, +1]$ e, conseqüentemente, pela expressão (3.90) podemos limitar τ_M ao intervalo $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$. Para conseguir esse resultado é adicionada á técnica de Anti Wind-up, como apresentado na Figura 3.7.

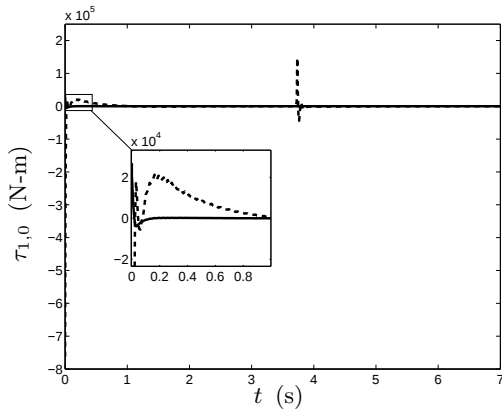
A seguir serão usados os modelos singularmente perturbados das BMRs tipo (2,0) e (3,0) [apresentados no Apêndice B, Subseções B.1.1 e B.1.2] para verificar o seguimento da trajetória frente à utilização do método baseado em ações corretivas.



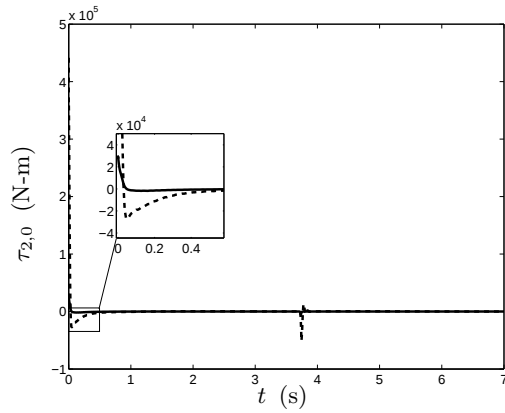
(a) Evolução do erro de seguimento $h - h_{\text{ref}}$, ou seja, $\tilde{x} = x - x_{\text{ref}}$, $\tilde{y} = y - y_{\text{ref}}$. Verificar Lema 3.3.



(b) Evolução da variação do erro de seguimento $\dot{h} - \dot{h}_{\text{ref}}$, ou seja, $\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{x}_{\text{ref}}$, $\dot{\tilde{y}} = \dot{y} - \dot{y}_{\text{ref}}$.



(c) Evolução do componente $\tau_{1,0}$ da lei de controle $\tau_0(x)$ (3.65) na roda associada com φ_1 .



(d) Evolução do componente $\tau_{2,0}$ da lei de controle $\tau_0(x)$ (3.65) na roda associada com φ_2 .

Figura 3.9: Evolução do erro de seguimento $\tilde{h}$ e da lei de controle $\tau_0(x)$ para seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (2,0) quando é aplicada a lei de controle (3.65) no modelo rígido (2.43) (linha tracejada) e no modelo flexível definido por (3.69)-(3.70) (linha sólida).

Controlador de trajetória para BMR tipo (2,0)

Para visualizar o comportamento dos controladores não-lineares de trajetória é necessário analisar o problema de controle não-linear quando é usada a lei (3.65) sobre o modelo rígido (2.43) e o modelo flexível definido pelas equações (3.69) - (3.70), salientando que os atuadores possuem saturação na entrada e as ações de controle deverão permanecer na faixa definida pelo intervalo $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$.

Para exemplificar tal comportamento na BMR tipo (2,0) é apresentado na Figura 3.8 o seguimento feito pela BMR tipo (2,0) de uma trajetória com forma de losango¹⁸ [com ambas diagonais iguais a 6.28 m] durante 7 s. Para efeitos numéricos, e considerando a Suposição 3.8 e o critério (3.54), foi escolhido $D_0 = G_0 = 1$ N com $\varepsilon = 10^{-3}$ [$D = G = 1000$ N]. Os parâmetros de simulação para a BMR são os definidos na Tabela A.1 [Apêndice A], os parâmetros do motor são os apresentados na Tabela 3.2, a velocidade da BMR é 1.18 m/s, $h_\beta = 0$ e as condições iniciais de posição são $(x_0, y_0) = (0, 0)$ m.

Pode ser observado na Figura 3.8 que o uso da lei de controle (3.65) sobre o modelo rígido apresenta um maior desvio que quando é usada sobre o modelo flexível [confira o requadro da Figura 3.8]. A Figura 3.9, onde é apresentado a evolução do erro de seguimento $\tilde{h}$, sustenta tal observação. Nota-se que a variação do erro de seguimento de trajetória, $\dot{\tilde{h}} = \dot{h} - \dot{h}_{\text{ref}}$, é maior quando é usado o modelo flexível ao invés do modelo rígido [ver Figura 3.9(b)], garantindo

¹⁸Detalhes sobre a escolha dessa forma geométrica para a trajetória serão apresentados no Capítulo 4.

então, que o erro de seguimento de trajetória, $\tilde{h} = h - h_{\text{ref}}$, seja menor quando é usado o modelo flexível [ver Figura 3.9(a)].

Com o propósito de exemplificar, a lei de controle auxiliar (3.64) foi ajustada com $\ddot{h}_{\text{ref}} = 0$ m/s², $K_1 = 70 I_{2 \times 2}$ e $K_2 = 23 I_{2 \times 2}$ que equivale a um sistema linear de primeira ordem com pólo em $-3.0435 + j0$, e

$$\Delta_v(z) = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -L \cos \theta \\ \cos \theta & -L \sin \theta \end{bmatrix}; \quad \dot{\Delta}_v(z) = \begin{bmatrix} -\cos \theta & L \sin \theta \\ -\sin \theta & -L \cos \theta \end{bmatrix} \dot{\theta}.$$

Nas Figuras 3.9(c) e 3.9(d) são apresentadas a evolução do sinal de controle $\tau_0(x) = \tau(x)$ da equação (3.65) nas duas rodas fixas da BMR tipo (2,0) quando é usado o modelo rígido e o modelo flexível. Deve-se salientar que as duas leis de controle respeitam os limites de saturação da Tabela 3.2 impostos pelos atuadores. Adicionalmente poder ser observado que o risco de saturação é menor quando a lei de controle é aplicada sobre o modelo flexível do que o modelo rígido, o que tecnicamente significa uma vantagem devido que exige menos consumo de corrente nos atuadores, aumentando assim, a duração da fonte de alimentação.

Do Teorema 3.3, tem-se que existe uma constante ε^* que limita a escolha do parâmetro ε tais que (3.67) e (3.68) sejam satisfeitas simultaneamente e o erro de seguimento $\tilde{h}$ convirja assintoticamente para zero. A seguinte observação mostra uma interpretação sobre ε^* .

Observação 3.12 (O parâmetro ε e a zona morta dos atuadores): Fenomenologicamente, o valor de ε^* está associado com a máxima deformação entre a roda e a superfície. Dessa forma, valores de ε iguais ou superiores a ε^* aumentam a flexibilidade da roda [diminuição de rigidez] e conseqüentemente a aderência da roda à superfície. Por sua vez, maior aderência incorre em maior esforço computacional para calcular a lei de controle aumentada (3.78) no início de um movimento¹⁹ podendo instabilizar a dinâmica do sistema ou levando-a a um ciclo limite (Dumitriu *et al.* 2006, Balakrishna & Ghosal 1995, Fang *et al.* 2005, Tan *et al.* 2001, Canudas de Wit *et al.* 1995, Canudas de Wit *et al.* 2003). O esforço computacional da lei de controle no início de um movimento é uma consequência direta do comprimento da faixa operacional da não-linearidade tipo zona morta na entrada do subsistema de acionamento dos atuadores.

Com vários testes de simulação para a BMR tipo (2,0) podemos ter uma noção do custo computacional e assim saber quais são os valores de ε^* que diminuem o esforço de cálculo numérico da lei (3.78). Para tal propósito seja ε definido como em (Fernández *et al.* 2014b, Fernández *et al.* 2014c):

$$\varepsilon = 10^{-n_\varepsilon} + N_\varepsilon 10^{-n_\varepsilon+1} \quad (3.91)$$

onde $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$ e $N_\varepsilon \in [0, 1] \subset \mathbb{R}_+$. Para efeitos numéricos, e considerando a Suposição 3.8 e o critério (3.54), foi escolhido $D_0 = G_0 = 1$ N.

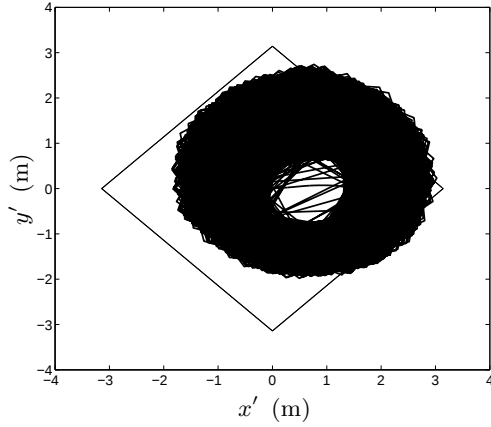
Na Figura 3.10(b) é apresentada a simulação do custo computacional da lei de controle aumentada (3.78) quando é aplicada sobre o modelo flexível da BMR tipo (2,0) [na forma (3.55) - (3.56)], sendo $\tau_0(x)$ dada por (3.65), grau de robustez $N_r = 1$ e ações corretivas projetadas por meio das equações recursivas (3.88) e (3.87). A lei de controle foi aplicada para fazer o seguimento de uma trajetória com forma de losango [com ambas diagonais iguais a 6.28 m] durante 13 s e com velocidade de 1.18 m/s. Para tal propósito foi usado o *Solver Ode113* de MATLAB® para equações diferenciais²⁰. Os parâmetros de simulação para a BMR tipo (2,0) são os definidos na Tabela A.1 [Apêndice A] e os parâmetros do motor são os apresentados na Tabela 3.2.

Os valores de ε , apresentados no eixo horizontal da Figura 3.10(b), foram organizados no intervalo $[10^{-16}, 9 \times 10^{-11}]$ sendo 9×10^{-11} [para $N_\varepsilon = 0.8$, $n_\varepsilon = 11$ em (3.91)] o extremo do intervalo que representa a passagem iminente do sistema à instabilidade [veja a Figura 3.10(a)]. Pode ser observado também na Figura 3.10(b), que o custo computacional apresenta uma notória diminuição sempre que $\varepsilon < 9 \times 10^{-11}$, ou seja que, pela Observação 3.12, o comprimento da zona morta é menor. Assim, podemos escolher

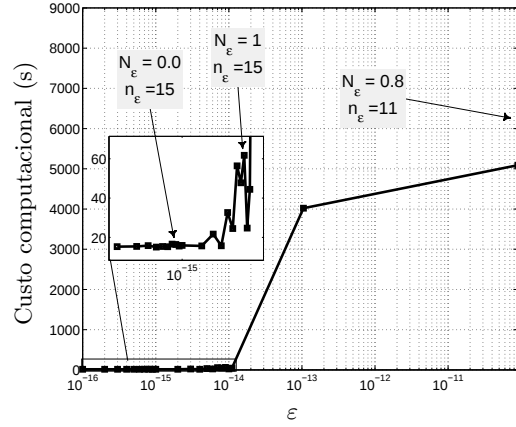
$$\varepsilon^* = 10^{-11} + 0.8 \cdot 10^{-10} = 9 \times 10^{-11}. \quad (3.92)$$

¹⁹Devido a ter que superar o coeficiente de adesão estática (Olson *et al.* 2003, Olsson *et al.* 1997, Fernández 2009).

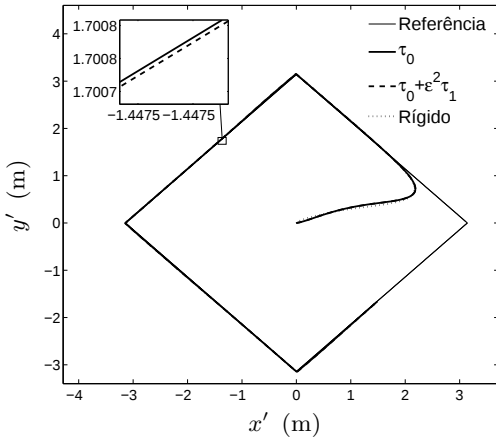
²⁰Método Adams-Bashforth-Moulton, exatidão alta.



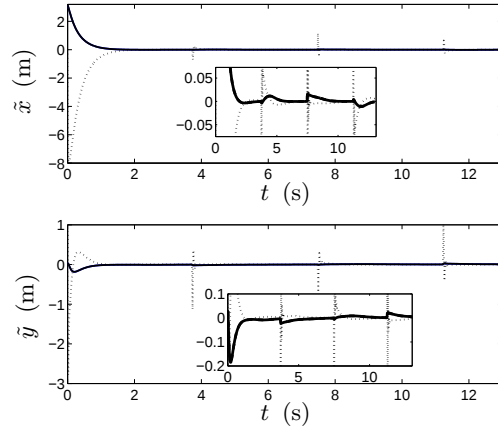
(a) Comportamento instável do seguimento de trajetória feito pela BMR quando $\varepsilon = 9 \times 10^{-11}$ na lei (3.78) com $N_r = 1$.



(b) Simulação do custo computacional da lei de controle (3.78) para $N_r = 1$. Instabilidade iminente quando $\varepsilon \geq 9 \times 10^{-11}$ ($N_\varepsilon = 0.8$ e $n_\varepsilon = 11$).



(c) Seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (2,0) quando é aplicada a lei de controle aumentada (3.78) no modelo flexível definido por (3.69)-(3.70).

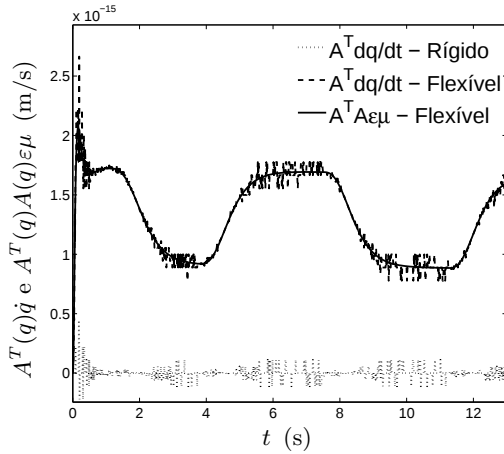


(d) Evolução do erro de controle na BMR tipo (2,0) quando é aplicada a lei de controle aumentada (3.78) no modelo flexível definido por (3.69)-(3.70) (linha sólida) e quando é aplicada a lei de controle rígida (3.65) ao modelo rígido (2.43) (linha pontilhada).

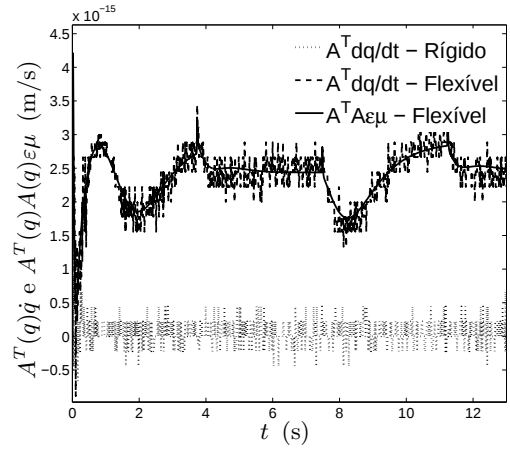
Figura 3.10: (Acima) Simulação do custo computacional da lei de controle (3.78) segundo o valor de ε , de acordo com a expressão $\varepsilon = 10^{-n_\varepsilon} + N_\varepsilon 10^{-n_\varepsilon+1}$ e seguimento de trajetória para $\varepsilon = 9 \times 10^{-11}$. (Abaixo) Seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (2,0) e evolução do erro de controle $\tilde{h} = [\tilde{x} \ \tilde{y}]^T$ na BMR tipo (2,0) quando é aplicada a lei de controle aumentada (3.78), para $N_r = 1$, $\varepsilon = 10^{-15}$, e a lei de controle rígida (3.65).

Na Figura 3.11(d) é representada a região de escolha para o parâmetro ε de acordo com o critério (3.54), a Suposição 3.8 e o limite ε^* definido em (3.92). Conforme essa escolha, o limite mínimo para os coeficientes de rigidez são, aproximadamente, $D = G \approx 0.111 \times 10^{11}$ N.

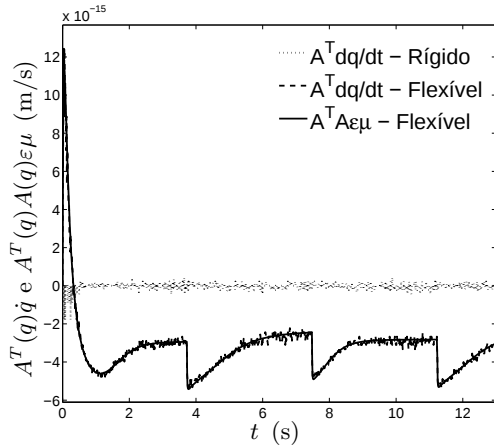
Observação 3.13 (Remanescências de deslizamento e derrapagem): Da Figura 3.8 pode ser observado que existe um erro no seguimento da trajetória quando é aplicada a lei de controle (3.65) no sistema flexível, possivelmente por causa de não serem atenuados os termos de maior grau associados com potências de ε em (3.82). Dessa forma, uma redução do desvio de trajetória pode ser feito pelo uso da lei de controle aumentada (3.78) com uma escolha apropriada de ε e N_r . Tal escolha não é uma tarefa trivial pois as equações iterativas, na forma (3.88), dependem da matriz $Z_2(q)$, que por sua vez depende dos coeficientes normalizados de rigidez G_0 e D_0 , e que são produto da inclusão de modelos lineares para a força de tração de cada roda [veja (3.43), (3.44); e a matriz $Z_2(q)$ calculada para os modelos no Apêndice B, Subseções B.1.1 e B.1.2]. Assim, nem todas as influências de deslizamento e derrapagem são compensadas pela lei de controle (3.78). No entanto, no Capítulo 4 será apresentada a síntese de uma lei de controle



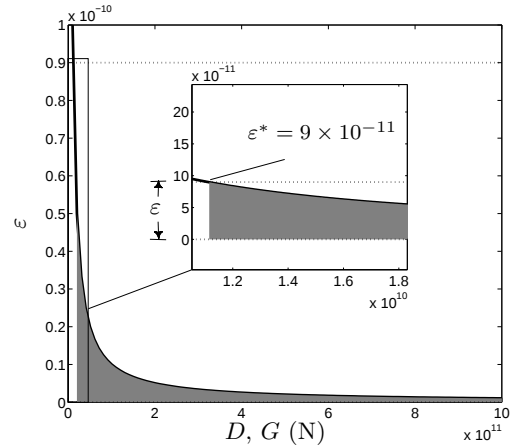
(a) Evolução do componente das restrições pfaianas equivalente com a restrição de não-derrapagem da BMR.



(b) Evolução do componente das restrições pfaianas equivalente com a restrição de rolamento puro da roda associada com φ_1 .



(c) Evolução do componente das restrições pfaianas equivalente com a restrição de rolamento puro da roda associada com φ_2 .



(d) Região de escolha para o parâmetro ε (área na cor cinza). Os valores D , G correspondem aos coeficientes de rigidez transversal e longitudinal, respectivamente.

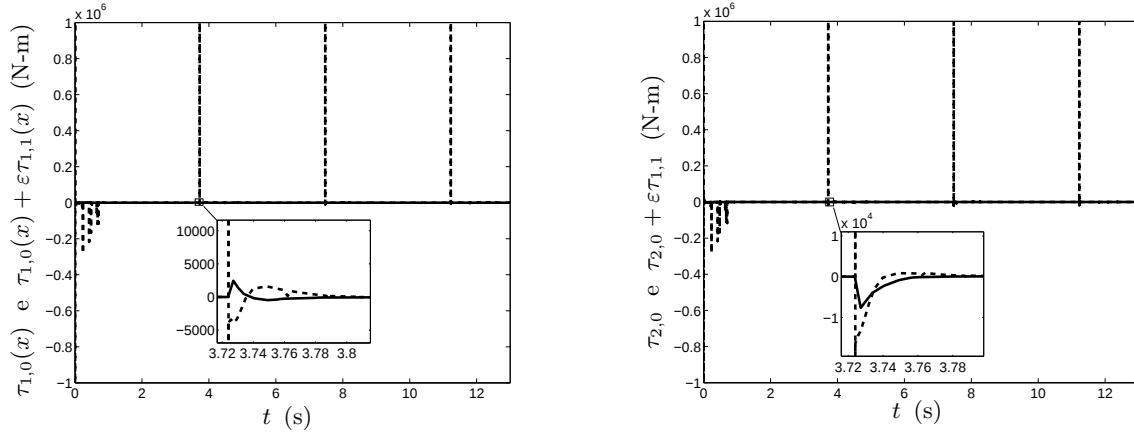
Figura 3.11: Comparação dos vetores $A^T(q)A(q)\varepsilon\mu$ e $A^T(q)\dot{q}$ quando é aplicada a lei de controle (3.78) (com grau $N_r = 1$, $\varepsilon = 10^{-15}$ e $D_0 = G_0 = 1$ N) no modelo flexível da BMR tipo (2,0) e o vetor $A^T(q)\dot{q}$ quando é aplicada a lei de controle (3.65).

para compensação indireta das influências remanescentes de deslizamento e derrapagem.

Contudo, nesta seção será apresentado um exemplo de controle de trajetória para uma BMR tipo (2,0) baseado em ações corretivas com um valor aleatório de ε , sempre que a condição $\varepsilon < \varepsilon^*$ seja satisfeita. Nas Figuras 3.10(c) e 3.10(d) podem ser observados, respectivamente, o seguimento feito pela BMR tipo (2,0) para a trajetória da Figura 3.8 e os erros de seguimento durante 13 s quando são aplicadas as seguintes composições de ações corretivas:

$$\begin{aligned}\tau_\varepsilon(x, \varepsilon) &= \tau_0(x) \\ \tau_\varepsilon(x, \varepsilon) &= \tau_0(x) + \varepsilon \tau_1(x).\end{aligned}$$

O parâmetro de perturbação foi escolhido como $\varepsilon = 10^{-15}$ [$D = G = 10^{15}$ N], tal que a condição $\varepsilon < \varepsilon^*$ do Teorema 3.3 seja satisfeita para o valor de ε^* escolhido em (3.92) e que a influência da zona morta seja consideravelmente desprezível. Na Figura 3.12 pode ser observada a evolução das composições corretivas citadas anteriormente. Nota-se que ao adicionar um termo corretivo o esforço de controle é mais acentuado.



(a) Comparação da evolução do componente $\tau_{1,\epsilon}$ da lei de controle (3.78) com $N_r = 1$ na roda associada com φ_1 .

(b) Comparação da evolução do componente $\tau_{2,\epsilon}$ da lei de controle (3.78) com $N_r = 1$ na roda associada com φ_2 .

Figura 3.12: Comparação da evolução das leis de controle $\tau_\epsilon(x, \epsilon) = \tau_0(x)$ (linha sólida) e $\tau_\epsilon(x, \epsilon) = \tau_0(x) + \epsilon\tau_1(x)$ (linha tracejada, $N_r = 1$) para seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (2,0).

Observação 3.14 (Evolução das restrições pfaffianas no modelo flexível): Conforme modelagem singularmente perturbada da BMR tipo (2,0) apresentada no Apêndice B, Subseção B.1.1, quando $\epsilon = 10^{-3}$ as restrições cinemáticas representadas por (3.6) devem apresentar uma atenuação proporcional a ϵ [refira-se à Figura B.4 e à Observação B.2]. Da mesma forma, a Figura 3.11 apresenta a evolução das três restrições cinemáticas associadas à lei de controle (3.78) para $N_r = 1$ com uma atenuação proporcional a $\epsilon = 10^{-15}$ [nota-se que as escalas verticais são comparativamente menores que as escalas na Figura B.4]. Entretanto, tal atenuação é menor quando a lei de controle (3.65) é aplicada ao sistema rígido [veja linhas pontilhadas nas Figuras 3.11(a), 3.11(b) e 3.11(c)]. Essa ultima observação não significa diretamente uma vantagem devido que no sistema rígido as restrições são modeladas por $A^T(q)\dot{q}$, que por sua vez não incluem flexibilidade para modelar as restrições cinemáticas. Assim, tal observação não tem muita relevância visto que contemplando os erros de seguimento de trajetória no sistema rígido observamos que é inconsistente afirmar que as restrições cinemáticas no sistema rígido estão menos violadas que no sistema flexível [veja linha pontilhada da Figura 3.10(d) que apresenta a evolução do erro de seguimento de trajetória $\tilde{h}$ da lei de controle rígida].

Observação 3.15 (Contribuições corretivas de compensação pequenas): De acordo com a Observação 3.10, o erro associado com cada composição de controle [$\tau_0(x)$ e $\tau_0(x) + \epsilon\tau_1(x)$] deve apresentar uma atenuação proporcional ao número de ações corretivas, observações assim podem ser vistas em Motte & Campion (2000) e Spong *et al.* (1987). Entretanto, no requadro da Figura 3.10(c) mostra que tal atenuação é muito pequena [na ordem de 10^{-4}], o que é uma constatação da Observação 3.13, pois o modelo não suportará valores de ϵ que impedem que a Suposição 3.6 seja satisfeita.

De fato, uma diminuição de ϵ implica um aumento de D e G [veja o critério em (3.53)], ao mesmo tempo que há um aumento em F_x e F_y , devido à imposição dos modelos lineares de tração (3.43) e (3.44). Tal aumento de F_x e F_y pode se tornar inconsistente com os modelos definidos por (3.40) e (3.39), que claramente têm um máximo local [veja Figuras 3.2(a) e 3.2(b)], ou podem estar associados com valores de s e δ_x que não pertencem aos intervalos definidos na Suposição 3.6. Por outro lado, um aumento de ϵ implica uma diminuição de D e G , podendo satisfazer os intervalos na Suposição 3.6, mas com a possibilidade da zona morta ser maior até instabilizar o sistema [quando $\epsilon = \epsilon^*$]. Assim, o valor de ϵ está em uma faixa de ordem significativamente pequena, sendo um extremo a situação de inconsistência de modelagem da tração e de outro a instabilidade do sistema. Nesse caso, só resta que a contribuição de controle corretivo $\epsilon\tau_1(x)$ tenha uma contribuição significativamente pequena.

Particularmente, D'Andréa-Novell *et al.* (1995) mostra que para BMRs tipo (2,0) onde os

coeficientes normalizados D e G foram configurados com valores diferentes, a instabilidade é maior quando o coeficiente de rigidez transversal D é reduzido. No entanto, no Capítulo 4, será apresentado esse caso com a utilização de uma lei de controle que compense as remanescências de deslizamento e derrapagem.

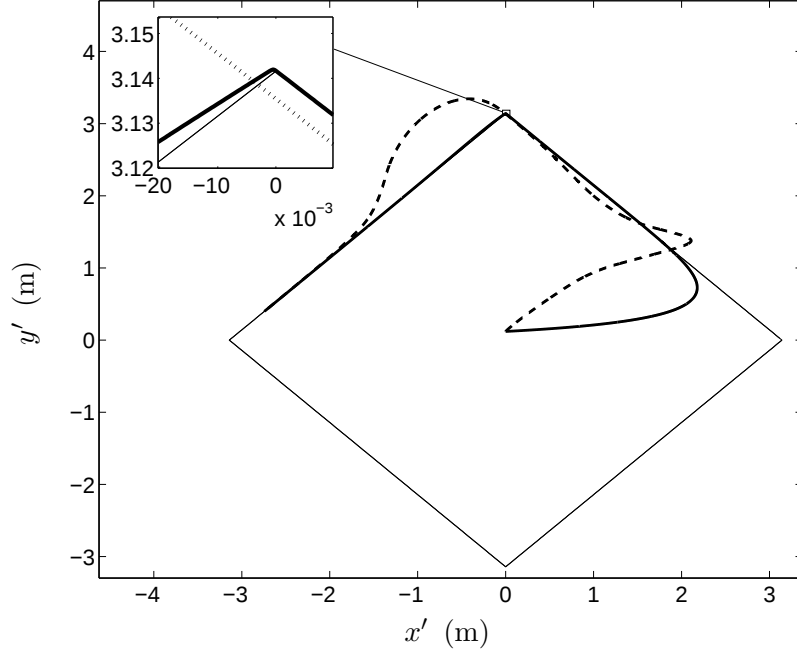


Figura 3.13: Seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (3,0) quando é aplicada a lei de controle (3.65) no modelo rígido (2.43) (linha tracejada) e no modelo flexível definido por (3.69)-(3.70) (linha sólida).

Controlador de trajetória para BMR tipo (3,0)

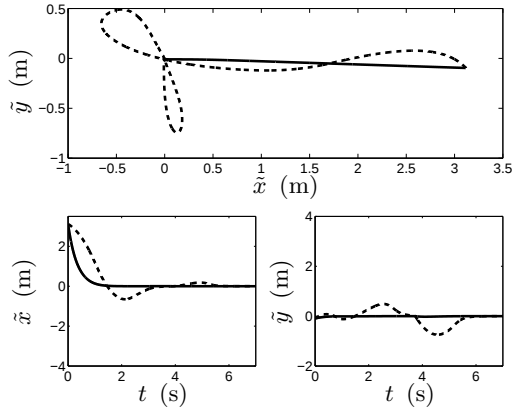
Da mesma forma que foi feito com a configuração da BMR tipo (2,0), aqui será exemplificado o comportamento dos controladores não-lineares de trajetória quando é usada a lei (3.65) sobre o modelo rígido (2.43) e o modelo flexível da BMR tipo (3,0). Salientando também, que os atuadores possuem saturação na entrada e as ações de controle deverão permanecer na faixa definida pelo intervalo $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$.

Na Figura 3.13 é mostrado o seguimento feito pela BMR tipo (3,0) de uma trajetória com forma de losango [com ambas diagonais iguais a 6.28 m] durante 7 s. Para efeitos numéricos, e considerando a Suposição 3.8 e o critério (3.54), foi escolhido $D_0 = G_0 = 1$ N com $\varepsilon = 10^{-3}$ ($D = G = 1000$ N). Os parâmetros de simulação para a BMR são os definidos na Tabela A.1, os parâmetros do motor são os apresentados na Tabela 3.2, a velocidade da BMR é 1.18 m/s, $h_\beta = 0$ e as condições iniciais de posição são $(x_0, y_0) = (0, 0)$ m.

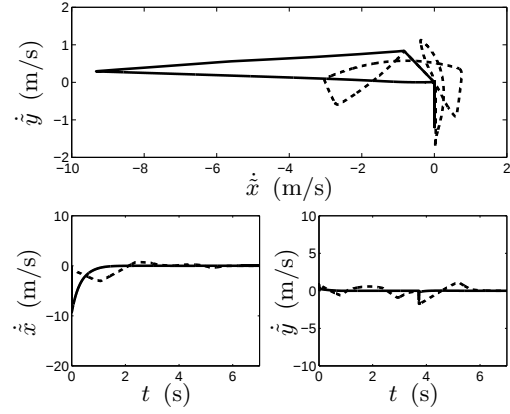
Pode ser observado na Figura 3.13 que o uso da lei de controle (3.65) sobre o modelo rígido apresenta um desvio comparativamente maior que quando é usada sobre o modelo flexível. A Figura 3.14, onde é apresentada a evolução do erro de seguimento $\tilde{h}$, sustenta tal observação. Nota-se que a variação do erro de seguimento de trajetória, $\dot{\tilde{h}} = \dot{h} - \dot{h}_{\text{ref}}$, é maior quando é usado o modelo flexível do que o modelo rígido [ver Figura 3.14(b)], garantindo então, que o erro de seguimento de trajetória, $\tilde{h} = h - h_{\text{ref}}$, seja menor quando é usado o modelo flexível [ver Figura 3.14(a)].

Com o propósito de exemplificar, a lei de controle auxiliar (3.64) foi ajustada com $\ddot{h}_{\text{ref}} = 0$ m/s², $K_1 = 70 I_{2 \times 2}$ e $K_2 = 23 I_{2 \times 2}$ que equivale a um sistema linear de primeira ordem com pólo em $-3.0435 + j0$, e

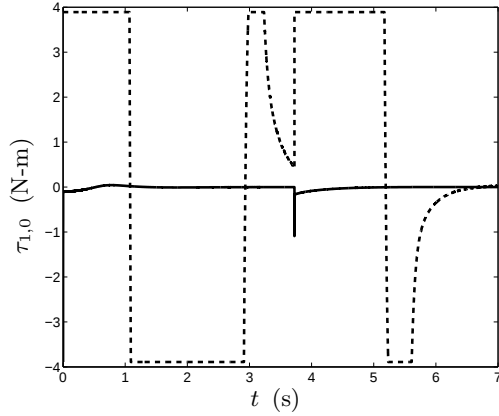
$$\Delta_v(z) = \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta & -L \cos \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta & -L \sin \theta \end{bmatrix}; \quad \dot{\Delta}_v(z) = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & L \sin \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta & -L \cos \theta \end{bmatrix} \dot{\theta}.$$



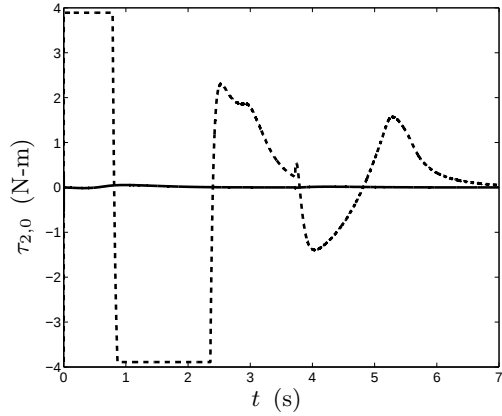
(a) Evolução do componente $h - h_{\text{ref}}$, ou seja, $\tilde{x} = x - x_{\text{ref}}$, $\tilde{y} = y - y_{\text{ref}}$. Verificar Lema 3.3.



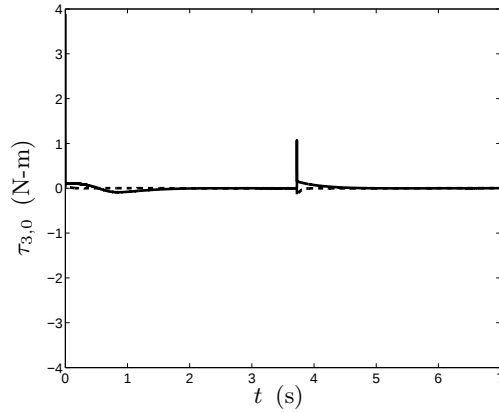
(b) Evolução da variação do erro de seguimento $\dot{h} - \dot{h}_{\text{ref}}$, ou seja, $\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{x}_{\text{ref}}$, $\dot{\tilde{y}} = \dot{y} - \dot{y}_{\text{ref}}$.



(c) Evolução do componente $\tau_{1,0}$ da lei de controle $\tau_0(x)$ (3.65) na roda associada com φ_1 .



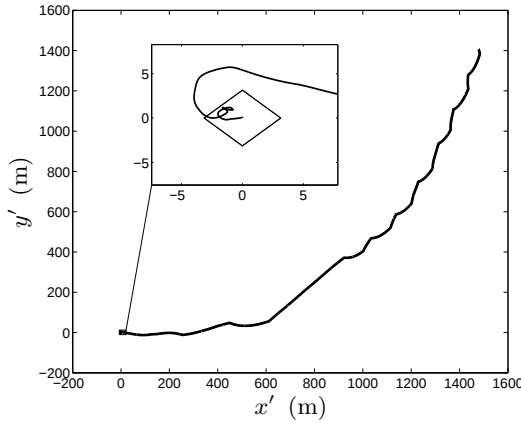
(d) Evolução do componente $\tau_{2,0}$ da lei de controle $\tau_0(x)$ (3.65) na roda associada com φ_2 .



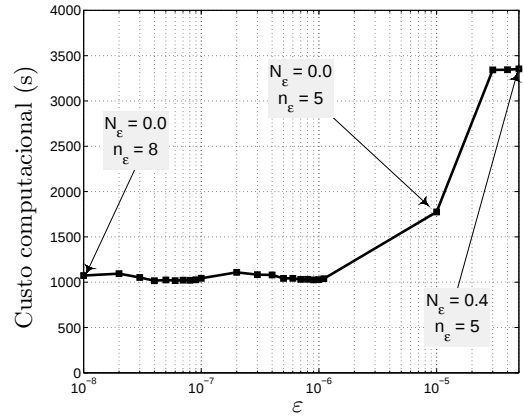
(e) Evolução do componente $\tau_{3,0}$ da lei de controle $\tau_0(x)$ (3.65) na roda associada com φ_3 .

Figura 3.14: Evolução do erro de seguimento $\tilde{h}$ e da lei de controle $\tau_0(x)$ para seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (3,0) quando é aplicada a lei de controle (3.65) no modelo rígido (2.43) (linha tracejada) e no modelo flexível definido por (3.69)-(3.70) (linha sólida).

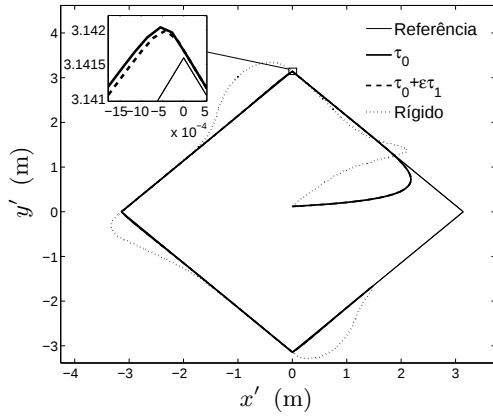
Nas Figuras 3.14(c), 3.14(d) e 3.14(e) são apresentadas a evolução do sinal de controle $\tau_0(x) = \tau(x)$ da equação (3.65) nas três rodas suecas da BMR tipo (3,0) quando é usado o modelo rígido e o modelo flexível. Nota-se que as duas leis de controle respeitam os limites de saturação da



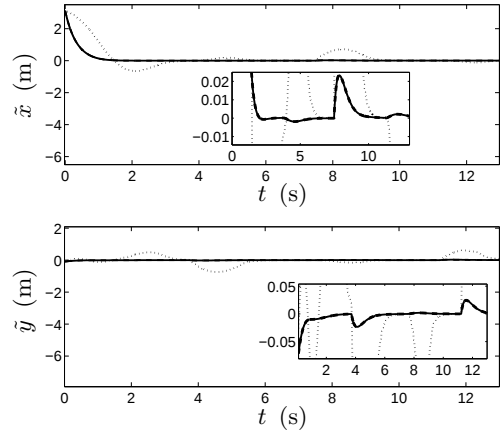
(a) Comportamento instável do seguimento de trajetória feito pela BMR quando $\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$ na lei (3.78) com $N_r = 1$.



(b) Simulação do custo computacional da lei de controle (3.78). Instabilidade iminente quando $\varepsilon \geq 5 \times 10^{-5}$ ($N_\varepsilon = 0.4$ e $n_\varepsilon = 5$).



(c) Seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (3,0) quando é aplicada a lei de controle aumentada (3.78) no modelo flexível definido por (3.69)-(3.70).



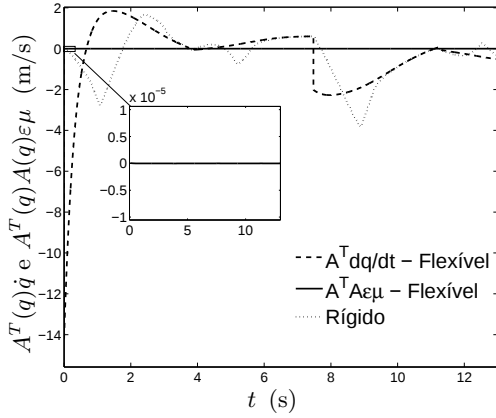
(d) Evolução do erro de controle na BMR tipo (3,0) quando é aplicada a lei de controle aumentada (3.78) no modelo flexível definido por (3.69)-(3.70) (linha sólida) e quando é aplicada a lei de controle rígida (3.65) ao modelo rígido (2.43) (linha pontilhada).

Figura 3.15: (Acima) Simulação do custo computacional da lei de controle (3.78) segundo o valor de ε , de acordo com a expressão $\varepsilon = 10^{-n_\varepsilon} + N_\varepsilon 10^{-n_\varepsilon+1}$ e seguimento de trajetória para $\varepsilon = 5 \times 10^{-5}$. (Abaixo) Seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (3,0) e evolução do erro de controle $\tilde{h} = [\tilde{x} \ \tilde{y}]^T$ na BMR tipo (3,0) quando é aplicada a lei de controle aumentada (3.78), para $N_r = 1$, $\varepsilon = 10^{-5}$, e a lei de controle rígida (3.65).

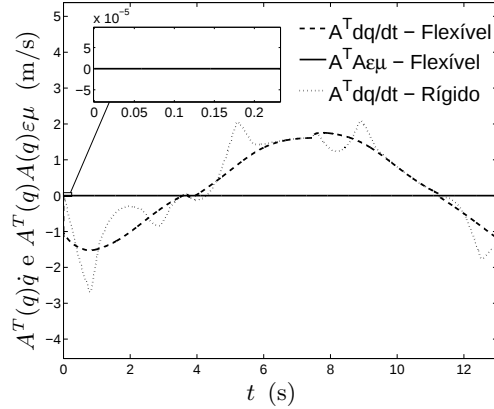
Tabela 3.2 impostos pelos atuadores. Da mesma forma que aconteceu com a BMR tipo (2,0), na BMR tipo (3,0) a ação de controle adquire menor risco de saturação quando é aplicada sobre o modelo flexível do que no modelo rígido e, conseqüentemente, diminui a corrente necessária pelos motores, aumentando então a duração da fonte de alimentação.

Conforme a Observação 3.12, na BMR tipo (3,0) o valor de ε^* também está associado com a máxima deformação entre a roda e a superfície. Valores de ε iguais ou superiores a ε^* estão associados com uma maior aderência da roda à superfície, um maior esforço computacional para calcular a lei de controle aumentada (3.78) no início de um movimento e uma possível instabilidade ou permanência sobre ciclos limites.

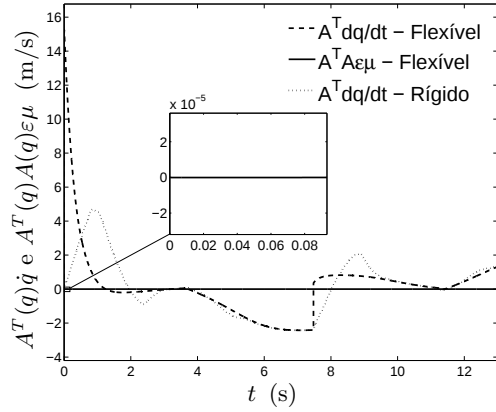
Reaproveitando a expressão (3.91), considerando a Suposição 3.8 e o critério (3.54), pode ser observado quais são os valores de ε^* que diminuem o esforço computacional para o controle da BMR tipo (3,0). Para efeitos numéricos foi escolhido $D_0 = G_0 = 1$ N. Na Figura 3.15(b) é apresentada uma simulação do custo computacional da lei de controle aumentada (3.78) quando é aplicada sobre o modelo flexível da BMR tipo (3,0) [na forma (3.55) - (3.56)], sendo $\tau_0(x)$



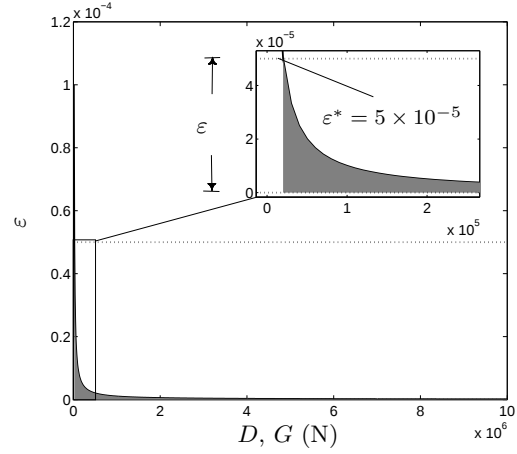
(a) Evolução do componente das restrições pfaffianas equivalente com a restrição de rolamento puro da roda associada com φ_1 .



(b) Evolução do componente das restrições pfaffianas equivalente com a restrição de rolamento puro da roda associada com φ_2 .



(c) Evolução do componente das restrições pfaffianas equivalente com a restrição de rolamento puro da roda associada com φ_3 .



(d) Região de escolha para o parâmetro ε (área na cor cinza). Os valores D , G correspondem aos coeficientes de rigidez transversal e longitudinal, respectivamente.

Figura 3.16: Comparação dos vetores $A^T(q)A(q)\varepsilon\mu$ e $A^T(q)\dot{q}$ quando é aplicada a lei de controle (3.78) (com grau $N_r = 1$, $\varepsilon = 10^{-5}$ e $D_0 = G_0 = 1$ N) no modelo flexível da BMR tipo (3,0) e o vetor $A^T(q)\dot{q}$ quando é aplicada a lei de controle (3.65).

dada por (3.65), grau de robustez $N_r = 1$ e ações corretivas projetadas por meio das equações recursivas (3.88) e (3.87). A lei de controle foi aplicada para fazer o seguimento de uma trajetória com forma de losango [com ambas diagonais iguais a 6.28 m] durante 13 s e com velocidade de 1.18 m/s. Para tal propósito foi usado o *Solver Ode113* de MATLAB® para equações diferenciais. Os parâmetros de simulação para a BMR tipo (3,0) são os definidos na Tabela A.1 [Apêndice A] e os parâmetros do motor são os apresentados na Tabela 3.2.

Os valores de ε , no eixo horizontal da Figura 3.15(b), foram organizados no intervalo $[10^{-9}, 5 \times 10^{-5}]$, sendo 5×10^{-5} [para $N_\varepsilon = 0.4$, $n_\varepsilon = 5$ em (3.91)] o extremo do intervalo que representa a passagem iminente do sistema à instabilidade [veja a Figura 3.15(a)]. Paralelamente, pode ser observado na Figura 3.15(b) que o custo computacional apresenta uma notória diminuição sempre que $\varepsilon < 5 \times 10^{-5}$. Assim, podemos escolher

$$\varepsilon^* = 10^{-5} + 0.4 \cdot 10^{-4} = 5 \times 10^{-5}. \quad (3.93)$$

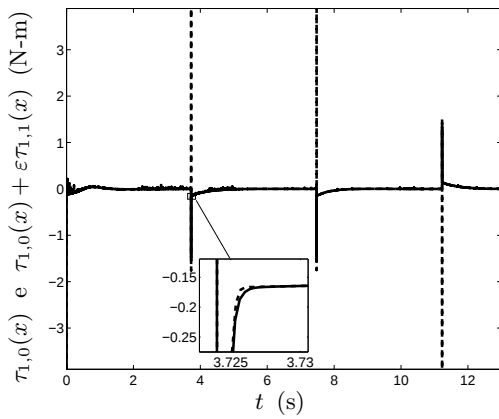
Na Figura 3.16(d) é representada a região de escolha para o parâmetro ε de acordo com o critério (3.54), a Suposição 3.8 e o limite ε^* definido em (3.93). Conforme essa escolha, o limite mínimo para os coeficientes de rigidez são, aproximadamente, $D = G \approx 0.2 \times 10^5$ N.

Da Figura 3.13 pode ser observado que existe um erro no seguimento da trajetória, então, da

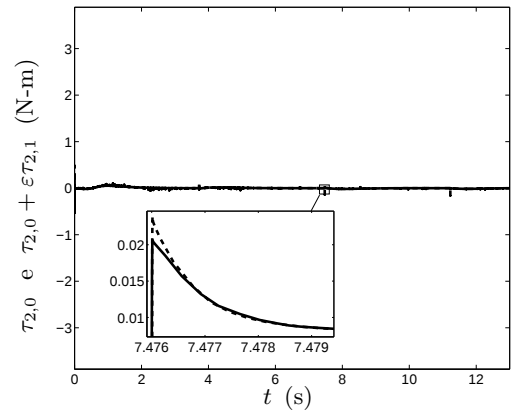
mesma forma que foi analisado para a BMR tipo (2,0) e pela Observação 3.13, uma redução no desvio da trajetória será feito por meio da lei de controle aumentada (3.78). Na Figura 3.15(c) e 3.15(d) podem ser observados, respectivamente, o seguimento feito pela BMR tipo (3,0) para a trajetória da Figura 3.13 e os erros de seguimento durante 13 s quando são aplicadas as seguintes composições de ações corretivas:

$$\begin{aligned}\tau_\varepsilon(x, \varepsilon) &= \tau_0(x) \\ \tau_\varepsilon(x, \varepsilon) &= \tau_0(x) + \varepsilon \tau_1(x).\end{aligned}$$

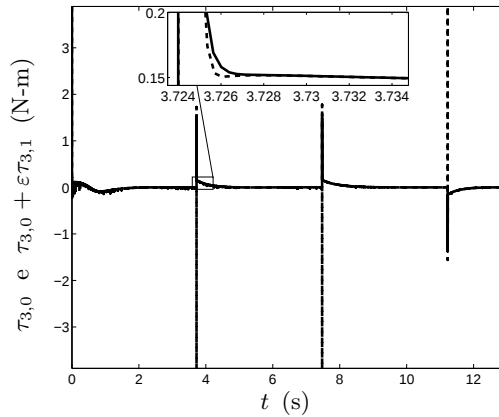
O parâmetro de perturbação escolhido foi $\varepsilon = 10^{-5}$ [$D = G = 100000$ N], tal que a condição $\varepsilon < \varepsilon^*$ do Teorema 3.3 seja satisfeita para o valor de ε^* escolhido em (3.93). Na Figura 3.17 pode ser observada a evolução das composições corretivas citadas anteriormente. Nota-se que ao adicionar um termo corretivo o esforço de controle é mais acentuado.



(a) Comparação da evolução do componente $\tau_{1,\varepsilon}$ da lei de controle (3.78) com $N_r = 1$ na roda associada com φ_1 .



(b) Comparação da evolução do componente $\tau_{2,\varepsilon}$ da lei de controle (3.78) com $N_r = 1$ na roda associada com φ_2 .



(c) Comparação da evolução do componente $\tau_{3,\varepsilon}$ da lei de controle (3.78) com $N_r = 1$ na roda associada com φ_2 .

Figura 3.17: Comparação da evolução das leis de controle $\tau_\varepsilon(x, \varepsilon) = \tau_0(x)$ (linha sólida) e $\tau_\varepsilon(x, \varepsilon) = \tau_0(x) + \varepsilon \tau_1(x)$ (linha tracejada, $N_r = 1$) para seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (3,0).

Conforme modelagem singularmente perturbada da BMR tipo (3,0) apresentada no Apêndice B, Subseção B.1.2, quando $\varepsilon = 10^{-3}$ as restrições cinemáticas representadas por (3.6) devem apresentar uma atenuação proporcional a ε [refira-se a Figura B.8]. A Figura 3.16 apresenta a evolução das três restrições cinemáticas com uma atenuação proporcional a $\varepsilon = 10^{-5}$ [nota-se que as escalas verticais são comparativamente menores que as escalas na Figura B.8].

Similarmente ao argumentado na Observação 3.15, na BMR tipo (3,0) pode ser conferido que

o erro das ações corretivas converge mais rapidamente à origem que o erro associado com a lei de controle rígida. Entretanto, não há diferenças notórias entre os erros de controle associados às composições corretivas $\tau_0(x)$ e $\tau_0(x) + \varepsilon\tau_1(x)$. Assim, a contribuição corretiva $\varepsilon\tau_1(x)$ é muito pequena [confira a similaridade das suas ações corretivas na Figura 3.15(d)].

Observação 3.16 (Inércia da BMR vs. parâmetro de perturbação ε): Dado que o parâmetro de perturbação ε está associado com a deformação de contato entre a roda e a superfície é possível afirmar que existe uma relação de proporcionalidade entre a inércia da BMR [também seu peso] e o valor ε . Assim um aumento de massa na BMR se traduz em uma diminuição do limite máximo de flexibilidade [e um aumento do limite mínimo de rigidez]. Tal afirmação é evidenciada pelos valores de ε^* encontrados para as BMRs tipo (2,0) e (3,0), sendo menor na BMR tipo (2,0) que na BMR tipo (3,0) [compare (3.92) com (3.93) em relação aos valores de massa das duas BMRs indicados na Tabela A.1].

Observação 3.17 (Mínimo escorregamento permissível): Substituindo (3.6) em (3.47) resulta em

$$V_{c,i} \triangleq \begin{bmatrix} V_{i,x} \\ V_{i,y} - r\dot{\varphi}_i \end{bmatrix} = L_i(q)A^T(q)A(q)\varepsilon\mu \quad (3.94)$$

podendo ser argumentado que um aumento ou diminuição de ε equivale a uma variação do deslizamento e da derrapagem da i -ésima roda. Percebe-se que os componentes $(V_{i,y} - r\dot{\varphi}_i)$ e $V_{i,x}$ são diretamente proporcionais com s e δ_x em (3.41) e (3.42), respectivamente. Dessa forma, podemos afirmar que a máxima deformação de contato ε^* [como foi explicado na Observação 3.12] é equivalente com a máxima área de contato permissível entre a roda e a superfície antes do deslizamento e a derrapagem das rodas serem o suficientemente grandes para tornar o sistema instável no início de um movimento²¹. Esta mesma observação é válida para as outras configurações cinemáticas apresentadas na Tabela 2.2.

Em algumas abordagens encontradas na literatura associada, a Observação 3.17 pode ser considerada a motivação inicial de algumas contribuições feitas pelos pesquisadores da área que associavam sinais escalares uniformemente limitadas com as restrições cinemáticas; e só quando deformação e escorregamento [nos seus dois componentes] fossem apropriados tais parâmetros seriam nulos garantindo então a satisfação das restrições (Dong 2010, Dixon *et al.* 2000, Jiang & Pomet 1994, Dong & Kuhnert 2005, Morin & Samson 2003).

3.5 Resumo

Com o propósito de incluir a flexibilidade [aqui representada por ε] dentro da dinâmica da BMR, por meio da teoria de perturbações singulares, foi inserido na Seção 3.2, o conceito de forças dissipativas e o modelo genérico singularmente perturbado para BMRs, com variáveis lentas para descrever o sistema rígido e com variáveis rápidas para descrever a violação das restrições cinemáticas. Foi introduzida a variedade flexível e o modelo de camada limite a fim de estabelecer, através de formalismos matemáticos, as diferenças comportamentais entre as variáveis rápidas e as variáveis lentas. Foi conferido que para uma BMR com restrições cinemáticas, na sua formulação pfaffiana [holonômicas ou não-holonômicas], a estabilidade nas variáveis controladas permanece sempre que essas variáveis sejam uma parcela das coordenadas generalizadas. Foi apresentada uma análise sobre a inclusão de deslizamento e derrapagem na dinâmica de uma BMR e como elas interferem na modelagem das forças generalizadas do movimento. As observações confirmam que as dinâmicas podem ser assumidas singularmente padrão e com estabilidade exponencial [veja Seção 3.3]. A fim de solucionar o problema de controle de trajetória para BMRs com restrições cinemáticas foi formulada a lei de controle rígida composta principalmente pela dinâmica inversa mostrada em (3.65) e pela lei de controle auxiliar (3.64) [Lema 3.3]. Pelo uso do método de Poincaré-Lindstedt é postulada uma reformulação

²¹Das equações (3.43) e (3.44) o deslizamento e a derrapagem estão relacionadas com os componentes da força de tração, F_y e F_x , respectivamente. Quando $\varepsilon = \varepsilon^*$ a aderência é tão alta que F_x e F_y estão relacionadas a um coeficiente de atrito estático alto. Logo, coeficiente de atrito estático alto equivale a uma faixa maior de zona morta nos atuadores.

da lei de controle rígida para uma lei de controle que considerasse a inclusão de ε , chamada lei de controle flexível. Para esse fim, a lei de controle rígida foi complementada com termos de potências de ε , conhecidas na literatura como ações corretivas. Pelo uso de considerações que envolvem o parâmetro de perturbação ε [Teorema 3.1 e Lema 3.2], foi observada a diferença entre o controlador rígido e o controlador flexível. Foi destacado o papel fenomenológico de ε na caracterização da zona morta e salientou-se a presença das remanescências de deslizamento e derrapagem, quando as forças de tração são linearizadas.

Rolamento total apropriado e compensação das remanescências de escorregamento

Quando as BMRs não satisfazem as restrições cinemáticas de rolamento puro e não-derrapagem as forças de interação devem ser formuladas por equações físicas que modelam o contato entre a superfície e a roda. Modelos lineares dessas forças foram considerados no capítulo anterior por meio de mapas no domínio do deslizamento e da derrapagem, entretanto, o controlador dinâmico não conseguiu compensar componentes de ordem superior associados com as forças de tração diretamente relacionadas às remanescências de deslizamento e derrapagem, não estimáveis, que estão presentes durante o seguimento de uma determinada trajetória.

4.1 Introdução

Como foi mencionado no Capítulo 3, quando as BMRs não satisfazem as restrições cinemáticas de rolamento puro e não-derrapagem as forças de interação devem ser formuladas por equações físicas que modelam o contato entre a superfície e a roda [veja Seção 3.3]. Tal modelagem não é uma tarefa trivial devido aos efeitos degenerativos e não-determinísticos da natureza do contato que resultam em modelos não-lineares e variantes no tempo (Canudas de Wit *et al.* 2003, Olson *et al.* 2003); sem contar o alto custo computacional requerido para projetar aplicações de tempo real (Sanca 2006, Laura *et al.* 2006b, Laura *et al.* 2006a, Tan *et al.* 2001). Propostas de controle de trajetória baseados em técnicas para compensação desses efeitos degenerativos têm sido publicados e testados em BMRs tipo (2,0) e tipo (3,0), no entanto, os seus resultados observados na convergência do erro de seguimento de trajetória sugerem usar uma melhor aproximação da natureza do contato [por exemplo: Barreto *et al.* (2013), Sarkar *et al.* (1994), Sanca (2006), Laura *et al.* (2006a), Fernández & Cerqueira (2009a), Fernández *et al.* (2012), Bak *et al.* (2001) e Cruz (2007)]. Em outras contribuições, os efeitos degenerativos relacionados a contato têm sido associadas ao rolamento, especificamente por sinais não-determinísticos ou dinâmicas não-lineares que representam o deslizamento e a derrapagem em BMRs tipo (3,0), (2,0) e (2,1), embora impliquem uma maior complexidade na compensação direta da variável que representa o efeito degenerativo (Shekhar 1997, Williams *et al.* 2002, Li *et al.* 2008, Hong *et al.* 2006, Nandy *et al.* 2011, Trojnacki 2013). Contudo, recentes trabalhos têm usado diferentes formas de estimação para deslizamento e derrapagem objetivando a compensação de seus efeitos nos esquemas de controle de velocidade dos atuadores e controladores de trajetória embora sem conseguir uma convergência assintótica do erro (Hong *et al.* 2006, Trojnacki 2013, Fang *et al.* 2011, Wang & Low 2008, Low & Wang 2008, Lin *et al.* 2007, Dong 2010, Ojeda *et al.* 2006, Michalek *et al.* 2009).

Como foi dito na Subseção 2.3.2, a derrapagem e o deslizamento são condições necessárias sempre que as restrições cinemáticas não sejam satisfeitas (Shekhar 1997, Dong 2010, Dixon *et al.* 2000). Então, como consequência dessas condições, uma outra interpretação tem sido procurar métodos de compensar a violação das restrições cinemáticas. Alguns exemplos são

apresentados em: *Campion et al. (1991b)*, *Campion et al. (1991a)*, *D'Andréa-Novel et al. (1991)*, *D'Andréa-Novel et al. (1992)* e *Chwa (2004)*.

Na Observação 3.13 foi mencionado que o parâmetro de perturbação ε e o grau de robustez N_r incorrem em uma incerteza sobre qual é a melhor escolha para os seus valores. Assim, pode ser esperado que quando uma metodologia de linearização por realimentação de estados não-linear seja sintetizada sobre um modelo que considera aproximações lineares das forças de tração [veja (3.43) e (3.44)], a natureza do contato entre a roda e a superfície não poderá ser apropriadamente calculada para todo s ou todo δ_x [lembrando que os controladores foram projetados sobre Suposição 3.6, de que a velocidade dos centros das rodas eram iguais]. Como consequência disso, influências remanescentes de deslizamento e derrapagem interferirão no seguimento da trajetória a velocidades maiores.

Em diferentes abordagens de controle de trajetória para BMRs tem sido considerada tais influências remanescentes como incertezas numéricas do modelo dinâmico. Dessa forma, controladores adaptativos, com o objetivo de mitigar tais incertezas, têm sido projetados (*Morin & Samson 2003*, *Wenjie Dong 2001*, *Dong et al. 1999*, *Su & Stepanenko 1994*, *Jiang & Praly 1998*, *Jiang 2000a*, *Jiang & Pomet 1994*, *Wang et al. 2012*, *Dong & Guo 2005*, *Shojaei & Shahri 2012*, *Dong et al. 2000*, *Dong & Kuhnert 2005*, *Dong 2010*). Particularmente, em (*Jiang & Pomet 1994*) foi abordado o problema de estabilização com parâmetros incertos, e em (*Dong & Kuhnert 2005*, *Morin & Samson 2003*) controladores adaptativos foram projetados sobre a suposição de que o modelo dinâmico da BMR possuía incertezas paramétricas e não-paramétricas. Para tal propósito, a estabilidade do sistema foi estudada por meio de funções transversais ¹. Controladores por modos deslizantes também têm sido um foco de pesquisa. Nesses controladores tem sido determinado o torque necessário para satisfazer as restrições cinemáticas (*Corradini et al. 1999*, *Unsal & Kachroo 1999*, *Song & Boo 2004*, *Buckholtz 2002*, *Chu & Sunwoo 2005*, *Chwa 2004*), no entanto, por serem usados modelos lineares para simplificar as forças de tração, as remanescências de deslizamento e derrapagem são iminentes a velocidades maiores.

Neste capítulo será elaborada a síntese de uma lei de controle para compensação dessas remanescências de deslizamento e derrapagem no seguimento de trajetórias por meio de uma versão modificada da lei de controle auxiliar (3.64) [Lema 3.3] com o objetivo de garantir que a BMR mitigue a violação das restrições cinemáticas.

4.2 Compensação de escorregamento

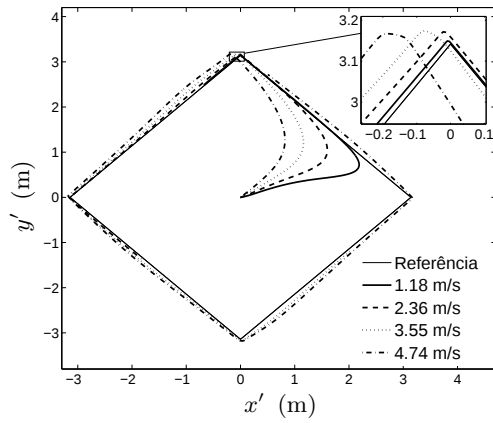
Como foi comentado na Observação 3.17, o vetor $V_{c,i}$ em (3.94) tem uma influência direta sobre o parâmetro de perturbação, ε , e sobre as restrições cinemáticas da BMR. Sendo assim, uma mudança na velocidade $V_{c,i}$ incorre em uma mudança sobre a área de contato permissível entre a roda e a superfície que pode alterar o deslizamento e a derrapagem a fim de instabilizar o sistema. Entretanto, após aplicar a lei de controle flexível (3.77), nosso interesse estará na compensação das remanescências de deslizamento e derrapagem quando há aumentos gradativos da velocidade $V_{c,i}$.

4.2.1 Remanescências de deslizamento e derrapagem

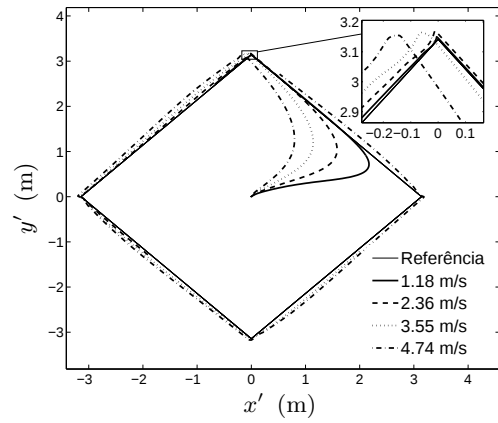
Convenientemente, a Suposição 3.7 garante que a media das velocidades dos centros das rodas, $\|V_i\|$, sejam iguais à velocidade do centro da BMR em relação ao marco global $\{W\}$. Consequentemente, pela equação (3.94), a variação de velocidade nos centros das rodas influencia proporcionalmente a velocidade de contato $V_{c,i}$. Dessa forma, é possível manipular a velocidade da BMR a fim de observar o comportamento das remanescências de deslizamento e derrapagem.

Nas Figuras 4.1 e 4.2 são apresentados os comportamentos das BMRs tipo (2,0) e (3,0), respectivamente, no seguimento de uma trajetória com forma de losango [com ambas diagonais iguais a 6.28 m] durante 4.519 s. Foram usadas a lei (3.78), para $N_r = 1$, $\varepsilon = 10^{-15}$ [para tipo (2,0)], $\varepsilon = 10^{-5}$ [para tipo (3,0)], e a lei (3.65), ambas com $K_1 = 70I_{2 \times 2}$ e $K_2 = 23I_{2 \times 2}$. A fim de observar o comportamentos das duas leis de controle, foi manipulado o valor médio de $\|V_i\|$. Assim, na Tabela 4.1 são mostrados os desvios de trajetória medidos com respeito à primeira

¹Mais detalhes sobre as funções transversais podem ser vistas em *Ishikawa et al. (2009)*, *Morin & Samson (2008)*, *Morin & Samson (2009)*, *Samson (1995)*, *Pazderski et al. (2013)*, entre outros.

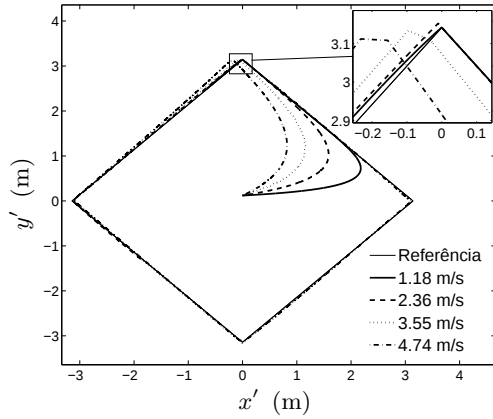


(a) Aumento gradativo de $\|V_i\|_{\text{med}}$ usando a lei de controle flexível (3.78).

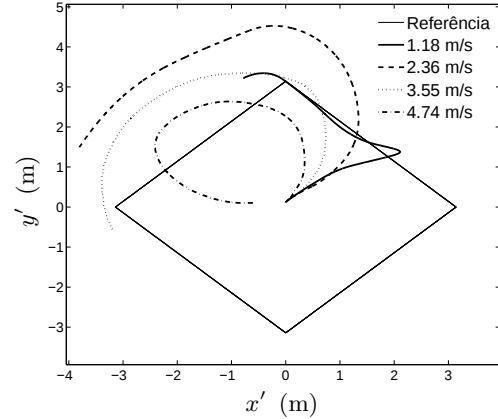


(b) Aumento gradativo de $\|V_i\|_{\text{med}}$ usando a lei de controle rígido (3.65).

Figura 4.1: Seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (2,0) com aumento gradativo de $\|V_i\|_{\text{med}}$.



(a) Aumento gradativo de $\|V_i\|_{\text{med}}$ usando a lei de controle flexível (3.78).



(b) Aumento gradativo de $\|V_i\|_{\text{med}}$ usando a lei de controle rígido (3.65).

Figura 4.2: Seguimento de trajetória executado pela BMR tipo (3,0) com aumento gradativo de $\|V_i\|_{\text{med}}$.

esquina do losango [ou seja, a distância euclidiana entre esquina do losango e o máximo desvio] para diferentes valores de $\|V_i\|_{\text{med}}$, onde $\|V_i\|_{\text{med}}$ representa o valor médio de $\|V_i\|$.

Como pode ser observado nas Figuras 4.1(b) e 4.2(b), junto com os valores na Tabela 4.1, a lei de controle rígido, em sua carência de robustez, apresenta um maior desvio quando é aumentado $\|V_i\|_{\text{med}}$. No caso particular da BMR tipo (3,0) tal aumento gradativo leva o sistema à instabilidade [veja células em **negrito** da Tabela 4.1].

Tabela 4.1: Desvios de trajetória nas BMRs tipo (2,0) e (3,0) com aumento gradativo de $\|V_i\|_{\text{med}}$.

$\ V_i\ _{\text{med}}$ (m/s)	Desvio BMR (2,0) CF ² (cm)	Desvio BMR (2,0) CR (cm)	Desvio BMR (3,0) CF (cm)	Desvio BMR (3,0) CR (cm)
1.18	1.29	0.97	5.564×10^{-2}	50.40
2.36	3.98	3.04	1.44	148.17
3.55	8.44	15.22	4.66	19.64
4.74	18.36	18.36	14.23	80.89

Observação 4.1 (Desvio vs. $\|V_i\|$): Um incremento gradativo de $\|V_i\|$ [o que também implica um incremento em $\|V_i\|_{\text{med}}$] faz com que o desvio da BMR seja maior na esquina do losango [confira o crescimento ascendente dos desvios na Tabela 4.1]. Uma consequência direta desse acontecimento é devido ao controlador dinâmico não conseguir estimar componentes de ordem superior associados com as forças de tração, que por sua vez foram consideradas lineares [ordem 1] no modelo singularmente perturbado [veja Observação 3.15].

Observação 4.2 (Sensibilidade às perturbações): Observando-se a Tabela 4.1 pode ser confirmado que as remanescências de deslizamento e derrapagem influenciam em maior proporção o desvio da trajetória quando a BMR passa por uma esquina do losango. Desde o ponto de vista do desempenho do controlador e assumindo as remanescências de deslizamento e derrapagem como *perturbações*, as esquinas do losango representam a região de maior sensibilidade às perturbações [motivo pelo que tem sido escolhido o losango como trajetória de referência nos capítulos anteriores. Esta figura geométrica, entre outras formas possíveis, permite explorar uma situação de baixa rejeição às perturbações]. Alguns trabalhos existentes nas referências associadas tem utilizado indicadores geométricos da trajetória para síntese de controladores cinemáticos (Dong & Kuhnert 2005, Dong & Guo 2005, Dong 2010, Samson 1995). Por exemplo, Samson (1995) e Dong (2010) apresentaram como utilizar a curvatura da trajetória para modelar as restrições cinemáticas; com o que as esquinas do losango passariam a ser um caso crítico de curvatura³.

A sensibilidade às perturbações é uma das mais importantes características de um sistema de controle. Atualmente, em problemas de controle de trajetória a situação em que a trajetória de referência é seguida por um conjunto de perturbações exige especificações de sobre-pico e tempo de acomodação baixos, ao mesmo tempo que exige uma baixa sensibilidade às perturbações (Maciejowski 2002, Baskys & Zlosnikas 2008). Dessa forma, é importante salientar a importância da configuração da lei de controle auxiliar (3.64), mais especificamente das matrizes K_1 e K_2 que podem ser ajustadas a fim de diminuir essas especificações. A ideia se concentra no clássico controle PD [Proporcional + Derivado] que provê uma relativa melhora no desempenho do controlador [relacionada aos parâmetros de sobre-pico e tempo de acomodação] por meio da sintonia das constantes associadas às ações proporcionais e derivativas, respectivamente relacionadas com K_1 e K_2 . O ajuste das matrizes K_1 e K_2 em (3.64) esta sujeito à utilização de um apropriado método de sintonia (Panagopoulos *et al.* 2002, Baskys & Zlosnikas 2008, Shi & Lee 2004). Nesta tese, não é objetivo encontrar o método ótimo para calcular K_1 e K_2 , pois já existem métodos relacionados a esse ajuste, e sim observar como seus valores contribuem na elaboração da técnica para a compreensão das remanescências.

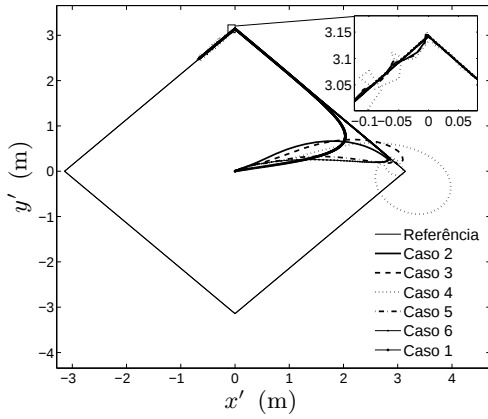
Na Figuras 4.3 e 4.4 é apresentada a evolução do seguimento da trajetória com forma de losango por meio da lei de controle rígido (3.65) e a lei de controle flexível (3.78), respectivamente, para o caso das duas BMRs resumido na Tabela 4.1 [tipo (2,0), $N_r = 1$, $\varepsilon = 10^{-15}$ e tipo (3,0), $N_r = 1$, $\varepsilon = 10^{-5}$, $D_0 = G_0 = 1$ N] durante 4.519 s, com velocidade $V_i = 1.18$ m/s e para vários casos de sintonia de K_1 e K_2 , como descritos na Tabela 4.2.

Particularmente, a Figura 4.3 mostra que a sensibilidade do modelo rígido aos valores de K_1 e K_2 é maior e atinge uma notável instabilidade para a BMR tipo (3,0) [veja Subfigura 4.3(b)]. No caso da BMR tipo (2,0) é apresentado uma melhora no seguimento da trajetória, entretanto a sensibilidade às perturbações é maior [veja Subfigura 4.3(a)]. Dessa forma, será desconsiderado o caso rígido de controle devido a sua pouca robustez com relação à sensibilidade das perturbações e sua instabilidade com relação ao ajuste das constantes K_1 e K_2 .

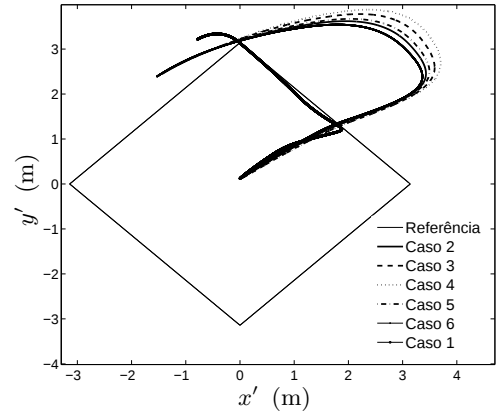
Observação 4.3 (Desempenho do controlador flexível frente às remanescências de escorregamento): A Figura 4.4 mostra que o modelo flexível melhora o seguimento de trajetória e a sensibilidade às perturbações. Para compreender melhor essa observação foi usado o índice

²CF = lei de controle flexível (3.78), CR = lei de controle rígido (3.65).

³Assumindo a medida de curvatura como o inverso do raio da circunferência tangente a um ponto da trajetória, a esquina do losango apresenta, no interior, uma circunferência de raio zero, logo a curvatura tenderia a infinito. Sobre essa abordagem, a curvatura precisa ser limitada para algumas trajetórias a fim de evitar inconsistências numéricas no controlador projetado (Dong 2010, Fernández *et al.* 2014c).

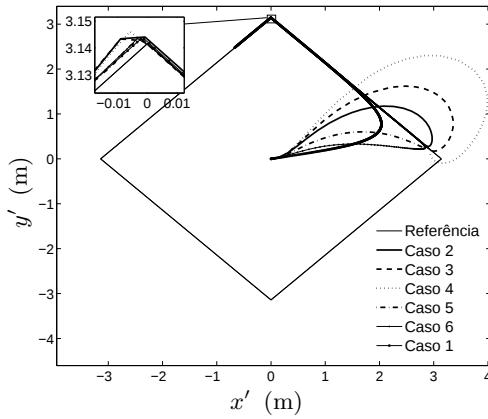


(a) Seguimento de trajetória para BMR tipo (2,0) com $\|V_i\| = 1.18$ m/s no modelo rígido.

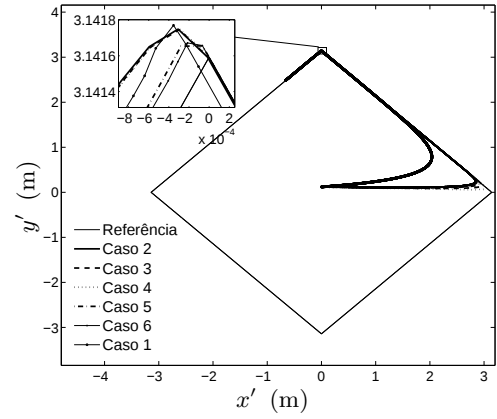


(b) Seguimento de trajetória para BMR tipo (3,0) com $\|V_i\| = 1.18$ m/s no modelo rígido.

Figura 4.3: Seguimento de trajetória executado para os modelos rígidos das BMRs tipo (3,0) e (2,0) para $V_i = 1.18$ m/s.



(a) Seguimento de trajetória para BMR tipo (2,0) com $\|V_i\| = 1.18$ m/s no modelo flexível.



(b) Seguimento de trajetória para BMR tipo (3,0) com $\|V_i\| = 1.18$ m/s no modelo flexível.

Figura 4.4: Seguimento de trajetória executado para os modelos flexíveis das BMRs tipo (3,0) e (2,0) para $V_i = 1.18$ m/s.

IAE (do inglês *Integral Absolute Error*) sobre o sinal de erro de seguimento de trajetória, aqui definido como:

$$\text{IAE} = \begin{bmatrix} \text{IAE}_{x'} \\ \text{IAE}_{y'} \end{bmatrix} = \int_0^T |\tilde{h}(\lambda)| d\lambda \in \mathbb{R}^2 \quad (4.1)$$

sendo que $\tilde{h}(t) \in \mathbb{R}^2$ é a função de erro definida no Lema 3.3 e $T \in \mathbb{R}_+$ um valor conhecido, definido na Subseção 3.2.3⁴. Neste caso o IAE tem dois componentes associados com a posição (x', y') do ponto P no marco local $\{R\}$ da BMR. Resultados sobre o desempenho dos controladores, usando o critério IAE após aplicar a lei de controle (3.78) sobre os modelos flexíveis das BMRs tipo (2,0) e (3,0) nos cinco casos de sintonia, são apresentados na Tabela 4.3.

Pode ser observado que a BMR tipo (2,0) apresenta um maior índice IAE quando é aumentado o valor de K_1 , ao invés da BMR tipo (3,0) que apresenta um menor valor. Os casos 5 e 6 mostram que os aumentos da constante K_2 incorrem em uma diminuição do índice IAE na BMR tipo (2,0), ao invés do caso associado com a BMR tipo (3,0) que apresenta um aumento.

⁴Para efeitos de simulação T foi considerado igual ao tempo de simulação ($= 4.519$ s).

Tabela 4.2: Casos de sintonia para K_1 e K_2 ($D_0 = G_0 = 1$ N).

Caso	$K_1 I_{2 \times 2}$	$K_2 I_{2 \times 2}$	N_r	Parâmetro de Perturbação ε	
				BMR tipo (2,0)	BMR tipo (3,0)
1	300	120	1	10^{-15}	10^{-5}
2	400	23	1	10^{-15}	10^{-5}
3	700	23			
4	1500	23			
5	1500	70	1	10^{-15}	10^{-5}
6	1500	100			

Tabela 4.3: Critério IAE para as BMRs tipo (2,0) e (3,0) usando a lei de controle flexível (3.78) e a lei de controle auxiliar (3.64) para diferentes casos de sintonia de K_1 e K_2 .

Caso	BMR tipo (2,0)		BMR tipo (3,0)	
	IAE _{x'}	IAE _{y'}	IAE _{x'}	IAE _{y'}
1	0.1427	0.0015	2.6284	0.0881
2	0.0330	0.0068	0.5825	0.0224
3	0.0345	0.0084	0.2931	0.0112
4	0.0413	0.0117	0.1420	0.0053
5	0.0547	0.0045	1.1097	0.0330
6	0.0747	0.0037	2.0051	0.0631

Em posse dos resultados associados com os comportamentos observados nas Figuras 4.1(a) e 4.2(a) [apoiado nas Observações 4.1 e 4.2] e dos argumentos na Observação 4.3, uma das propostas desta tese é desenvolver um compensador para as remanescências de deslizamento e derrapagem usando uma modificação da lei de controle auxiliar (3.64).

4.2.2 Lei de controle auxiliar (3.64) modificada

Com a presença de remanescências de deslizamento e derrapagem, as restrições pfaffianas não podem ser completamente satisfeitas [Observação 2.3]. Dado que foram usados modelos lineares para as forças de tração, as restrições cinemáticas modeladas como no Lema 3.1 têm um comportamento diretamente relacionado com as pequenas contribuições de atenuação do deslizamento e da derrapagem feitas por meio da ação controle flexível (3.78) [Observação 3.13 e Observação 3.15]. Dessa forma, o laço de controle associado com a lei de controle auxiliar (3.64) pode ser interpretado como um “atenuador” indireto das remanescências e garantir uma melhor satisfação das restrições cinemáticas. Para compreender melhor, seja citado o modelo cinemático de configuração na versão singularmente perturbada em (3.5). Visto que $\dot{\eta} = v$ [Observação 2.6] então, por aplicação de uma integral no domínio do tempo e substituindo em

(3.5), tem-se:

$$\dot{q} = S(q) \int_0^t v(\lambda) d\lambda + A(q)\varepsilon\mu. \quad (4.2)$$

A equação (4.2) representa o comportamento do estado $\dot{q}$ dentro do espaço de configurações $[\mathbb{R}^{3+N_o+\delta_d+N}]$ dividido em duas parcelas: a contribuição definida pelo termo $A(q)\varepsilon\mu$ após aplicar a lei de controle flexível (3.78) e a contribuição definida pelo termo $S(q) \int_0^t v(\lambda) d\lambda$ associada com a aplicação da lei de controle auxiliar (3.64).

Observação 4.4 (Desafio de compensação das remanescências de escorregamento): Nota-se que o termo $S(q) \int_0^t v(\lambda) d\lambda$ contém o efeito *acumulado* da ação de controle auxiliar v . Assim, o ajuste das matrizes K_1 e K_2 tem uma incidência sobre o vetor η [ou seja, segundo a Observação 2.2, uma incidência sobre as velocidades linear e angular da BMR e a velocidade dos ângulos de orientação das rodas orientáveis no centro]. Da mesma forma, a velocidade $\|V_i\|$ [definida como $\sqrt{\text{tr}(\dot{\xi}\dot{\xi}^T)}$ na Suposição 3.7] também é alterada devido que entre o vetor z [que contém ξ] e o vetor η existe uma transformação do marco local $\{R\}$ ao marco global $\{W\}$ representada por $S_1(q)$ [veja equação (2.31)].

Conferindo as medições feitas na Tabela 4.1, o desafio na síntese do compensador para as remanescências esta em reduzir $\|V_i\|$ quando a BMR se movimenta sobre um segmento da trajetória de referência onde a lei de controle auxiliar v [com um configuração pre-estabelecida para K_1 e K_2] adquire uma maior sensibilidade às perturbações.

Até aqui tem sido mostrado a melhoria no seguimento de trajetória que a lei de controle flexível (3.78) tem sobre a lei de controle rígido (3.65). Também tem sido apresentada uma tabela comparativa para diferentes aumentos de $\|V_i\|$ confirmando a relação proporcional entre esses aumentos e as remanescências de deslizamento e derrapagem equivalentes com desvios significativos da trajetória [tratados como perturbações associadas com a primeira esquina do losango, veja Tabela 4.1]. Seguidamente, e considerando-se como perturbações as remanescências de deslizamento e derrapagem, foram usados diferentes casos de sintonia das matrizes K_1 e K_2 na lei de controle auxiliar (3.64) a fim de observar uma diferença no desempenho do controlador flexível (3.78) [veja Tabela 4.3]. No entanto, para esses casos de sintonia, as Figuras 4.4(a) e 4.4(b) apresentaram o seguimento de trajetória quando $\|V_i\| = 1.18$ m/s, e pelos resultados observados é indispensável, segundo a Tabela 4.1, que os valores para as matrizes K_1 e K_2 devam ser modificados quando $\|V_i\| > 1.18$ m/s. Finalmente, a Observação 4.4 tem apresentado o desafio relacionado com a síntese do compensador para as remanescências de deslizamento e derrapagem.

Com o objetivo de fazer a síntese de um compensador que solucione o desafio apresentado na Observação 4.4, nesta tese é modificada a lei de controle auxiliar (3.64) por meio de uma redução estratégica da aceleração da BMR no marco local $\{R\}$. Fazer uma redução de aceleração no marco local da BMR pressupõe certa alteração temporária da condição de linearização na Observação 2.6, visto que uma modificação de $\dot{\eta}$ deve estar representada por uma alteração da ação de controle auxiliar v . Para tal fim, considera-se a proposição seguinte:

Proposição 4.1 (Redução de aceleração). *Existe uma função $0 \leq \Delta_\sigma(t) \leq 1$, para $\forall t \geq 0$, tal que quando aplicada ao sistema (3.55) - (3.56) por meio da lei de controle por realimentação de estados (3.65) a BMR apresenta uma **redução de aceleração** no marco local $\{R\}$ e uma alteração da condição de linearização. Seja esta condição de linearização definida como:*

$$v = \Delta_\sigma \dot{\eta} \quad (4.3)$$

para $\forall t \geq 0$.

Lema 4.1 (Lei de controle auxiliar modificada). *Se a trajetória de referência definida em (3.62) é tal que $h_{\text{ref}}(t)$, $\dot{h}_{\text{ref}}(t)$, $\ddot{h}_{\text{ref}}(t)$ são limitados para $\forall t$, e $\dot{h}_{\text{ref}}(t)$ é integrável, então uma solução para o problema de seguimento de trajetória, quando é aplicada uma redução na aceleração da BMR como indicado na Proposição 4.1, é a lei de controle auxiliar*

$$v^*(t) = \Delta_\sigma^{-1}v = \Delta_\sigma^{-1}\Delta_v^+(z) \left(\ddot{h}_{\text{ref}}(t) - K_1\tilde{h}(t) - K_2\dot{\tilde{h}}(t) - \dot{\Delta}_v(z)\eta(t) \right), \quad (4.4)$$

onde $\tilde{h}(t) = h(t) - h_{\text{ref}}(t)$, é o erro de seguimento, $K_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ e $K_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ são matrizes arbitrárias definidas positivas e $\Delta_v(z)$ é uma matriz singular definida por

$$\Delta_v(z) = \frac{\partial h_z(z)}{\partial z} S_1(q) \in \mathbb{R}^{2 \times \delta_u}.$$

Prova: Diferenciando duas vezes (3.63) tem-se

$$\ddot{h} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h_z}{\partial z} \right) \dot{z} + \frac{\partial h_z}{\partial z} \ddot{z}. \quad (4.5)$$

Do modelo (2.31) tem-se que $\dot{z}$ e $\ddot{z}$ equivalem às seguintes expressões:

$$\dot{z} = S_1(q)\eta; \quad \ddot{z} = \dot{S}_1(q)\eta + S_1(q)\dot{\eta}.$$

Substituindo essas expressões em (4.5) resulta

$$\ddot{h} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h_z}{\partial z} \right) S_1(q)\eta + \frac{\partial h_z}{\partial z} \dot{S}_1(q)\eta + \frac{\partial h_z}{\partial z} S_1(q)\dot{\eta}. \quad (4.6)$$

Usando a regra da cadeia para diferenciação pode ser verificado que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h_z}{\partial z} \right) S_1(q)\eta + \frac{\partial h_z}{\partial z} \dot{S}_1(q)\eta = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h_z}{\partial z} S_1(q) \right) \eta,$$

assim (4.6) pode ser reescrita como:

$$\ddot{h} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h_z}{\partial z} S_1(q) \right) \eta + \frac{\partial h_z}{\partial z} S_1(q)\dot{\eta},$$

ou ainda, devido que $\Delta_v(z) = \frac{\partial h_z}{\partial z} S_1(q)$, como

$$\ddot{h} = \dot{\Delta}_v(z)\eta + \Delta_v(z)\dot{\eta}. \quad (4.7)$$

Agora, aplicando a Proposição 4.1 em (4.7) obtemos

$$\ddot{h} = \dot{\Delta}_v(z)\eta + \Delta_v(z)\Delta_\sigma\dot{\eta}. \quad (4.8)$$

Impondo-se a dinâmica do erro como descrita pela equação diferencial $\ddot{\tilde{h}}(t) + K_2\dot{\tilde{h}}(t) + K_1\tilde{h}(t)$, sendo $\tilde{h} = h(t) - h_{\text{ref}}(t)$, então

$$\ddot{\tilde{h}} = \ddot{h}_{\text{ref}} - K_1\tilde{h} - K_2\dot{\tilde{h}}. \quad (4.9)$$

Igualando (4.8) com (4.9) obtemos

$$\dot{\eta} = \Delta_\sigma^{-1} \Delta_v^+(z) \left(\ddot{h}_{\text{ref}} - K_1\tilde{h} - K_2\dot{\tilde{h}} - \dot{\Delta}_v(z)\eta \right),$$

e visto que no Lema 3.3, $v = \Delta_v^+(z)(\ddot{h}_{\text{ref}} - K_1\tilde{h} - K_2\dot{\tilde{h}} - \dot{\Delta}_v(z)\eta)$, então

$$\dot{\eta} = \Delta_\sigma^{-1} v.$$

Pela Observação 2.6 tem-se que $v = \dot{\eta}$. Assim,

$$v = \Delta_\sigma^{-1} v. \quad (4.10)$$

Redefinido o novo v [membro esquerdo de (4.10)] por v^* a prova é finalizada. ■

Observação 4.5 (Condição de linearização modificada): Da mesma forma que na Observação 2.6, a substituição de (4.4) em (2.44), garante que

$$v^* = \dot{\eta}. \quad (4.11)$$

Em posse do Lema 4.1, uma lei de controle por realimentação de estados para assegurar o seguimento de trajetória na BMR, na sua versão rígida, é definida por

$$\tau(x) = [S^T(q)B(q)]^{-1} \left\{ S^T(q) \left[M(q)S(q)\Delta_\sigma^{-1}\Delta_v^+(z) \left(\ddot{h}_{\text{ref}}(t) - K_1\dot{h}(t) - K_2\ddot{h}(t) - \dot{\Delta}_v(z)\eta(t) \right) + M(q) \left[\frac{\partial S}{\partial q} S(q)\eta \right] \eta - C(q, S(q)\eta) \right] \right\}. \quad (4.12)$$

Análise de laço fechado

Usando abordagens sobre linearização por realimentação de estado não-linear [veja (D'Andréa-Novel *et al.* 1995, Motte & Campion 2000, Fernández *et al.* 2015a)] o sistema (3.57) - (3.59) pode ser transformado em um sistema linear controlável. Assim, seja considerado o sistema de saídas linearizadas [ou transformação de coordenadas] definido por

$$\begin{cases} y_1 = h_z(z) \end{cases} \quad (4.13)$$

$$\begin{cases} y_2 = \Delta_v(z)\eta. \end{cases} \quad (4.14)$$

onde $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^2$ representam o vetor de saídas linearizadas e suas derivadas [ou seja, a posição cartesiana do ponto P no marco $\{R\}$ da BMR e sua velocidade].

Derivando com respeito ao tempo o sistema (4.13) - (4.14), e pelo uso de (4.11), é obtido o sistema de equações relacionado com o sistema linear controlável, ou seja

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \left(\frac{\partial \Delta_v(z)}{\partial z} \dot{z} \right) \eta + \Delta_v(z)\Delta_\sigma^{-1}v. \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\quad (4.16)$$

Como consequência de (4.11), o modelo dinâmico definido por (3.57) - (3.59) pode ser reescrito com uma partição adicional que satisfaz o Teorema 3.1. Para tal propósito, seja particionado (3.58) como

$$\dot{w}_1 = W_0^a(q)\eta + \varepsilon W_1^a(q)\mu + W_2^a(q)\mu + W_3^a(q)\tau \quad (4.17)$$

$$\dot{\eta} = W_0^b(q)\eta + \varepsilon W_1^b(q)\mu + W_2^b(q)\mu + W_3^b(q)\tau \quad (4.18)$$

onde $w_1 = [\beta_o \ \varphi]^T \in \mathbb{R}^{N_o+N}$ e as matrizes $W_0^a(q)$, $W_1^a(q)$, $W_2^a(q)$, $W_3^a(q)$, $W_0^b(q)$, $W_1^b(q)$, $W_2^b(q)$ e $W_3^b(q)$ são resultantes da partição das matrizes $Z_0^b(q)$, $Z_1^b(q)$, $Z_2^b(q)$ e $Z_3^b(q)$ em (3.58).

Comparando (3.5) com (3.57) tem-se que $Z_0^a(q) = S_1(q)$, $Z_1^a(q) = A_1(q)$ e $Z_2^a(q) = Z_3^a(q) = 0$. Da mesma forma, comparando (3.5) com (4.17) tem-se que $W_0^a(q) = S_2(q)$, $W_1^a(q) = A_2(q)$ e $W_2^a(q) = W_3^a(q) = 0$. Complementarmente, visto que $\dot{\eta} = v = W_0^b(q)\eta + \varepsilon W_1^b(q)\mu + W_2^b(q)\mu + W_3^b(q)\tau$, então, pelo uso de (4.11), a nova partição para o sistema (3.57) - (3.59) pode ser reescrita como segue:

$$\begin{cases} \dot{z} = S_1(q)\eta + \varepsilon A_1(q)\mu, \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\begin{cases} \dot{w}_1 = S_2(q)\eta + \varepsilon A_2(q)\mu, \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \Delta_\sigma^{-1}W_0^b(q)\eta + \Delta_\sigma^{-1} \left[\varepsilon W_1^b(q) + W_2^b(q) \right] \mu + \Delta_\sigma^{-1}W_3^b(q)\tau, \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\mu} = G_0(q)\eta + [\varepsilon G_1(q) + G_2(q)] \mu + G_3(q)\tau. \end{cases} \quad (4.22)$$

Seja definida agora

$$y^* = [y_1 \ \dot{y}_1]^T$$

como a trajetória executada pelo ponto P , e seja

$$y_{\text{ref}}^* = [y_{1,\text{ref}} \ \dot{y}_{1,\text{ref}}]^T \quad (4.23)$$

como uma trajetória de referência limitada por uma bola compacta $B_{\text{ref}}(0 : \bar{r}_{\text{ref}})$, tal que $\dot{y}_{1,\text{ref}}$ seja integrável. Então, o problema de seguimento de trajetória no modelo singularmente perturbado

definido por (4.19) - (4.22), quando aplicado a lei de controle (4.12), pode ser simplificado no lema seguinte:

Lema 4.2 (Sistema reduzido de laço fechado (Fernández *et al.* 2015a)). *A fim de garantir as saídas linearizadas definidas em (4.13) - (4.14), as equações dinâmicas de*

$$\tilde{y}^* = \begin{bmatrix} y_1 - y_{1,\text{ref}} \\ y_2 - y_{1,\text{ref}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{h} \\ \dot{\tilde{h}} \end{bmatrix}, \mu \text{ and } w_1, \quad (4.24)$$

quando é aplicado a lei de controle por realimentação de estados não-linear (4.12) ao sistema definido por (4.19) - (4.22), tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}^* = U\tilde{y}^* + Z_a(\tilde{y}^*, w_1, \mu, \varepsilon, t) \\ \varepsilon \dot{\mu} = G(\tilde{y}^*, w_1, \mu, \varepsilon, t) \\ \dot{w}_1 = S_2(y_1, w_1)\eta + \varepsilon A_2(q)\mu \end{cases} \quad (4.25)$$

$$\varepsilon \dot{\mu} = G(\tilde{y}^*, w_1, \mu, \varepsilon, t) \quad (4.26)$$

$$\dot{w}_1 = S_2(y_1, w_1)\eta + \varepsilon A_2(q)\mu \quad (4.27)$$

onde U é uma matriz Hurwitz definida por

$$U = \begin{bmatrix} 0 & I_{2 \times 2} \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix},$$

tal que

$$\text{i)} \quad Z_a(\tilde{y}^*, w_1, \mu, \varepsilon, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_z}{\partial z} A_1(q) \varepsilon \mu \\ \varepsilon b(\tilde{y}^*, w_1, \mu, \varepsilon) \end{bmatrix} \text{ com}$$

$$b(\tilde{y}^*, w_1, \mu, \varepsilon) = \Delta_\sigma^{-1} \Delta_v(z) \frac{1}{\varepsilon} \left[W_0^b \eta + (\varepsilon W_1^b + W_2^b) \mu - W_0^b \eta - W_2^b \mu \right] + \left\{ \frac{\partial \Delta_v}{\partial z} A_1(q) \mu \right\} \eta.$$

ii) $G(\tilde{y}^*, w_1, \mu, \varepsilon, t) = G_0(q)\eta + [\varepsilon G_1(q) + G_2(q)]\mu + G_3(q)\tau$. Assim, quando $\varepsilon = 0$ a expressão seguinte é obtida:

$$G(\tilde{y}^*, w_1, \mu, 0, t) = G_0(q)\eta + G_2(q) [\mu - H(q, \eta, t)] + G_3(q)\tau,$$

onde $H(q, \eta, t)$ é dada pela Definição 3.2.

iii) Z_a, S_1, G, S_2 são uniformemente limitados com respeito a w_1 .

Prova: Item (i). Com a transformação de coordenadas (4.13) - (4.14) e usando (4.19) então

$$\dot{y}_1 = \frac{\partial h_z}{\partial z} S_1(q)\eta + \frac{\partial h_z}{\partial z} \varepsilon A_1(q)\mu = \Delta_v(z)\eta + \frac{\partial h_z}{\partial z} \varepsilon A_1(q)\mu = y_2 + \frac{\partial h_z}{\partial z} \varepsilon A_1(q)\mu.$$

De forma imediata obtemos que:

$$\dot{\tilde{y}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & I_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{bmatrix} + \frac{\partial h_z}{\partial z} \varepsilon A_1(q)\mu. \quad (4.28)$$

Derivando (4.14) tem-se que

$$\dot{y}_2 = \dot{\Delta}_v(z)\eta + \Delta_v(z)\dot{\eta},$$

ou, pelo uso de (4.21), como

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 = & \left\{ \frac{\partial \Delta_v}{\partial z} S_1(q)\eta \right\} \eta + \left\{ \frac{\partial \Delta_v}{\partial z} A_1(q)\varepsilon \mu \right\} \eta + \Delta_v(z) \Delta_\sigma^{-1} W_0^b(q)\eta \\ & + \Delta_v(z) \Delta_\sigma^{-1} [\varepsilon W_1^b(q) + W_2^b(q)] \mu + \Delta_v(z) \Delta_\sigma^{-1} W_3^b(q)\tau. \end{aligned}$$

Entretanto, a fim de obter a expressão para a matriz $Z_a(\tilde{y}^*, w_1, \mu, \varepsilon, t)$ seja somado, subtraído

e reorganizado o termo $\Delta_\sigma^{-1} \Delta_v(z) (W_0^b \eta + W_2^b \mu)$ na equação acima:

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 = & \Delta_\sigma^{-1} \Delta_v(z) \left(W_3^b \tau + W_0^b \eta + W_2^b \mu \right) + \left\{ \frac{\partial \Delta_v}{\partial z} S_1(q) \eta \right\} \eta \\ & + \Delta_\sigma^{-1} \Delta_v(z) \left[W_0^b \eta + \left(\varepsilon W_1^b + W_2^b \right) \mu - W_0^b \eta - W_2^b \mu \right] + \left\{ \frac{\partial \Delta_v}{\partial z} A_1(q) \varepsilon \mu \right\} \eta. \end{aligned}$$

Quando $\varepsilon = 0$ é esperado que a lei de controle τ definida em (4.12) garanta que $\dot{\tilde{y}}_2 = -K_1 \tilde{y}_1 - K_2 \tilde{y}_2$ [$= -K_1 \tilde{h} - K_2 \dot{\tilde{h}}$]. Dessa forma, se definimos $b(y^*, w_1, \mu, \varepsilon)$ a partir da equação acima como

$$b(y^*, w_1, \mu, \varepsilon) = \Delta_\sigma^{-1} \Delta_v(z) \frac{1}{\varepsilon} \left[W_0^b \eta + \left(\varepsilon W_1^b + W_2^b \right) \mu - W_0^b \eta - W_2^b \mu \right] + \left\{ \frac{\partial \Delta_v}{\partial z} A_1(q) \mu \right\} \eta$$

então

$$\dot{\tilde{y}}_2 = \begin{bmatrix} -K_1 & -K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \end{bmatrix} + \varepsilon b(y^*, w_1, \mu, \varepsilon). \quad (4.29)$$

Agora, juntando (4.28) e (4.29) é obtida a equação dinâmica para $\tilde{y}^*$ dada em (4.25).

Item (ii): A expressão para $\varepsilon \dot{\mu}$ pode ser obtida de (4.22). Quando $\varepsilon = 0$ tem-se que

$$G(q, \eta, \mu, 0, t) = G_0(q) \eta + G_2(q) \mu + G_3(q) \tau.$$

Somando e subtraindo o termo $G_0(q) \eta + G_2(q) H(q, \eta, \tau)$, onde $H(q, \eta, \tau)$ é definido por (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} G(q, \eta, \mu, 0, t) = & G_0(q) \eta + G_2(q) H(q, \eta, \tau) + G_3(q) \tau + G_0(q) \eta + G_2(q) \mu \\ & - G_0(q) \eta - G_2(q) H(q, \eta, \tau). \end{aligned}$$

Com $\tau(q, \eta, \tau)$ expressado como uma função de (y^*, w, t) ou $(\tilde{y}^*, w_1, t)$, a variedade $H(q, \eta, t)$ também pode ser expressada como uma função de (y^*, w_1, t) ou $(\tilde{y}^*, w_1, t)$. Então $G(q, \eta, \mu, 0, t)$ pode ser reescrita como

$$G(q, \eta, \mu, 0, t) = G_0(q) \eta + G_2(q) [\mu - H(q, \eta, t)] + G_3(q) \tau.$$

Item (iii): Visto que $w_1 = [\beta_o \ \varphi]^T$ e todos os termos indicados aqui dependem explicitamente de funções $\sin(\cdot)$ ou $\cos(\cdot)$ de θ, β_c, β_o e φ , que são funções angulares limitadas. Logo, todos esses termos são uniformemente limitados com respeito a w_1 . ■

A dependência de t em (4.25) - (4.27) é devido à trajetória y_{ref}^* estar em uma bola compacta $B_{\text{ref}}(0 : \bar{r}_{\text{ref}})$. Deve salientar-se também que, devido ao fato de $\mu(t)$ aparecer explicitamente na expressão de $Z_a(\tilde{y}^*, w_1, \mu, \varepsilon, t)$, a equação em $\dot{\tilde{y}}^*$ em (4.25) não pode ser desacoplada das equações em $\dot{\mu}$ e $\dot{w}_1$.

No caso em que $\varepsilon = 0$, a situação $\tilde{y}^* = 0$ representa um ponto de equilíbrio, correspondente a $\mu = H(q, \eta, \tau)$ devido que $Z_a(0, w_1, H(q, \eta, t), 0, t) = 0$. Já no caso em que $\varepsilon \neq 0$, $\tilde{y}^* = 0$, e $\mu = H(q, \eta, t)$, não é um ponto de equilíbrio porque $Z_a(0, w_1, H(q, \eta, t), \varepsilon, t) \neq 0$. Entretanto, $\tilde{y}^*$ e a diferença $\mu(t) - H(q, \eta, t)$ permanecem limitadas.

Da mesma forma que no Capítulo 3, o próximo teorema enfatiza na existência de limites superiores sobre ε que garantem que a solução $\tilde{y}^*$ do sistema realimentado pela lei de controle (4.12) e a diferença $\mu - H(\tilde{y}^*, w_1, t)$ permaneçam limitadas.

Teorema 4.1 (Solução limitada do sistema reduzido de laço fechado). *Se a trajetória de referência definida em (4.23) é tal que $y_{1,\text{ref}}(t)$, $y_{2,\text{ref}}(t)$, $\dot{y}_{2,\text{ref}}(t)$ são limitados para $\forall t$, e $y_{2,\text{ref}}(t)$ é integrável, existem três constantes $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$, $\varepsilon^* > 0$, quando aplicada a lei de controle por realimentação de estados (4.12) ao sistema (3.57) - (3.59), tal que se $\|\tilde{y}_0^*\| < \nu_1$, $\|\mu_0 - H(\tilde{y}_0^*, w_{1,0}, 0)\| < \nu_2$ e $\varepsilon < \varepsilon^*$, então as aproximações*

$$\begin{aligned} \tilde{y}^*(t) &= e^{Ut} \tilde{y}^*(0) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \mu(t) - H(\tilde{y}^*, w_1, t) &= \hat{\mu}(t^*) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

são validas sobre intervalos de tempo infinito, sendo $\hat{\mu}(t^*)$ a solução ao modelo de camada limite:

$$\frac{d\hat{\mu}}{dt^*} = G_0(\tilde{y}_0^*, w_{1,0})\eta_0 + G_2(\tilde{y}_0^*, w_{1,0}) [\hat{\mu} + H(\tilde{y}_0^*, w_{1,0}, 0)] + G_3(\tilde{y}_0^*, w_{1,0})\tau_0$$

onde $\tau_0 = \tau(\tilde{y}_0^*, w_0)$.

Prova: Do Lema 4.2 resulta que as Suposições 3.3, 3.4 e 3.5 sejam satisfeitas para o sistema (4.25) - (4.27), da mesma forma que seriam satisfeitas para o sistema (3.57) - (3.59) com $\tilde{y}^* = z$, $w = w_1$ e $\mu = \mu$. ■

No Lema 4.1 o desafio na síntese do compensador para as remanescências se reduz a computar a função de ponderação Δ_σ , tal que a velocidade V_i seja diminuída quando a BMR se movimenta sobre um segmento da trajetória de referência onde há uma maior sensibilidade às perturbações [Observação 4.2]. Na seção a seguir será apresentado um análise relacionado com o rolamento total de uma BMR e sobre este será projetado a função de ponderação Δ_σ .

4.3 Rolamento total apropriado

O rolamento total apropriado para uma BMR em movimento sobre uma determinada trajetória esta associado com a inclusão de N condições, correspondentes às N rodas da BMR (Fernández *et al.* 2012, Stonier *et al.* 2007, Fernández *et al.* 2015b, Fernández *et al.* 2015d, Fernández *et al.* 2015c), na forma:

$$\delta_x = \dot{\delta}_x = 0 \quad \text{e} \quad s = \dot{s} = 0.$$

Condição 4.1 (Condição de rolamento total apropriado). *Considerando-se os modelos cinemáticos da Tabela 2.2 e as interpretações dadas na Tabela 3.1, as condições de rolamento total apropriado são definidas na Tabela 4.4.*

Dentro do conceito de rolamento apropriado, as forças de tração F_x e F_y são assumidas responsáveis por gerar os torques requeridos para conservar cada uma das condições apresentadas na Tabela 4.4. De outra forma, a Condição 4.1 garante que as restrições cinemáticas nas Definições 2.17 e 2.18 sejam satisfeitas.

4.3.1 Variações de deslizamento e derrapagem: derivadas $\dot{s}$ e $\dot{\delta}_x$

As variações definidas por $\dot{s}$ e $\dot{\delta}_x$ além de terem importância relevante na satisfação da condição de rolamento apropriado [Condição 4.1] representam implicitamente, junto com seus estados s e δ_x , a dinâmica do deslizamento e da derrapagem, que incidem na dinâmica geral da BMR e na velocidade V_i . A seguir será feito um análise com o objetivo de compreender melhor tal incidência.

Variação $\dot{s}$: condição de rolamento apropriado na dinâmica da roda e perda de tração

Levando em consideração os assuntos da Subseção 3.3.1 a variação de deslizamento $\dot{s}_i$, associada como a i -ésima roda, pode ser calculada reescrevendo a equação (3.41) sem as normas, ou seja:

$$s_i = \frac{V_{i,y} - r\dot{\varphi}_i}{V_i}.$$

Diferenciando a expressão acima obtemos

$$\dot{s}_i = \frac{\dot{V}_{i,y} - r\ddot{\varphi}_i}{V_i} - \frac{(V_{i,y} - r\dot{\varphi}_i)\dot{V}_i}{V_i^2},$$

e como $V_i \approx V_{i,y}$ [Observação 3.7], então

$$\dot{s}_i = \frac{r\dot{\varphi}_i\dot{V}_i - r\ddot{\varphi}_iV_i}{V_i^2}. \quad (4.30)$$

Tabela 4.4: Condição de rolamento total apropriado para as configurações cinemáticas das BMRs apresentadas na Tabela 2.2.

TIPO	Condição	Interpretação
(3,0)	$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \dot{s}_1 = 0 \\ s_2 = \dot{s}_2 = 0 \\ s_3 = \dot{s}_3 = 0 \\ \delta_{x,1} \neq 0, \dot{\delta}_{x,1} \neq 0 \\ \delta_{x,2} \neq 0, \dot{\delta}_{x,2} \neq 0 \\ \delta_{x,3} \neq 0, \dot{\delta}_{x,3} \neq 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} s_1 = \dot{s}_1 = 0 \\ s_2 = \dot{s}_2 = 0 \\ s_3 = \dot{s}_3 = 0 \\ \delta_{x,1} = \dot{\delta}_{x,1} = 0 \\ \delta_{x,2} = \dot{\delta}_{x,2} = 0 \\ \delta_{x,3} = \dot{\delta}_{x,3} = 0 \end{array} \right.$	Variação nula e valor nulo dos deslizamentos s_1, s_2, s_3 das três rodas <i>suecas</i> . Devido à Subseção 2.3.1 não tem-se restrições sobre a derrapagem. Dessa forma, não tem-se condições sobre $\delta_{x,1}, \delta_{x,2}, \delta_{x,3}$ (associadas com $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$). Na configuração alternativa, deve existir uma variação nula e um valor nulo tanto nos deslizamentos s_1, s_2, s_3 como nas derrapagens $\delta_{x,1}, \delta_{x,2}, \delta_{x,3}$ das três rodas <i>orientáveis fora do centro</i> (associadas com os pares $(\beta_{1o}, \varphi_1), (\beta_{2o}, \varphi_2), (\beta_{3o}, \varphi_3)$).
(2,0)	$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \dot{s}_1 = 0 \\ s_2 = \dot{s}_2 = 0 \\ \delta_{x,1} = \dot{\delta}_{x,1} = 0 \\ \delta_{x,2} = \dot{\delta}_{x,2} = 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} s_1 = \dot{s}_1 = 0 \\ s_2 = \dot{s}_2 = 0 \\ s_3 = \dot{s}_3 = 0 \\ \delta_{x,1} = \dot{\delta}_{x,1} = 0 \\ \delta_{x,2} = \dot{\delta}_{x,2} = 0 \\ \delta_{x,3} = \dot{\delta}_{x,3} = 0 \end{array} \right.$	Variação nula e valor nulo dos deslizamentos s_1, s_2 e das derrapagens $\delta_{x,1}, \delta_{x,2}$ das duas rodas <i>fixas</i> (associadas com φ_1, φ_2), ou na configuração alternativa, variação nula e valor nulo dos deslizamentos s_1, s_2, s_3 e das derrapagens $\delta_{x,1}, \delta_{x,2}, \delta_{x,3}$ das duas rodas <i>fixas</i> (associadas com φ_1, φ_2) e a roda <i>orientável fora do centro</i> (associada com o par (β_{3o}, φ_3)).
(2,1)	$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \dot{s}_1 = 0 \quad \delta_{x,1} = \dot{\delta}_{x,1} = 0 \\ s_2 = \dot{s}_2 = 0 \quad \delta_{x,2} = \dot{\delta}_{x,2} = 0 \\ s_3 = \dot{s}_3 = 0 \quad \delta_{x,3} = \dot{\delta}_{x,3} = 0 \end{array} \right.$	Variação nula e valor nulo dos deslizamentos s_1, s_2, s_3 e das derrapagens $\delta_{x,1}, \delta_{x,2}, \delta_{x,3}$ das duas rodas <i>orientáveis fora do centro</i> (associadas com os pares $(\beta_{1o}, \varphi_1), (\beta_{2o}, \varphi_2)$) e a roda <i>orientável no centro</i> (associada com o par (β_{3c}, φ_3)).
(1,1)	$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \dot{s}_1 = 0 \quad \delta_{x,1} = \dot{\delta}_{x,1} = 0 \\ s_2 = \dot{s}_2 = 0 \quad \delta_{x,2} = \dot{\delta}_{x,2} = 0 \\ s_3 = \dot{s}_3 = 0 \quad \delta_{x,3} = \dot{\delta}_{x,3} = 0 \end{array} \right.$	Variação nula e valor nulo dos deslizamentos s_1, s_2, s_3 e das derrapagens $\delta_{x,1}, \delta_{x,2}, \delta_{x,3}$ das duas rodas <i>fixas</i> (associadas com φ_1, φ_2) e a roda <i>orientável no centro</i> (associada com β_{1c}).
(1,2)	$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \dot{s}_1 = 0 \quad \delta_{x,1} = \dot{\delta}_{x,1} = 0 \\ s_2 = \dot{s}_2 = 0 \quad \delta_{x,2} = \dot{\delta}_{x,2} = 0 \\ s_3 = \dot{s}_3 = 0 \quad \delta_{x,3} = \dot{\delta}_{x,3} = 0 \end{array} \right.$	Variação nula e valor nulo dos deslizamentos s_1, s_2, s_3 e das derrapagens $\delta_{x,1}, \delta_{x,2}, \delta_{x,3}$ das duas rodas <i>orientáveis no centro</i> (associadas com os pares $(\beta_{1c}, \varphi_1), (\beta_{2c}, \varphi_2)$) e a roda <i>orientável fora do centro</i> (associada com o par (β_{3o}, φ_3)).

Como consequência da formulação Euler-Lagrange em Fernández & Cerqueira (2009b), para a i -ésima roda tem-se que:

$$I_w \ddot{\varphi}_i = \tau_{i,\varepsilon} - r F_i \quad (4.31)$$

onde $\tau_{i,\varepsilon}$ é a lei de controle flexível (3.78) aplicada à i -ésima roda e F_i a i -ésima força de tração que resulta da composição das funções $F_{i,x}$ e $F_{i,y}$ como em (3.45). Substituindo (4.31) em (4.30)

e manipulando-as resulta em

$$V_i^2 \dot{s}_i = V_i(1 - s_i) \dot{V}_i - r \left(\frac{\tau_{i,\varepsilon} - r F_i}{I_w} \right) V_i,$$

ou, definindo $m_\gamma = \frac{r}{I_w}$ e manipulando novamente, como

$$V_i \dot{s}_i = (1 - s_i) \dot{V}_i - m_\gamma \tau_{i,\varepsilon} + r m_\gamma F_i. \quad (4.32)$$

Sabendo que $\tau_{i,\varepsilon} \triangleq \tau_{i,\varepsilon}(q, \eta, \mu)$ e $V_i \triangleq V_i(q, \eta, \mu)$ então, para BMRs com N rodas, a equação (4.32) pode ser escrita matricialmente como

$$\dot{S}_t V_t(q, \eta, \mu) = (I_{N \times N} - S_t) \dot{V}_t(q, \eta, \mu) - m_\gamma T_\varepsilon(q, \eta, \varepsilon) + r m_\gamma F_t, \quad (4.33)$$

sendo

$$\begin{aligned} T_\varepsilon(q, \eta, \varepsilon) &= [\tau_{1,\varepsilon}(q, \eta, \varepsilon) \quad \dots \quad \tau_{N,\varepsilon}(q, \eta, \varepsilon)]^T \in \mathbb{R}^N, \\ F_t &= [F_1 \quad \dots \quad F_N]^T \in \mathbb{R}^N, \\ V_t(q, \eta, \mu) &= [V_1(q, \eta, \mu) \quad \dots \quad V_N(q, \eta, \mu)]^T \in \mathbb{R}^N, \\ S_t &= \text{diag}\{s_1, \dots, s_N\} \in \mathbb{R}^{N \times N}. \end{aligned}$$

Pode-se verificar que a equação (4.33) inclui a força de tração das rodas, F_t . Dependendo da aproximação linear dessa força [representada em (3.44)] podemos ter dois casos para as condições de rolamento associados com a dinâmica da roda: a *condição dinâmica de rolamento ideal* e a *condição dinâmica de rolamento apropriado*.

Lema 4.3 (Condição dinâmica de rolamento ideal). *Para uma BMR com modelo cinemático, como os apresentados na Tabela 2.2, a **condição dinâmica de rolamento ideal** é definida por*

$$m_\gamma T_\varepsilon(q, \eta, \varepsilon) = \dot{V}_t(q, \eta, \mu). \quad (4.34)$$

Prova: Pelo uso da forma linear $F_{i,y} = G s_i$ e $F_{i,x} = D \delta_{x,i}$ [equações (3.43) e (3.44)] para cada uma das N rodas, a equação (3.45) pode ser definida como

$$F_t(S_t, \Delta_t) = G S_t + D \Delta_t \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

Consequentemente, (4.33) pode ser reescrita como

$$V_t(q, \eta, \mu) \dot{S}_t = \dot{V}_t(q, \eta, \mu) (I_{N \times N} - S_t) - m_\gamma T_\varepsilon(q, \eta, \varepsilon) + r m_\gamma (G S_t + D \Delta_t),$$

sendo $\Delta_t = \text{diag}\{\delta_{x,1}, \dots, \delta_{x,N}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Depois, substituindo $\dot{s}_i = s_i = 0$ e $\dot{\delta}_{x,i} = \delta_{x,i} = 0$, para $i = 1, \dots, N$ [ou, $S_t = \dot{S}_t = 0$ e $\Delta_t = \dot{\Delta}_t = 0$] obtemos (4.34). ■

Lema 4.4 (Condição dinâmica de rolamento apropriado). *Para uma BMR com modelo cinemático, como os apresentados na Tabela 2.2, a **condição dinâmica de rolamento apropriada** é definida por*

$$m_\gamma T_\varepsilon(q, \eta, \varepsilon) = \dot{V}_t(q, \eta, \mu) + r m_\gamma F_t. \quad (4.35)$$

Prova: Substituí-se diretamente $\dot{s}_i = s_i = 0$ e $\dot{\delta}_{x,i} = \delta_{x,i} = 0$ [ou, $S_t = \dot{S}_t = 0$ e $\Delta_t = \dot{\Delta}_t = 0$] em (4.33) para obter (4.35). ■

Observação 4.6 (Perda de tração): Assumindo que $F_t = F_t^{\text{lin}} + F_t^{\text{nlin}}$, sendo F_t^{lin} a parcela linear e F_t^{nlin} a parcela não-linear da força F_t [no domínio de s e δ_x], então a equação (4.35), pela substituição direta de $S_t = \dot{S}_t = 0$ e $\Delta_t = \dot{\Delta}_t = 0$, permite observar que:

$$m_\gamma T_\varepsilon(q, \eta, \varepsilon) = \dot{V}_t(q, \eta, \mu) + r m_\gamma F_t^{\text{nlin}}.$$

A expressão acima confirma os argumentos da Observação 4.1, ou seja, a lei de controle τ_ε precisa de uma parcela não-linear da força de tração, F_t^{nlin} , para garantir a estimação dos

termos de maior crescimento. Tal parcela representa a quantidade adicional que compensa as remanescências de deslizamento e é comumente conhecida como *perda de tração* (Terry & Minor 2008, Song & Boo 2004, Tai & Tomizuka 2000, Iagnemma & Dubowsky 2004).

Observação 4.7 ($\dot{S}_t$ é uniformemente limitada): Pelas equações (3.39) e (3.40) é possível afirmar que a força F_y e a força F_x são uniformemente limitadas. Assim, $\|F_t\| \leq Y_T$ para $\forall t > 0$, sendo $Y_T \in \mathbb{R}_+$ um valor conhecido. Calculando a pseudo-inversa para o vetor $V_t(q, \eta, \mu)$ podemos reescrever (4.33) como

$$\dot{S}_t = (I_{N \times N} - S_t) \dot{V}_t(q, \eta, \mu) V_t^+(q, \eta, \mu) - m_\gamma T_\varepsilon(q, \eta, \varepsilon) V_t^+(q, \eta, \mu) + r m_\gamma F_t V_t^+(q, \eta, \mu).$$

Considerando-se que as condições limites para cada s_i na Definição 3.4 são satisfeitas, então podemos afirmar que $\|S_t\| \leq S_T$ para $\forall t > 0$, sendo $S_T \in \mathbb{R}_+$ um valor conhecido. Da mesma forma, como foi indicado na Subseção 3.4.4 podemos afirmar que $\tau_{\min} \leq \tau_\varepsilon \leq \tau_{\max}$, logo $\|T_\varepsilon\| \leq T_T$ para $\forall t > 0$, sendo $T_T \in \mathbb{R}_+$ um valor conhecido. Agora, pela aplicação de uma norma apropriada à equação acima e o uso da desigualdade do triângulo obtemos:

$$\|\dot{S}_t\| \leq \|(I_{N \times N} - S_t) \dot{V}_t(q, \eta, \mu) V_t^+(q, \eta, \mu)\| + \|m_\gamma T_\varepsilon(q, \eta, \varepsilon) V_t^+(q, \eta, \mu)\| + \|r m_\gamma F_t V_t^+(q, \eta, \mu)\|,$$

e pelo uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|\dot{S}_t\| &\leq \|V_t^+(q, \eta, \mu)\| \|\dot{V}_t(q, \eta, \mu)\| \|(I_{N \times N} - S_t)\| + \|m_\gamma V_t^+(q, \eta, \mu)\| \|T_\varepsilon(q, \eta, \varepsilon)\| \\ &\quad + \|r m_\gamma V_t^+(q, \eta, \mu)\| \|F_t\| \end{aligned}$$

ou ainda, como

$$\begin{aligned} \|\dot{S}_t\| &\leq \|V_t^+(q, \eta, \mu)\| \|\dot{V}_t(q, \eta, \mu)\| + \|V_t^+(q, \eta, \mu)\| \|\dot{V}_t(q, \eta, \mu)\| \|S_t\| \\ &\quad + \|m_\gamma V_t^+(q, \eta, \mu)\| \|T_\varepsilon(q, \eta, \varepsilon)\| + \|r m_\gamma V_t^+(q, \eta, \mu)\| \|F_t\|. \end{aligned}$$

Pela Suposição 3.7, e devido que ξ depende de funções harmônicas (verifique (2.31)), então $\dot{V}_t(q, \eta, \mu)$ e $V_t^+(q, \eta, \mu)$ são limitadas, ou seja, $\|\dot{V}_t(q, \eta, \mu)\| \leq V_T$ e $\|V_t^+(q, \eta, \mu)\| \leq V_T^*$, para $\forall t > 0$ onde $V_T, V_T^* \in \mathbb{R}_+$ são constantes conhecidas. Assim, substituindo na desigualdade anterior, obtemos

$$\|\dot{S}_t\| \leq V_T^* V_T + V_T^* V_T S_T + m_\gamma V_T^* T_T + r m_\gamma V_T^* Y_T \quad (4.36)$$

o que mostra que a matriz $\dot{S}_t$ é uniformemente limitada.

Observação 4.8 (V_t é limitado pelas variações de deslizamento): A equação (4.32) permite observar que $\dot{s}_i$ é inversamente proporcional com a velocidade V_i . Pela desigualdade Cauchy-Schwarz sabemos que $\|V_t(q, \eta, \mu) \dot{S}_t\| \leq \|V_t(q, \eta, \mu)\| \|\dot{S}_t\|$, assim, pela aplicação de uma norma apropriada em (4.33) tem-se que

$$\|V_t(q, \eta, \mu) \dot{S}_t\| = \|(I_{N \times N} - S_t) \dot{V}_t(q, \eta, \mu) - m_\gamma T_\varepsilon(q, \eta, \varepsilon) + r m_\gamma F_t\| \leq \|V_t(q, \eta, \mu)\| \|\dot{S}_t\|. \quad (4.37)$$

Aplicando desigualdade Cauchy-Schwarz no membro direito de (4.33) também podemos afirmar que

$$\|(I_{N \times N} - S_t) \dot{V}_t(q, \eta, \mu) - m_\gamma T_\varepsilon(q, \eta, \varepsilon) + r m_\gamma F_t\| \leq V_T + V_T S_T + m_\gamma T_T + r m_\gamma Y_T. \quad (4.38)$$

Agora, dividindo (4.37) por (4.38), e manipulando algebricamente, obtemos

$$\|V_t(q, \eta, \mu)\| \geq (V_T + V_T S_T + m_\gamma T_T + r m_\gamma Y_T) \|\dot{S}_t\|^{-1}. \quad (4.39)$$

Novamente, pela Suposição 3.7, e visto que ξ depende de funções harmônicas [verifique (2.31)], $\|V_t(q, \eta, \mu)\| \leq V_R$ para $\forall t > 0$, sendo V_R um valor conhecido. Dessa forma, pelo uso de (4.36), também é válido afirmar que:

$$\|V_t(q, \eta, \mu)\| \|\dot{S}_t\| \leq V_R (V_T^* V_T + V_T^* V_T S_T + m_\gamma V_T^* T_T + r m_\gamma V_T^* Y_T)$$

ou

$$\|V_t(q, \eta, \mu)\| \leq V_R V_T^* (V_T + V_T S_T + m_\gamma T_T + r m_\gamma Y_T) \|\dot{S}_t\|^{-1}. \quad (4.40)$$

Unindo as desigualdades (4.39) e (4.40) podemos concluir que a norma de todas as velocidades nos centros das rodas têm um limite inferior e um limite superior governado pela norma $\|\dot{S}_t\|$, ou seja,

$$p_{11} \|\dot{S}_t\|^{-1} \leq \|V_t(q, \eta, \mu)\| \leq V_R V_T^* p_{11} \|\dot{S}_t\|^{-1}. \quad (4.41)$$

onde $p_{11} = V_T + V_T S_T + m_\gamma T_T + r m_\gamma Y_T$.

A expressão (4.41) permite afirmar que se a norma das velocidades dos centros das rodas da BMR permanece no limite inferior $p_{11} \|\dot{S}_t\|^{-1}$ ou superior $V_R V_T^* p_{11} \|\dot{S}_t\|^{-1}$, é possível manipular seu valor por meio do inverso da norma das variações dos deslizamentos.

Lema 4.5. $\|V_t(q, \eta, \mu)\|$ é manipulável por $\|\dot{S}_t\|$ se, e somente se

$$V_R \neq p_{11} \|\dot{S}_t\|^{-1}.$$

Prova: Provando por contradição, quando

$$V_R = p_{11} \|\dot{S}_t\|^{-1},$$

então $V_R V_T^* p_{11} \|\dot{S}_t\|^{-1} = V_R^2 V_T^*$. Por sua vez, de (4.36) tem-se que $p_{11} \|\dot{S}_t\|^{-1} \geq \frac{1}{V_T^*}$. Assim, a desigualdade (4.41) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{V_T^*} \leq \|V_t(q, \eta, \mu)\| \leq V_R^2 V_T^*,$$

o que representa um intervalo fixo não manipulável pela norma $\|\dot{S}_t\|$. Dessa forma, por contradição, $V_R \neq p_{11} \|\dot{S}_t\|^{-1}$. ■

O Lema 4.5 mostra que a máxima velocidade dos centros das rodas não pode ser uma consequência direta da manipulação de $\|\dot{S}_t\|$. Do mesmo modo acontece para as variações de derrapagem, como será visto a seguir.

Variação $\dot{\delta}_x$: condição de derrapagem apropriada na dinâmica da roda

Levando em consideração os assuntos da Subseção 3.3.1 a variação de derrapagem $\dot{\delta}_{x,i}$, associada como a i -ésima roda, pode ser calculado reescrevendo a equação (3.42) sem as normas, ou seja:

$$\delta_{x,i} = \frac{V_{i,x}}{V_i}. \quad (4.42)$$

Diferenciando a expressão acima obtemos

$$\dot{\delta}_{x,i} = \frac{\dot{V}_{i,x} V_i - \dot{V}_i V_{i,x}}{V_i^2}$$

ou, manipulando algebricamente

$$V_i \dot{\delta}_{x,i} = \dot{V}_{i,x} - \dot{V}_i \delta_{x,i}. \quad (4.43)$$

Sabendo que $V_i \triangleq V_i(q, \eta, \mu)$, então a equação (4.43) pode ser escrita em forma matricial para N rodas como

$$\dot{\Delta}_t V_t(q, \eta, \mu) = \dot{V}_x(q, \eta, \mu) - \Delta_t \dot{V}_t(q, \eta, \mu) \quad (4.44)$$

sendo

$$V_x(q, \eta, \mu) = [V_{1,x}(q, \eta, \mu) \quad \dots \quad V_{N,x}(q, \eta, \mu)]^T \in \mathbb{R}^N, \\ \Delta_t = \text{diag}\{\delta_{x,1}, \dots, \delta_{x,N}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}.$$

Pode-se verificar que a equação (4.44) não inclui a força de tração F_t das rodas e não depende da lei de controle flexível (3.78). Nesse caso, as condições dinâmicas associadas à

derrapagem das rodas representadas pela *condição dinâmica de derrapagem ideal* e a *condição dinâmica de derrapagem apropriado* são as mesmas.

Lema 4.6 (Condição dinâmica de derrapagem ideal e de derrapagem apropriado). *Para uma BMR com modelo cinemático, como os apresentados na Tabela 2.2, a **condição dinâmica de derrapagem ideal** e a **condição dinâmica de rolamento apropriada** são definidas por*

$$\dot{V}_x(q, \eta, \mu) = 0. \quad (4.45)$$

Prova: Substituindo diretamente $\dot{\delta}_{x,i} = \delta_{x,i} = 0$ em (4.44) obtemos (4.45). ■

Observação 4.9 (Variações de V_i pequenas = a derrapagens iguais): A expressão (4.45) confirma os argumentos da Observação 3.7, ou seja, o ângulo de derrapagem δ_x não é suficientemente grande [no máximo 15°]. Dessa forma, V_x pode ser desprezada, e como $V_x \approx \dot{V}_x$, então $\dot{V}_x$ também pode ser desprezada. Esse argumento nos permite propor, por meio de (4.42), que todos as derrapagens $\delta_{x,i}$, para $i = 1, \dots, N$, associadas com N rodas, podem ser consideradas iguais sempre que as variações de V_i sejam pequenas.

Observação 4.10 (BMR tipo (3,0) precisa de derrapagem): Particularmente, para uma BMR tipo (3,0) com rodas suecas, a condição dinâmica de derrapagem apropriado conserva a mesma forma da expressão (4.44), devido que $\dot{\delta}_{x,i} \neq \delta_{x,i} \neq 0$ [veja Tabela 4.4]. Como foi apresentando na Subseção 2.3.1, a equação (2.12) modela o componente nulo da velocidade de contato por meio do parâmetro γ que caracteriza a direção da roda padrão, no entanto os movimentos não-controláveis dos rolamentos precisam contribuir com derrapagem para garantir a omnidirecionalidade, que é a principal característica dessa BMR.

Observação 4.11 ($\dot{\Delta}_t$ é uniformemente limitada): Pela equação (3.42) é possível afirmar que a força Δ_t é uniformemente limitada, ou seja, $\|\Delta_t\| \leq D_T$ para $\forall t > 0$, sendo $D_T \in \mathbb{R}_+$ um valor conhecido. Calculando a pseudo-inversa do vetor $V_t(q, \eta, \mu)$ podemos reescrever (4.33) como:

$$\dot{\Delta}_t = \dot{V}_x(q, \eta, \mu)V_t^+(q, \eta, \mu) - \Delta_t \dot{V}_t(q, \eta, \mu)V_t^+(q, \eta, \mu). \quad (4.46)$$

Pelos argumentos na Observação 4.7 então $\dot{V}_t(q, \eta, \mu)$ e $V_t^+(q, \eta, \mu)$ são limitadas, ou seja, $\|\dot{V}_t(q, \eta, \mu)\| \leq V_T$ e $\|V_t^+(q, \eta, \mu)\| \leq V_T^*$, para $V_T, V_T^* \in \mathbb{R}_+$ valores conhecidos. Devido que $V_{x,i} = \sin \delta_{x,i} V_i$ então $\dot{V}_{x,i} = \dot{\delta}_{x,i} \cos \delta_{x,i} V_i + \sin \delta_{x,i} \dot{V}_i$ e

$$\dot{V}_x(q, \eta, \mu) = \dot{\Delta}_t \begin{bmatrix} \cos \delta_{x,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos \delta_{x,N} \end{bmatrix} V_t(q, \eta, \mu) + \begin{bmatrix} \sin \delta_{x,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sin \delta_{x,N} \end{bmatrix} \dot{V}_t(q, \eta, \mu).$$

Sabendo que $|\cos \delta_{x,i}| \leq 1$ e $|\sin \delta_{x,i}| \leq 1$ e pela aplicação das desigualdades do triângulo e Cauchy-Schwarz tem-se que

$$\|\dot{V}_x(q, \eta, \mu)\| \leq \|\dot{\Delta}_t\| V_R + V_T. \quad (4.47)$$

Procedendo da mesma forma com (4.46), e usando (4.47), resulta em

$$\begin{aligned} \|\dot{\Delta}_t\| &\leq \|V_t^+(q, \eta, \mu)\| \|\dot{V}_x(q, \eta, \mu)\| + \|V_t^+(q, \eta, \mu)\| \|\dot{V}_t(q, \eta, \mu)\| \|\Delta_t\| \\ &\leq V_T^* \left(\|\dot{\Delta}_t\| V_R + V_T \right) + V_T^* V_T D_T. \end{aligned}$$

Finalmente, manipulando algebricamente, obtemos

$$\|\dot{\Delta}_t\| \leq \frac{V_T^* V_T + V_T^* V_T D_T}{1 - V_T^* V_R}, \quad (4.48)$$

o que mostra que a matriz $\dot{\Delta}_t$ é uniformemente limitada.

Observação 4.12 (V_t é limitada pelas variações de derrapagem): A equação (4.43) permite observar que $\dot{\delta}_{i,x}$ é inversamente proporcional com a velocidade V_i . Pela desigualdade Cauchy-Schwarz sabemos que $\|\dot{\Delta}_t V_t(q, \eta, \mu)\| \leq \|V_t(q, \eta, \mu)\| \|\dot{\Delta}_t\|$, assim, por aplicação de uma norma apropriada em (4.44) tem-se que

$$\|V_t(q, \eta, \mu)\| \|\dot{\Delta}_t\| \geq \|\dot{V}_x(q, \eta, \mu) - \Delta_t \dot{V}_t(q, \eta, \mu)\|. \quad (4.49)$$

Aplicando desigualdade Cauchy-Schwarz no membro direito de (4.44) também podemos afirmar que

$$\left(\frac{V_T^* V_T + V_T^* V_T D_T}{1 - V_T^* V_R} \right) V_R + V_T + V_T D_T \geq \|\dot{V}_x(q, \eta, \mu) - \Delta_t \dot{V}_t(q, \eta, \mu)\|. \quad (4.50)$$

Agora, dividindo (4.49) por (4.50), e manipulando algebricamente, obtemos

$$\|V_t(q, \eta, \mu)\| \geq \left(\frac{V_T + V_T D_T}{1 - V_T^* V_R} \right) \|\dot{\Delta}_t\|^{-1}. \quad (4.51)$$

Novamente, pela Suposição 3.7, e devido que ξ depende de funções harmônicas [verifique (2.31)] é valido afirmar que:

$$\|V_t(q, \eta, \mu)\| \|\dot{\Delta}_t\| \leq V_R \left(\frac{V_T^* V_T + V_T^* V_T D_T}{1 - V_T^* V_R} \right)$$

ou

$$\|V_t(q, \eta, \mu)\| \leq V_R \left(\frac{V_T^* V_T + V_T^* V_T D_T}{1 - V_T^* V_R} \right) \|\dot{\Delta}_t\|^{-1}. \quad (4.52)$$

Unindo as desigualdades (4.51) e (4.52) podemos concluir que a norma de todas as velocidades nos centros das rodas têm um limite inferior e um limite superior governado pela norma $\|\dot{\Delta}_t\|$, ou seja,

$$p_{12} \|\dot{\Delta}_t\|^{-1} \leq \|V_t(q, \eta, \mu)\| \leq V_R V_T^* p_{12} \|\dot{\Delta}_t\|^{-1} \quad (4.53)$$

onde $p_{12} = \frac{V_T + V_T D_T}{1 - V_T^* V_R}$.

A expressão (4.53) permite afirmar que se norma das velocidades dos centros das rodas da BMR permanece no limite inferior $p_{12} \|\dot{\Delta}_t\|^{-1}$ ou superior $V_R V_T^* p_{12} \|\dot{\Delta}_t\|^{-1}$, é possível manipular seu valor por meio do inverso da norma das variações das derrapagens.

Lema 4.7. $\|V_t(q, \eta, \mu)\|$ é manipulável por $\|\dot{\Delta}_t\|$ se, e somente se

$$V_R \neq p_{12} \|\dot{\Delta}_t\|^{-1}.$$

Prova: Provando por contradição, quando

$$V_R = p_{12} \|\dot{\Delta}_t\|^{-1},$$

então $V_R V_T^* p_{12} \|\dot{\Delta}_t\|^{-1} = V_R^2 V_T^*$. Por sua vez de (4.48) tem-se que $p_{12} \|\dot{\Delta}_t\|^{-1} \geq \frac{1}{V_T^*}$. Assim, a desigualdade (4.53) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{V_T^*} \leq \|V_t(q, \eta, \mu)\| \leq V_R^2 V_T^*,$$

o que representa um intervalo fixo não manipulável pela norma $\|\dot{\Delta}_t\|$. Dessa forma, por contradição, $V_R \neq p_{12} \|\dot{\Delta}_t\|^{-1}$. ■

Observação 4.13 (Deve ser garantido que $\|V_t(q, \eta, \mu)\| < V_R$): Os Lemas 4.5 e 4.7 mostram que a máxima velocidade total dos centros das rodas [V_R] não pode ser manipulável pelas normas $\|\dot{S}_t\|$ e $\|\dot{\Delta}_t\|$. Nessa situação, a desigualdade $\|V_t(q, \eta, \mu)\| \leq V_R$ se torna irrelevante

devido que os valores que $\|V_t(q, \eta, \mu)\|$ deverá tomar, para poder ser manipulada pelas variações de deslizamento e derrapagem, devem ser inferiores a V_R , ou seja $\|V_t(q, \eta, \mu)\| < V_R$.

Da mesma forma que nos Lemas 4.5 e 4.7, a composição das variações de deslizamento e derrapagem podem ser usadas para encontrar uma condição plausível sobre os valores que $\|V_t(q, \eta, \mu)\|$ deve tomar.

Variação conjunta: composição das derivadas $\dot{s}$ e $\dot{\delta}_x$

O efeito total das variações de deslizamento e derrapagem podem ser resumidas por meio da soma das desigualdades (4.41) e (4.53). Ou seja

$$\frac{1}{2}p_{11}\|\dot{S}_t\|^{-1} + \frac{1}{2}p_{12}\|\dot{\Delta}_t\|^{-1} \leq \|V_t(q, \eta, \mu)\| \leq \frac{1}{2}V_R V_T^* p_{12}\|\dot{S}_t\|^{-1} + \frac{1}{2}V_R V_T^* p_{12}\|\dot{\Delta}_t\|^{-1}.$$

Nomeando $\gamma_{11} = \frac{1}{2}p_{11}$, $\gamma_{12} = \frac{1}{2}p_{12}$, $\gamma_{21} = V_R V_T^* \gamma_{11}$ e $\gamma_{22} = V_R V_T^* \gamma_{12}$ então

$$\gamma_{11} \|\dot{S}_t\|^{-1} + \gamma_{12} \|\dot{\Delta}_t\|^{-1} \leq \|V_t(q, \eta, \mu)\| \leq \gamma_{21} \|\dot{S}_t\|^{-1} + \gamma_{22} \|\dot{\Delta}_t\|^{-1}. \quad (4.54)$$

Da mesma forma que com as expressões (4.41) e (4.53), a expressão (4.54) permite afirmar que se a norma das velocidades dos centros das rodas da BMR permanece entre o limite inferior, $\gamma_{11} \|\dot{S}_t\|^{-1} + \gamma_{12} \|\dot{\Delta}_t\|^{-1}$, e superior, $\gamma_{21} \|\dot{S}_t\|^{-1} + \gamma_{22} \|\dot{\Delta}_t\|^{-1}$, é possível manipular seu valor por meio dos inversos das normas das variações dos deslizamentos e das derrapagens.

Teorema 4.2. *Sé $\|V_t(q, \eta, \mu)\|$ é tal que os Lemas 4.5 e 4.7 são satisfeitos, então $\|V_t(q, \eta, \mu)\|$ é manipulável pela composição de $\|\dot{\Delta}_t\|$ e $\|\dot{S}_t\|$ se, e somente se*

$$V_R \neq \gamma_{11} \|\dot{S}_t\|^{-1} + \gamma_{12} \|\dot{\Delta}_t\|^{-1}.$$

Prova: Provando por contradição, quando

$$V_R = \gamma_{11} \|\dot{S}_t\|^{-1} + \gamma_{12} \|\dot{\Delta}_t\|^{-1}, \quad (4.55)$$

então $\gamma_{21} \|\dot{S}_t\|^{-1} + \gamma_{22} \|\dot{\Delta}_t\|^{-1} = V_R^2 V_T^*$. Por sua vez, pelo uso de (4.36) e (4.48) pode ser verificado que $\gamma_{11} \|\dot{S}_t\|^{-1} + \gamma_{12} \|\dot{\Delta}_t\|^{-1} \geq \frac{2}{V_T^*}$.

Da igualdade (4.55) tem-se que

$$\|\dot{\Delta}_t\|^{-1} = \frac{1}{\gamma_{12}} \left(V_R - \gamma_{11} \|\dot{S}_t\|^{-1} \right),$$

logo, a desigualdade (4.54) pode ser reescrita como

$$\frac{2}{V_T^*} \leq \|V_t(q, \eta, \mu)\| \leq \frac{\gamma_{22}}{\gamma_{12}} V_R - \left(\frac{\gamma_{22}\gamma_{11}}{\gamma_{12}} - \gamma_{21} \right) \|\dot{S}_t\|^{-1}. \quad (4.56)$$

Alternativamente, da mesma igualdade (4.55) tem-se que

$$\|\dot{S}_t\|^{-1} = \frac{1}{\gamma_{11}} \left(V_R - \gamma_{12} \|\dot{\Delta}_t\|^{-1} \right),$$

permitindo reescrever a desigualdade (4.54) como

$$\frac{2}{V_T^*} \leq \|V_t(q, \eta, \mu)\| \leq \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{11}} V_R - \left(\frac{\gamma_{21}\gamma_{12}}{\gamma_{11}} - \gamma_{22} \right) \|\dot{\Delta}_t\|^{-1}. \quad (4.57)$$

Da nomeação para os parâmetros γ_{11} , γ_{12} , γ_{21} e γ_{22} pode ser verificado que

$$\frac{\gamma_{21}}{\gamma_{11}} = \frac{\gamma_{22}}{\gamma_{12}} = V_R V_T^*, \quad \frac{\gamma_{22}\gamma_{11}}{\gamma_{12}} - \gamma_{21} = 0, \quad \text{e} \quad \frac{\gamma_{21}\gamma_{12}}{\gamma_{11}} - \gamma_{22} = 0,$$

assim, pela substituição em (4.56) e (4.57), obtemos

$$\frac{2}{V_T^*} \leq \|V_t(q, \eta, \mu)\| \leq V_R^2 V_T^*,$$

o que representa um intervalo fixo não manipulável pelas normas $\|\dot{\Delta}_t\|$ e $\|\dot{S}_t\|$. ■

Seja considerado o sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^3$ seguinte:

$$\begin{cases} \chi_1 = \|\dot{S}_t\|^{-1} & (4.58) \\ \chi_2 = \|\dot{\Delta}_t\|^{-1} & (4.59) \\ \chi_3 = \|V_t\|. & (4.60) \end{cases}$$

Definindo $\gamma_1^* = V_T^* p_{11}$ e $\gamma_2^* = V_T^* p_{12}$ no lado direito das desigualdades (4.41) e (4.53), respectivamente, então

$$\|\dot{S}_t\|^{-1} \geq \frac{\|V_t\|}{V_R \gamma_1^*} \quad \text{e} \quad \|\dot{\Delta}_t\|^{-1} \geq \frac{\|V_t\|}{V_R \gamma_2^*}.$$

Visto que $\|V_t\| \leq V_R$ então $\|\dot{S}_t\|^{-1} \geq 1/\gamma_1^*$ e $\|\dot{\Delta}_t\|^{-1} \geq 1/\gamma_2^*$, ou seja⁵,

$$\chi_1 \geq \frac{1}{\gamma_1^*} \quad \text{and} \quad \chi_2 \geq \frac{1}{\gamma_2^*}.$$

Dessa forma, existem duas bolas fechadas $B_{\gamma_1^*}$ e $B_{\gamma_2^*}$ tal que

$$\dot{S}_t \in \mathbb{R}^{N \times N} - B_{\gamma_1^*} \quad \text{and} \quad \dot{\Delta}_t \in \mathbb{R}^{N \times N} - B_{\gamma_2^*} \quad (4.61)$$

sendo $B_{\gamma_1^*} = \{\dot{S}_t \in \mathbb{R}^{N \times N} \mid \chi_1 < 1/\gamma_1^*\}$ e $B_{\gamma_2^*} = \{\dot{\Delta}_t \in \mathbb{R}^{N \times N} \mid \chi_2 < 1/\gamma_2^*\}$ [veja Figura 4.5].

Agora, seja definido o mapa $\chi_\varepsilon = [\chi_1 \ \chi_2 \ \chi_3]^T$ como

$$\chi_\varepsilon : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (4.62)$$

Mantendo as variações de deslizamento e derrapagem nos conjuntos mostrados em (4.61), o objetivo da lei de controle auxiliar v^* é, como consequência do Teorema 4.2, garantir que

$$\chi_\varepsilon \in U_V,$$

onde U_V é o espaço confinado gerado pelo seguintes planos:

$$\begin{cases} \pi_x : & \chi_1 = 0 \\ \pi_y : & \chi_2 = 0 \\ \pi_z : & \chi_3 = 0 \\ \pi_1 : & \chi_3 - \gamma_{21}\chi_1 - \gamma_{22}\chi_2 = 0 \\ \pi_2 : & \chi_3 - \gamma_{11}\chi_1 - \gamma_{12}\chi_2 = 0. \end{cases} \quad (4.63)$$

Agora, a necessidade posterior será analisar como garantindo a permanência de χ_ε em U_V pode ser feita a síntese da lei de controle auxiliar modificada (4.4).

4.3.2 Formulação de $v^* = \Delta_\sigma^{-1}v$: utilização das variações de deslizamento e derrapagem.

Dado que a lei de controle auxiliar modificada (4.4) tem o objetivo de mitigar as remanescências de deslizamento e derrapagem por meio da redução da velocidade V_i então a equação (4.2) pode ser reescrita como

$$\dot{q} = S(q) \int_0^t v^*(\lambda) d\lambda + A(q)\varepsilon\mu = S(q) \int_0^t \Delta_\sigma^{-1}v(\lambda) d\lambda + A(q)\varepsilon\mu, \quad (4.64)$$

⁵A mesma expressão pode ser obtida definindo $\gamma_1^* = V_T^* V_T + V_T^* V_T S_T + m_\gamma V_T^* T_T + r m_\gamma V_T^* Y_T$ e $\gamma_2^* = \frac{V_T^* V_T + V_T^* V_T D_T}{1 - V_T^* V_R}$ nas expressões (4.36) e (4.48), respectivamente.

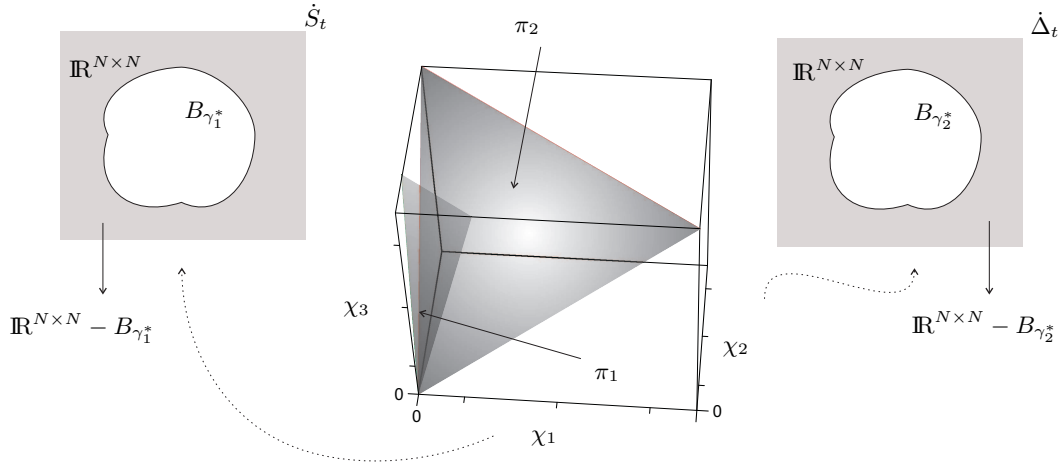


Figura 4.5: Representação gráfica do Teorema 4.2. Como consequência de (4.63), o plano, π_1 , é definido por $\|V_t\| - \gamma_{21}\|\dot{S}_t\|^{-1} - \gamma_{22}\|\dot{\Delta}_t\|^{-1} = 0$; e o plano, π_2 , é definido por $\|V_t\| - \gamma_{11}\|\dot{S}_t\|^{-1} - \gamma_{12}\|\dot{\Delta}_t\|^{-1} = 0$. As regiões planas na cor cinza representa os conjuntos em (4.61).

devido que $\dot{\eta} = v^*$ [veja (4.11)].

Comparando as equações (2.31) e (3.5) é possível notar que $S(q)\eta = \dot{q}$ e $S(q)\eta = \dot{q} - A(q)\varepsilon\mu$, respectivamente. Ou seja, na hipótese de que as restrições cinemáticas sejam violadas o modelo cinemático de configuração $S(q)\eta$ estará representado pelas coordenadas aparentes generalizadas de velocidade, denotadas por $\dot{q} - A(q)\varepsilon\mu$. Assim,

$$S(q)\eta = \dot{q} - A(q)\varepsilon\mu \triangleq \bar{\dot{q}}, \quad (4.65)$$

onde $\bar{q}$ representa as coordenadas generalizadas aparentes.

Proposição 4.2 (Convenção sobre as coordenadas generalizadas aparentes). *Sejam consideradas as seguintes regras de notação para variáveis aparentes em uma BMR que se movimenta com deslizamento e/ou derrapagem:*

- i) O vetor de coordenadas generalizadas q será substituído por $\bar{q}$. Consequentemente, todos os componentes do vetor q [veja Definição 2.2] terão uma barra $[\bar{\cdot}]$ para denotar que são variáveis aparentes [por exemplo, ξ será $\bar{\xi}$, θ será $\bar{\theta}$, β_{ic} será $\bar{\beta}_{ic}$, etc].
- ii) Qualquer função que tenha dependência explícita do vetor q , ou algum de seus elementos, terá dependência explícita de $\bar{q}$, ou de seus elementos [por exemplo, $S(q)$ será $S(\bar{q})$, $h_z(z)$ será $h_z(\bar{z})$, etc].

Observação 4.14 (Modelo aparente de configuração cinemática): Da mesma forma que com a equação (4.2), a equação (4.64) representa duas parcelas: a contribuição definida pelo termo $A(q)\varepsilon\mu$ após aplicar a lei de controle flexível (3.78) e a contribuição definida pelo termo $S(q) \int_0^t v^*(\lambda) d\lambda$ após aplicar a lei de controle auxiliar modificada (4.4). Dessa forma, para a síntese da lei de controle auxiliar modificada, mais especificamente, da função de ponderação Δ_σ , será considerada a convenção da Proposição 4.2 tal que (4.64) pode ser reescrita como

$$\bar{\dot{q}} \triangleq \dot{q} - A(q)\varepsilon\mu = S(\bar{q}) \int_0^t v^*(\lambda) d\lambda = S(\bar{q}) \int_0^t \Delta_\sigma^{-1} v(\lambda) d\lambda. \quad (4.66)$$

Em posse da equação (4.66) podemos denotar $\bar{\dot{\xi}}$ como

$$\bar{\dot{\xi}} = \bar{S}_1(\bar{q}) \int_0^t \Delta_\sigma^{-1} v(\lambda) d\lambda, \quad (4.67)$$

sendo $\bar{S}_1(q) \in \mathbb{R}^{3 \times \delta_u}$ uma submatriz de $S_1(q)$, devido que $\xi \in z$ [veja (2.31)].

Com o objetivo de conseguir uma expressão formal para a função Δ_σ vamos assumir que o Teorema 4.2 é satisfeito e que a norma escolhida seja a norma induzida para matrizes, definida como

$$\|A\| = [\sigma_{\max}(AA^T)]^{1/2},$$

onde A representa uma matriz qualquer e $\sigma_{\max}(\cdot)$ representa o máximo autovalor da matriz contida entre parênteses.

Com a expressão (4.67) e a Suposição 3.7 podemos verificar que

$$\left[\text{tr} \left(\bar{S}_1(\bar{q}) \int_0^t \Delta_\sigma^{-1} v(\lambda) d\lambda \left(\int_0^t \Delta_\sigma^{-1} v(\lambda) d\lambda \right)^T \bar{S}_1^T(\bar{q}) \right) \right]^{1/2} = \|V_i(q, \eta, \mu)\| = \left[\text{tr} \left(\dot{\xi} \dot{\xi}^T \right) \right]^{1/2}.$$

Entretanto, visto que $\|V_t\|$ representa a norma induzida de V_t , pelo uso da da Suposição 3.7 tem-se que $\|V_t\| = \sqrt{N}\|V_i\|$. Assim, pelo uso de (4.60), $\chi_3 = \sqrt{N}\|V_i\|$ e

$$\chi_3 = \sqrt{N} \left[\text{tr} \left(\bar{S}_1(\bar{q}) \int_0^t \Delta_\sigma^{-1} v(\lambda) d\lambda \left(\int_0^t \Delta_\sigma^{-1} v(\lambda) d\lambda \right)^T \bar{S}_1^T(\bar{q}) \right) \right]^{1/2}. \quad (4.68)$$

Suposição 4.1. *Para a trajetória de referência definida em (4.23), com $y_{1,\text{ref}}(t)$, $y_{2,\text{ref}}(t)$, $\dot{y}_{2,\text{ref}}(t)$ limitados para $\forall t$, sendo $y_{2,\text{ref}}(t)$ integrável; sempre que o Lema 4.2 e o Teorema 4.1 sejam satisfeitos quando aplicada a lei de controle auxiliar modificada (4.4) e as condições de rolamento apropriado [Condição 4.1] sejam violadas, então o mapa χ_ε permanece no espaço confinado definido por (4.63) tal que $\chi_3 = \|V_t\| \leq V_R$, onde $V_R > 0$ é uma constante conhecida.*

O fato do mapa χ_ε permanecer no espaço confinado [definido por (4.63)] significa, como consequência da Suposição 4.1, que χ_3 esta limitado pelos planos π_1 e π_2 . Assim, redefinindo $\gamma_{11} \triangleq N^{-1/2}\gamma_{11}$, $\gamma_{12} \triangleq N^{-1/2}\gamma_{12}$, $\gamma_{21} \triangleq N^{-1/2}\gamma_{21}$ e $\gamma_{22} \triangleq N^{-1/2}\gamma_{22}$, temos

$$\chi_3 = \begin{cases} \gamma_{11}\chi_1 + \gamma_{12}\chi_2 & \in \pi_2 \\ \gamma_{21}\chi_1 + \gamma_{22}\chi_2 & \in \pi_1 \end{cases}. \quad (4.69)$$

De outra forma, pelo uso (4.68), tem-se que

$$\left[\text{tr} \left(\bar{S}_1(\bar{q}) \int_0^t \Delta_\sigma^{-1} v(\lambda) d\lambda \left(\int_0^t \Delta_\sigma^{-1} v(\lambda) d\lambda \right)^T \bar{S}_1^T(\bar{q}) \right) \right]^{1/2} = \begin{cases} \gamma_{11}\chi_1 + \gamma_{12}\chi_2 & \in \pi_2 \\ \gamma_{21}\chi_1 + \gamma_{22}\chi_2 & \in \pi_1 \end{cases}. \quad (4.70)$$

Na Figura 4.6, é representada a situação da Figura 4.5 pelo uso da norma induzida para matrizes quando $N = 2$ e $N = 3$. Devido que S_t e Δ_t são matrizes diagonais a norma induzida se comporta como a norma do máximo⁶, tornando as bolas $B_{\gamma_1^*}$ e $B_{\gamma_2^*}$ como quadrados [$N = 2$] em $\mathbb{R}^2$ ou como paralelepípedos [$N = 3$] em $\mathbb{R}^3$.

Agora, seja considerado o sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^3$ seguinte:

$$\begin{cases} \chi_{1,i} = \|\dot{s}_i\|^{-1} \end{cases} \quad (4.71)$$

$$\begin{cases} \chi_{2,i} = \|\dot{\delta}_{x,i}\|^{-1} \end{cases} \quad (4.72)$$

$$\begin{cases} \chi_{3,i} = \|V_i\|. \end{cases} \quad (4.73)$$

Sejam definidos N mapas $\chi_{\varepsilon,i} = [\chi_{1,i} \ \chi_{2,i} \ \chi_{3,i}]^T$, para $i = 1, \dots, N$, como:

$$\chi_{\varepsilon,i} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3. \quad (4.74)$$

Visto que $\chi_3 = \|V_i\|$ então, pelo uso de (4.73), $\chi_{3,i} = \chi_3$.

Suposição 4.2. *Para a trajetória de referência $y_{\text{ref}}^* = [y_{1,\text{ref}} \ \dot{y}_{1,\text{ref}}]^T$, sempre que a Suposição 4.1 seja satisfeita quando aplicada a lei de controle auxiliar modificada (4.4) e as condições*

⁶Geralmente denotada como $\|\cdot\|_{\max}$.

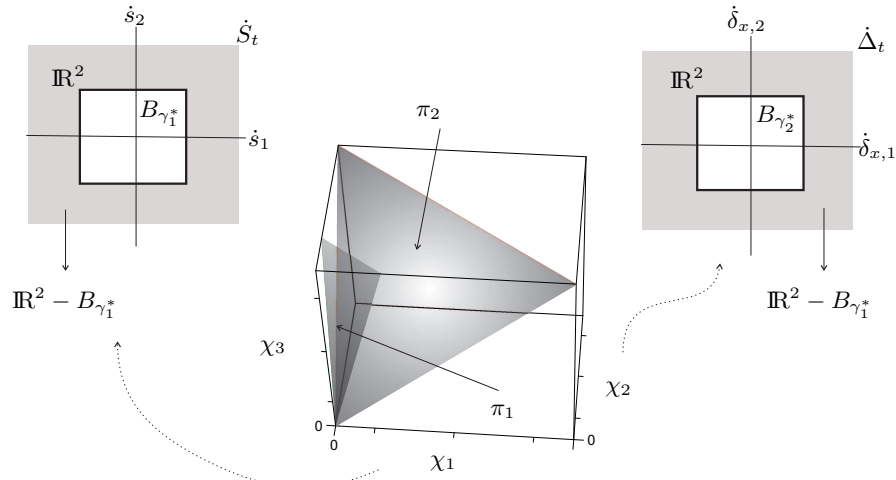
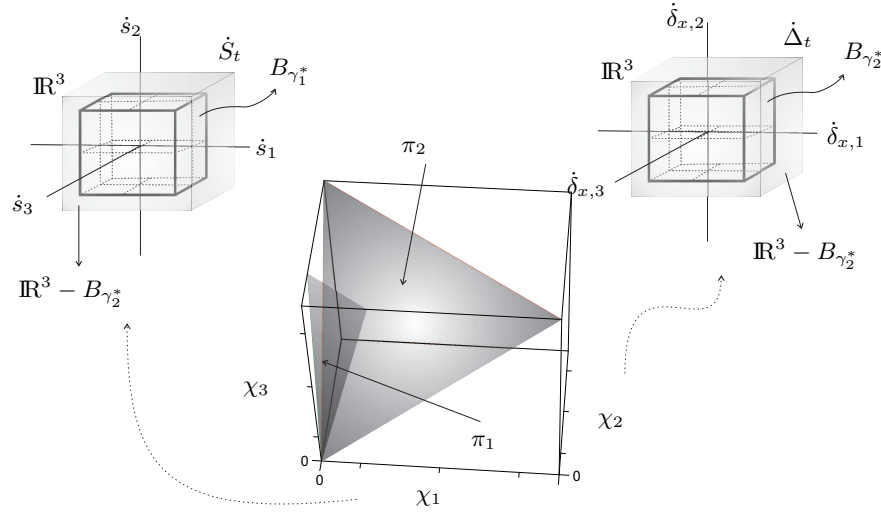
(a) Representação da Figura 4.5 para $N = 2$.(b) Representação da Figura 4.5 para $N = 3$.

Figura 4.6: Representação gráfica do Teorema 4.2 para $N = 2$ e $N = 3$. As regiões planas na cor cinza representa os conjuntos em (4.61) para $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

de rolamento apropriado [Condição 4.1] sejam violadas, então existem um limite superior e inferior definidos pelos planos $\pi_{1,i}$ e $\pi_{2,i}$, associados com a i -ésima roda, tal que

$$\chi_{3,i} = \begin{cases} \gamma_{11}\chi_{1,i} + \gamma_{12}\chi_{2,i} & \in \pi_{2,i} \\ \gamma_{21}\chi_{1,i} + \gamma_{22}\chi_{2,i} & \in \pi_{1,i} \end{cases} . \quad (4.75)$$

Embora a Suposição 4.2 seja similar ao sistema definido por (4.70), ambos diferem na explicita relação entre a velocidade e as variações de deslizamento e derrapagem. Em (4.75) há uma relação para cada roda e em (4.70) há uma relação para as variações de deslizamento e derrapagem da BMR em geral. Não obstante, a fim de encontrar uma expressão para v^* , aqui será proposta uma forma equivalente para (4.4) em termos de $\dot{S}_t$ de $\dot{\Delta}_t$ que garanta a existência do sistema (4.70).

Lema 4.8 (Lei de controle auxiliar v^* usando variações de deslizamento e derrapagem). *Se a trajetória de referência definida em (4.23) é tal que $y_{1,\text{ref}}(t)$, $y_{2,\text{ref}}(t)$, $\dot{y}_{2,\text{ref}}(t)$ são limitados para $\forall t$, e $y_{2,\text{ref}}(t)$ é integrável, então uma solução para o problema de seguimento de trajetória, quando é aplicada uma redução na aceleração da BMR como indicado na Proposição 4.1, é a lei de controle auxiliar*

$$v^* = h_\gamma v + \dot{h}_\gamma \eta, \quad (4.76)$$

onde

$$h_\gamma = \|\dot{\Delta}_t\| + \|\dot{S}_t\| = \chi_1^{-1} + \chi_2^{-1}, \quad (4.77)$$

se, e somente se

$$\chi_1 = \|\dot{\Delta}_t \dot{S}_t^{-1}\| + 1 \quad (4.78)$$

$$\chi_2 = \|\dot{S}_t \dot{\Delta}_t^{-1}\| + 1. \quad (4.79)$$

Prova: Na Suposição 4.2 pode ser notado que tanto $\chi_{1,i}$ como $\chi_{2,i}$ têm uma relação diretamente proporcional com $\chi_{3,i}$, o que significa que $\|\dot{s}_i\|$ e $\|\dot{\delta}_{x,i}\|$ são inversamente proporcional a $\|V_i\|$. Assim, é esperado que um apropriado aumento de $\|\dot{s}_i\|$ [ou $\|\dot{\delta}_{x,i}\|$] possa diminuir, quando seja necessário, a velocidade do centro da i -ésima roda, $\|V_i\|$. Com relação a esse argumento, podemos dividir a influência dessas normas sobre a velocidade V_i em duas contribuições: pelo deslizamento e pela derrapagem.

Vejam os caso $\chi_{3,i} \in \pi_{2,i}$ em (4.75), sabendo que $\chi_{3,i} = \chi_3$ e usando a Suposição 3.7. Assim, multiplicando ambos lados por $\chi_{1,i}$ obtemos

$$\chi_{1,i}^{-1} \sqrt{\text{tr} \left(\dot{\xi} \dot{\xi}^T \right)} = \frac{1}{2} \gamma_{11} + \frac{1}{2} \gamma_{12} \chi_{1,i}^{-1} \chi_{2,i} \quad (4.80)$$

ou, manipulando algebricamente,

$$\sqrt{\text{tr} \left(\chi_{1,i}^{-1} \dot{\xi} \chi_{1,i}^{-1} \dot{\xi}^T \right)} = \frac{1}{2} \gamma_{11} + \frac{1}{2} \gamma_{12} \chi_{1,i}^{-1} \chi_{2,i}.$$

ou, pelo uso do sistema de coordenadas (4.71)-(4.73), como

$$\sqrt{\text{tr} \left(\|\dot{s}_i\| \dot{\xi} \|\dot{s}_i\| \dot{\xi}^T \right)} = \frac{1}{2} \gamma_{11} + \frac{1}{2} \gamma_{12} \|\dot{s}_i\| \|\dot{\delta}_{x,i}\|^{-1}. \quad (4.81)$$

A equação (4.80) para N rodas pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \|\dot{s}_1\| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \|\dot{s}_N\| \end{bmatrix} \sqrt{\text{tr} \left(\dot{\xi} \dot{\xi}^T \right)} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} + \gamma_{12} \frac{\|\dot{s}_1\|}{\|\dot{\delta}_{x,1}\|} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \gamma_{11} + \gamma_{12} \frac{\|\dot{s}_N\|}{\|\dot{\delta}_{x,N}\|} \end{bmatrix}. \quad (4.82)$$

Sabendo que $\|\dot{s}_1\| = |\dot{s}_1|, \dots, \|\dot{s}_N\| = |\dot{s}_N|$, e $\|\dot{\delta}_{x,1}\| = |\dot{\delta}_{x,1}|, \dots, \|\dot{\delta}_{x,N}\| = |\dot{\delta}_{x,N}|$ então o lado direito de (4.81) pode ser reescrito como

$$\gamma_{11} + \gamma_{12} \|\dot{S}_t \dot{\Delta}_t^{-1}\| = \left\| \gamma_{11} I_{N \times N} + \begin{bmatrix} \gamma_{12} \|\dot{s}_1\|_2 \|\dot{\delta}_{x,1}\|_2^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_{12} \|\dot{s}_N\|_2 \|\dot{\delta}_{x,N}\|_2^{-1} \end{bmatrix} \right\|,$$

e

$$\|\dot{S}_t\| = \left\| \begin{bmatrix} \|\dot{s}_1\| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \|\dot{s}_N\| \end{bmatrix} \right\|.$$

Dessa forma, (4.81) pode ser reescrita para N rodas como

$$\sqrt{\text{tr} \left(\|\dot{S}_t\| \dot{\xi} \|\dot{S}_t\| \dot{\xi}^T \right)} = \gamma_{11} + \gamma_{12} \|\dot{S}_t \dot{\Delta}_t^{-1}\|. \quad (4.83)$$

Da mesma forma que com (4.66), a equação (4.2) pode ser reescrita considerando a Proposição 4.2 e o vetor $\dot{\xi}$ como

$$\dot{\xi} = \bar{S}_1(q) \int_0^t v(\lambda) d\lambda \quad (4.84)$$

onde $\bar{S}_1(q) \in \mathbb{R}^{3 \times \delta_u}$ é uma submatriz de $S_1(q)$. Logo, substituindo (4.84) em (4.83) tem-se que

$$\left[\text{tr} \left(\bar{S}_1(q) \|\dot{S}_t\| \int_0^t v(\lambda) d\lambda \left(\|\dot{S}_t\| \int_0^t v(\lambda) d\lambda \right)^T \bar{S}_1^T(q) \right) \right]^{1/2} = \gamma_{11} + \gamma_{12} \|\dot{S}_t \dot{\Delta}_t^{-1}\|. \quad (4.85)$$

Agora, ao invés de multiplicar ambos lados de (4.75) por $\chi_{1,i}$, seja multiplicado por $\chi_{2,i}$. A manipulação da norma $\|\dot{\Delta}_t\|$, da mesma forma que foi feito com a norma $\|\dot{S}_t\|$, leva a

$$\left[\text{tr} \left(\bar{S}_1(q) \|\dot{\Delta}_t\| \int_0^t v(\lambda) d\lambda \left(\|\dot{\Delta}_t\| \int_0^t v(\lambda) d\lambda \right)^T \bar{S}_1^T(q) \right) \right]^{1/2} = \gamma_{11} \|\dot{\Delta}_t \dot{S}_t^{-1}\|_2 + \gamma_{12}. \quad (4.86)$$

Similarmente, para o caso $\chi_{3,i} \in \pi_{1,i}$, tem-se

$$\left[\text{tr} \left(\bar{S}_1(q) \|\dot{S}_t\| \int_0^t v(\lambda) d\lambda \left(\|\dot{S}_t\| \int_0^t v(\lambda) d\lambda \right)^T \bar{S}_1^T(q) \right) \right]^{1/2} = \gamma_{21} + \gamma_{22} \|\dot{S}_t \dot{\Delta}_t^{-1}\|_2, \quad (4.87)$$

$$\left[\text{tr} \left(\bar{S}_1(q) \|\dot{\Delta}_t\| \int_0^t v(\lambda) d\lambda \left(\|\dot{\Delta}_t\| \int_0^t v(\lambda) d\lambda \right)^T \bar{S}_1^T(q) \right) \right]^{1/2} = \gamma_{21} \|\dot{\Delta}_t \dot{S}_t^{-1}\|_2 + \gamma_{22}. \quad (4.88)$$

Somando (4.85) com (4.86) e (4.87) com (4.88) obtemos

$$\begin{aligned} & \left[\text{tr} \left(\bar{S}_1(q) h_\gamma \int_0^t v(\lambda) d\lambda \left(h_\gamma \int_0^t v(\lambda) d\lambda \right)^T \bar{S}_1^T(q) \right) \right]^{1/2} \\ &= \begin{cases} \gamma_{11} (\|\dot{\Delta}_t \dot{S}_t^{-1}\| + 1) + \gamma_{12} (\|\dot{S}_t \dot{\Delta}_t^{-1}\| + 1) & \in \pi_2 \\ \gamma_{21} (\|\dot{\Delta}_t \dot{S}_t^{-1}\| + 1) + \gamma_{22} (\|\dot{S}_t \dot{\Delta}_t^{-1}\| + 1) & \in \pi_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.89)$$

sendo

$$h_\gamma = \|\dot{\Delta}_t\| + \|\dot{S}_t\|. \quad (4.90)$$

Comparando o lado direito de (4.69) com o lado direito de (4.89) são deduzidas as expressões (4.78) e (4.79). Por outro lado, para que o lado esquerdo de (4.89) seja igual ao lado esquerdo de (4.70) é preciso, por analogia, que

$$h_\gamma \int_0^t v(\lambda) d\lambda = \int_0^t \Delta_\sigma^{-1} v(\lambda) d\lambda.$$

Diferenciando com respeito ao tempo ambos lados da equação anterior e substituindo $\int_0^t v(\lambda) d\lambda$ por η é confirmado que

$$\Delta_\sigma^{-1} v = h_\gamma v + \dot{h}_\gamma \eta.$$

Finalmente, pelo uso de (4.4), a prova finaliza. ■

Observação 4.15 (Condição de linearização modificada usando h_γ): É possível observar, em posse do Lema 4.8, que a velocidade da BMR tem uma forte ligação com a função h_γ [que contém as composições totais das variações dos deslizamentos e das derrapagens]. Para compreender melhor, seja substituída a relação $v = \dot{\eta}$ [Observação 2.6] em (4.76) e simplifiquemos até obter:

$$v^* = h_\gamma \dot{\eta} + \dot{h}_\gamma \eta = \frac{d}{dt} (h_\gamma \eta),$$

no entanto, definindo $\eta^* \triangleq h_\gamma \eta$ e, sabendo que $v^* \triangleq \Delta_\sigma^{-1} v$ [equação (4.4)], a equação (4.11) pode ser reescrita como:

$$v^* = \dot{\eta}^*. \quad (4.91)$$

A equação (4.91) representa, de forma análoga, os argumentos da Observação 4.5. Ou seja, a

substituição da lei de controle auxiliar modificada (4.4) em (2.44), garante que a condição de linearização definida por (4.11) seja satisfeita.

Substituindo (4.76) em (4.12) a nova lei de controle por realimentação de estado não-linear para assegurar o seguimento de trajetória na BMR, na sua versão rígida, é definida por

$$\tau(x) = [S^T(q)B(q)]^{-1} \left\{ S^T(q) \left[M(q)S(q)h_\gamma \Delta_v^+(z) \left(\ddot{h}_{\text{ref}}(t) - K_1 \dot{h}(t) - K_2 \ddot{h}(t) - \dot{\Delta}_v(z)\eta(t) \right) + M(q) \left[S(q)\dot{h}_\gamma + \frac{\partial S}{\partial q} S(q)\eta \right] \eta - C(q, S(q)\eta) \right] \right\}. \quad (4.92)$$

Usando o Teorema 4.1, pode ser mostrado que $\tilde{y}^*$ e a diferença $\mu - H(\tilde{y}^*, w_1, t)$ permanece limitada. Dessa forma, as aproximações

$$\begin{aligned} \tilde{y}^*(t) &= e^{Ut} \tilde{y}^*(0) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ \mu(t) - H(\tilde{y}^*, w_1, t) &= \hat{\mu}(t^*) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned}$$

são satisfeitas uniformemente com respeito a T , para $\forall t \in [0, T]$, $T \in \mathbb{R}_+$, se, e somente se o sistema definido por (4.19) - (4.22) é incrementado em uma dimensão adicional, como segue:

$$\begin{cases} \dot{z} = S_1(q)\eta + \varepsilon A_1(q)\mu, & (4.93) \\ \dot{w}_1 = S_2(q)\eta + \varepsilon A_2(q)\mu, & (4.94) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \left[h_\gamma W_0^b(q) + I_{\delta_d \times \delta_d} \zeta \right] \eta + h_\gamma \left[\varepsilon W_1^b(q) + W_2^b(q) \right] \mu + h_\gamma W_3^b(q)\tau, & (4.95) \end{cases}$$

$$\dot{h}_\gamma = \zeta, \quad (4.96)$$

$$\varepsilon \dot{\mu} = G_0(q)\eta + [\varepsilon G_1(q) + G_2(q)] \mu + G_3(q)\tau \quad (4.97)$$

onde

$$Z_a(\tilde{y}^*, w_1, \mu, \varepsilon, t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_z}{\partial z} A_1(q) \varepsilon \mu \\ \varepsilon b(\tilde{y}^*, w_1, \mu, \varepsilon) \end{bmatrix}$$

com

$$\begin{aligned} b(y^*, w_1, \mu, \varepsilon) &= \Delta_v(z) \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \left(h_\gamma W_0^b + I_{\delta_d \times \delta_d} \zeta \right) \eta + h_\gamma \left[\varepsilon W_1^b + W_2^b \right] \mu - \left(h_\gamma W_0^b + I_{\delta_d \times \delta_d} \zeta \right) \eta \right. \\ &\quad \left. - h_\gamma W_2^b \mu \right\} + \left\{ \frac{\partial \Delta_v}{\partial z} A_1(q) \mu \right\} \eta \end{aligned}$$

e $I_{\delta_d \times \delta_d}$ é uma matriz identidade com dimensão δ_d^2 .

O Lema 4.8 nos fornece uma estrutura formal sobre como deve ser sintetizado um esquema de compensação de escorregamento para que a lei de controle auxiliar modificada (4.4) use informação das variações do deslizamento e da derrapagem. Entretanto, a forma em que essas variações serão estimadas representam um desafio de cálculo que será abordado na seção seguinte.

4.4 Técnica de compensação para as remanescências de deslizamento e derrapagem

Como foi dito na Observação 4.6, e apoiado na literatura existente, uma forma comumente denominada aos efeitos decorrentes das remanescências de deslizamento e derrapagem é a perda de tração (Terry & Minor 2008). Na perda de tração as forças F_y , ou F_x , são incapazes de compensar a força aplicada pela roda, logo um dos casos (3.32) ou (3.33) na Definição 3.4 pode acontecer. Levando em conta o Lema 4.4, o Lema 4.6, a Observação 4.6 e a Observação 4.9, podemos dizer que a quantidade $F_t^{\text{nlín}}$ representa a parcela de força associada com a tração perdida. Como foi argumentado na Observação 4.1, os modelos atuais reduzem as forças de tração para modelo lineares, no entanto em aplicações automotivas e de robótica móvel tem se tornado imprescindível á mitigação da perda de tração (Song & Boo 2004). Entre tais aplicações

é muito comum encontrar controladores projetados sobre as dinâmicas do deslizamento e a derrapagem, o que inclui por sua vez as variações $\dot{S}_t$ e $\dot{\Delta}_t$. Na comunidade automotiva e de robótica móvel são conhecidas propostas de controladores para compensar a perda de tração [por exemplo, freios ABS [do inglês *Antilock Braking System*], híbridos de lógica fuzzy e modos deslizantes, ou híbridos de perturbações singulares e modos deslizantes, etc (Song & Boo 2004, Hamerlain *et al.* 2005, Unsal & Kachroo 1999, Iagnemma & Dubowsky 2004, Tai & Tomizuka 2000)].

Para aplicações com BMRs a baixas velocidades uma proposta presente na literatura relacionada foi usar as variações de deslizamento e derrapagem para modelar a dinâmica das forças de tração e por meio de estimadores não-lineares fazer a realimentação no laço fechado (Unsal & Kachroo 1999, Unsal & Kachroo 1997, Hamerlain *et al.* 2005, Tsai *et al.* 2007). Já em outras propostas baseadas em métodos de controle de modos deslizantes foram projetadas restrições deslizantes para garantir que dois termos, diretamente relacionados com $\dot{S}_t$ e $\dot{\Delta}_t$, chamados de *velocidade de deslizamento na roda* e *aceleração do deslizamento na roda* [conhecidos em inglês como *wheel slip velocity* e *wheel slip acceleration*, respectivamente], possam definir uma vizinhança onde a perda de tração acontecia. Dessa forma, pelo uso de estimadores paramétricos seriam calculados os valores de *velocidade de deslizamento na roda* e *aceleração do deslizamento na roda* desejados (Terry & Minor 2008). Os mesmos termos podem ser associados com a derrapagem [*velocidade de derrapagem da roda* e *aceleração de derrapagem da roda*], no entanto, pelo uso da Observação 4.9, as variações associadas com a derrapagem podem ser desprezíveis. Contudo, o controle por modos deslizantes tem se tornado inviável por causa da trepidação [em inglês *chattering*] inerente à comutação da lei de controle baseada nesse método (Unsal & Kachroo 1999, Chwa 2004, Keighobadi & Mohamadi 2011, Aithal & Janardhanan 2013).

Nesta Seção serão encontradas e estudadas expressões formais para $\dot{S}_t$ e $\dot{\Delta}_t$ que permitam construir a lei de controle auxiliar modificada (4.4) por meio da função h_γ do Lema 4.8 e finalmente a síntese de um esquema de controle para compensação das remanescências de deslizamento e derrapagem.

4.4.1 Critério de rolamento baseado em $\dot{\Delta}_t$ e $\dot{S}_t$

Antes da síntese de um esquema de compensação, primeiramente, o conceito de *força aparente* será usado para assumir que as coordenadas generalizadas são em realidade valores *aparentes* e uma consequência de erros produzidos no esquema de controle devido à presença das remanescências de deslizamento e derrapagem nas rodas. Secundariamente, utilizando as coordenadas generalizadas aparentes, serão definidas condições sobre a variação das remanescências a fim de fazer a síntese da lei de controle auxiliar modificada (4.4).

Do Lema 4.4, podemos multiplicar por $\frac{m_\gamma^{-1}}{r}$ em ambos lados de (4.35) para obter:

$$r^{-1}T_\varepsilon(\bar{q}, \eta, \varepsilon) - F_t = (rm_\gamma)^{-1} \dot{V}_t(\bar{q}, \eta, \mu). \quad (4.98)$$

A quantidade $\frac{1}{r}T_\varepsilon(\bar{q}, \eta, \varepsilon)$ representa as *forças reais* nas rodas da BMR e a diferença $\frac{1}{r}T_\varepsilon(\bar{q}, \eta, \varepsilon) - F_t$ representa as suas *forças aparentes*.

Definição 4.1 (Força aparente nas rodas (Fernández *et al.* 2015d)). *Sejam definidas as forças aparentes de uma BMR com N rodas como*

$$\tilde{F} \triangleq \frac{1}{r}T_\varepsilon(\bar{q}, \eta, \varepsilon) - F_t$$

onde $\tilde{F} \in \mathbb{R}^N$ contém as N forças aparentes.

Pelo uso de (4.98), a Definição 4.1 pode ser expressada como

$$\tilde{F} = (rm_\gamma)^{-1} \dot{V}_t(\bar{q}, \eta, \mu). \quad (4.99)$$

Visto que a expressão (4.99) (consequência do Lema 4.4) está diretamente relacionada com a condição de rolamento total apropriado $s = \dot{s} = 0$, $\delta_x = \dot{\delta}_x = 0$ [Condição 4.1] e com o fato

$V_i \approx V_{i,y}$ (Observação 3.7) na i -ésima roda, então, pelo uso da expressão (3.41), concluímos que

$$V_i \approx V_{i,y} = r\dot{\varphi}_i. \quad (4.100)$$

Consequentemente, (4.99) pode ser reescrita como

$$\tilde{F} = m_\gamma^{-1} \ddot{\varphi}(\bar{q}, \eta, \mu). \quad (4.101)$$

Condição sobre a variação das remanescências, $\dot{\Delta}_t$ e $\dot{S}_t$

A seguir será generalizado o método presente em (Fernández *et al.* 2012, Fernández *et al.* 2013, Fernández *et al.* 2014a) para os cinco tipos de configurações cinemáticas apresentadas na Tabela 2.2. Nesse método as coordenadas generalizadas aparentes são utilizadas para impor uma condição sobre o cálculo das matrizes $\dot{S}_t$ e $\dot{\Delta}_t$.

O cálculo baseia-se na utilização da regra da cadeia para a diferenciação nos mapas que representam as forças aparentes $\tilde{F}_i$, para $i = 1, \dots, N$, na Definição 4.1. Dessa forma, sejam consideradas as seguintes derivadas no domínio do tempo:

$$\dot{s}_i = \frac{ds_i}{d\tilde{F}_i} \dot{\tilde{F}}_i \quad \text{e} \quad \dot{\delta}_{x,i} = \frac{d\delta_{x,i}}{d\tilde{F}_i} \dot{\tilde{F}}_i,$$

ou substituindo (4.101) para a i -ésima roda,

$$\dot{s}_i = \frac{ds_i}{d\tilde{F}_i} m_\gamma^{-1} \ddot{\varphi}_i(\bar{q}, \eta) \quad \text{e} \quad \dot{\delta}_{x,i} = \frac{d\delta_{x,i}}{d\tilde{F}_i} m_\gamma^{-1} \ddot{\varphi}_i(\bar{q}, \eta). \quad (4.102)$$

Com o objetivo de representar as posições angulares contidas no vetor φ em termos das coordenadas aparentes $\bar{q}$ e η é preciso levar em consideração a seguinte proposição.

Proposição 4.3. *Para toda BMR, de N rodas, grau de manobrabilidade δ_u e grau de direcionabilidade δ_d , com remanescências de deslizamento e derrapagem no seguimento de uma trajetória, as **coordenadas generalizadas aparentes**, representadas por $\bar{q}$, estão relacionadas com as velocidades das rodas, contidas no vetor $\dot{\varphi}$, por meio de uma transformação no marco local $\{R\}$. Seja essa transformação definida por*

$$\dot{\varphi} = \Lambda(\bar{q}) \dot{\bar{q}},$$

onde $\Lambda(q) = [D_\varphi \Sigma(\beta_c) \quad 0_{N \times \delta_d}] S^+(q) \in \mathbb{R}^{N \times (3 + \delta_d + N_o + N)}$.

Prova: Da equação (4.65) tem-se que

$$S(q)\eta = \dot{\bar{q}}, \quad (4.103)$$

e da equação (2.31) tem-se que

$$\dot{\varphi} = [D_\varphi \Sigma(\beta_c) \quad 0_{N \times \delta_d}] \eta,$$

sendo D_φ e $\Sigma(\beta_c)$ os termos apresentados na equação (2.30) e na Tabela 2.1, respectivamente.

Calculando a pseudo-inversa de $[D_\varphi \Sigma(\beta_c) \quad 0_{N \times \delta_d}]$ na equação anterior e substituindo em (4.103) obtemos

$$\dot{\bar{q}} = S(q) [D_\varphi \Sigma(\beta_c) \quad 0_{N \times \delta_d}]^+ \dot{\varphi},$$

ou, calculando a pseudo-inversa de $S(q) [D_\varphi \Sigma(\beta_c) \quad 0_{N \times \delta_d}]^+$,

$$\dot{\varphi} = [D_\varphi \Sigma(\beta_c) \quad 0_{N \times \delta_d}] S^+(q) \dot{\bar{q}} \triangleq \Lambda(q) \dot{\bar{q}}.$$

A prova é finalizada pelo uso da Proposição 4.2 para $\Lambda(q)$. ■

Um termo em comum para as expressões de $\dot{s}_i$ e $\dot{\delta}_{x,i}$ em (4.102) é $\ddot{\varphi}_i(\bar{q}, \eta)$, conhecido na literatura como arrancada [em inglês *jerk*]. A arrancada está diretamente relacionada com o impulso de cada uma das rodas, assim, o objetivo para estabelecer uma condição sobre a variação das remanescências de deslizamento e derrapagem nas rodas é expressar a arrancada em termos das coordenadas generalizadas aparentes.

Pelo uso da Proposição 4.3 observamos que a segunda derivada de φ é

$$\ddot{\varphi} = \dot{\Lambda}(\bar{q})\dot{\bar{q}} + \Lambda(\bar{q})\ddot{\bar{q}},$$

e derivando novamente a expressão anterior obtemos

$$\ddot{\ddot{\varphi}} = \ddot{\Lambda}(\bar{q})\dot{\bar{q}} + 2\dot{\Lambda}(\bar{q})\ddot{\bar{q}} + \Lambda(\bar{q})\ddot{\ddot{\bar{q}}}.$$

Por se tratar de movimentos acelerados e desacelerados as arrancadas em qualquer das variáveis presentes no vetor $\bar{q}$ são tão pequenas que sua contribuição para a modelagem do vetor $\ddot{\ddot{\varphi}}$ são desprezíveis. Dessa forma, o vetor $\ddot{\ddot{\bar{q}}}$ na equação anterior será desprezado, resultando em

$$\ddot{\ddot{\varphi}} = \ddot{\Lambda}(\bar{q})\dot{\bar{q}} + 2\dot{\Lambda}(\bar{q})\ddot{\bar{q}} \quad (4.104)$$

onde $\dot{\Lambda}(\bar{q}) = \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \dot{\theta} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Lambda}{\partial \beta_{i_c}} \dot{\beta}_{i_c} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Lambda}{\partial \beta_{i_o}} \dot{\beta}_{i_o}$; e $\ddot{\Lambda}(\bar{q}) = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t \partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t \partial \beta_{i_c}} \dot{\beta}_{i_c} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Lambda}{\partial \beta_{i_c}} \ddot{\beta}_{i_c} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t \partial \beta_{i_o}} \dot{\beta}_{i_o} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \Lambda}{\partial \beta_{i_o}} \ddot{\beta}_{i_o}$.

Definindo agora as matrizes

$$\Lambda_1 = m_\gamma^{-1} \text{diag} \left\{ \frac{ds_1}{d\tilde{F}_1}, \dots, \frac{ds_N}{d\tilde{F}_N} \right\} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad \text{e} \quad \Lambda_2 = m_\gamma^{-1} \text{diag} \left\{ \frac{d\delta_{x,1}}{d\tilde{F}_1}, \dots, \frac{d\delta_{x,N}}{d\tilde{F}_N} \right\} \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

e pela utilização de (4.104), é possível postular as seguintes igualdades relacionadas com (4.102):

$$\dot{S}_t 1_N = \Lambda_1 \ddot{\Lambda}(\bar{q})\dot{\bar{q}} + 2\Lambda_1 \dot{\Lambda}(\bar{q})\ddot{\bar{q}} \quad (4.105)$$

$$\dot{\Delta}_t 1_N = \Lambda_2 \ddot{\Lambda}(\bar{q})\dot{\bar{q}} + 2\Lambda_2 \dot{\Lambda}(\bar{q})\ddot{\bar{q}} \quad (4.106)$$

sendo $1_N = [1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^N$. As equações (4.105) e (4.106) são a representação compacta das variações de deslizamento e derrapagem, respectivamente, que inicialmente foram formuladas para a i -ésima roda em (4.102).

Observação 4.16 (Representação das remanescências usando S_t e Δ_t): O uso da Suposição 3.6 permitiu que as forças de tração fossem modeladas por mapas lineares. No entanto, tal suposição incorreu em que a lei de controle flexível (3.78) não compensasse completamente as influências do deslizamento e a derrapagem, se tornando imprescindível a presença de remanescências [Observação 3.15 e Observação 3.13]. Visto que durante as remanescências $s_i > 0$ [ou $s_i < 0$] e $\delta_{x,i} > 0$ [ou $\delta_{x,i} < 0$], para $i = 1, \dots, N$, então uma outra forma de representa-las é

$$S_t \neq 0 \quad \text{e} \quad \Delta_t \neq 0.$$

Lema 4.9 (Desigualdade das variações $\dot{S}_t$ e $\dot{\Delta}_t$). *Para uma BMR que se movimenta sobre uma trajetória com remanescências de deslizamento e derrapagem, é válido que*

$$\begin{bmatrix} \|\dot{S}_t\| \\ \|\dot{\Delta}_t\| \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} g_\varepsilon \quad (4.107)$$

onde $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ são valores conhecidos e $g_\varepsilon > 0$, para $\forall t \geq 0$, é uma função conhecida e definida por

$$g_\varepsilon \triangleq g_\varepsilon(\bar{q}, \dot{\bar{q}}) = \|\ddot{\Lambda}(\bar{q})\dot{\bar{q}} + 2\dot{\Lambda}(\bar{q})\ddot{\bar{q}}\|. \quad (4.108)$$

Prova: Pelo uso estratégico da Observação 4.16 é possível verificar que as matrizes Λ_1 e Λ_2 são funções não-nulas e constantes na presença das remanescências.

Seja considerado que o (i, i) -ésimo componente da matriz Λ_1 [ou Λ_2] tem a forma

$$m_\gamma^{-1} \frac{dx_i}{d\tilde{F}_i},$$

onde x_i pode ser s_i [ou $\delta_{x,i}$]. Se, para algum $i = 1, \dots, N$, a expressão acima for diferente de zero então podemos afirmar que $\Lambda_1 \neq 0$ se $x_i = s_i$ [ou $\Lambda_2 \neq 0$ se $x_i = \delta_{x,i}$] para $S_t \neq 0$ e $\Delta_t \neq 0$.

A *priori*, podemos afirmar que se $\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial x_i} \neq 0$ para $\forall x_i \neq 0$, então $\frac{dx_i}{d\tilde{F}_i} \neq 0$ para $\forall x_i \neq 0$ [onde $x_i \neq 0$ é uma representação das situações $s_i \neq 0$ e $\delta_{x,i} \neq 0$ associadas com as remanescências de deslizamento e derrapagem].

Pela Definição 4.1 tem-se que

$$\tilde{F}_i = \frac{1}{r} \tau_{i,\varepsilon} - F_i,$$

ou ainda, pelo uso de (3.78) e a função definida em (3.45), como

$$\tilde{F}_i = \frac{1}{r} (\tau_{i,0}(x) + \varepsilon \tau_{i,1}(x) + \varepsilon^2 \tau_{i,2}(x) + \dots + \varepsilon^{N_r} \tau_{i,N_r}(x)) - (Gs_i + D\delta_{x,i}). \quad (4.109)$$

Derivando (4.109) com relação a x_i obtemos

$$\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial x_i} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \tau_{i,0}}{\partial x_i} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{i,1}}{\partial x_i} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tau_{i,2}}{\partial x_i} + \dots + \varepsilon^{N_r} \frac{\partial \tau_{i,N_r}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (Gs_i + D\delta_{x,i})$$

para $x_i \neq 0$. Das equações (3.65) e (3.88) observamos que

$$\frac{\partial \tau_{i,j}}{\partial x_i} = 0, \quad 0 \leq j \leq N_r,$$

dado que para algum τ_j em (3.88) e para τ_0 em (3.65) não existe uma dependência explícita de s_i ou $\delta_{x,i}$. Por outro lado,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (Gs_i + D\delta_{x,i}) = \begin{cases} G, & x_i = s_i \\ D, & x_i = \delta_{x,i} \end{cases},$$

e finalmente

$$\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial x_i} = \begin{cases} -G, & x_i = s_i \\ -D, & x_i = \delta_{x,i} \end{cases} \quad \text{para } x_i \neq 0.$$

Com a equação acima pode ser afirmado que como $\frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial x_i} \neq 0$ para $\forall x_i \neq 0$ então $\frac{dx_i}{d\tilde{F}_i} \neq 0$ para $\forall x_i \neq 0$. Observemos que

$$\frac{dx_i}{d\tilde{F}_i} = \begin{cases} -\frac{1}{G}, & x_i = s_i \\ -\frac{1}{D}, & x_i = \delta_{x,i} \end{cases} \quad \text{para } x_i \neq 0. \quad (4.110)$$

Dessa forma,

$$\Lambda_1 = -m_\gamma^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{G} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad \text{e} \quad \Lambda_2 = -m_\gamma^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{D} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{D} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

para $s_i \neq 0$ e $\delta_{x,i} \neq 0$. As matrizes anteriores mostram claramente que Λ_1 e Λ_2 representam matrizes definidas negativas constantes. Sendo assim, $\|\Lambda_1\| = (m_\gamma G)^{-1}$ e $\|\Lambda_2\| = (m_\gamma D)^{-1}$.

Pelo uso de (4.105) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se que

$$\|\dot{S}_t 1_N\| = \|\Lambda_1 \ddot{\Lambda}(q) \dot{q} + 2\Lambda_1 \dot{\Lambda}(q) \ddot{q}\| \leq (m_\gamma G)^{-1} \|\ddot{\Lambda}(q) \dot{q} + 2\dot{\Lambda}(q) \ddot{q}\|,$$

ou [visto que $g_\varepsilon \triangleq g_\varepsilon(\ddot{q}, \dot{q}) = \|\ddot{\Lambda}(q) \dot{q} + 2\dot{\Lambda}(q) \ddot{q}\|$] como

$$\|\dot{S}_t 1_N\| \leq (m_\gamma G)^{-1} g_\varepsilon \quad (4.111)$$

para $S_t \neq 0$.

Procedendo da mesma forma com (4.106) obtemos

$$\|\dot{\Delta}_t 1_N\| \leq (m_\gamma G)^{-1} g_\varepsilon \quad (4.112)$$

para $\Delta_t \neq 0$. Por último, definindo $\alpha_1 = (m_\gamma G)^{-1}$ e $\alpha_2 = (m_\gamma D)^{-1}$ em (4.111) e (4.112),

respectivamente, a prova é finalizada. ■

Em posse do Lema 4.9, uma condição sobre as variações de deslizamento e derrapagem nas rodas pode ser compactada no teorema seguinte:

Teorema 4.3 (Condição sobre a variação de deslizamento e derrapagem). *Para uma BMR que se movimenta sobre uma trajetória com remanescências de deslizamento e derrapagem, uma condição necessária e suficiente para garantir $\|\dot{S}_t\| = 0$ e $\|\dot{\Delta}_t\| = 0$ é*

$$g_\varepsilon = 0. \quad (4.113)$$

Prova: Os valores das variações das remanescências de deslizamento e derrapagem, $\dot{s}_i$ e $\dot{\delta}_{x,i}$, podem ser compactadas pelas matrizes $\dot{S}_t$ e $\dot{\Delta}_t$, respectivamente. Tais matrizes, pelo uso da Condição 4.1, devem satisfazer que $\dot{S}_t = 0$ e $\dot{\Delta}_t = 0$, o que equivale, pelo uso da norma induzida para matrizes, a $\|\dot{S}_t\| = 0$ e $\|\dot{\Delta}_t\| = 0$. Agora, de (4.107) podemos afirmar que $\|\dot{S}_t\| = 0$ e $\|\dot{\Delta}_t\| = 0$ se, e somente se, $g_\varepsilon = 0$. ■

Observação 4.17 (Satisfação da condição de rolamento total apropriado): Nota-se que o Teorema 4.3 representa uma condição necessária e suficiente para a satisfação parcial da condição de rolamento total apropriado [Condição 4.1]. Entretanto, como será apresentado posteriormente, por meio dos argumentos da Observação 4.16 [$S_t \neq 0$, $\Delta_t \neq 0$] e o Teorema 4.3, será feita a síntese de uma lei de controle auxiliar que terá como objetivo principal atingir as condições $S_t = 0$ e $\Delta_t = 0$, o que completa a satisfação total da condição de rolamento total apropriado.

Nota 4.1: Para a configuração da BMR tipo (3,0) com rodas omnidirecionais o Teorema 4.3 equivale unicamente à condição $\|\dot{S}_t\| = 0$. Dessa forma, g_ε estará relacionada unicamente com o deslizamento.

Nota-se que a condição no Teorema 4.3 depende de $\ddot{q}$ e $\dot{q}$. Mas as quantidades que são usualmente medidas, em casos práticos, são as coordenadas generalizadas aparentes $\bar{q}$ e as velocidades generalizadas aparentes $\dot{\bar{q}}$. Não obstante, usando $\ddot{q} = S(q)\eta$ [equação (4.65)] e a Proposição 4.2, $\ddot{q}$ pode ser obtido de η e $\dot{q}$ como segue:

$$\ddot{q} = \left[\frac{\partial S(\bar{q})}{\partial \bar{q}} \dot{\bar{q}} \right] \eta + S(\bar{q})\dot{\eta},$$

o que permite reescrever (4.108) como

$$g_\varepsilon = \left\| \ddot{\Lambda}(\bar{q})\dot{\bar{q}} + 2\dot{\Lambda}(\bar{q}) \left[\frac{\partial S(\bar{q})}{\partial \bar{q}} \dot{\bar{q}} \right] \eta + 2\dot{\Lambda}(\bar{q})S(\bar{q})v \right\|, \quad (4.114)$$

devido que $\dot{\eta} = v$ [Observação 2.6].

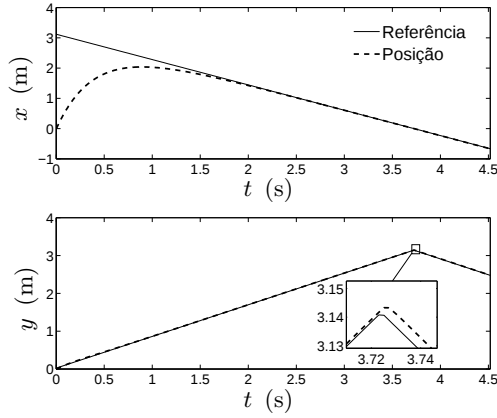
Evolução de g_ε : simulação e interpretação do Teorema 4.3

A fim de observar a evolução da composição total das variações de deslizamento e derrapagem, a equação (4.114) será usada para verificar a utilidade do Teorema 4.3.

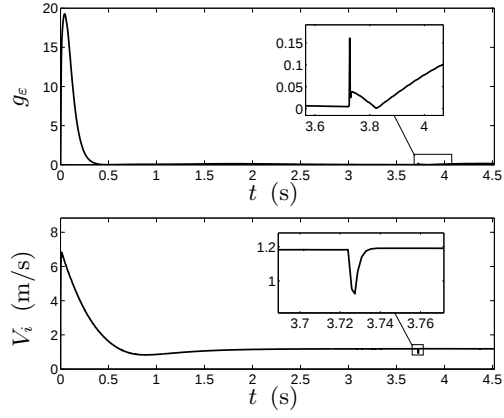
Na Figura 4.7 pode ser observada a evolução de g_ε para a BMR tipo (2,0) no seguimento de uma trajetória com forma de losango [com ambas diagonais iguais a 6.28 m] durante 4.519 s para $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 2.36$ m/s. A configuração usada para lei de controle flexível (3.78) e a lei de controle auxiliar (3.64) foram ajustadas como no Caso 1⁷ da Tabela 4.2. A matriz $\Lambda(\bar{q})$ para a BMR tipo (2,0) é

$$\Lambda(\bar{q}) = \begin{bmatrix} \frac{r \sin \bar{\theta}}{r^2+2} & -\frac{r \cos \bar{\theta}}{r^2+2} & -\frac{br}{2b^2+r^2} & \frac{1}{r^2+2} + \frac{b^2}{2b^2+r^2} & \frac{b^2}{2b^2+r^2} - \frac{1}{r^2+2} \\ -\frac{r \sin \bar{\theta}}{r^2+2} & \frac{r \cos \bar{\theta}}{r^2+2} & -\frac{br}{2b^2+r^2} & \frac{b^2}{2b^2+r^2} - \frac{1}{r^2+2} & \frac{1}{r^2+2} + \frac{b^2}{2b^2+r^2} \end{bmatrix}.$$

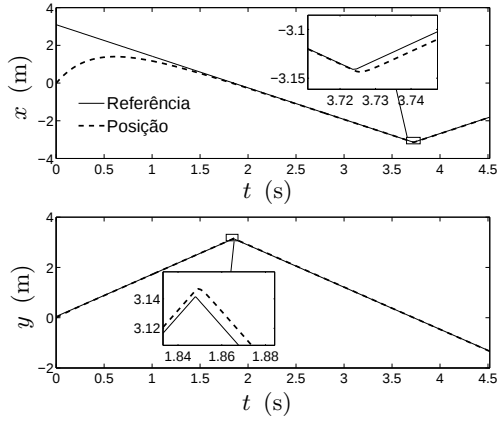
⁷Devido a ser o melhor caso de desempenho do controlador, $\text{IAE}_{x'} = 0.1427$ e $\text{IAE}_{y'} = 0.0015$.



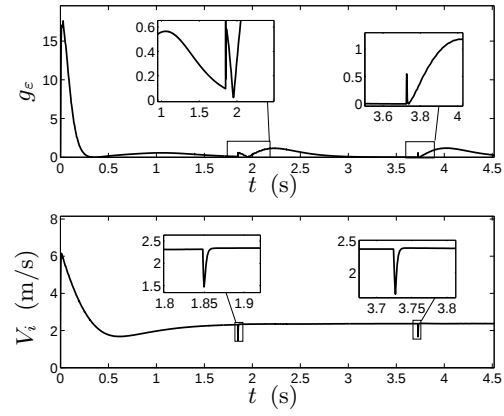
(a) Componentes $x(t)$, $y(t)$ do seguimento de trajetória para BMR tipo (2,0) com $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s usando lei de controle flexível (3.78).



(b) Evolução de g_ε quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s.



(c) Componentes $x(t)$, $y(t)$ do seguimento de trajetória para BMR tipo (2,0) com $\|V_i\|_{\text{med}} = 2.36$ m/s usando lei de controle flexível (3.78).



(d) Evolução de g_ε quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 2.36$ m/s.

Figura 4.7: Evolução de g_ε durante o seguimento de trajetória para a BMR tipo (2,0) com lei de controle flexível (3.78) quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 2.36$ m/s.

Nas Figuras 4.7(a) e 4.7(b) pode ser detalhado que existe uma coincidência temporal entre os picos de g_ε e o desvio significativo de trajetória quando a BMR passa pela primeira esquina do losango. Ou seja, as condições $\|\dot{S}_t\| = 0$ e $\|\dot{\Delta}_t\| = 0$ deixam de ser satisfeitas com maior notoriedade na esquina do losango [veja Observação 4.2]. Confirma-se simultaneamente que V_i sofre alterações no mesmo instante de tempo em que essas condições são fortemente violadas.

Por outro lado, o aumento de $\|V_i\|$ a 2.36 m/s, que implica um maior deslocamento e um maior desvio no seguimento da trajetória [veja Observação 4.1], incorre em um maior número de picos de g_ε devido que a BMR consegue passar por duas esquinas do losango e experimentar dois desvios significativos [veja subfiguras da Figura 4.7(d) e da Figura 4.7(c)]. Os mesmos resultados podem ser observados para a BMR tipo (3,0) no seguimento da mesma trajetória com forma de losango durante 4.519 s para $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 2.36$ m/s. A configuração usada para a lei de controle flexível (3.78) e a lei de controle auxiliar (3.64) foram como no Caso

4⁸ da Tabela 4.2. A matriz $\Lambda(\bar{q})$ para a BMR tipo (3,0) é

$$\Lambda(\bar{q}) = \begin{bmatrix} -\frac{r(\sin \bar{\theta} - \sqrt{3} \cos \bar{\theta})}{2r^2+3} & -\frac{r(\cos \bar{\theta} + \sqrt{3} \sin \bar{\theta})}{2r^2+3} & -\frac{br}{3b^2+r^2} & -\frac{b^2}{3b^2+r^2} - \frac{2}{2r^2+3} & \frac{1}{2r^2+3} - \frac{b^2}{3b^2+r^2} & \frac{1}{2r^2+3} - \frac{b^2}{3b^2+r^2} \\ \frac{2r \sin \bar{\theta}}{2r^2+3} & \frac{2r \cos \bar{\theta}}{2r^2+3} & -\frac{br}{3b^2+r^2} & \frac{1}{2r^2+3} - \frac{b^2}{3b^2+r^2} & -\frac{b^2}{3b^2+r^2} - \frac{2}{2r^2+3} & \frac{1}{2r^2+3} - \frac{b^2}{3b^2+r^2} \\ -\frac{r(\sin \bar{\theta} + \sqrt{3} \cos \bar{\theta})}{2r^2+3} & -\frac{r(\cos \bar{\theta} - \sqrt{3} \sin \bar{\theta})}{2r^2+3} & -\frac{br}{3b^2+r^2} & \frac{1}{2r^2+3} - \frac{b^2}{3b^2+r^2} & \frac{1}{2r^2+3} - \frac{b^2}{3b^2+r^2} & -\frac{b^2}{3b^2+r^2} - \frac{2}{2r^2+3} \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma que com a BMR tipo (2,0), nas subfiguras das Figuras 4.8(b), 4.8(d) e nas subfiguras das Figuras 4.8(a), 4.8(c) pode ser detalhado que existe uma coincidência temporal entre os picos de g_ε e o desvio significativo de trajetória feito pela BMR quando passa pela primeira esquina do losango com $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s e quando passa pelas duas primeiras esquinas, aumentando $\|V_i\|_{\text{med}}$ a 2.36 m/s.

Observação 4.18 (Interpretação do Teorema 4.3): Pelos comportamentos de g_ε apresentados nas Figuras 4.7 e 4.8 se pode notar que o Teorema 4.3 é uma útil ferramenta para conferir as variações conjuntas de deslizamento e derrapagem nas rodas como decorrência das remanescências. De outra forma, os picos observados na evolução de g_ε podem ser associados com regiões da trajetória onde o controlador apresenta maior sensibilidade às perturbações [Observação 4.2].

Como será visto da seguinte subseção, a Observação 4.18 será fundamental na síntese da técnica de compensação que aqui será proposta.

4.4.2 Esquema de compensação para as remanescências: projeção da função h_γ e ação antecipativa

Nesta subseção um esquema de controle com compensação das remanescências de deslizamento e derrapagem por meio da lei de controle auxiliar modificada (4.4) do Lema 4.1 será projetado. Para tal propósito será necessário conhecer a função h_γ em (4.76) [Lema 4.8] e definir a estrutura completa do controlador auxiliar.

Do Lema 4.9, pela utilização da desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\chi_1^{-1} + \chi_2^{-1} = \|\dot{S}_t\| + \|\dot{\Delta}_t\| \leq (\alpha_1 + \alpha_2) g_\varepsilon,$$

no entanto, definindo $\alpha_0^* = \alpha_1 + \alpha_2$, tem-se que

$$\chi_1^{-1} + \chi_2^{-1} = \|\dot{S}_t\| + \|\dot{\Delta}_t\| \leq \alpha_0^* g_\varepsilon. \quad (4.115)$$

Da equação (4.115) podemos deduzir que existe uma modificação para o fator α_0^* , e seja designada tal modificação como $\alpha^* = \alpha_0^* c^*$ com $0 < c^* \leq 1$, tal que

$$\chi_1^{-1} + \chi_2^{-1} = \|\dot{S}_t\| + \|\dot{\Delta}_t\| = \alpha^* g_\varepsilon. \quad (4.116)$$

Comparando (4.116) com (4.77) [expressão para h_γ no Lema 4.8] é possível observar que o Teorema 4.3 oferece uma estrutura útil na síntese do esquema de controle para compensação das remanescências de deslizamento e derrapagem. Assim, a estrutura para a função h_γ tem a forma:

$$h_\gamma = \alpha^* g_\varepsilon. \quad (4.117)$$

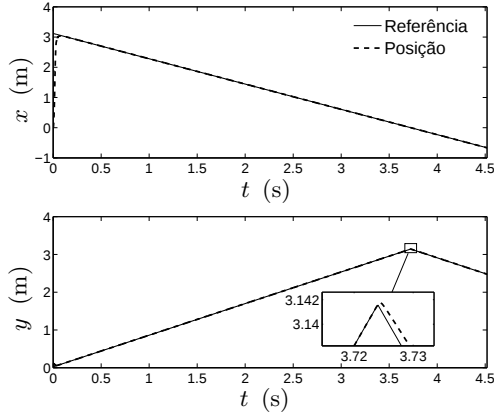
Inclusão da função Δ_σ

Sendo coerentes com o Lema 4.1, pode ser explicado que a aplicação da função inversa $\Delta_\sigma^{-1}(t)$ representa a aplicação de aumentos proporcionais com o crescimento das remanescências à lei de controle auxiliar (3.64)⁹. Vejamos, pelo uso de (4.117) e o Lema 4.8, que

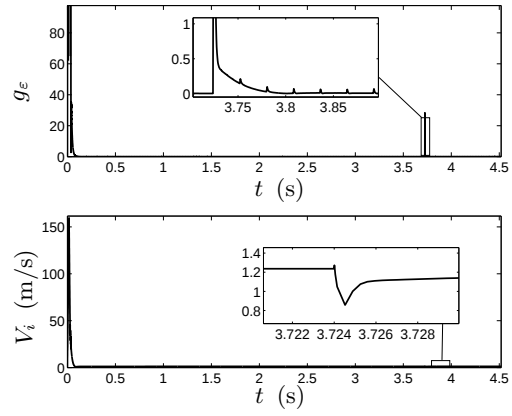
$$v^* \triangleq \Delta_\sigma^{-1} v = \alpha^* g_\varepsilon v + \alpha^* \dot{g}_\varepsilon \eta. \quad (4.118)$$

⁸Devido a ser o melhor caso de desempenho do controlador, $\text{IAE}_{x'} = 0.1420$ e $\text{IAE}_{y'} = 0.0053$.

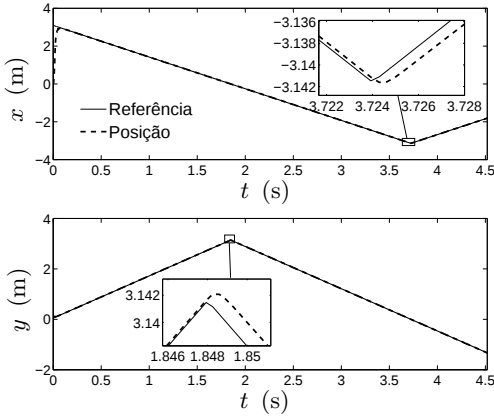
⁹Devido que $0 \leq \Delta_\sigma \leq 1$ explica a redução ponderada da aceleração $\dot{\eta}$ então $1 \leq \Delta_\sigma^{-1} < \infty$ explica o aumento aplicado a v na lei de controle auxiliar modificada v^* .



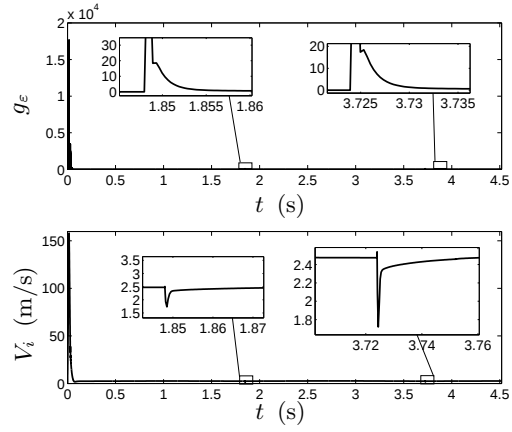
(a) Componentes $x(t)$, $y(t)$ do seguimento de trajetória para BMR tipo (3,0) com $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s usando lei de controle flexível (3.78).



(b) Evolução de g_ε quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s.



(c) Componentes $x(t)$, $y(t)$ do seguimento de trajetória para BMR tipo (3,0) com $\|V_i\|_{\text{med}} = 2.36$ m/s usando lei de controle flexível (3.78).



(d) Evolução de g_ε quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 2.36$ m/s.

Figura 4.8: Evolução de g_ε durante o seguimento de trajetória para a BMR tipo (3,0) com lei de controle flexível (3.78) quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 2.36$ m/s.

Certamente, pelo uso da Observação 4.18, é válido afirmar que a lei de controle auxiliar modificada (4.4), com estrutura definida por (4.118), aplicará aumentos relacionados ao instante de tempo em que a BMR passará por uma região da trajetória de referência onde a sensibilidade às perturbações é maior e a presença das remanescências de deslizamento e derrapagem é iminente.

Cálculo do parâmetro α^*

O parâmetro α^* , previamente considerado um valor constante devido a Λ_1 e Λ_2 serem matrizes definidas negativas constantes, será calculado pela imposição do Lema 4.8 [por meio das equações (4.78) e (4.79)]. Considerando (4.116), o parâmetro α^* pode ser particionado tal que

$$\chi_1^{-1} = \|\dot{S}_t\| = \alpha_1^* g_\varepsilon \quad (4.119)$$

$$\chi_2^{-1} = \|\dot{\Delta}_t\| = \alpha_2^* g_\varepsilon, \quad (4.120)$$

sendo que $\alpha^* = \alpha_1^* + \alpha_2^*$. Vejamos também, como consequência de (4.105) e (4.106), que

$$\begin{aligned}\|\dot{\Delta}_t \dot{S}_t^{-1}\| &= \|\Lambda_2 \Lambda_1^{-1}\| = \left\| \frac{G}{D} I_{N \times N} \right\| = \frac{G}{D} \\ \|\dot{S}_t \dot{\Delta}_t^{-1}\| &= \|\Lambda_1 \Lambda_2^{-1}\| = \left\| \frac{D}{G} I_{N \times N} \right\| = \frac{D}{G}.\end{aligned}$$

Dessa forma, manipulando algebricamente as expressões anteriores, as equações (4.78) e (4.79) [do Lema 4.8] podem ser reescritas como:

$$\begin{cases} \frac{D}{G+D} = \alpha_1^* g_\varepsilon \\ \frac{G}{G+D} = \alpha_2^* g_\varepsilon \end{cases} . \quad (4.121)$$

Usando (4.121) e o fato de $\alpha^* = \alpha_1^* + \alpha_2^*$ notamos que

$$\alpha^* = \alpha_1^* + \alpha_2^* = g_\varepsilon^{-1}. \quad (4.122)$$

Entretanto, a equação (4.122) não representa um valor constante devido à sua dependência explícita de g_ε^{-1} . Vejamos que substituindo a expressão (4.122) em (4.118) obtemos:

$$v^* \triangleq \Delta_\sigma^{-1} v = v + \eta \frac{d}{dt} (\ln g_\varepsilon).$$

Visto que na equação acima não há uma ponderação da lei de controle v , é válido que o efeito do operador Δ_σ^{-1} , na referida equação, não representa nenhuma ponderação na aceleração da BMR. A fim de solucionar esse problema, será introduzida uma condição sobre a sensibilidade às perturbações [ou remanescências] de acordo com três situações específicas na evolução de g_ε , para $t \geq 0$.

Proposição 4.4 (Condições de sensibilidade às perturbações). *Se a trajetória de referência definida em (4.23) é tal que $y_{1,\text{ref}}(t)$, $y_{2,\text{ref}}(t)$, $\dot{y}_{2,\text{ref}}(t)$ são limitados para $\forall t$, e $y_{2,\text{ref}}(t)$ é integrável, então, pela aplicação de uma estratégia de controle baseada na lei de controle flexível τ_ε [indicada em (3.78)] e a lei de controle auxiliar v [indicada em (3.64)], uma condição de sensibilidade às perturbações é definida sobre g_ε como segue:*

- i) para $\forall t \in [t_r, T]$, para $t_r \geq 0$ conhecido, então $g_\varepsilon \approx 0$: Nessa situação não há presença de picos sobre a norma g_ε e será denominada **condição de baixa sensibilidade às perturbações**;
- ii) para $\forall t \in [t_r, T]$, para $t_r \geq 0$ conhecido, então $g_\varepsilon \neq 0$: Nessa situação a presença de picos sobre a norma g_ε é persistente e será denominada **condição de alta sensibilidade às perturbações**. Dessa forma, o valor médio da norma g_ε permanecerá na vizinhança de um valor constante;
- iii) para $\exists t \in [t_r, T]$, para $t_r \geq 0$ conhecido, tal que $g_\varepsilon \neq 0$: Nessa situação há presença de picos e vales na norma g_ε e será denominada **condição de leve sensibilidade às perturbações** [como os observados nas Figuras 4.7 e 4.8];

onde $T > 0$ é o valor definido na Subseção 3.2.3 [Condição 3.1 do Capítulo 3] e $t_r \geq 0$ é o tempo inicial transitório de g_ε .

O método que aqui será proposto supõe uma situação como a descrita no item (ii) da Proposição 4.4, ou seja, uma situação em que g_ε apresenta uma quantidade consecutiva de picos, quase garantindo a sua permanência na vizinhança de um valor constante ($\neq 0$) e não na vizinhança de zero [veja Figura 4.9(a)]. Dessa forma, essa suposição permitirá que g_ε^{-1} possa ser ajustado a um valor constante.

Suposição 4.3 (g_ε é limitada). *Se a trajetória de referência definida em (4.23) é tal que $y_{1,\text{ref}}(t)$, $y_{2,\text{ref}}(t)$, $\dot{y}_{2,\text{ref}}(t)$ são limitados para $\forall t$, e $y_{2,\text{ref}}(t)$ é integrável, então, pela aplicação de*

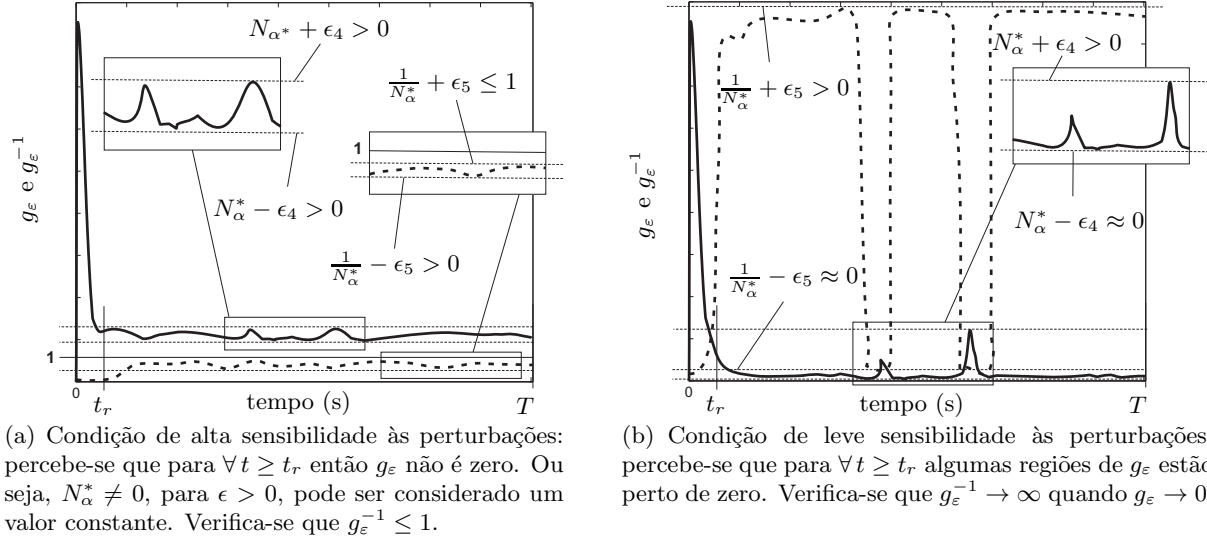


Figura 4.9: Representação de g_ε (linha sólida) e g_ε^{-1} (linha tracejada) para condições de alta e leve sensibilidade às perturbações. A Subfigura 4.9(a) representa as quantidades no Procedimento 4.1 para computação do parâmetro α^* .

uma estratégia de controle baseada na lei de controle flexível τ_ε [indicada em (3.78)] e a lei de controle auxiliar v [indicada em (3.64)], a função g_ε será limitada, ou seja,

$$g_\varepsilon \leq G_\varepsilon,$$

onde $G_\varepsilon > 0$ é uma constante conhecida.

Como consequência da Suposição 4.3, pelo uso de (4.119) e (4.120), tem-se que $\chi_1^{-1} \leq \alpha_1^* G_\varepsilon$ e $\chi_2^{-1} \leq \alpha_2^* G_\varepsilon$. Nesse caso, visto que χ_1^{-1} e χ_2^{-1} são funções limitadas, podemos afirmar que existem $C_\alpha, C_\beta > 0$ como os valores médios de χ_1^{-1}, χ_2^{-1} , respectivamente, tal que

$$|\chi_1^{-1} - C_\alpha| \leq \epsilon_1 \quad \text{e} \quad |\chi_2^{-1} - C_\beta| \leq \epsilon_2 \quad (4.123)$$

sendo $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ valores conhecidos.

Lema 4.10. Em uma situação de **alta sensibilidade às perturbações**, pela aplicação de uma estratégia de controle baseada na lei de controle flexível τ_ε [indicada em (3.78)] e a lei de controle auxiliar v [indicada em (3.64)] então

$$|g_\varepsilon - N_\alpha| \leq \epsilon, \quad \text{para} \quad t_r \leq t \leq T$$

sendo $N_\alpha \geq 0$ o valor médio de g_ε e $\epsilon \geq 0$ um valor conhecido.

Prova: De (4.123) é imediato que $|\chi_1^{-1} + \chi_2^{-1} - C_\alpha - C_\beta| \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$. Ou ainda, visto que $h_\gamma = \chi_1^{-1} + \chi_2^{-1}$, como $|h_\gamma - C_\alpha - C_\beta| \leq \epsilon_1 + \epsilon_2$. Usando (4.117) e manipulando, resulta em

$$\left| g_\varepsilon - \frac{C_\alpha + C_\beta}{\alpha^*} \right| \leq \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\alpha^*}.$$

Definindo $N_\alpha = \frac{C_\alpha + C_\beta}{\alpha^*}$, $\epsilon = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\alpha^*}$, e pelo teorema de valor médio para integrais, tem-se que

$$N_\alpha = \frac{1}{T - t_r} \int_{t_r}^T g_\varepsilon dt,$$

ou seja, $|g_\varepsilon - N_\alpha| \leq \epsilon$ para $t_r \leq t \leq T$. ■

Observação 4.19 (g_ε é limitada para $t \rightarrow \infty$): O Lema 4.10 garante que a diferença entre g_ε e seu valor médio N_α após o transitório t_r seja limitada, mas não que seja limitada para $t \rightarrow \infty$.

Dessa forma, apoiado na suposição do sistema ser exponencialmente estável, sendo consistentes com o Teorema 3.2 e o Lema 3.2, então pode ser escolhida uma parcela do vetor de coordenadas generalizadas aparentes $\bar{q}$ a fim de garantir a uniformidade com relação a T , ou seja quando $T \rightarrow \infty$.

Seja escolhido então o vetor $\bar{z} \subset \bar{q}$ tal que

$$|g_{\varepsilon,z} - N_\alpha| \leq \epsilon_3, \quad \text{para } t \in [t_r, \infty), \quad (4.124)$$

onde $g_{\varepsilon,z} \triangleq g_\varepsilon(\bar{z}, \dot{\bar{z}})$. Assim, $\lim_{t \rightarrow \infty} g_{\varepsilon,z} = N_\alpha$ para $t \geq t_r$.

A fim de confirmar o argumento anterior, seja notado que as matrizes $\dot{\Lambda}(\bar{q})$ e $\ddot{\Lambda}(\bar{q})$ associadas com as BMRs, tipo (2,0) e (3,0), possuem três e quatro colunas de zeros, respectivamente. Então, sobre a suposição do sistema ser exponencialmente estável pela aplicação da lei de controle flexível (3.78) [e a lei de controle auxiliar (3.64)] a função g_ε definida em (4.114) pode ser reescrita como

$$g_{\varepsilon,z} = \left\| \ddot{\Lambda}(\bar{z})\dot{\bar{z}} + 2\dot{\Lambda}(\bar{z}) \left[\frac{\partial S_1(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \dot{\bar{z}} \right] \eta + 2\dot{\Lambda}(\bar{z})S_1(\bar{z})v \right\|. \quad (4.125)$$

Ou seja, a norma definida em (4.125) só precisa informação associada com a posição do centro da BMR no marco global $\{W\}$.

Do mesmo modo que apresentado na Observação 4.19, para o ponto P no marco local $\{R\}$, devido que $\bar{h}(t) \triangleq h_z(\bar{z})$ [pelo uso da Proposição 4.2 e (3.63)], podemos ainda reescrever (4.125) como

$$g_{\varepsilon,h} = \left\| \ddot{\Lambda}(\hat{h})\dot{\hat{h}} + 2\dot{\Lambda}(\hat{h}) \left[\frac{\partial S_1(\hat{h})}{\partial \hat{h}} \dot{\hat{h}} \right] \eta + 2\dot{\Lambda}(\hat{h})S_1(\hat{h})v \right\| \quad (4.126)$$

com $\hat{h} = [\bar{h} \ \bar{\theta}]^T$, sendo $\bar{h}(t) \in \mathbb{R}^2$ a posição aparente do ponto P definido em (3.63) e $\bar{\theta}(t) \in \mathbb{R}$ a orientação aparente da BMR. Dessa forma, a expressão (4.124) pode ser formulada pelo uso de (4.126) como

$$|g_{\varepsilon,h} - N_\alpha^*| \leq \epsilon_4, \quad \text{para } t \in [t_r, \infty), \quad (4.127)$$

onde $N_\alpha^*, \epsilon_4 \geq 0$ são valores conhecidos.

De (4.127) tem-se que $N_\alpha^* - \epsilon_4 \leq g_{\varepsilon,h} \leq N_\alpha^* + \epsilon_4$. Logo em condições de alta sensibilidade às perturbações podemos afirmar que a presença de picos se tornam mais frequentes garantindo então que $N_\alpha^* - \epsilon_4 > 0$, $N_\alpha^* + \epsilon_4 > 0$ em (4.127) [veja Figura 4.9(a)]. Por outro lado, em condições de leve sensibilidade às perturbações, como os casos apresentados nas Figuras 4.7 e 4.8, é muito provável que $N_\alpha^* - \epsilon_4 \approx 0$ e $N_\alpha^* + \epsilon_4 > 0$ [veja Figura 4.9(b)].

Observação 4.20 ($g_{\varepsilon,h}^{-1}$ é limitada para $t \rightarrow \infty$): Em condições de alta e leve sensibilidade às perturbações o inverso da norma em (4.126) permanecerá em uma vizinhança $\left[\frac{1}{N_\alpha^*} - \epsilon_5, \frac{1}{N_\alpha^*} + \epsilon_5 \right]$, sendo $N_\alpha^*, \epsilon_5 \geq 0$ e salientando que $\frac{1}{N_\alpha^*} + \epsilon_5 \leq 1$ [no caso de alta sensibilidade, veja Figura 4.9(a)] e que $\frac{1}{N_\alpha^*} + \epsilon_5 \rightarrow \infty$ quando $N_\alpha^* - \epsilon_4 \rightarrow 0$ [no caso de leve sensibilidade, veja Figura 4.9(b)]. Dessa forma, pelo uso do Lema 4.10 é possível afirmar que

$$\left| g_{\varepsilon,h}^{-1} - \frac{1}{N_\alpha^*} \right| \leq \epsilon_5, \quad \text{para } t \in [t_r, \infty). \quad (4.128)$$

Procedimento 4.1 (Computação do parâmetro α^*): O método para calcular o parâmetro α^* consta de um método *off-line* baseado no cálculo do valor médio N_α^* para $t \in [t_r, T]$, assumindo que a evolução de $g_{\varepsilon,h}$ permanece em uma condição de alta sensibilidade às perturbações [Figura 4.9(a)]. Sejam considerados os passos seguintes:

- i) Obter $g_{\varepsilon,h}$ definido em (4.126).

- ii) Definir t_r como o tempo imediatamente depois da região transitória [veja Figura 4.9(a)]. Se a evolução da norma $g_{\varepsilon,h}$ não apresentar transitório no início¹⁰ então $t_r = 0$.
- iii) Calcular $N_\alpha^* \geq 0$ definindo os limites das vizinhanças [veja linhas tracejadas na Figura 4.9(a)] como:

$$N_\alpha^* + \epsilon \approx \max_{t_r \leq t \leq T} \{g_{\varepsilon,h}\}, \quad N_\alpha^* - \epsilon \approx \min_{t_r \leq t \leq T} \{g_{\varepsilon,h}\}, \quad (4.129)$$

logo,

$$N_\alpha^* \approx \frac{1}{2} \left(\max_{t_r \leq t \leq T} \{g_{\varepsilon,h}\} + \min_{t_r \leq t \leq T} \{g_{\varepsilon,h}\} \right). \quad (4.130)$$

- iv) O parâmetro α^* é calculado como:

$$\alpha^* = \frac{1}{N_\alpha^*}. \quad (4.131)$$

O Lema 4.10 e o Procedimento 4.1 garantem que a Suposição 4.2 e o Lema 4.8 sejam satisfeitos. Assim, o operador Δ_σ^{-1} representará a aplicação de aumentos proporcionais com o crescimento das remanescências na lei de controle auxiliar v para regiões da trajetória de referência onde a sensibilidade às perturbações é maior.

Ação antecipativa das remanescências: esquema de controle com compensação das remanescências

Como já foi dito na Observação 4.18, g_ε adquire um comportamento como resposta às remanescências presentes em regiões da trajetória de referência onde há maior sensibilidade às perturbações. Do mesmo modo, e sendo coerentes com a Observação 4.19, é esperado que a norma $g_{\varepsilon,h}$ obedeça ao mesmo comportamento.

Neste trabalho, tal comportamento será usado para fazer a síntese de um esquema de controle antecipativo das remanescências. Nessa técnica de compensação a remanescência [que pode ser considerada uma perturbação, veja Observação 4.2] é medida e passada adiante para o laço de controle definido pela lei de controle auxiliar modificada v^* [Lema 4.1] e assim, a ação de controle pode ser iniciada antecipadamente à remanescência, conseguindo um efeito adverso na resposta do sistema.

Com intuito de fazer a síntese de um controlador com compensação das remanescências, será assumido que as perturbações podem ser medidas pelo uso das informações de posição do ponto de referência P_{ref} , definido na Subseção 3.4.1. Assim, a função $g_{\varepsilon,h}$ poderá ser reescrita como

$$g_{\varepsilon,\text{ref}} = \left\| \ddot{\Lambda}(\hat{h}_{\text{ref}}) \dot{\hat{h}}_{\text{ref}} + 2\dot{\Lambda}(\hat{h}_{\text{ref}}) \left[\frac{\partial S_1(\hat{h}_{\text{ref}})}{\partial \hat{h}_{\text{ref}}} \dot{\hat{h}}_{\text{ref}} \right] \eta + 2\dot{\Lambda}(\hat{h}_{\text{ref}}) S_1(\hat{h}_{\text{ref}}) v \right\| \quad (4.132)$$

com $\hat{h}_{\text{ref}} = [h_{\text{ref}} \quad \theta_{\text{ref}}]^T$, sendo $h_{\text{ref}}(t) \in \mathbb{R}^2$ a posição do ponto de referência P_{ref} definido em (3.62) e $\theta_{\text{ref}}(t) \in \mathbb{R}$ a orientação de referência da BMR. Da mesma forma, a função h_γ , que inicialmente foi definida pelo uso de g_ε , agora será definida por meio do uso de (4.132), ou seja,

$$h_\gamma = \alpha^* g_{\varepsilon,\text{ref}}. \quad (4.133)$$

Assim, (4.118) pode ser reescrita como:

$$v^* = \alpha^* g_{\varepsilon,\text{ref}} v + \alpha^* \dot{g}_{\varepsilon,\text{ref}} \eta. \quad (4.134)$$

Finalmente, a síntese de um controlador não-linear para seguimento de trajetória com compensação das remanescências de deslizamento e derrapagem por meio da lei de controle auxiliar modificada, definida como em (4.134), é resumida no seguinte procedimento:

Procedimento 4.2: A fim de fazer a síntese de um sistema para compensação das remanescências de deslizamento e derrapagem sejam levados em consideração os seguintes passos:

¹⁰Dependendo das condições iniciais do problema de seguimento de trajetória essa região transitória pode ser desprezada.

- i) Configurar lei de controle flexível $\tau_\varepsilon(x)$ em (3.78) e variedade lenta $H_\varepsilon(x)$ em (3.77) definindo um valor para os parâmetros N_r e ε .
- ii) Aplicar a lei de controle auxiliar v em (3.64) [Lema 3.3] ajustando as matrizes K_1 e K_2 .
- iii) Verificar evolução do índice IAE para desempenho do controlador.
- iv) Aplicar o Procedimento 4.1.
- v) Projetar a função h_γ como em (4.133).
- vi) Projeção da lei de controle auxiliar modificada v^* [Lema 4.1] como em (4.134).
- vii) Verificar evolução do índice IAE para desempenho do controlador e comparar com resultados do item (iii). Ajustar o parâmetro α^* .

Observação 4.21 (Ajuste de α^*): O objetivo do item (vii) no Procedimento 4.2 é observar a redução do índice IAE e aprimora-lo pelo ajuste numérico do parâmetro α^* , ajuste que deve ser feito por meio de aumentos gradativos do valor pre-calculado no Procedimento 4.1. De acordo com a Observação 4.20, em uma situação de alta sensibilidade às perturbações, onde $\frac{1}{N_\alpha^*} + \epsilon_5 \leq 1$, é válido afirmar, pelo uso do item (iv) do Procedimento 4.1, que

$$\alpha^* = \frac{1}{N_\alpha^*} \leq \frac{1}{N_\alpha^*} + \epsilon_5 \leq 1,$$

ou seja, α^* será limitado. Nessa situação, se α^* for incrementado seu máximo valor será 1.

Em um caso de leve sensibilidade às perturbações [como os casos apresentados nas Figuras 4.7 e 4.8] tem-se que $\frac{1}{N_\alpha^*} + \epsilon_5 \rightarrow \infty$, logo, pelo item (iv) do Procedimento 4.1, podemos dizer que

$$\alpha^* = \frac{1}{N_\alpha^*} \leq \frac{1}{N_\alpha^*} + \epsilon_5 < \infty,$$

ou seja, α^* pode ser incrementado ilimitadamente.

Considerações para a função h_γ e o parâmetro α^*

As funções $\hat{h}_{\text{ref}}(t)$ e $\dot{\hat{h}}_{\text{ref}}(t)$ em (4.132) são calculados usando um pseudo-diferenciador para uma entrada de comando $\hat{h}_{\text{ref}}^{\text{com}}(t)$. A forma geral de um pseudo-diferenciador é representada pelo modelo de espaço-estado seguinte:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{h}_{\text{ref}}(t) \\ \dot{\hat{h}}_{\text{ref}}(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ -\omega_{n,\text{dif}}^2 I_{3 \times 3} & -2\zeta^* \omega_{n,\text{dif}} I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{h}_{\text{ref}}(t) \\ \dot{\hat{h}}_{\text{ref}}(t) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ G_{\text{dif}} \omega_{n,\text{dif}}^2 I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \hat{h}_{\text{ref}}^{\text{com}}(t) \quad (4.135)$$

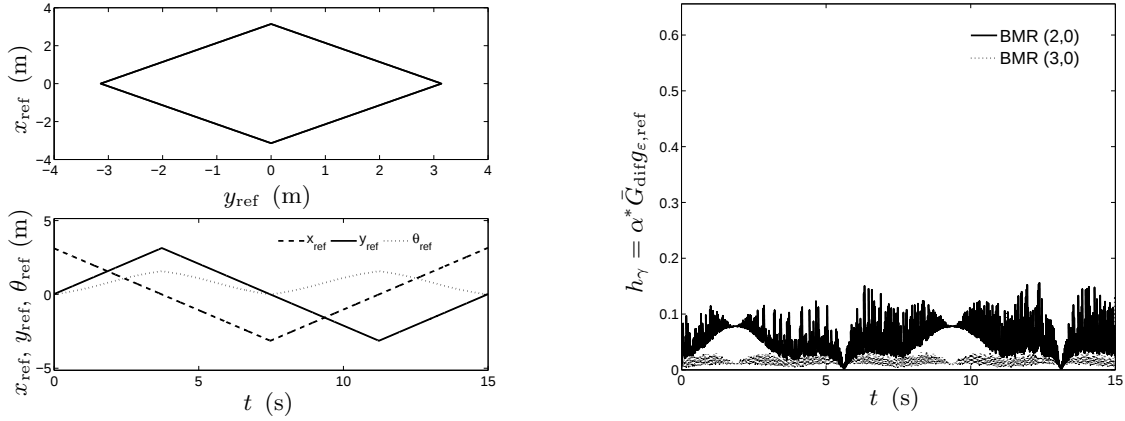
onde $\hat{h}_{\text{ref}}(t)$ representa o sinal filtrado de $\hat{h}_{\text{ref}}^{\text{com}}(t)$, $\dot{\hat{h}}_{\text{ref}}(t)$ é a derivada aproximada de $\hat{h}_{\text{ref}}^{\text{com}}(t)$, ζ^* é o raio de amortecimento, $\omega_{n,\text{dif}}$ a frequência natural proporcional à banda de passagem de um filtro passa-baixa e G_{dif} o ganho desse filtro (Liu *et al.* 2008). O ajuste significativo desses parâmetros pode significar uma variação na evolução da função h_γ .

Particularmente, o aumento do ganho G_{dif} representa um aumento em $\dot{\hat{h}}_{\text{ref}}(t)$, o que por sua vez, em (4.132), implica um aumento no ganho $g_{\varepsilon,\text{ref}}$. Representando esse aumento por um ganho $\bar{G}_{\text{dif}}$, a função h_γ em (4.133) e a ação de controle auxiliar modificada em (4.134) podem ser reescritas como:

$$h_\gamma = \alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} g_{\varepsilon,\text{ref}}, \quad (4.136)$$

$$v^* = \alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} g_{\varepsilon,\text{ref}} v + \alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \dot{g}_{\varepsilon,\text{ref}} \eta. \quad (4.137)$$

Como pode ser observado em (4.137), o fator $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}}$ multiplica a derivada de $g_{\varepsilon,\text{ref}}$, o que acrescenta sobre-picos muito elevados na ação de controle. Para reduzir tais sobre-picos, seja



(a) Trajetória de referência (4.139) (superior). Componentes paramétricas $x_{\text{ref}}(t)$, $y_{\text{ref}}(t)$ (inferior).

(b) Evolução da função de h_γ em (4.136) associada com a trajetória de referência (4.139).

Figura 4.10: (a) Trajetória de referência (4.139) com seus componentes paramétricos x_{ref} , y_{ref} e θ_{ref} . (b) Evolução da função h_γ definida em (4.136) para a trajetória de referência (4.139) com $T = 15$ s e $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} = 1$.

considerado um valor de atenuação $0 < \lambda^* < 1$. Assim, (4.137) pode ser reescrita novamente como:

$$v^* = \alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} g_{\varepsilon, \text{ref}} v + \lambda^* \alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \dot{g}_{\varepsilon, \text{ref}} \eta. \quad (4.138)$$

Como será visto na subseção seguinte, uma forma de conceber os incrementos para α^* , argumentados na Observação 4.21, é fazendo os incrementos em $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}}$ e $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \lambda^*$. Na Figura 4.11 é apresentado o esquema de controle com compensação das remanescências por meio da implementação da função inversa Δ_σ^{-1} com a função h_γ .

4.5 Controle de trajetória para BMRs com compensação das remanescências: resultados de simulação e experimentais

A compensação por controle antecipativo pode responder mais rapidamente para tipos de perturbações conhecidas e mensuráveis. Aqui é considerado como pré-requisito para implementar o esquema de compensação por controle antecipativo que a função h_γ definida em (4.136) seja mensurável para diferentes trajetórias. Na Figura 4.10 é apresentada a evolução da função h_γ , nas configurações cinemáticas das BMRs tipo (2,0) e tipo (3,0), para $0 \leq t \leq T$, sendo $T = 15$ s, com a trajetória de referência losango, definida pelas equações paramétricas seguintes:

$$\begin{cases} x_{\text{ref}}(t) = 2 \sin^{-1}(\cos 2\pi f_d(\|V_i\|_{\text{med}})t) \\ y_{\text{ref}}(t) = 2 \sin^{-1}(\sin 2\pi f_d(\|V_i\|_{\text{med}})t) \\ \theta_{\text{ref}}(t) = \tan^{-1}\left(\frac{2\pi f_d(\|V_i\|_{\text{med}})t}{2\pi f_d(\|V_i\|_{\text{med}})t + \pi/2}\right) \end{cases} \quad (4.139)$$

sendo $f_d(\|V_i\|_{\text{med}}) = 1.6949\|V_i\|_{\text{med}}$ uma função conhecida usada para gerar os pontos da trajetória de referência a partir de uma velocidade $\|V_i\|_{\text{med}}$.

Na Figura 4.10(b) o fator $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}}$ em (4.136) tem sido configurado com valor unitário para observar o comportamento da função $g_{\varepsilon, \text{ref}}$ em (4.132). Nota-se que a norma apresenta picos associados com as regiões da trajetória de referência onde existe uma mudança mais abrupta de orientação [veja o componente paramétrico $\theta_{\text{ref}}(t)$ na Figura 4.10(a)].

4.5.1 Controle de trajetória com compensação das remanescências em uma BMR tipo (2,0)

Para visualizar o comportamento do controlador não-linear de trajetória com compensação das remanescências de deslizamento e derrapagem serão executados os Procedimentos 4.1 e 4.2.

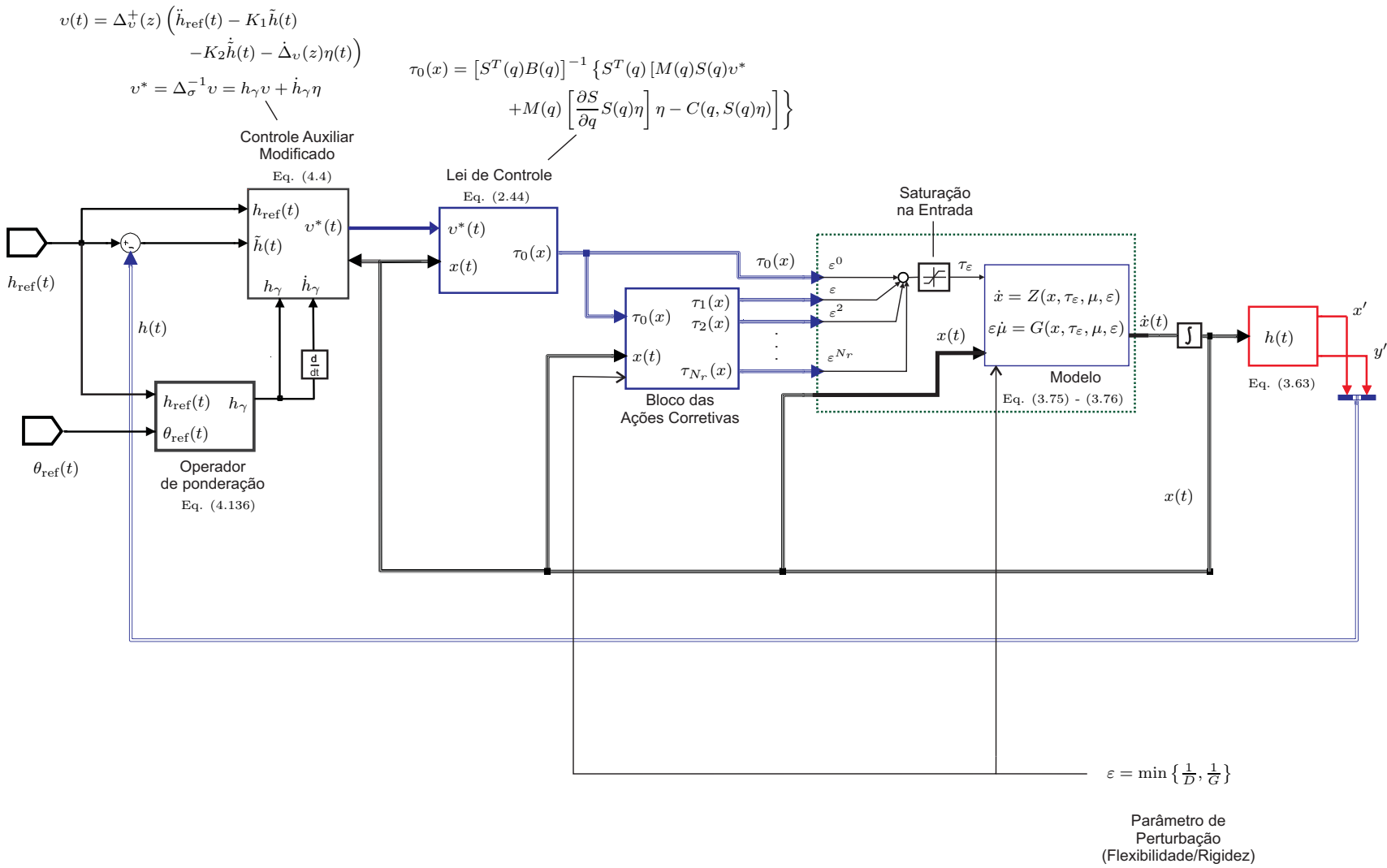
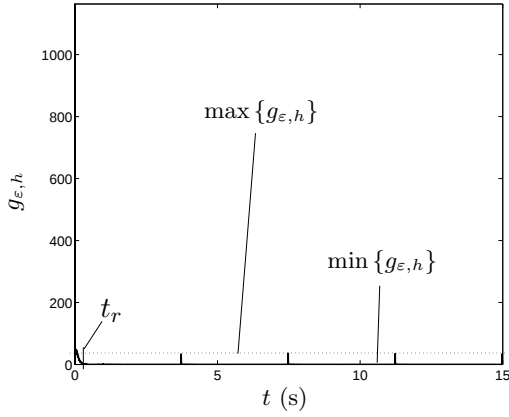
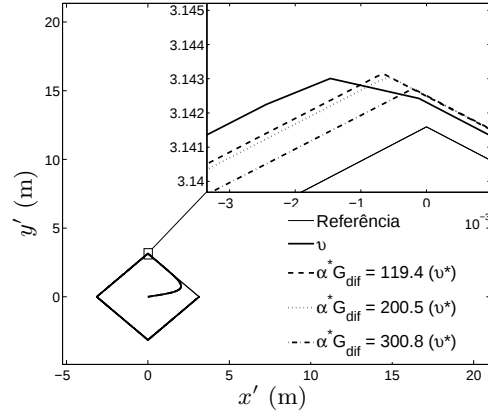


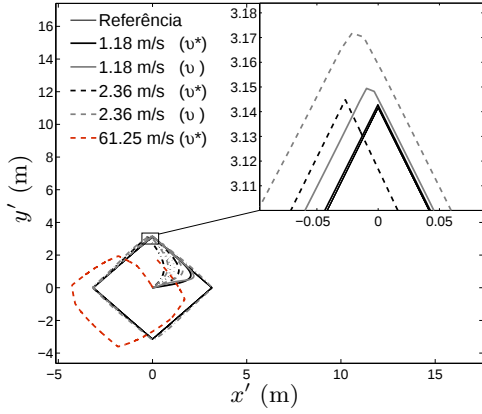
Figura 4.11: Esquema de controle não-linear baseado na composição de (2.44), a lei de controle auxiliar modificada (4.137) e a lei de controle baseada em ações corretivas (3.78), representada na Figura 3.5. A função h_γ é calculada por meio de (4.136) usando a trajetória referência.



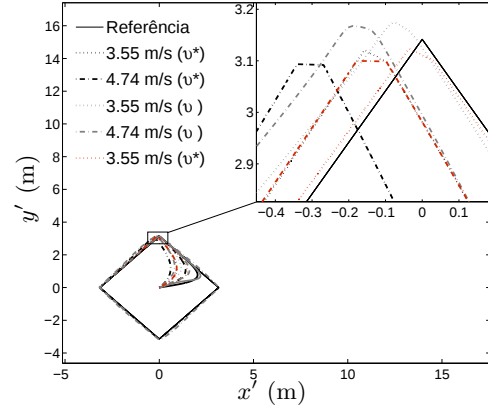
(a) Função $g_{\varepsilon,h}$ com $t_r = 0.261$ s, $T = 15$ s, $\max \{g_{\varepsilon,h}\} \approx 33.5$, $\min \{g_{\varepsilon,h}\} \approx 5.6 \times 10^{-5}$.



(b) Seguimento de trajetória para utilização da lei de controle flexível (3.78) usando v e v^* .



(c) Desvios na primeira esquina do losango no seguimento de trajetória para utilização da lei de controle flexível (3.78) usando v e v^* quando $\|V_i\|_{med} = 1.18$ m/s e $\|V_i\|_{med} = 2.36$ m/s.



(d) Desvios na primeira esquina do losango no seguimento de trajetória para utilização da lei de controle flexível (3.78) usando v e v^* quando $\|V_i\|_{med} = 3.55$ m/s e $\|V_i\|_{med} = 4.74$ m/s.

Figura 4.12: Evolução de $g_{\varepsilon,h}$ para BMR tipo (2,0) e seguimento de trajetória usando v e v^* . Redução pelo reajuste de K_1 e K_2 (linhas vermelhas na Subfigura 4.12(d)) e caso de instabilidade quando $\|V_i\|_{med} = 61.25$ m/s (linha vermelha na Subfigura 4.12(c)).

A configuração usada para observar o comportamento do controlador sobre a BMR tipo (2,0) foi como no Caso 1 da Tabela 4.2, usando a lei de controle de flexível (3.78) [com $N_r = 1$, $\varepsilon = 10^{-15}$ e $D_0 = G_0 = 1$ N] definida por

$$\tau_\varepsilon(x, \varepsilon) = \tau_0(x) + \varepsilon \tau_1(x),$$

onde $\tau_0(x)$ é dada por (4.92), e usando a lei de controle auxiliar (3.64) para $\|V_i\|_{med} = 1.18$ m/s. Nessa configuração é aplicado o Procedimento 4.1 a fim de calcular o parâmetro α^* . Na Figura 4.12(a) pode ser observado a evolução de $g_{\varepsilon,h}$ com $t_r = 0.261$ s e $T = 15$ s.

Por meio das informações fornecidas na Figura 4.12(a) e pelo uso de do item (iii) no Procedimento 4.1, tem-se que

$$N_\alpha^* \approx \frac{1}{2} \left(\max_{0.261 \leq t \leq 15} \{g_{\varepsilon,h}\} + \min_{0.261 \leq t \leq 15} \{g_{\varepsilon,h}\} \right) = 0.5 \cdot 33.5 = 16.75.$$

Pelo uso do item (iv) do Procedimento 4.1, então

$$\alpha^* = \frac{1}{N_\alpha^*} = \frac{1}{16.75} = 0.0597.$$

Tabela 4.5: Desvio e índice IAE para uma BMR do tipo (2,0) com $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s no seguimento da trajetória de referência (4.139) por meio da lei de controle auxiliar modificada (4.140).

$\alpha^* \tilde{G}_{\text{dif}}$	$\alpha^* \tilde{G}_{\text{dif}} \lambda^*$	Desvio v^* (cm)	Desvio v (cm)	IAE v^*	IAE v
119.4	2.35	0.14		2.188	
200.5	8.35	0.12	1.29	1.4371	0.6356
300.8	12.35	7.33×10^{-2}		0.2204	

Tabela 4.6: Desvio e índice IAE para uma BMR do tipo (2,0) com incrementos em $\|V_i\|_{\text{med}}$ no seguimento da trajetória de referência (4.139) por meio da lei de controle auxiliar modificada (4.140) com $\alpha^* \tilde{G}_{\text{dif}} = 300.8$ e $\alpha^* \tilde{G}_{\text{dif}} \lambda^* = 12.35$.

$\ V_i\ _{\text{med}}$ (m/s)	IAE v^*	IAE v	Desvio v^* (cm)	Desvio v (cm)	$K_1 I_{2 \times 2}$	$K_2 I_{2 \times 2}$
1.18	0.220	0.6356	7.33×10^{-2}	1.29		
2.36	1.133	27.069	3.22	3.98	300	120
3.55	1.392	28.624	10.78	8.44		
4.74	1.652	19.647	21.92	18.36		

Modificação para K_1, K_2 (para $\ V_i\ _{\text{med}} = 3.55$ m/s e $\ V_i\ _{\text{med}} = 4.74$ m/s)						
3.55	0.2297	13.701	1.5231	3.95	500	120
4.74	1.5897	27.942	2.356	4.06	400	120

Em seguida, a lei de controle auxiliar modificada será construída como em (4.138), substituindo $\tilde{G}_{\text{dif}} = 2000$, $\lambda^* = 0.02$ e (3.64):

$$v^* \triangleq \Delta_v^{-1} v = 119.4 g_{\varepsilon, \text{ref}} \Delta_v^{-1}(z) \left(\ddot{h}_{\text{ref}} - K_1 \tilde{h} - K_2 \dot{\tilde{h}} - \dot{\Delta}_v(z) \eta \right) + 2.35 \dot{g}_{\varepsilon, \text{ref}} \eta, \quad (4.140)$$

visto que $\Delta_v \in \mathbb{R}^{2 \times \delta_u}$ é uma matriz não-singular para $\delta_u = 2$.

Na Tabela 4.5 é apresentado o índice IAE do controlador para o seguimento da trajetória de referência (4.139) e pelo uso da lei de controle auxiliar modificada (4.140) com $T = 15$ s. Na mesma tabela pode ser observada uma medição do desvio que apresenta a BMR quando passa pela primeira esquina do losango [do mesmo modo que na Tabela 4.1] para diferentes valores de $\alpha^* \tilde{G}_{\text{dif}}$. Pode ser verificado na Figura 4.12(b) que o incremento de $\alpha^* \tilde{G}_{\text{dif}}$ diminui o desvio na primeira esquina do losango, ou seja que existe uma menor sensibilidade às remanescências de deslizamento e derrapagem.

No caso em que as velocidades do centro das rodas fosse aumentado gradativamente, como foi apresentado na Tabela 4.1, também é possível observar uma melhora comparativa. Na Tabela 4.6, é apresentado o índice IAE para os quatro casos de $\|V_i\|_{\text{med}}$ da Tabela 4.1 e os desvios com relação à primeira esquina do losango quando são usadas as leis de controle auxiliar v , em (3.64) [sem compensação das remanescências], e v^* , em (4.140) [com compensação das remanescências], durante $T = 15$ s. Para tal propósito, o caso de configuração para $\alpha^* \tilde{G}_{\text{dif}}$ e $\alpha^* \tilde{G}_{\text{dif}} \lambda^*$ foi o terceiro da Tabela 4.5, ou seja 300.8 e 12.35, respectivamente.

Nas Figuras 4.12(c) e 4.12(d) podem ser conferidos os desvios da BMR na primeira esquina do losango para os quatro casos de $\|V_i\|_{\text{med}}$. Embora os índices IAE usando a lei de controle v^* sejam melhores que quando usada a lei v , os desvios para $\|V_i\|_{\text{med}} = 3.55$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 4.74$ m/s são certamente maiores no caso que usa a lei v^* [veja células em negrito na Tabela 4.6]. Uma redução significativa desses desvios pode ser feita pela manipulação numérica das matrizes K_1 e K_2 . Na Tabela 4.6 pode ser observada a diminuição desses desvios pelo reajuste das

matrizes K_1 e K_2 . Do mesmo modo, na Figura 4.12(d) pode ser observada dita redução [veja as linhas vermelhas].

Observação 4.22 (v^* é menos sensível ao reajuste de K_1 e K_2): Sendo coerentes com a Observação 4.4, podemos conferir que a configuração da lei de controle v^* atenua os desvios após uma configuração pre-estabelecida de K_1 e K_2 em regiões da trajetória de referência onde há maior sensibilidade às perturbações. Entretanto, após a modificação feita sobre K_1 e K_2 , a fim de reduzir os desvios mostrados na Tabela 4.6, é possível afirmar que a configuração pre-estabelecida de K_1 e K_2 pode ser reajustada se for garantida primeiramente a configuração da lei de controle v^* ; isto é, os aumentos de K_1 e K_2 , após aplicada v^* , não prejudicarão a atenuação das remanescências inicialmente conseguida. Detalha-se que ao utilizar a lei de controle v^* os aumentos em K_1 não incorrem em aumentos no sobre-pico da resposta transitória, como aconteceu nos casos apresentados da Figura 4.4(a) ao usar a lei v [veja Observação 4.3].

De acordo com o Teorema 4.2, sabemos que o valor de $\|V_i\|$ deve ser tal que χ_ε permaneça no espaço U_V [confinado principalmente pelos planos π_1 e π_2 , veja em (4.63)] garantindo que a lei de controle v^* possa compensar as remanescências de deslizamento e derrapagem. Após vários testes, foi observado que, para a BMR tipo (2,0), quando $\|V_i\|_{\text{med}} \geq 61.25$ m/s o sistema de controle se instabiliza, podendo afirmar que nessa situação $\|V_i\|$ [e consequentemente χ_ε] não permanecerá no espaço U_V . Na Figura 4.12(c) pode ser conferida tal instabilidade [veja a linha tracejada vermelha].

Para identificar o lugar geométrico de χ_ε foram usados os quatro casos de $\|V_i\|_{\text{med}}$ e, por meio das expressões (4.119) e (4.120), e utilizando $g_{\varepsilon,h}$, foram configurados os valores numéricos de χ_1 e χ_2 em cada caso de $\|V_i\|_{\text{med}}$, ou seja

$$\chi_1 = \frac{1}{\alpha_1^*} g_{\varepsilon,h}^{-1} \quad \text{e} \quad \chi_2 = \frac{1}{\alpha_2^*} g_{\varepsilon,h}^{-1},$$

quando $1.18 \leq \chi_3 \leq 4.74$.

Observação 4.23 (Contribuições de deslizamento e derrapagem, iguais e desiguais): Até aqui tem sido assumido que $D = G$. O fato dos coeficientes de rigidez G e D serem iguais fenomenologicamente implica que as contribuições de deslizamento e derrapagem também deveriam ser iguais. Dessa forma, pelo uso da expressão (4.121), os parâmetros α_1^* e α_2^* representam uma partição igual do valor α^* calculado anteriormente ($=0.0597$), ou seja, uma ponderação igual de $g_{\varepsilon,h}$. Por meio da expressão (4.121) podemos inferir que para uma partição desigual, o caso $\alpha_1^* > \alpha_2^*$ será válido se $G < D$ e o caso $\alpha_1^* < \alpha_2^*$ será válido se $G > D$.

Observação 4.24 (Considerações sobre γ_{11} e γ_{12}): Notemos que no plano π_2 [$\chi_3 - \gamma_{11}\chi_1 - \gamma_{12}\chi_2 = 0$], quando $\chi_1 = 0$, obtemos $\|V_t\| = \gamma_{12}\|\dot{\Delta}_t\|^{-1}$, para $\chi_2 \geq 0$. Da mesma forma, $\|V_t\| = \gamma_{11}\|\dot{S}_t\|^{-1}$, para $\chi_1 \geq 0$, quando $\chi_2 = 0$. Nessa situação, podemos afirmar que as projeções do mapa χ_ε sobre os planos π_x [$\chi_1 = 0$] e π_y [$\chi_2 = 0$] convergem a uma hipérbola equilátera.

Agora seja assumido que $\gamma_{11} = \gamma_{12}$. Pelo uso de (4.41) e (4.53) obtemos

$$V_T + V_T S_T + m_\gamma T_T + r m_\gamma Y_T = \frac{V_T + V_T D_T}{1 - V_T^* V_R},$$

ou ainda

$$\frac{1 + S_T}{1 + D_T} + \frac{m_\gamma(T_T + rY_T)}{V_T(1 + D_T)} = \frac{1}{1 - V_T^* V_R}. \quad (4.141)$$

Pelo uso de (4.119) e (4.120) sabemos que $\|\dot{S}_t\| = \chi_1^{-1} = \alpha_1^* g_{\varepsilon,h} \leq S_T$ e $\|\dot{\Delta}_t\| = \chi_2^{-1} = \alpha_2^* g_{\varepsilon,h} \leq D_T$. Entretanto, pelo uso da Observação 4.23 e visto que $D = G$, é válido afirmar que $\alpha_1^* = \alpha_2^*$ e $S_T = D_T$. Dessa forma, (4.141) pode ser reescrita como

$$1 + \frac{m_\gamma(T_T + rY_T)}{V_T(1 + D_T)} = \frac{1}{1 - V_T^* V_R}.$$

¹¹O índice IAE foi calculado usando a norma euclidiana da expressão (4.1), ou seja $\sqrt{\text{IAE}_{x'}^2 + \text{IAE}_{y'}^2}$.

No entanto, visto que $rY_T \approx T_T$ e $\frac{T_T}{V_T} \approx \frac{r}{m_\gamma}$, podemos reescrever a equação anterior como

$$1 + \frac{2r}{1 + D_T} = \frac{1}{1 - V_T^* V_R}. \quad (4.142)$$

Até aqui, uma condição necessária para que (4.142) não seja indefinida é $V_T^* V_R \neq 1$.

Manipulando algebricamente (4.142) tem-se que

$$V_T^* V_R = \frac{2r}{1 + D_T + 2r},$$

ou seja, se $V_T^* V_R \neq 1$ então $1 + D_T \neq 0$. Entretanto, visto que $D_T > 0$ então $1 + D_T > 0$ e a expressão (4.142) estará definida. Assim, a situação $\gamma_{11} = \gamma_{12}$, quando assumida, sempre será definida.

De acordo com a Observação 4.24, garantindo que $\gamma_{11} = \gamma_{12}$, podemos afirmar que o mapa χ_ε equidista das suas projeções nos planos π_x e π_y , o que por sua vez indica que χ_ε converge a uma hipérbola equilátera. Como consequência disso o plano π_2 deve convergir ao plano π_z [$\chi_3 = 0$], ou seja

$$\gamma_{11}, \gamma_{12} \rightarrow 0.$$

Em seguida, os valores de γ_{21} e γ_{22} [associados com o plano π_1] devem ser calculados levando em consideração os casos de $\|V_i\|_{\text{med}}$ que instabilizam o sistema de controle. No entanto, devido que $\gamma_{21} = V_R V_T^* \gamma_{11}$ e $\gamma_{22} = V_R V_T^* \gamma_{12}$ é também válido que

$$\gamma_{21}, \gamma_{22} \rightarrow 0.$$

Observação 4.25 (Cálculo dos planos π_1 e π_2): Escolhendo a tripla $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle$ do mapa χ_ε cujo valor de χ_3 seja mínimo, e a fim de garantir que $\gamma_{11}, \gamma_{12} \rightarrow 0$, o plano π_2 pode ser projetado tal que seja tangente a essa tripla e convirja para o plano π_z .

Para o plano π_1 é preciso conhecer o produto $V_R V_T^*$ para calcular γ_{21} e γ_{22} . O valor de V_T^* pode ser calculado como $V_T^* \approx \max\{\|V_t^+\|\}$. Já o valor de V_R está sujeito ao fato de deixar fora de U_V todas as triplas $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle$ cujos valores de χ_3 instabilizam o sistema. Dessa forma, pelo conhecimento local da forma do mapa χ_ε [uma hipérbola equilátera], o plano π_1 foi projetado de tal maneira que fosse tangente a uma tripla do mapa χ_ε cujo valor de χ_3 seja máximo.

Procedendo como na Observação 4.25, para a trajetória de referência (4.139), foi usada a tripla $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle \approx \langle 7.6311 \times 10^{16}, 7.6311 \times 10^{16}, 1.45995 \times 10^{-5} \rangle$ entre todos os casos de $\|V_i\|_{\text{med}}$ testados, visto que $\chi_3 \geq 1.45995 \times 10^{-5}$, para $\forall \chi_3 \in \chi_\varepsilon$. Assim, quando $\chi_2 = 0$ em π_2 tem-se que

$$\gamma_{11} = \frac{\chi_3}{\chi_1} \approx \frac{1.45995 \times 10^{-5}}{7.6311 \times 10^{16}} \approx 1.91316 \times 10^{-22},$$

e, quando $\chi_1 = 0$ em π_2 , tem-se que $\gamma_{12} = 1.91316 \times 10^{-22}$.

Da mesma maneira, foi escolhida a tripla $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle \approx \langle 2.2786, 2.2786, 5.5641 \rangle$ entre todos os casos de $\|V_i\|_{\text{med}}$ testados, visto que $\chi_3 \leq 5.5641 \times 10^{-5}$, para $\forall \chi_3 \in \chi_\varepsilon$. Assim, quando $\chi_2 = 0$ em π_1 tem-se que

$$\gamma_{21} = \frac{\chi_3}{\chi_1} \approx \frac{5.5641}{2.2786} \approx 2.4537,$$

e, quando $\chi_1 = 0$ em π_1 , tem-se que $\gamma_{22} = 2.4537$.

Inicialmente podemos notar que as situações $\gamma_{11} = \gamma_{12}$ e $\gamma_{21} = \gamma_{22}$ são satisfeitas. Por outro lado, sabendo que $\gamma_{21} = V_R V_T^* \gamma_{11}$ [ou $\gamma_{22} = V_R V_T^* \gamma_{12}$] e $V_T^* \approx \max\{\|V_t^+\|\} \approx 0.9$, o valor de V_R foi aproximado como

$$V_R = \frac{\gamma_{21}}{V_T^* \gamma_{11}} = \frac{2.4537}{0.9 \cdot 1.91316 \times 10^{-22}} \approx 2.1267 \times 10^{21} \text{ m/s}.$$

Agora, de acordo com a Observação 4.13, sabemos que $\|V_t(q, \eta, \mu)\| < V_R$, ou seja $\|V_t(q, \eta, \mu)\| < 2.1267 \times 10^{21}$, o que é uma condição plausível, não pelo fato de 2.1267×10^{21}

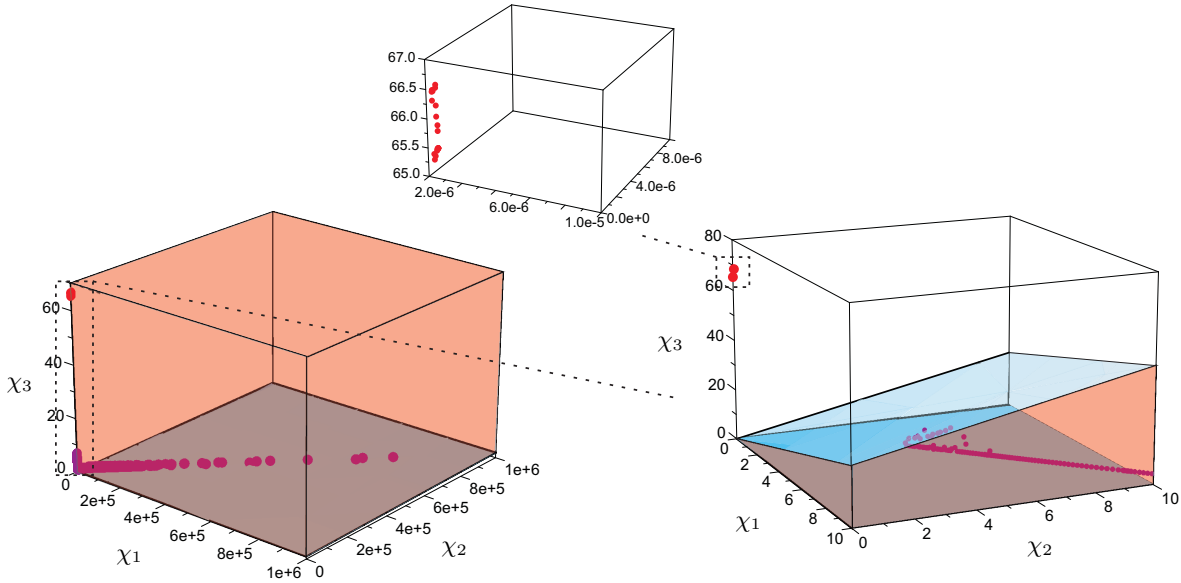


Figura 4.13: Espaço confinado U_V quando $\|V_i\|$ é incrementado no seguimento da trajetória de referência (4.139) pelo uso de v^* na BMR tipo (2,0).

representar a máxima velocidade dos centros das rodas [o que seria, tal vez, um absurdo na prática] e sim pelo fato desse valor representar um amplo intervalo de $\|V_t(q, \eta, \mu)\|$ para ser manipulável pelas quantidades $\|\dot{S}_t\|^{-1}$ e $\|\dot{\Delta}_t\|^{-1}$.

De posse dos valores calculados para $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}$ e γ_{22} o espaço confinado U_V pode ser descrito pelos planos π_x, π_y, π_z e pelos planos

$$\begin{aligned}\pi_2 : \quad & \chi_3 - 1.91316 \times 10^{-22} \chi_1 - 1.91316 \times 10^{-22} \chi_2 = 0 \\ \pi_1 : \quad & \chi_3 - 2.4537 \chi_1 - 2.4537 \chi_2 = 0.\end{aligned}$$

Na Figura 4.13 pode ser verificado que feita a síntese da lei de controle v^* , a permanência de χ_ε [representada por pontos na cor roxo que convergem a uma hipérbola equilátera] no espaço U_V [volume na cor vermelha] é garantida¹². Na mesma Figura 4.13 pode ser observado que quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 61.25$ m/s os valores associados às triplas $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle$ permanecem fora de U_V [veja pontos vermelhos]. De fato, assumindo $\chi_3 = 61.25$ m/s e pela aplicação imediata das expressões (4.119) e (4.120) tem-se que $\chi_1 = \chi_2 \cong 0.00325 \times 10^{-4}$. O que equivale a dizer que a BMR se movimentaria com altas variações de deslizamento de derrapagem ao ponto de instabilizar o sistema.

4.5.2 Controle de trajetória com compensação das remanescências em uma BMR tipo (3,0)

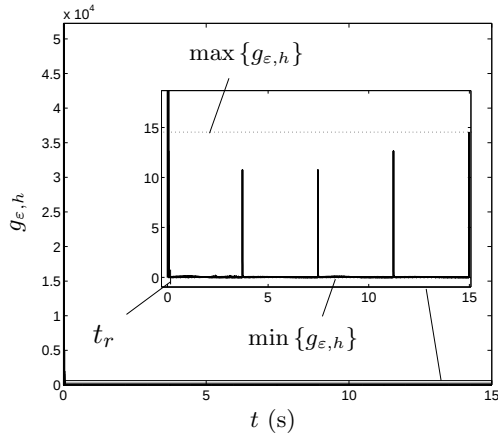
A configuração usada para observar o comportamento do controlador sobre a BMR tipo (3,0) foi como no Caso 4 da Tabela 4.2, usando a lei de controle de flexível (3.78) [com $N_r = 1$, $\varepsilon = 10^{-5}$ e $D_0 = G_0 = 1$ N] definida por

$$\tau_\varepsilon(x, \varepsilon) = \tau_0(x) + \varepsilon \tau_1(x),$$

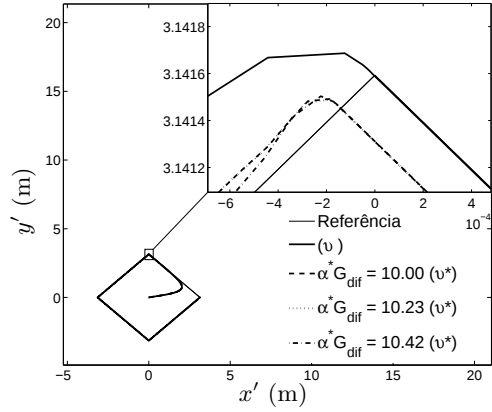
onde $\tau_0(x)$ é dada por (4.92), e usando a lei de controle auxiliar (3.64) para $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s. Nessa configuração é aplicado o Procedimento 4.1 a fim de calcular o parâmetro α^* . Na Figura 4.14(a) pode ser observado a evolução de $g_{\varepsilon, h}$ com $t_r = 0.0463$ s e $T = 15$ s.

Do mesmo modo que para a BMR tipo (2,0), por meio das informações fornecidas na Figura

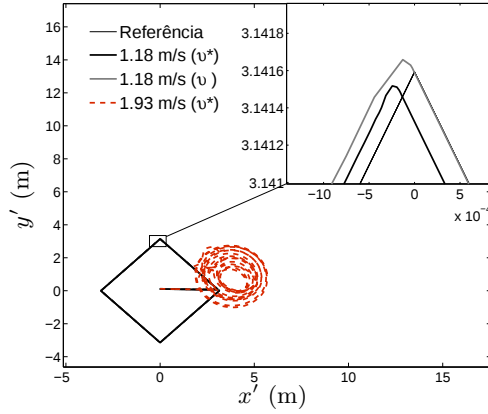
¹²Para a obtenção da Figura 4.13 foram usadas algumas amostras do mapa χ_ε usando dados de simulação obtidos no Simulink[®] do MATLAB[®] e a ferramenta de matemática simbólica MuPAD.



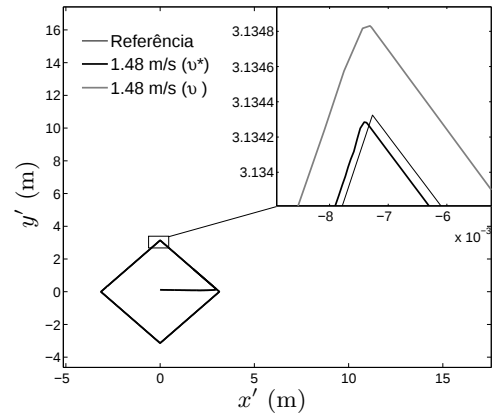
(a) Função $g_{\varepsilon,h}$ com $t_r = 0.0463$ s, $T = 15$ s, $\max\{g_{\varepsilon,h}\} \approx 14.48$, $\min\{g_{\varepsilon,h}\} \approx 0.00608$.



(b) Seguimento de trajetória para utilização da lei de controle flexível (3.78) usando v e v^* .



(c) Desvios na primeira esquina do losango no seguimento de trajetória para utilização da lei de controle flexível (3.78) usando v e v^* quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s.



(d) Desvios na primeira esquina do losango no seguimento de trajetória para utilização da lei de controle flexível (3.78) usando v e v^* quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.48$ m/s.

Figura 4.14: Evolução de $g_{\varepsilon,h}$ para BMR tipo (3,0) e seguimento de trajetória usando v e v^* . Redução pelo reajuste de K_1 e K_2 (linhas vermelhas na Subfigura 4.14(d)) e caso de instabilidade quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.93$ m/s (linha vermelha na Subfigura 4.14(c)).

4.14(a) e pelo uso de do item (iii) no Procedimento 4.1, tem-se que

$$N_{\alpha}^* \approx \frac{1}{2} \left(\max_{0.0463 \leq t \leq 15} \{g_{\varepsilon,h}\} + \min_{0.0463 \leq t \leq 15} \{g_{\varepsilon,h}\} \right) = 0.5 \cdot 14.486 = 7.243.$$

Pelo uso do item (iv) do Procedimento 4.1, então

$$\alpha^* = \frac{1}{N_{\alpha}^*} = \frac{1}{7.243} = 0.13806.$$

Seguidamente, a lei de controle auxiliar modificada será construída como em (4.138), substituindo $\bar{G}_{\text{dif}} = 73$, $\lambda^* = 10^{-26}$ e (3.64):

$$v^* \triangleq \Delta_{\sigma}^{-1} v = 10.0 g_{\varepsilon,\text{ref}} \Delta_v^+(z) \left(\ddot{h}_{\text{ref}} - K_1 \tilde{h} - K_2 \dot{\tilde{h}} - \dot{\Delta}_v(z) \eta \right) + 10^{-25} \dot{g}_{\varepsilon,\text{ref}} \eta, \quad (4.143)$$

visto que $\Delta_v \in \mathbb{R}^{2 \times \delta_u}$ é uma matriz singular para $\delta_u = 3$. O parâmetro $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \lambda^* = 10^{-25}$ certamente não representa uma contribuição notável dentro da lei de controle. No entanto, tal valor deve seu caracter desprezível ao fato da BMR possuir maior inércia, logo as alterações

Tabela 4.7: Desvio e índice IAE para uma BMR do tipo (3,0) com $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s no seguimento da trajetória de referência (4.139) por meio da lei de controle auxiliar modificada (4.143).

$\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}}$	$\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \lambda^*$	Desvio v^* (cm)	Desvio v (cm)	IAE v^*	IAE v	$K_1 I_{2 \times 2}$	$K_2 I_{2 \times 2}$
10.00	10^{-25}	0.1010		1.0084			
10.23	10^{-25}	0.0092	5.564×10^{-2}	0.6135	0.1531	1500	23
10.42	10^{-25}	0.0038		1.2283			
Modificação para K_1, K_2 ($\ V_i\ _{\text{med}} = 1.18$ m/s)							
10.42	10^{-25}	0.0010	5.564×10^{-2}	0.1145	0.1531	1600	45

no vetor velocidade η não tem tanta relevância como no vetor aceleração $\dot{\eta}$, que certamente é representado pelo termo $10.0 g_{\varepsilon, \text{ref}} \Delta_v^+(z)(\ddot{h}_{\text{ref}} - K_1 \ddot{h} - K_2 \dot{h} - \dot{\Delta}_v(z)\eta)$.

Na Tabela 4.7 é apresentado o índice IAE do controlador para o seguimento da trajetória de referência (4.139) e pelo uso da lei de controle auxiliar modificada (4.143) com $T = 15$ s. Na mesma tabela pode ser observada uma medição do desvio que apresenta a BMR quando passa pela primeira esquina do losango [do mesmo modo que na Tabela 4.1] para diferentes valores de $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}}$. Do mesmo modo que com a BMR tipo (2,0), o incremento de $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}}$ diminui o desvio na primeira esquina do losango, confirmando que existe uma menor sensibilidade às remanescências de deslizamento e derrapagem.

Para o caso em que $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} = 10.42$ e $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \lambda^* = 10^{-25}$ pode ser conferido que o índice IAE precisa ser aprimorado [veja células em negrito]. Dessa forma, procedendo da mesma maneira que para o caso da BMR tipo (2,0), são ajustadas as matrizes K_1 e K_2 a fim de garantir uma melhora no desempenho do controlador [veja ultima linha da Tabela 4.7]. Tais reduções podem ser conferidas na Figura 4.14(b).

No caso em que as velocidades do centros das rodas seja aumentado gradativamente [da mesma forma que foi apresentado na Tabela 4.1], também é possível observar uma melhora comparativa. Entretanto, tal aumento será limitado por um valor de $\|V_i\|_{\text{med}}$ que instabiliza o sistema de controle e impede com que χ_ε permaneça dentro do espaço U_V [representado pelo sistema (4.63)]. Após vários testes, foi observado que, para a BMR tipo (3,0), quando $\|V_i\|_{\text{med}} \geq 1.93$ m/s o sistema de controle é instável, confirmando que nessa situação χ_ε não permanece no espaço U_V . Na Figura 4.14(c) também pode ser conferida a instabilidade do sistema de controle quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.93$ m/s [veja a linha vermelha tracejada].

Diferentemente do caso da BMR tipo (2,0), o limite para $\|V_i\|_{\text{med}}$ na BMR tipo (3,0) é muito menor, evitando que possam ser explorados casos de $\|V_i\|_{\text{med}}$ *consideravelmente* maiores a 1.18 m/s [oposto ao caso da BMR tipo (2,0)]. Sendo assim, para a BMR tipo (3,0) serão explorados apenas dois casos, quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.48$ m/s. Na Tabela 4.8, é apresentado o índice IAE para os dois casos de velocidade $\|V_i\|_{\text{med}}$ e os desvios com relação à primeira esquina do losango quando são usadas as leis de controle auxiliar v [sem compensação das remanescências] e v^* [com compensação das remanescências] para $T = 15$ s. Para tal propósito, o caso de configuração para $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}}$ e $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \lambda^*$ foi o quarto da Tabela 4.7, ou seja 10.42 e 10^{-25} , respectivamente. Nas Figuras 4.14(c) e 4.14(d) podem ser conferidos os desvios da BMR na primeira esquina do losango para os dois casos de $\|V_i\|_{\text{med}}$.

Da mesma forma que com a BMR tipo (2,0), pode ser verificado que feita a síntese da lei de controle auxiliar modificada v^* é garantida a permanência de χ_ε em U_V .

Procedendo como na Observação 4.25, para a trajetória de referência (4.139), foi usada a tripla $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle \approx \langle 74.5414, 74.5414, 1.1088 \times 10^{-4} \rangle$ entre todos os casos de $\|V_i\|_{\text{med}}$ testados, visto que $\chi_3 \geq 1.1088 \times 10^{-4}$, para $\forall \chi_3 \in \chi_\varepsilon$. Assim, quando $\chi_2 = 0$ em π_2 tem-se que

$$\gamma_{11} = \frac{\chi_3}{\chi_1} \approx \frac{1.1088 \times 10^{-4}}{74.5414} \approx 1.487 \times 10^{-6},$$

Tabela 4.8: Desvio e índice IAE para uma BMR do tipo (3,0) com incrementos em $\|V_i\|_{\text{med}}$ no seguimento da trajetória de referência (4.139) por meio da lei de controle auxiliar modificada (4.143) com $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} = 10.42$ e $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \lambda^* = 10^{-25}$.

$\ V_i\ _{\text{med}}$ (m/s)	IAE v^*	IAE v	Desvio v^* (cm)	Desvio v (cm)	$K_1 I_{2 \times 2}$	$K_2 I_{2 \times 2}$
1.18	0.1145	0.1531	0.0010	5.564×10^{-2}	1600	45
1.48	0.2194	1.3555	0.0083	0.1113		

e, quando $\chi_1 = 0$ em π_2 , tem-se que $\gamma_{12} = 1.487 \times 10^{-6}$.

Da mesma maneira, foi escolhida a tripla $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle \approx \langle 2.233 \times 10^{-4}, 2.233 \times 10^{-4}, 94.0021 \rangle$ entre todos os casos de $\|V_i\|_{\text{med}}$ testados, visto que $\chi_3 \leq 94.0021$, para $\forall \chi_3 \in \chi_\varepsilon$. Assim, quando $\chi_2 = 0$ em π_1 tem-se que

$$\gamma_{21} = \frac{\chi_3}{\chi_1} \approx \frac{94.0021}{2.233 \times 10^{-4}} \approx 420.930 \times 10^3,$$

e, quando $\chi_1 = 0$ em π_1 , tem-se que $\gamma_{22} = 420.930 \times 10^3$. Por outro lado, sabendo que $\gamma_{21} = V_R V_T^* \gamma_{11}$ [ou $\gamma_{22} = V_R V_T^* \gamma_{12}$] e $V_T^* \approx \max\{\|V_t^+\|\} \approx 0.85$, o valor de V_R foi aproximado como

$$V_R = \frac{\gamma_{21}}{V_T^* \gamma_{11}} = \frac{4420.930 \times 10^3}{0.85 \cdot 1.487 \times 10^{-6}} \approx 333.02 \times 10^9 \text{ m/s}.$$

De igual maneira que com a BMR tipo (2,0), a condição $\|V_t(q, \eta, \mu)\| < 333.02 \times 10^9$ representa um amplo intervalo de $\|V_t(q, \eta, \mu)\|$ para ser manipulável pelas quantidades $\|\dot{S}_t\|^{-1}$ e $\|\dot{\Delta}_t\|^{-1}$.

De posse dos valores calculados para $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{21}$ e γ_{22} o espaço confinado U_V pode ser descrito pelos planos π_x, π_y, π_z e pelos planos

$$\begin{aligned} \pi_2 : \quad & \chi_3 - 1.487 \times 10^{-6} \chi_1 - 1.487 \times 10^{-6} \chi_2 = 0 \\ \pi_1 : \quad & \chi_3 - 420.930 \times 10^3 \chi_1 - 420.930 \times 10^3 \chi_2 = 0. \end{aligned}$$

Na Figura 4.15, pode ser conferido que quando $\|V_i\|_{\text{med}} < 1.93$ m/s a permanência de χ_ε no espaço U_V é garantida [observar pontos vermelhos fora do espaço confinado representado pelo volume na cor vermelha]. Assumindo $\chi_3 = 1.93$ m/s e pela aplicação imediata das expressões (4.119) e (4.120) pode ser observado que a tripla $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle$ permanece fora de U_V . Mostrando mais uma vez que qualquer outro valor de $\|V_i\|_{\text{med}}$ superior a 1.93 m/s corresponde a triplas de um mapa χ_ε que não permanece em U_V .

A fim de complementar os resultados observados para as BMRs tipo (2,0) e (3,0), no Apêndice C são apresentados resultados de simulação complementares onde foi usada a mesma configuração da lei de controle auxiliar modificada, v^* , para o seguimento de uma trajetória lemniscata e espiral em diferentes casos de $\|V_i\|_{\text{med}}$. No Apêndice C pode ser observado que, da mesma forma que no seguimento da trajetória losango [em (4.139)], a configuração da lei v^* garante a permanência de χ_ε dentro de U_V e, de acordo com a Observação 4.22, o reajuste das matrizes K_1 e K_2 permitiu melhorar o desempenho do controlador [reduzir o índice IAE].

Como já foi mencionado na Subseção 4.2.1, a Suposição 3.7 permitiu manipular a velocidade dos centros das rodas, $\|V_i\|$, por meio da velocidade na BMR no marco global, $\{W\}$. Por essa razão, de acordo com a Observação 4.4, a lei de controle auxiliar modificada v^* , além de fazer uma redução da velocidade da BMR no marco local, $\{R\}$, quando passa por uma região de menor rejeição às perturbações também faz uma redução de $\|V_i\|$. Nas Figuras 4.16(a) e 4.16(b) pode ser conferida tal redução por meio da comparação com o caso em que foi usada a lei de controle auxiliar v^* [como mostrado nas Figuras 4.7(b) e 4.8(b)]. As reduções apresentadas correspondem ao caso em que a trajetória de referência é o losango [representado por (4.139)] para $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s durante 15 s. Do mesmo modo, nas Figuras 4.16(c) e 4.16(d) são apresentadas as reduções para o caso em que $\|V_i\|_{\text{med}} = 2.36$ m/s, entretanto para o caso particular da BMR tipo (3,0) é importante salientar que o valor de $\|V_i\|_{\text{med}}$ testado foi 1.48 m/s, devido que para $\|V_i\|_{\text{med}} = 2.36$ m/s seria inevitável que χ_ε permanecesse fora do espaço U_V [

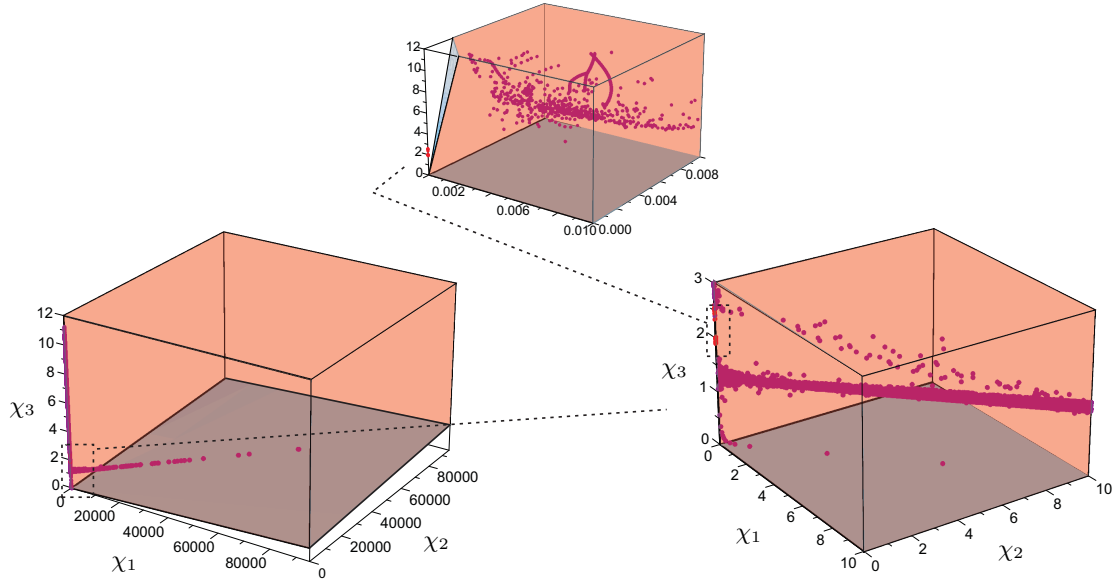
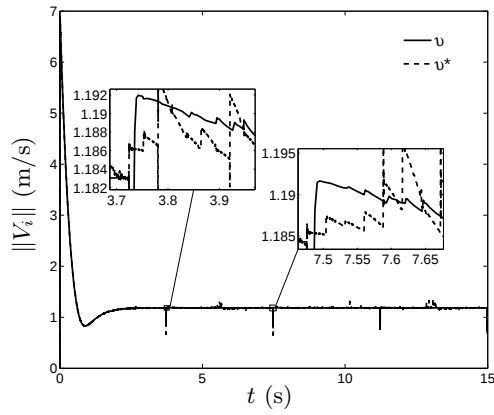
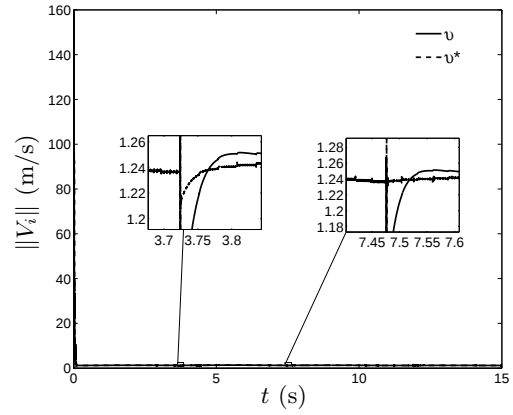


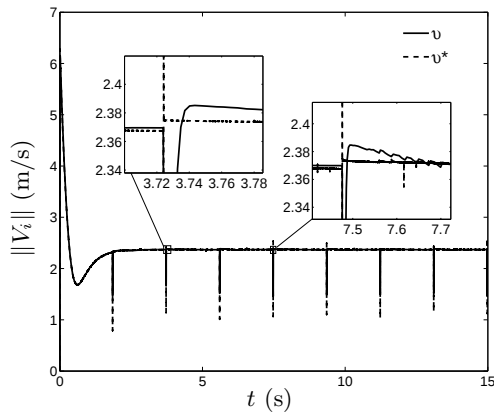
Figura 4.15: Espaço confinado U_V quando $\|V_i\|$ é incrementado no seguimento da trajetória de referência (4.139) pelo uso de v^* na BMR tipo (3,0).



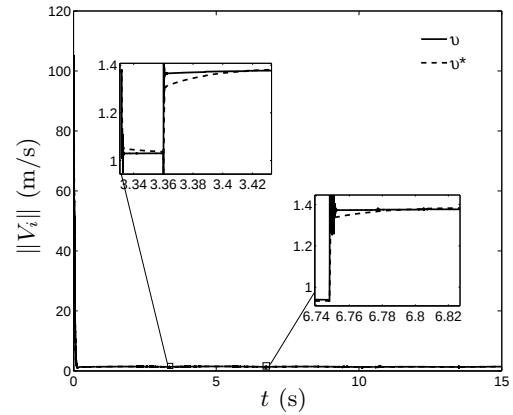
(a) BMR tipo (2,0) para $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s.



(b) BMR tipo (3,0) para $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s.



(c) BMR tipo (2,0) para $\|V_i\|_{\text{med}} = 2.36$ m/s.



(d) BMR tipo (3,0) para $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.48$ m/s.

Figura 4.16: Comparação da lei de controle auxiliar v e a lei de controle auxiliar modificada v^* na redução dos picos de $\|V_i\|$ para as BMRs tipo (2,0) e (3,0).

ou seja, seria inevitável a instabilidade do sistema]. Nota-se que o caso relacionado para a lei de controle auxiliar v^* nas duas BMRs apresenta uma maior persistência na redução de V_i embora existam picos de desprezível duração.

Observação 4.26 (Sensibilidade ao ajuste dos parâmetros $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}}$, $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \lambda^*$ vs. perda de tração): Comparando os dois casos de controle de trajetória apresentados anteriormente, podemos observar, de acordo com às Tabelas 4.5 e 4.7, que os incrementos aplicados aos parâmetros $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}}$ e $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \lambda^*$ [sujeitos às apreciações feitas nas Observações 4.21 e 4.22] diferem em proporção. Ou seja, na Tabela 4.5 os incrementos aplicados são maiores que os aplicados na Tabela 4.7. Assim, sem perda de generalidade com as observações relacionadas à inércia das BMRs apresentadas no Capítulo 3 [veja Observação 3.16], é válido afirmar que a sensibilidade no ajuste dos parâmetros $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}}$ e $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \lambda^*$ aumenta quando a inércia da BMR diminui. De forma equivalente, é válido afirmar que o ajuste da compensação das remanescências se faz mais sensível quando a inércia da BMR diminui. Tal fato permite afirmar, pelo uso da Observação 4.6, que a parcela não-linear, F_t^{nl} , que representa a perda de tração será menor sempre que a inércia da BMR for menor.

Embora a Observação 4.26 garanta uma relação de crescimento entre a sensibilidade do ajuste dos parâmetros $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}}$ e $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \lambda^*$ e a inércia da BMR, pela utilização da Observação 3.16 a maneira de silogismo, nós podemos relacionar a flexibilidade da BMR com a sensibilidade do ajuste desses parâmetros. Sendo assim, uma diminuição do limite máximo de flexibilidade [ou um aumento do limite mínimo de rigidez], representado por ε^* , incorreria em uma diminuição da sensibilidade do ajuste desses parâmetros.

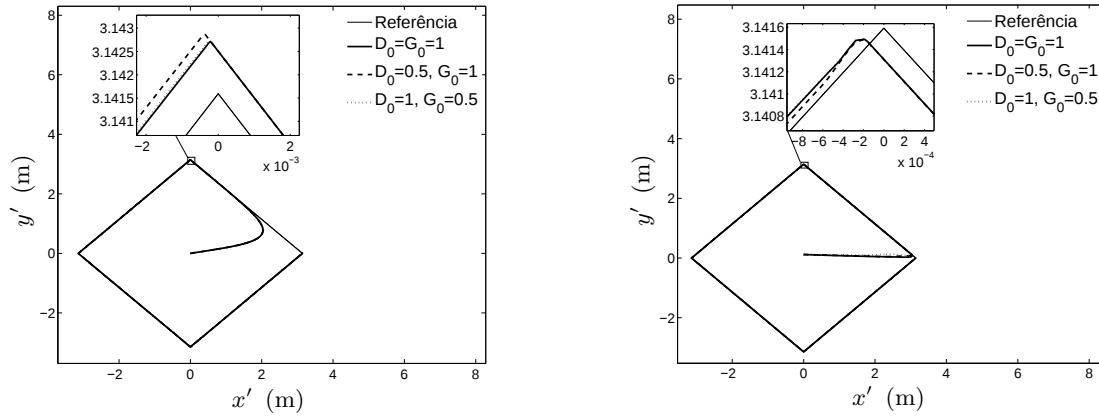
Coeficientes de rigidez diferentes: $D > G$ ou $D < G$

Até aqui têm sido utilizadas, por consideração da Suposição 3.8, configurações singularmente perturbadas em que os coeficientes de rigidez longitudinal normalizados da BMR, G_0 , eram iguais aos coeficientes de rigidez transversal normalizados, D_0 . Foi aplicada a lei de controle auxiliar modificada (4.4) identificando uma menor sensibilidade ao ajuste das matrizes K_1 e K_2 ao mesmo tempo que foi salientado o melhor caso de compensação das remanescências de deslizamento e derrapagem para aumentos da velocidade V_i referente aos parâmetros $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}}$ e $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \lambda^*$. O melhor caso foi considerado o melhor ajuste para a lei de controle auxiliar modificada (4.4). Entretanto, uma situação a ser destacada é o caso em que a técnica de compensação apresentada for aplicada sobre uma configuração singularmente perturbada cujos coeficientes de rigidez normalizados sejam numericamente diferentes¹³. Embora a Observação 4.23 explique brevemente como seria a divisão do parâmetro α^* quando os coeficientes D e G são diferentes, resta interpretar como essa situação afeta o desempenho da lei de controle auxiliar modificada (4.4) no problema de seguimento de trajetórias.

A fim de exemplificar essa situação na Figura 4.17 é apresentado o seguimento da trajetória de referência losango durante 15 s com $V_i = 1.18$ m/s para as BMRs tipo (2,0) e (3,0), com/sem compensação das remanescências pelo uso da lei de controle auxiliar modificada (4.4) [com os mesmos ajustes de K_1 , K_2 , N_r e ε utilizados anteriormente]. Para a BMR tipo (2,0) foi utilizado $D_0 = G_0 = 1$, $D_0 = 1$; $G_0 = 0.5$ e $D_0 = 0.5$; $G_0 = 1$ nos casos $D_0 = G_0$, $D_0 > G_0$ e $D_0 < G_0$, respectivamente, o que por sua vez, dado que $\varepsilon = 10^{-15}$, permite garantir que os valores de D e G não sejam menores ao limite mínimo de D e G [calculado na Subseção 3.4.4 como 0.111×10^{11} N]. Entretanto, com os valores de D_0 e G_0 escolhidos, na BMR tipo (3,0) foi preciso ajustar o valor de ε para um valor menor ao utilizado [$= 10^{-5}$] tal que o limite mínimo de D e G não fosse ultrapassado [calculado na Subseção 3.4.4 como 0.2×10^5 N]. Assim, para a BMR tipo (3,0) foi escolhido $\varepsilon = 10^{-7}$.

Segundo a literatura relacionada ao controle de BMRs tipo (2,0) com restrições [o que implica escorregamento e deformação], o desvio no seguimento da trajetória requer maior atenção quando o coeficiente D for menor (D'Andréa-Novel *et al.* 1995). Fato que pode ser constatado na Figura 4.17(a), onde pode ser observado que o seguimento da trajetória associado à situação $D < G$ apresenta um maior desvio que o associado à situação $D > G$, ambos com respeito à situação $D = G$. Embora esse fato seja confirmado, na BMR tipo (3,0) o seguimento de

¹³Situação notável em diferentes trabalhos de pesquisa existentes na literatura relacionada, veja por exemplo: D'Andréa-Novel *et al.* (1995), Campion *et al.* (1991b), Thuilot (1995), entre outros.



(a) BMR tipo (2,0) com $\varepsilon = 10^{-15}$ para $D_0 = G_0$ ($D = G = 10^{15}$ N); $D_0 < G_0$ ($D = 5 \times 10^{14}$ N, $G = 10^{15}$ N); $D_0 > G_0$ ($D = 10^{15}$ N, $G = 5 \times 10^{14}$ N).

(b) BMR tipo (3,0) com $\varepsilon = 10^{-7}$ para $D_0 = G_0$ ($D = G = 10^7$ N); $D_0 < G_0$ ($D = 5 \times 10^6$ N, $G = 10^7$ N); $D_0 > G_0$ ($D = 10^7$ N, $G = 5 \times 10^6$ N).

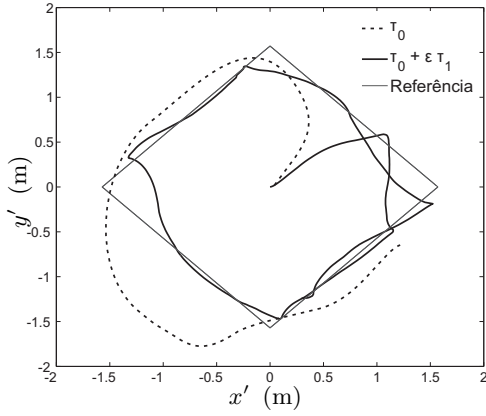
Figura 4.17: Comparação do seguimento de trajetória para as BMRs tipo (2,0) e (3,0) quando $D \neq G$.

trajetória apresenta maior desvio quando $D > G$ [veja Figura 4.17(b)]. A explicação a este acontecimento se reduz ao fato da lei de controle auxiliar modificada (4.4) ser sintetizada por meio de uma condição de rolamento total apropriado que se fundamenta só no deslizamento. Ou seja, dado que a configuração das rodas da BMR tipo (3,0) são omnidirecionais então, pela Nota 4.1, o Teorema 4.3 se reduz à condição $\|\dot{S}_t\| = 0$. Assim, na situação $D < G$ o deslizamento representará a maior contribuição no rolamento das rodas e a lei de controle auxiliar modificada (4.4) fará a compensação das remanescências associadas a essa contribuição, ignorando que a maior contribuição é feita pela derrapagem no rolamento das rodas e resultando em um maior desvio no seguimento da trajetória. Consequentemente, é válido afirmar que para uma BMR tipo (3,0) com rodas omnidirecionais a lei de controle auxiliar modificada (4.4) apresentará um menor desvio no seguimento da trajetória sempre que $D < G$.

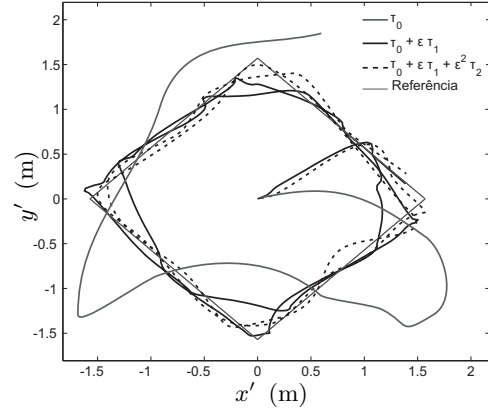
4.5.3 Resultados experimentais: BMR tipo (3,0) do Axebot

O controlador foi implementado sob uma plataforma de software desenvolvida em C++, utilizando o *framework* para aplicações robóticas ROS [do inglês *Robot Operating System*], um sistema de operacional *open source* que oferece um conjunto de bibliotecas que simplificam o desenvolvimento de aplicações voltadas para robótica, fornecendo serviços que abstraem tarefas como: troca de mensagens, localização/mapeamento, planejamento de trajetórias, entre outras (ROS 2014). O controlador roda em ambiente LINUX¹⁴ e permite enviar as ações de controle de ciclo de trabalho dos sinais PWM [refira-se à equação (3.89)] que acionam os drivers dos motores da BMR [motores A-max 22 da Maxon Motors[®] com drivers de 6V e máxima potência de 5W]. A plataforma experimental associada à BMR é composta de dois módulos: o microprocessador responsável pela implementação da instrumentação [baseada no microcontrolador PIC32 da Microchip[®]] e o módulo que gera a base de tempo [tempo de amostragem de 50ms] para o relógio de tempo real. Os controladores de alto nível [controlador dinâmico e cinemático] são implementados sobre um computador pessoal. A comunicação entre os módulos é feita por meio da plataforma Xbee, que para este caso foi composta por dois módulos da Digi International[®]. Os dados odométricos são transmitidos serialmente em frames de 32 Bytes à uma taxa de 115200 b/s.

¹⁴Para o implementação do controlador foi usada a versão Thrusty LTS de Ubuntu (14.04.03) em uma CPU com processador Intel Core i5 @ 2.5 GHz.

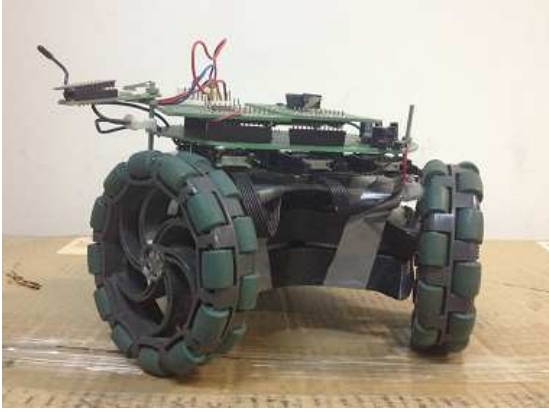


(a) Seguimento da trajetória da BMR (3,0) usando a lei de controle τ_0 em (3.65) e a lei $\tau_\varepsilon(x, \varepsilon) = \tau_0(x) + \varepsilon \tau_1(x)$ para $\|V_i\|_{med} = 1.18$ m/s.

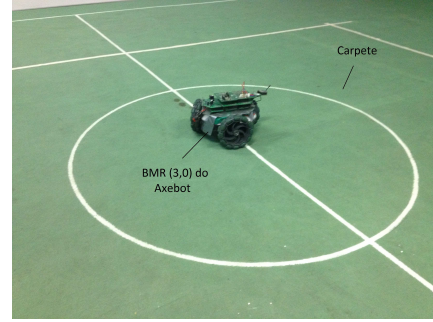


(b) Seguimento da trajetória da BMR (3,0) usando a lei de controle τ_0 em (3.65) e a lei $\tau_\varepsilon(x, \varepsilon) = \tau_0(x) + \varepsilon \tau_1(x) + \varepsilon^2 \tau_2(x)$ para $\|V_i\|_{med} = 1.48$ m/s.

Figura 4.18: Comparação do seguimento de trajetória para a BMR tipo (3,0) quando $\|V_i\|_{med} = 1.18$ m/s e $\|V_i\|_{med} = 1.48$ m/s.



(a) BMR (3,0) do Axebot.



(b) Carpete e BMR (3,0) do Axebot.

Figura 4.19: BMR (3,0) do Axebot do Laboratório de Robótica da Universidade Federal da Bahia.

A trajetória de referência utilizada foi:

$$\begin{cases} x_{ref}(k) = \sin^{-1} \left(\cos \frac{2\pi}{N_g} k \right) \\ y_{ref}(k) = \sin^{-1} \left(\sin \frac{2\pi}{N_g} k \right) \\ \theta_{ref}(k) = \tan^{-1} \left(\frac{2\pi k}{2\pi k + \pi/2} \right) \end{cases} . \quad (4.144)$$

O princípio de implementação da lei de controle foi baseado no procedimento em (Lewis *et al.* 1999a, Lewis *et al.* 2006) e usando uma taxa de amostragem de 50 ms, mais especificamente:

$$\tau(x) = [S^T(q_k)B(q)]^{-1} \left\{ S^T(q_k) \left[M(q_k)S(q_k)h_{\gamma,k}\Delta_v^+(z_k) \left(\ddot{h}_{ref,k} - K_1\tilde{h}_k - K_2\dot{\tilde{h}}_k - \dot{\Delta}_v(z_k)\eta_k \right) + M(q_k) \left[S(q_k)\dot{h}_{\gamma,k} + \frac{\partial S_k}{\partial q_k} S(q_k)\eta_k \right] \eta_k - C(q_k, S(q_k)\eta_k) \right] \right\},$$

onde $B(q_k) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é uma matriz de posto completo e $S(q_k) \triangleq S(\theta_k)$ é definida como na Tabela 2.2. O restante de parâmetros são calculados como apresenta o Apêndice B, Seção B.1.2.

Complementarmente, as ações corretivas foram configuradas como:

$$\tau_i(x_k) = -Z_3^+(q_k) [Z_1(q_k)H_{i-1}(x_k) + Z_2(q_k)H_i(x_k)],$$

$$H_i(x_k) = G_2^{-1}(q_k) \left[\dot{H}_{i-1}(x_k) - G_1(q_k)H_{i-1}(x_k) - G_3(q_k)\tau_i(x_k) \right],$$

sendo $x_k = [q_k \ \eta_k]^T$, $H_0(x_k) = -G_2^{-1}(q_k)G_0(q_k)\eta_k - G_2^{-1}(q_k)G_3(q_k)\tau_0(x_k)$ e $\tau_0(x_k) = \tau_k$.

Similarmente às simulações por computador, a velocidade $\|V_i\|_{\text{med}}$ [velocidade de navegação da BMR] tem sido modificada usando uma variação do número de pontos N_g usados pela BMR em um período de tempo. Assim, para $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s e para $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.48$ m/s os valores inicialmente configurados foram $N_g = 536$ e $N_g = 483$, respectivamente. Na Figura 4.18 pode ser observado que o seguimento de trajetória da BMR tem uma melhora comparativa na medida que é aumentado o grau da parcela corretiva da ação de controle enquanto a tendência à instabilidade é maior quando é usada a ação de controle τ_0 . Para a implementação do controlador foram utilizados os parâmetros das Tabelas 3.2 e A.1 junto com a ação de controle rígida τ_0 [em (3.65)] e a ação de controle flexível com até duas ações corretivas, já seja $\tau_\varepsilon(x_k, \varepsilon) = \tau_0(x_k) + \varepsilon\tau_1(x_k)$ [utilizada na Subseção 3.4.4] ou $\tau_\varepsilon(x_k, \varepsilon) = \tau_0(x_k) + \varepsilon\tau_1(x_k) + \varepsilon^2\tau_2(x_k)$. Para os dois casos de velocidade, foi configurada e implementada a lei de controle auxiliar v , em (3.64). O seguimento de trajetória da BMR foi testado sobre um carpete como superfície de movimento [veja Figura 4.19].

Entretanto, desde o ponto de vista prático, a manipulação do valor de N_g implica uma anomalia numérica na ação de controle decorrente das propriedades inerentes aos torques de coriolis nas rodas (Lewis *et al.* 2006).

Observação 4.27 (Influência dos torques de coriolis na mudança do espaço U_V): De forma genérica, para o modelo (2.38) em relação aos atuadores tem-se que $B(q) = I_{N \times N}$, logo

$$\tau = M(q)\ddot{\varphi} + C(q, \dot{q}) + F(q), \quad (4.145)$$

e por outro lado, para o sistema dos atuadores [motor + caixa de redução] tem-se que

$$J_M\ddot{\varphi} + B_M\dot{\varphi} + K_GF_M + K_G^2\tau = K_G\frac{K_M}{R_M}V'_M, \quad (4.146)$$

onde $J_M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é a matriz de momentos de inércia dos motores, $F_M \in \mathbb{R}^{N \times N}$ contem as forças de atrito dos motores e $B_M = \text{diag}\{B_{M_i} + K_{B_i}K_{M_i}/R_{M_i}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é uma matriz constante, sendo B_{M_i} e K_{B_i} as constantes de amortecimento do rotor e velocidade do i -ésimo motor.

Substituindo (4.145) em (4.146) obtemos

$$[J_M + K_G^2M(q)]\ddot{\varphi} + [B_M + K_G^2C(q, \dot{q})]\dot{\varphi} + K_GF_M + K_G^2F(q) = K_G\frac{K_M}{R_M}V'_M$$

ou ainda, para o i -ésimo atuador [considerando pequenos valores de K_G]:

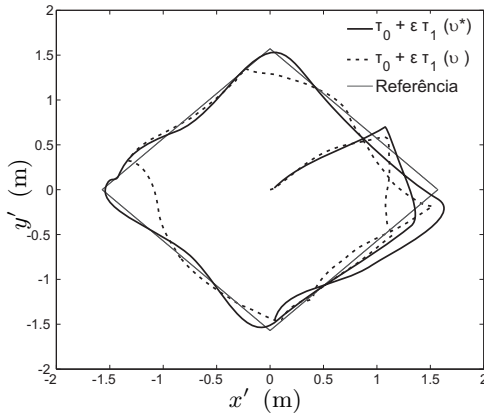
$$[J_{M_i} + K_G^2M_{ii}(q)]\ddot{\varphi}_i + B_{M_i}\dot{\varphi}_i + K_GF_{M_i} = K_G\frac{K_M}{R_M}V'_{M_i} - K_G^2d_i$$

onde $d_i = \sum_{i \neq j} M_{ij}(q)\ddot{\varphi}_j + \sum_{i,j} C_{ij}(q, \dot{q})\dot{\varphi}_j + F_i(q)$. Usando (3.90) podemos observar que as ações de controle que são enviadas aos atuadores apresentam uma alteração devida principalmente a $\sum_{i,j} C_{ij}(q, \dot{q})$. Dessa maneira, um aumento de $\|V_i\|_{\text{med}}$ [dependente de $\dot{q}$] implica uma alteração dos torques de coriolis, ao mesmo tempo que afeta os sinais de controle dos atuadores [contidos em τ_ε].

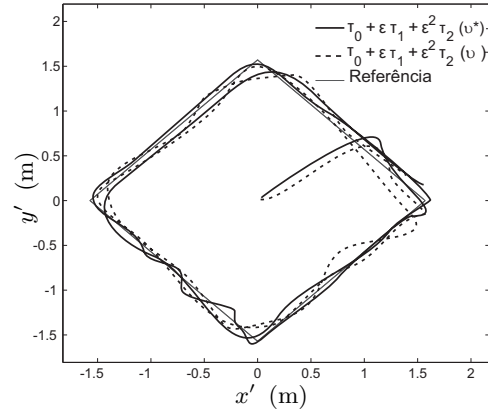
Usando a Observação 4.27, foi determinado que o valor de velocidade limite que diminui os efeitos de coriolis e garante a permanência de χ_ε em U_V foi experimentalmente determinado como $\|V_i\|_{\text{med}} = 80$ cm/s [$N_g = 20$] para um total de 60 amostras por teste. Dessa maneira, para verificar dois casos experimentais, análogos aos casos $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.48$ m/s, foram configurados valores de $\|V_i\|_{\text{med}} = 0.6$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 0.8$ m/s [para $N_g = 20$ e $N_g = 15$, respectivamente].

Tabela 4.9: Desvio e índice IAE para BMR tipo (3,0) do Axebot com incrementos em $\|V_i\|_{\text{med}}$ no seguimento da trajetória de referência (4.144) por meio da lei de controle auxiliar modificada (4.143) com $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} = 10.42$ e $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \lambda^* = 10^{-25}$.

$\ V_i\ _{\text{med}}$ (m/s)	IAE v^*	IAE v	Desvio v^* (cm)	Desvio v (cm)	$K_1 I_{2 \times 2}$	$K_2 I_{2 \times 2}$
0.6	1.309	1.043	4.3	12.8	1600	45
0.8	2.950	4.098	3.7	11.7		



(a) Seguimento da trajetória da BMR (3,0) usando a lei de controle $\tau_\varepsilon(x, \varepsilon) = \tau_0(x) + \varepsilon\tau_1(x)$. Comparação quando usada as leis v^* e v para $\|V_i\|_{\text{med}} = 0.6$ m/s.



(b) Seguimento da trajetória da BMR (3,0) usando a lei de controle $\tau_\varepsilon(x, \varepsilon) = \tau_0(x) + \varepsilon\tau_1(x) + \varepsilon^2\tau_2(x)$. Comparação quando usada as leis v^* e v para $\|V_i\|_{\text{med}} = 0.8$ m/s.

Figura 4.20: Comparação do seguimento de trajetória para a BMR tipo (3,0) quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 0.6$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 0.8$ m/s. Comparação quando aplicadas as leis de controle auxiliar v^* e v .

A fim de conferir a compensação das remanescências de deslizamento e derrapagem, foi utilizada a lei de controle auxiliar modificada v^* , em (4.143), configurada como na simulação [$\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} = 10.42$, $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \lambda^* = 10^{-25}$, $K_1 = 1600$ e $K_2 = 45$ (veja Tabela 4.8) para um período de amostragem de 50ms, ou seja, $K_1 = 1690$ e $K_2 = -90$]. Nas Figuras 4.20(a) e 4.20(b) pode ser conferido o seguimento de trajetória para os casos $\|V_i\|_{\text{med}} = 0.6$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 0.8$ m/s e na Tabela 4.9 pode ser conferido o desempenho. Embora a metodologia apresentada utilize uma técnica de rastreamento baseada em odometria a redução da influência das variações de escorregamento sobre a trajetória por meio da redução de velocidade na BMR [e consequentemente, nas rodas] implica menor propagação de erro dentro do laço de controle. Desde esse ponto de vista, a técnica baseada em odometria pode ser aprimorada na medida em que a lei de controle auxiliar v^* se torna mais robusta com respeito ao sinal da função h_γ .

4.6 Resumo

Na Seção 4.2 foi apresentado o problema das remanescências de escorregamento [ou, deslizamento e derrapagem] para diferentes valores na media das velocidade dos centros das rodas, $\|V_i\|_{\text{med}}$, e, como consequência da Suposição (3.7), foi observado que a manipulação desses valores implicavam uma relação entre as remanescências de escorregamento e a mudança na velocidade do centro da BMR em relação ao marco global $\{W\}$. Para o controle de trajetória então foi configurada previamente a dinâmica desejada [definida pelas matrizes K_1 e K_2 na lei de controle auxiliar (3.64)] e observado seu rendimento [por meio da utilização do índice IAE] frente a diferentes valores de $\|V_i\|_{\text{med}}$. As observações feitas levam à proposta de uma modificação da lei de controle auxiliar [veja lei (4.4) no Lema 4.1].

Com o propósito de obter uma expressão formal para a lei de controle auxiliar definida no

Lema 4.1 na Seção 4.3 é apresentado uma análise sobre o rolamento total de uma BMR. O resultado dessa análise se resume no Lema 4.2 [uma relação entre a velocidade e as variações de escorregamento que descreveria limites permissíveis na velocidade do centro das rodas] e no Lema 4.8 [representação formal para a lei de controle auxiliar modificada].

A formulação do Teorema 4.3 [Condição sobre a variações de deslizamento e derrapagem], permitiu interpretar o comportamento das remanescências de deslizamento e derrapagem frente a aumentos da velocidade no centro das rodas. Com essas observações, e pelo uso do Lema 4.8 que apresenta uma estrutura para a lei de controle auxiliar modificada, foi feita a síntese de um controlador híbrido, entre uma lei de controle por realimentação e uma ação antecipativa das variações de deslizamento e derrapagem. Os resultados observados mostraram que a lei de controle auxiliar modificada (4.4) apresenta um melhor desempenho com relação à lei de controle auxiliar (3.64), quando a velocidade dos centros da rodas é incrementado.

Considerações finais

A lei de controle por realimentação de estados não-linear (4.92) é suficientemente robusta frente aos efeitos de escorregamento quando uma BMR executa o seguimento de uma trajetória com valores significativos de velocidade no centro das rodas. Para estudar e fazer a síntese da lei de controle foi utilizada uma abordagem baseada em perturbações singulares, o que permite associar aumentos dos coeficientes de rigidez longitudinal e transversal quando a presença do escorregamento é impreterível. Embora exista uma esquema de controle que considere a flexibilidade das rodas a lei de controle auxiliar modificada (4.4) é inserida para ponderar a velocidade do centro das rodas de uma BMR em regiões da trajetória de referência onde a influência de deslizamento e derrapagem persiste [apresentado aqui como remanescência de escorregamento]. Os resultados mostram que a técnica de controle apresentada oferece uma outra interpretação ao problema de seguimento de trajetórias em BMRs usufruindo das próprias características comportamentais do escorregamento.

5.1 Conclusões e comentários finais

Neste trabalho, foram introduzidas forças de tração dissipativas pela utilização de um fator de escala ε , conhecido como parâmetro de perturbação, que permite modelar fenomenologicamente o aspecto flexível [ou rígido] das rodas [veja Subseção 3.2.1]. A partir dessa inclusão foi usada uma abordagem baseada na teoria de perturbações singulares para incluir o grau de violação das restrições cinemáticas [representadas como $A^T(q)\varepsilon\mu$] em BMRs com no mínimo duas rodas ativas [o que implica δ_u ser no mínimo 2]. Embora a inclusão desse grau significasse uma relação com o deslizamento e a derrapagem [tópicos fundamentais deste trabalho], uma especificação importante para síntese de controladores em forma geral é a restrição à entrada do sistema, sendo assim necessário a inclusão das não-linearidades saturação [relacionada com o acionamento dos motores acoplados às rodas] e zona morta [relacionada com a força atrito estático presente entre a roda e a superfície], não-linearidades que seriam posteriormente fundamentais para interpretar como a violação das restrições cinemáticas alteraria o efeito das não-linearidades e o bom desempenho do controlador [veja Subseção 3.4.4 e Observação 3.12].

A utilização da teoria de perturbações singulares permitiu inserir o conceito de dinâmicas lentas [$\dot{x}$], relacionado com a posição dentro do marco global $\{W\}$ e a posição angular das rodas; e o conceito de dinâmicas rápidas [$\dot{\mu}$], relacionado com a violação das restrições cinemáticas. Sobre tais conceitos, foi imprescindível citar a necessidade de uma variedade [ou $H(x, t)$, conhecida como variedade flexível na Definição 3.2] que permitisse compreender o comportamento da dinâmica de uma BMR na concepção de sistema rígido ou sistema flexível. Entretanto, devido às diferenças temporais nos transitórios das respostas rápidas [x] com as respostas lentas [μ] foi possível destacar aproximações $\bar{x}$ e $\bar{\mu}$ a fim de observar como, no domínio do tempo, o parâmetro de perturbação ε impede garantir que a situação $\mu \approx \bar{\mu}$ seja satisfeita. No entanto, sob certas condições, entre as quais podemos citar a necessidade de impor a estabilidade exponencial do modelo reduzido de $\dot{\mu}$ [conhecido como modelo de camada limite, na Subseção 3.2.3], os teoremas 3.1 e 3.2 permitiram que a situação $\mu \approx \bar{\mu}$ fosse satisfeita uniformemente [para $t \rightarrow \infty$], quando uma BMR se movimenta respeitando um mínimo de rigidez nas rodas,

representado de forma equivalente pela condição $\varepsilon < \varepsilon^*$.

Embora ε opere como um atenuador das restrições cinemáticas, sua presença no modelo dinâmico representa a velocidade com que estas são violadas. Vejamos no sistema (3.69) - (3.70) que

$$\dot{\mu} = \frac{1}{\varepsilon} G(x, \mu, \varepsilon).$$

Logo, $\dot{\mu}$ será maior quando ε for reduzido. Assim, a velocidade da resposta transitória de μ será maior em comparação com a resposta de x [de forma equivalente o transitório de $A^T(q)\varepsilon\mu$ terá um tempo resposta muito menor que a resposta do sistema rígido representado por x]. Dessa forma, as implicações do deslizamento e da derrapagem teriam uma forte ligação com o parâmetro ε . A fim de unir a concepção matemática com a concepção fenomenológica de flexibilidade, as forças de tração foram modeladas como em Bakker *et al.* (1987) [Subseção 3.3.1]. Nessa modelagem é estabelecida uma dependência explícita entre os componentes da força de tração e o escorregamento [deslizamento e derrapagem]. Aproximações dessas dependências foram representadas por modelos lineares em $\mathbb{R}^2$ para pequenos intervalos de deslizamento e derrapagem [com valores máximos ao redor de 0.1]. Embora as aproximações simplifiquem tais dependências foi assumido, como consequência dessa simplificação, a presença da perda de tração, principal causa das remanescências de deslizamento e derrapagem [veja Observação 4.6 na Subseção 4.3.1].

Sobre a abordagem da teoria de perturbações singulares e pelo uso do critério de Poincaré-Lindstedt o modelo dinâmico de uma BMR foi reformulado por termos diferenciais de grau superior de ε , ou seja, uma função polinomial em ε de ordem N_r que objetiva aproximar a flexibilidade do sistema [veja Subseção 3.4.3]. Similarmente, como consequência do critério de Poincaré-Lindstedt, a entrada do sistema τ é considerada uma expansão linear de vários termos de grau crescente em ε , princípio que permitiria a síntese da lei de controle flexível (3.78) responsável pela malha de controle mais interna do esquema de controle e configurada em cascata com a lei de controle auxiliar v [definida em (3.64)].

Na síntese de controladores baseada em métodos de perturbações singulares, o critério de Poincaré-Lindstedt oferece uma outra interpretação ao problema de linearizar a entrada de controle sobre *manifold* invariante com respeito aos problemas inerentes do movimento das BMRs com restrições de movimento e à presença de deslizamento e derrapagem [veja D'Andréa-Novel *et al.* (1995), Motte & Campion (2000), Dong & Guo (2005), Fernández *et al.* (2015b), etc]. Entretanto, as observações sobre resultados parciais de seguimento de trajetória do Capítulo 4 comprovam que há remanescências de deslizamento e derrapagem que a lei de controle flexível não consegue compensar quando é incrementada a velocidade nos centros das rodas. Como consequência disso foi utilizada uma função escalar Δ_σ para reduzir a aceleração da BMR no marco local $\{R\}$ [ou seja $\dot{\eta}$] tal que as remanescências de escorregamento pudessem ser atenuadas de acordo com a região da trajetória de referência onde a sensibilidade às remanescências fosse maior. Visto que $\dot{\eta} = v$ [Observação 2.6], a aplicação de Δ_σ foi feita sobre a lei de controle auxiliar v , resultando em

$$v^* = \Delta_\sigma^{-1} v,$$

sendo v^* a lei de controle auxiliar modificada, ou como no Lema 4.8, representada por

$$\Delta_\sigma^{-1} v = h_\gamma v + \dot{h}_\gamma \eta,$$

onde $h_\gamma = \|\dot{\Delta}_t\| + \|\dot{S}_t\|$.

A lei de controle auxiliar v^* mostra como as variações de deslizamento e derrapagem podem ser configuradas para compensar as remanescências, o que certamente se enquadra no propósito do Teorema 4.2, onde essas variações [representadas por $\dot{S}_t$ e $\dot{\Delta}_t$] foram fundamentais para condicionar a manipulação de $\|\dot{V}_t\|$. Diferentemente de outras contribuições existentes na literatura associada, onde é assumido que a BMR se movimenta uniformemente¹, a interpretação fornecida pelo teorema ressaltou a necessidade de estabelecer uma restrição sobre as velocidades dos centros das rodas de acordo com a evolução de $\dot{S}_t$ e $\dot{\Delta}_t$ no domínio do tempo, o que tecnicamente é uma consideração válida, visto que uma BMR não satisfaz as condições de rolamento puro e não-derrapagem quando suas restrições cinemáticas não são satisfeitas [veja

¹Veja D'Andréa-Novel *et al.* (1995), Barreto *et al.* (2013), Motte & Campion (2000), Aithal & Janardhanan (2013), etc.

Shekhar (1997)] logo, é coerente afirmar que $\|S_t\| > 0$, $\|\Delta_t\| > 0$ e $g_\varepsilon > 0$ para $\forall t > 0$ [usando o Teorema 4.3, tanto $\|\dot{S}_t\| = 0$ quanto $\|\dot{\Delta}_t\| = 0$ equivaleriam à condição $g_\varepsilon = 0$, logo se $\|\dot{S}_t\| > 0$ e $\|\dot{\Delta}_t\| > 0$ então $g_\varepsilon > 0$].

De maneira formal, se a lei de controle auxiliar v^* compensasse as remanescências então, como consequência do Teorema 4.2 deveria ser garantido que

$$\chi_\varepsilon \in U_V,$$

sendo U_V um espaço confinado definido pelo sistema (4.63) e $\chi_\varepsilon = [\chi_1 \ \chi_2 \ \chi_3]^T$ um mapa cujos componentes são definidos por $\chi_1 = \|\dot{S}_t\|^{-1}$, $\chi_2 = \|\dot{\Delta}_t\|^{-1}$ e $\chi_3 = \|V_t\|$.

Certamente, as observações ao redor dos resultados apresentados no Capítulo 4 comprovam uma diminuição do erro de seguimento de trajetória pelo uso da lei de controle auxiliar modificada v^* quando é incrementada a velocidade do centro das rodas, ao mesmo tempo que adquiriu menor sensibilidade ao re-ajuste dos valores pré-configurados das matrizes K_1 e K_2 [matrizes que conjuntamente representam a configuração de um controlador PD].

5.1.1 Divulgação de resultados

O trabalho aqui reportado pode ser classificado dentro de três categorias: (i) revisão da modelagem cinemática e dinâmica de uma BMR com restrições cinemáticas integráveis e não-integráveis [representadas na formulação pfaffiana], (ii) modelagem dinâmica pela abordagem baseada na teoria de perturbações singulares e proposta de um esquema de controle robusto para problema de seguimento de trajetórias em BMRs por meio da inclusão das variáveis rápidas, utilização do método de Poincaré-Lindstedt para síntese do esquema de controle em cascata com laço externo de controle definido pela lei de controle auxiliar v [em (3.64)]; e (iii) síntese de uma lei de controle auxiliar v^* [em (4.4) e (4.76)] para compensação das remanescências de escorregamento [deslizamento e derrapagem] por meio da modificação da lei de controle auxiliar v aproveitando um critério sobre a variação das remanescências de escorregamento [Teorema 4.3] e uma restrição sobre as velocidades dos centros das rodas em relação a essas variações [Teorema 4.2].

Até a data, o trabalho aqui apresentado rendeu várias publicações relacionadas com controle e/ou compensação de escorregamento em BMRs para problemas de controle de seguimento de trajetória e controle de velocidade no espaço dos atuadores que são mencionados a seguir:

Fernández, C. A. P. & J. J. F. Cerqueira (2009) Control de velocidad con compensación de deslizamiento en las ruedas de una base holonómica usando un neurocontrolador basado en el modelo Narma-L2. Em: *IX Congresso Brasileiro de Redes Neurais*. Ouro Preto - Brasil.

Fernández, C. A. P. & J. J. F. Cerqueira (2009) Identificação de uma base holonômica para robôs moveis com escorregamento nas rodas usando um modelo narmax polinomial. Em: *IX Simpósio Brasileiro de Automática*. Brasília D.F - Brasil.

Fernández, C. A. P., J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2012) Dinâmica não-linear do escorregamento de um robô móvel omnidirecional com restrição de rolamento. Em: *XIX Congresso Brasileiro de Automática*. Campina Grande - Brasil.

Fernández, C. A. P., J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2013) Suitable control laws to path tracking in omnidirectional wheeled mobile robots supported by the measuring of the rolling performance. Em: *XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Fortaleza - Brasil.

Fernández, C. A. P., J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2014) Control of nonholonomic mobile bases supported by measuring of the slipping and skidding variations. Em: *Proceedings of the 2014 Joint Conference on Robotics: SBR-LARS Robotics Symposium and Robocontrol*. IEEE Computer Society. São Carlos - Brasil.

Fernández, C. A. P., J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2014) Trajectory tracking control of an omnidirectional wheeled mobile robot with slip and deformation: a singular perturbation approach. Em: *XX Congresso Brasileiro de Automática*. Belo Horizonte - Brasil.

- Fernández, C. A. P, J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2014)** Trajectory tracking control of nonholonomic wheeled mobile robots with slipping on curvilinear coordinates: a singular perturbation approach. Em: *XX Congresso Brasileiro de Automática*. Belo Horizonte - Brasil.
- Fernández, C. A. P, J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2015)** Control of wheeled mobile robots singularly perturbed by using the slipping and skidding variations: curvilinear coordinates approach (Part I). Em: *11th IFAC Symposium on Robot Control - SYROCO 2015*. Salvador - Brasil.
- Fernández, C. A. P, J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2015)** Control of wheeled mobile robots singularly perturbed by using the slipping and skidding variations: curvilinear coordinates approach (Part II). Em: *11th IFAC Symposium on Robot Control - SYROCO 2015*. Salvador - Brasil.
- Fernández, C. A. P, J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2015)** Regulable convergence radius for flexible auxiliary control law in wheeled mobile robots singularly perturbed: curvilinear approach. Em: *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Natal - Brasil.
- Fernández, C. A. P, J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2015)** *Journal of Intelligence and Robotics Systems*. Flexible auxiliary control for wheeled mobile robots by using slipping and skidding variations. [Submetido em 2016].

O trabalho **Control of nonholonomic mobile bases supported by measuring of the slipping and skidding variations** recebeu prêmio na categoria BEST PAPERS [melhores artigos] da **IEEE Conference on Robotics: SBR-LARS Robotics Symposium and Robocontrol**, o que por sua vez rendeu a publicação de um capítulo para livro, citado a seguir:

- Fernández, C. A. P, J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2015)** *Communications in Computer and Information Science*. Cap. Trajectory control of wheeled mobile robots not satisfying ideal velocity constraints by using slipping and skidding variations: a singular perturbation approach. Springer, NY, USA. ISBN 978-3-662-48134-9. pp. 74 – 95. [Aceito em 2014, publicado em 2015].

5.2 Sugestões para pesquisas futuras

Sendo consistentes com os resultados apresentados, esta tese encorajou pesquisas mais aprofundadas abrindo as portas para os seguintes trabalhos futuros:

- ▷ Aperfeiçoamento do método para calcular os parâmetros $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}}$ e $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \lambda^*$ considerando-se o grau de robustez N_r [número de ações corretivas] da lei de controle flexível (3.78).
- ▷ Aperfeiçoamento do método para calcular o parâmetro de perturbação ε , com relação ao melhor custo computacional da lei de controle aumentada (3.78).
- ▷ O Teorema 4.3 pode ser usado como critério para definir melhores desempenhos no seguimento de trajetórias em técnicas de controle alternativas (MPC com/sem restrições, neuro-controladores, LQR, etc) de acordo com as variações das remanescências de escorregamento. O comportamento de g_ε forneceria uma melhor interpretação sobre os locais da trajetória onde existiria uma maior remanescência de deslizamento e derrapagem, informação que poderia ser usada para um reajuste [on-line ou off-line] dos parâmetros da técnica de controle implementada.
- ▷ A mesma proposta de controle pode ser aplicada a robôs de base fixa, como robôs manipuladores de cadeia cinemática aberta e fechada, visto que a técnica de controle proposta nesta tese, que objetiva como mecanismo principal de locomoção as BMRs, concentra sua fundamentação teórica nas clássicas formulações euler-lagrangeanas ou hamiltoneanas, que por sua vez são também conhecidas em sua versão flexível com inclusão de atrito e deformação de giro nas juntas.

Bibliografia

- Ackermann, J. & W. Sienel (1993). Robust yaw damping of cars with front and rear wheel steering. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **1**(1), 15–20.
- Active Media Robotics (2011). <http://www.mobilerobots.com>. Acessado em julho de 2011.
- Aithal, H. & S. Janardhanan (2013). Trajectory tracking of two wheeled mobile robot using higher order sliding mode control. Em: *International Conference on Control Computing Communication & Materials*. pp. 1–4.
- Altpeter, F. (1999). Friction Modeling, Identification and Compensation. Tese de Doutorado. École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- Alvarez, L., J. Yi, R. Horowitz & L. Olmos (2005). Dynamic friction model-based tire-road friction estimation and emergency braking control. *Transactions of the ASME* **127**, 22–32.
- Angeles, J. (2003). *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*. Second ed.. Springer-Verlag New York, Inc.
- Armstrong-Hélouvry, B., P. Dupont & C. Canudas de Wit (1994). A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica* **30**(7), 1083–1138.
- Arnol'd, V. I. (1994). *Dynamical Systems VII - Integrable Systems, Nonholonomic Dynamical Systems*. Vol. 16 de *Encyclopedia of Mathematical Sciences*. First ed.. Springer Verlag. New York, N. Y, USA. Traduzido da Edição em Russo.
- Bahari, N., M. Becker & H. Firouzi (2008). Feature based localization in an indoor environment for a mobile robot based on odometry, laser, and panoramic vision data. Em: *ABCM Symposium Series in Mechatronics*. Vol. 3. Rio de Janeiro, Brazil. pp. 266–275.
- Bak, M., N. K. Poulsen & O. Ravn (2001). Path following mobile robot in the presence of velocity constraints. Technical report. Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, DTU. Richard Petersens Plads, Building 321, DK-2800 Kgs. Lyngby.
- Bakker, E., H. Pacejka & L. Lidner (1989). A new tire model with and application in vehicle dynamics studies. *Society of Automotive Engineers* (890087), 101–113.
- Bakker, E., L. Nyborg & H. Pacejka (1987). Tire modeling for use in vehicle dynamics studies. *Society of Automotive Engineers* **2**(870421), 190–204.
- Balakrishna, R. & A. Ghosal (1995). Modeling of slip for wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **11**(1), 126–132.
- Barreto, J. C. L., A. G. S. Conceição, C. E. T. Dorea, L. Martinez & E. R. de Pieri (2013). Design and Implementation of Model-Predictive Control With Friction Compensation on an Omnidirectional Mobile Robot. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* **PP**(99), 1–10.

- Baskys, A. & V. Zlosnikas (2008). PID controller with the switched parameters. Em: *11th International Biennial Baltic Electronics Conference*. IEEE. pp. 239–242.
- Batlle, J.A. & A. Barjau (2009). Holonomy in mobile robots. *Robotics and Autonomous Systems* **57**(4), 433–440.
- Bazzi, S., E. Shammas & D. Asmar (2014). A novel method for modeling skidding for systems with nonholonomic constraints. *Nonlinear Dynamics* **76**(2), 1517–1528.
- Bétourné, A. & G. Campion (1996). Dynamic modelling and control design of a class of omnidirectional mobile robots. Em: *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Vol. 3. pp. 2810–2815.
- Bloch, A. M., J. Baillieul, P. Crouch & J. Marsden (2000). *Nonholonomic Mechanics and Control*. Springer. New York, NY, USA.
- Bloch, A.M., M. Reyhanoglu & N.H. McClamroch (1992). Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **37**(11), 1746–1757.
- Braunl, T. (2003). *Embedded Robotics: Mobile Robot Design and Applications with Embedded Systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Brockett, Roger W. (1983). Asymptotic Stability and Feedback Stabilization. Em: *Differential Geometric Control Theory* (R. S. Millman R. W. Brockett & H. J. Sussmann, Eds.). pp. 181–191. Birkhauser. Boston.
- Brockett, R.W. (1999). Explicitly solvable control problems with nonholonomic constraints. Em: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 1. pp. 13–16.
- Buckholtz, K. (2002). Reference input wheel slip tracking using sliding mode control. Em: *SAE 2002 World Congress & Exhibition*. number 2002-01-0301.
- Burckhardt, M. & J. Reimpell (1993). *Fahrwerktechnik, Radschlupf-Regelsysteme*. Vogel-Verlag.
- Campion, G., B. D’Andrea-Novet & G. Bastin (1991a). Controllability and state feedback stabilizability of nonholonomic mechanical systems. Em: *Advanced Robot Control* (Carlos Canudas de Wit, Ed.). Vol. 162 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. pp. 106–124. Springer Berlin Heidelberg.
- Campion, G., B. D’Andrea-Novet & G. Bastin (1991b). Modelling and State Feedback Control of Nonholonomic Mechanical Systems. Em: *Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control*. Brighton, England. pp. 1184–1188.
- Campion, G., G. Bastin & B. D’Andréa-Novet (1996). Structural Properties and Classification of Kinematic and Dynamic Models of Wheeled Mobile Robots. *IEEE Transaction on Robotics and Automation* **12**(1), 47–62.
- Canudas de Wit, C., H. Olsson & K. J. Aströmand P. Lischinsky (1995). A new model for control of system with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**(3), 419–425.
- Canudas de Wit, C., P. Tsiotras, E. Velenis, M. Basset & G. Gissinger (2003). Dynamic friction models for road/tire longitudinal interaction. *Vehicle System Dynamics* **39**(3), 189–226.
- Cao, Yong-Yan, Zongli Lin & D.G. Ward (2001). Anti-windup design of output tracking systems subject to actuator saturation. Em: *Proceedings IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 5. pp. 4651–4656.
- Cerqueira, J.J.F (2001). Identificação de Sistemas Dinâmicos Usando Redes Neurais Artificiais: Uma Aplicação a Manipuladores Robóticos. Tese de Doutorado. Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Estadual de Campinas.

- Chang, Y.-C. & B.-S. Chen (2000). Robust tracking designs for both holonomic and nonholonomic constrained mechanical systems: adaptive fuzzy approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **8**(1), 46–66.
- Chu, K. & M. Sunwoo (2005). Wheel slip tracking using moving sliding surface. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering* **219**(1), 31–41.
- Chwa, D. (2004). Sliding-mode tracking control of nonholonomic wheeled mobile robots in polar coordinates. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **12**(4), 637–644.
- Close, C. M. & D. K. Frederick (1995). *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*. John Wiley & Sons, Inc.
- Corradini, M.L., T. Leo & G. Orlando (1999). Robust stabilization of a mobile robot violating the nonholonomic constraint via quasi-sliding modes. Em: *American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999*. Vol. 6. IEEE. pp. 3935–3939 vol.6.
- Costa, A. & A. L. Costa (2006). Modelagem e Simulação do Robô Omnidirecional AxeBot. Em: *XVI Congresso Brasileiro de Automática*. Salvador, Brasil. pp. 2844–2849.
- Cruz, A. P. B (2007). Modelagem dinâmica da estrutura da base holonômica para robôs móveis: Inclusão das não-linearidades de entrada. Tese de Mestrado. Faculdade de Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Bahia.
- Cruz, A. P. B, Jes Jesus Fiais de Cerqueira & A. L. P. Costa (2008). Modelagem dinâmica de uma base móvel omnidirecional incluindo as não-linearidades de entrada. Em: *Anais do XVII Congresso Brasileiro de Automática 2008 - CBA 2008*. Vol. 1. XVII Congresso Brasileiro de Automática, 2008. Juiz de Fora - MG. pp. 1–6.
- D'Andréa-Novel, B., G. Bastin & G. Campion (1991). Modelling and Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots. Em: *Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Sacramento, California. pp. 1130–1135.
- D'Andréa-Novel, B., G. Bastin & G. Campion (1992). Dynamic feedback linearization of nonholonomic wheeled mobile robots. Em: *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Nice, França. pp. 2527–2532.
- D'Andréa-Novel, B., G. Campion & G. Bastin (1995). Control of wheeled mobile robots not satisfying ideal velocity constraints: A singular perturbation approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **5**(4), 243–267.
- Denning Branch International (2009). <http://www.southcom.com.au/~robot/products.html>. Acessado em dezembro de 2009.
- Dixon, W.E., D.M. Dawson & E. Zergeroglu (2000). Robust control of a mobile robot system with kinematic disturbances. Em: *IEEE International Conference on Control Applications*. Anchorage, Alaska, USA. pp. 437–442.
- Dong, Wenjie (2010). Control of uncertain wheeled mobile robots with slipping. Em: *49th IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 7190–7195.
- Dong, Wenjie & Klaus-Dieter Kuhnert (2005). Robust adaptive control of nonholonomic mobile robot with parameter and nonparameter uncertainties. *IEEE Transactions on Robotics* **21**(2), 261–266.
- Dong, Wenjie & Yi Guo (2005). Dynamic tracking control of uncertain nonholonomic mobile robots. Em: *2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. pp. 2774–2779.
- Dong, Wenjie, W. Liang Xu & Wei Huo (1999). Trajectory tracking control of dynamic non-holonomic systems with unknown dynamics. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **9**(13), 905–922.

- Dong, Wenjie, Wei Huo, S.K. Tso & W.L. Xu (2000). Tracking control of uncertain dynamic nonholonomic system and its application to wheeled mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **16**(6), 870–874.
- Dubrovin, B., A. T. Fomenko & S. P. Novikov (1984). *Modern Geometry - Methods and Applications*. Vol. 1 de *Springer Series in Soviet Mathematics*. First ed.. Springer Verlag. New York, N. Y, USA.
- Dudek, G. & M. Jenkin (2000). *Computational principles of mobile robotics*. First ed.. Cambridge University Press. UK.
- Dumitriu, T., M. Culea, T. Munteanu & E. Ceangă (2006). Friction compensation for accurate positioning in dc drive tracking system. Em: *3rd International Conference on Electrical and Electronics Engineering*. pp. 1–4.
- Everett, H. (1995). *Sensors for Mobile Robots*. A. K. Petters. Wellesley, MA, USA.
- Fang, H., R. Lenain, B. Thuilot & P. Martinet (2005). Trajectory tracking control of farm vehicles in presence of sliding. Em: *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. pp. 58–63.
- Fang, Hao, Lihua Dou, Jie Chen, Roland Lenain, Benoit Thuilot & Philippe Martinet (2011). Robust anti-sliding control of autonomous vehicles in presence of lateral disturbances. *Control Engineering Practice* **19**(5), 468–478.
- Faulhaber (2011). http://www.faulhaber.com/uploadpk/en/_2224/_sr/_dff.pdf. Acessado em agosto de 2011.
- FAULHABER Group (2005). *Precision Gearheads Technical Information*. FAULHABER Group.
- Fernández, C. A. P (2009). Controle por compensação de escorregamento em bases holonômicas de robôs móveis usando um neuro-controlador. Tese de Mestrado. Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Bahia.
- Fernández, C. A. P. & J. J. F. Cerqueira (2009a). Control de velocidad con compensación de deslizamiento en las ruedas de una base holonómica usando un neurocontrolador basado en el modelo narma-l2. Em: *IX Congresso Brasileiro de Redes Neurais*. Ouro Preto - Brasil.
- Fernández, C. A. P. & J. J. F. Cerqueira (2009b). Identificação de uma base holonômica para robôs moveis com escorregamento nas rodas usando um modelo narmax polinomial. Em: *IX Simpósio Brasileiro de Automática*. Brasília D.F - Brasil.
- Fernández, C. A. P., J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2012). Dinâmica não-linear do escorregamento de um robô móvel omnidirecional com restrição de rolamento. Em: *XIX Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2012*. Campina Grande - Brasil.
- Fernández, C. A. P., J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2013). Suitable control laws to path tracking in omnidirectional wheeled mobile robots supported by the measuring of the rolling performance. Em: *XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente - SBAI 2013*. Fortaleza - Brasil.
- Fernández, C. A. P, J. J. F. Cerqueira & A. M. N Lima (2014a). Control of nonholonomic mobile bases supported by measuring of the slipping and skidding variations. Em: *IEEE Proceedings of the 2014 Joint Conference on Robotics: SBR-LARS Robotics Symposium and Robocontrol*. IEEE Computer Society. São Carlos, Brasil.
- Fernández, C. A. P, J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2014b). Trajectory tracking control of an omnidirectional wheeled mobile robot with slip and deformation: a singular perturbation approach. Em: *XX Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2014*.
- Fernández, C. A. P, J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2014c). Trajectory tracking control of nonholonomic wheeled mobile robots with slipping on curvilinear coordinates: a singular perturbation approach. Em: *XX Congresso Brasileiro de Automática - CBA 2014*.

- Fernández, C. A. P, J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2015a). Regulable convergence radius for flexible auxiliary control law in wheeled mobile robots singularly perturbed: curvilinear approach. Em: *XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*. Natal - Brasil.
- Fernández, C. A. P, J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2015b). *Robotics*. Cap. Trajectory control of wheeled mobile robots not satisfying ideal velocity constraints by using slipping and skidding variations: a singular perturbation approach, pp. 74–95. Springer-Verlag.
- Fernández, C. A. P, J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2015c). Tracking trajectory control of wheeled mobile robots singularly perturbed by using slipping and skidding variations: curvilinear coordinates approach (part i). Em: *Proceedings of 11th IFAC Symposium on Robot Control*.
- Fernández, C. A. P., J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2015d). Tracking trajectory control of wheeled mobile robots singularly perturbed by using slipping and skidding variations: curvilinear coordinates approach (part ii). Em: *Proceedings of 11th IFAC Symposium on Robot Control*.
- Fierro, R. & F.L. Lewis (1995). Control of a nonholonomic mobile robot: backstepping kinematics into dynamics. Em: *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 4. pp. 3805–3810 vol.4.
- Fierro, R. & F.L. Lewis (1998). Control of a nonholonomic mobile robot using neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks* **9**(4), 589–600.
- Figueiredo, L. C. & F. G. Jota (2004). Introdução ao controle de sistemas não-holonômicos. *Sba: Controle & Automação - Sociedade Brasileira de Automatica* **15**, 243–268.
- Finichel, N. (1979). Geometric singular perturbations theory for ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations* **31**, 53–98.
- Freidovich, L., A. Robertsson, A. Shiriaev & R. Johansson (2010). Lugre-model-based friction compensation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **18**(1), 194–200.
- Fukao, T., H. Nakagawa & N. Adachi (2000). Adaptive tracking control of a nonholonomic mobile robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **16**(5), 609–615.
- Ghorbel, Fathi & M.W. Spong (1992a). Adaptive integral manifold control of flexible joint robot manipulators. Em: *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*. pp. 707–714.
- Ghorbel, Fathi & M.W. Spong (1992b). Adaptive integral manifold control of flexible joint robots with configuration invariant inertia. Em: *American Control Conference*. pp. 3314–3318.
- Giralt, G., R. Chatila & M. Vaisset (1984). An integrated navigation and motion control system for autonomous multisensory mobile robots. Em: *First international Symposium on Robotics Research*. pp. 191–214.
- Goel, P., S.I. Roumeliotis & G.Sukhatme (1999). Robust localization using relative and absolute position estimates. Em: *Proceedings of International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Vol. 2. pp. 1134–1140.
- Grossman, Stanley (1987). *Algebra Lineal*. Second ed.. Grupo Editorial Iberoamérica. Belmont, California, USA.
- Gu, Y.-L. & N.K. Loh (1985). Dynamic model for industrial robots based on a compact lagrangian formulation. Em: *Proceedings IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 24. pp. 1497–1501.
- Gu, Y.-L. & N.K. Loh (1988). Dynamic modeling and control by utilizing an imaginary robot model. *IEEE Journal of Robotics and Automation* **4**(5), 532–540.

- Hamerlain, F., K. Achour, T. Floquet & W. Perruquetti (2005). Higher order sliding mode control of wheeled mobile robots in the presence of sliding effects. Em: *44th IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 1959–1963.
- Hindi, H. & S. Boyd (1998). Analysis of linear systems with saturation using convex optimization. Em: *Proceedings IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 1. pp. 903–908.
- Hirschorn, R.M. & G. Miller (1999). Control of nonlinear systems with friction. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **7**(5), 588–595.
- Holland, J. M. (1985). Rethinking robot mobility. *Robotics age* **7**(1), 26–30.
- Hong, Daegun, Paljoo Yoon, Hyoung-Jin Kang, Inyong Hwang & Kunsoo Huh (2006). Wheel slip control systems utilizing the estimated tire force. Em: *American Control Conference*. pp. 5873–5878.
- Iagnemma, K. & S. Dubowsky (2004). *Mobile Robots in Rough Terrain: Estimation, Motion Planning, and Control with Application to Planetary Rovers*. Vol. 12 de *Springer Tracts in Advanced Robotics*. Springer.
- Indiveri, G. (2009). Swedish wheeled omnidirectional mobile robots: Kinematics analysis and control. *IEEE Transactions on Robotics* **25**(1), 164–171.
- IRobot (2011). <http://www.irobot.com>. Acessado em julho de 2011.
- Ishikawa, M., Pascal Morin & Claude Samson (2009). Tracking control of the trident snake robot with the Transverse Function approach. Em: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, held jointly with the 2009 28th Chinese Control Conference.. IEEE*. pp. 4137–4143.
- Ivankjo, E., I. Petrović & M. Vašak (2004). Sonar-based pose tracking of indoor mobile robots. *Journal for Control, Measurement, Electronics, Computing and Communications* **45**(3-4), 145–154.
- Jang, J. O. (2001). A deadzone compensator of a dc motor system using fuzzy logic control. *IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics-Part C: Applications and Reviews* **31**(1), 42–48.
- Jang, J. O., H. T. Chung & G. J. Jeon (2005). Saturation and deadzone compensation of systems using neural network and fuzzy logic. Em: *2005 American Control Conference*. Portland-Or, USA. pp. 1715–1720.
- Jiang, Z.-P. (2000a). Robust exponential regulation of nonholonomic systems with uncertainties. *Automatica* **36**(2), 189–209.
- Jiang, Z.-P. & J.-B. Pomet (1994). Combining backstepping and time-varying techniques for a new set of adaptive controllers. Em: *Decision and Control, 1994., Proceedings of the 33rd IEEE Conference on*. Vol. 3. IEEE. pp. 2207–2212 vol.3.
- Jiang, Zhong-Ping (2000b). Lyapunov design of global state and output feedback trackers for non-holonomic control systems. *International Journal of Control* **73**(9), 744–761.
- Jiang, Zhong-Ping & H. Nijmeijer (1999). A recursive technique for tracking control of nonholonomic systems in chained form. *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(2), 265–279.
- Jiang, Zhong-Ping & Laurent Praly (1998). Design of Robust Adaptive Controllers for Nonlinear Systems with Dynamic Uncertainties. *Automatica* **34**(7), 825–840.
- Jung, S. & T. C. Hsia (2005). Explicit lateral force control of an autonomous mobile robot with slip. Em: *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Edmonton, Alberta, Canadá. pp. 388–393.

- Kanayama, Y., Y. Kimura, F. Miyazaki & T. Noguchi (1990). A stable tracking control method for an autonomous mobile robot. Em: *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE. pp. 384–389 vol.1.
- Keighobadi, J. & Y. Mohamadi (2011). Fuzzy sliding mode control of non-holonomic wheeled mobile robot. Em: *IEEE 9th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics*. pp. 273–278.
- Kelly, Alonzo & Neal Seegmiller (2013). *A Vector Algebra Formulation of Mobile Robot Velocity Kinematics*. Springer.
- Kevorkian, J. & J. D. Cole (1996). *Multiple scale and singular perturbation methods*. New York : Springer.
- Khalil, Hassan (2002). *Nonlinear Systems*. Third ed.. Prentice Hall. New Jersey, N. Y, USA.
- Khaneja, N. & R. Brockett (1999). Dynamic feedback stabilization of nonholonomic systems. Em: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 2. pp. 1640–1645.
- Khorasani, K. & P.V. Kokotovic (1985). Feedback linearization of a flexible manipulator near its rigid body manifold. *Systems and Control Letters* **6**(3), 187–192.
- Kinceler, R. & P.H. Meckl (1997). Corrective input shaping for a flexible-joint manipulator. Em: *Proceedings of the American Control Conference*. Vol. 3. pp. 1335–1339.
- Klančar, G. & I. Škrjanc (2007). Tracking-error model-based predictive control for mobile robots in real time. *Robotics and Autonomous Systems* **55**(6), 460–469.
- Kokotovic, P. V. (1984). Control theory in the 80's: Trends in feedback design. Em: *Proceedings of the 9th World Congress of IFAC*.
- Kokotovic, P. V., H. K. Khalil & J. O'Reilly (1999). *Singular Perturbations Methods in Control: Analysis and Design*. Third ed.. Academic Press. New York, N. Y, USA.
- Kokotovic, P. V. & H. K. Khalil (1986). *Singular Perturbations in Systems and Control*. IEEE Press. New York, N. Y, USA.
- Kolmanovsky, I. & N.H. McClamroch (1995). Developments in nonholonomic control problems. *IEEE Control Systems* **15**(6), 20–36.
- Laumond, J. P. (1993). Controllability of a multibody mobile robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **9**(6), 755–763.
- Laura, T. L., A. S. Sanca, D. M. C. Lopes, A. P. Bomfim, C. Paim, J. J. F. Cerqueira, J. A. Pomílio & M. K. Madrid (2006a). Modelo dinâmico da estrutura de base de robôs móveis com inclusão de não linearidades: Parte ii - a aplicação do modelo no sistema *Khepera*®. Em: *XVI Congresso Brasileiro de Automática*. Salvador-BA, Brasil. pp. 1–6.
- Laura, T. L., C. Paim, J. J. F. Cerqueira, J. A. Pomílio & M. K. Madrid (2006b). Modelo dinâmico da estrutura de base de robôs móveis com inclusão de não linearidades: Parte i - o desenvolvimento do modelo. Em: *XVI Congresso Brasileiro de Automática*. Salvador-BA, Brasil. pp. 1–6.
- Lemos, Nivaldo A. (2007). *Mecânica Analítica*. Second ed.. Editora Livraria da Física. São Paulo, S.P, Brasil.
- Leroquais, W. & B. D'Andrea-Novet (1996). Modeling and control of wheeled mobile robots not satisfying ideal velocity constraints: the unicycle case. Em: *Conf. Rec. IEEE/CDC*. Vol. 2. pp. 1437–1442.
- Lewis, F. L., D. M. Dawson & C. T. Abdallah (2006). *Robot Manipulator Control, Theory and Practice*. Marcel Dekker, Inc.

- Lewis, F. L., K. Liu & R. Selmic (1997). Adaptative fuzzy logic compensation of actuator deadzones. *Journal of Robotic Systems* **16**(6), 501–511.
- Lewis, F. L., S. Jagannathan & A. Yesildirek (1999a). *Neural Network Control of Robot Manipulators and Nonlinear Systems*. Taylor and Francis, Inc.
- Lewis, F.L., W. K. Tim, L. Z. Wang & Z. X. Li (1999b). Deadzone compensation in motion control systems using adaptative fuzzy logic control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **7**(6), 731–742.
- Li, Yuan Ping, V.M.H. Ang & Wei Lin (2008). Slip modelling, detection and control for redundantly actuated wheeled mobile robots. Em: *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. pp. 967–972.
- Lin, S., L. H. Chang & P. C. Yang (2007). Adaptive critic anti-slip control of wheeled autonomous robot. *Control Theory Applications, IET* **1**(1), 51–57.
- Liu, Y. & J.J. Zhu (2007). Singular Perturbation Analysis for Trajectory Linearization Control. Em: *American Control Conference*. pp. 3047–3052.
- Liu, Yong, J. Jim Zhu, Robert L. Williams II & Jianhua Wu (2008). Omni-directional mobile robot controller based on trajectory linearization. *Robotics and Autonomous Systems* **56**(5), 461–479.
- Low, Chang Boon & Danwei Wang (2008). Gps-based path following control for a car-like wheeled mobile robot with skidding and slipping. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **16**(2), 340–347.
- Low, Chang Boon & Danwei Wang (2010). Maneuverability and path following control of wheeled mobile robot in the presence of wheel skidding and slipping. *Journal of Field Robotics* **27**(2), 127–144.
- Maciejowski, J.M. (2002). *Predictive Control with Constraints*. Prentice Hall. England.
- Matsumoto, N. & M. Tomizuka (1990). Vehicle lateral velocity and yaw rate control with two independent control inputs. Em: *American Control Conference*. pp. 1868–1875.
- Mazur, A. (2010). Trajectory tracking control in workspace-defined tasks for nonholonomic mobile manipulators. *Robotica* **28**, 57–68.
- M'Closkey, R.T. & R.M. Murray (1997). Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback. *Automatic Control, IEEE Transactions on* **42**(5), 614–628.
- Mehrabi, M. G., R. M H Cheng & A. Hemanmi (1991). Control of a wheeled mobile robot with double steering. Em: *Proc. of IEEE/RSJ International Workshop on Intelligent Robots and Systems*. Vol. 2. pp. 806–810.
- Menegaldo, L.L., G. Ferreira, M.F. Santos & R.S. Guerato (2009). Development and navigation of a mobile robot for floating production storage and offloading ship hull inspection. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **56**(9), 3717–3722.
- Michalek, M., P. Dutkiewicz, M. Kielczewski & D. Pazderski (2009). Trajectory tracking for a mobile robot with skid-slip compensation in the vector-field-orientation control system. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* **9**(4), 547–559.
- Mills, J.K. (1989). Control of robotic manipulators with flexible joints during constrained motion task execution. Em: *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 1676–1681.
- Moballeggh, H.R., P. Amini, Y. Pakzad, M. Hashemi & M. Nanniani (2004). An improvement of self-localization for omnidirectional mobile robots using a new odometry sensor and omnidirectional vision. Em: *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*. Vol. 4. pp. 2337–2340.

- Moravec, H. P. (1983). The stanford cart and the cmu rover. Em: *Proceedings of the IEEE*. Vol. 71. pp. 872–884.
- Morin, Pascal & Claude Samson (2003). Practical stabilization of driftless systems on Lie groups: the transverse function approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.* **48**(9), 1496–1508.
- Morin, Pascal & Claude Samson (2008). Transverse Function control of a class of non-invariant driftless systems. Application to vehicles with trailers. Em: *47th IEEE Conference on Decision and Control, 2008*. IEEE. pp. 4312–4319.
- Morin, Pascal & Claude Samson (2009). Control of Nonholonomic Mobile Robots Based on the Transverse Function Approach. *IEEE Transactions on Robotics* **25**(5), 1058–1073.
- Motte, I. & G. Campion (2000). A slow manifold approach for the control of mobile robots not satisfying the kinematic constraints. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **16**(6), 875–880.
- Muir, P. F. & C. P. Neuman (1987). Kinematic modeling for feedback control of an omnidirectional wheeled mobile robot. Em: *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation..* pp. 1772–1778.
- Murray, R. M., Z. Li & S. S. Sastry (1994). *A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation*. First ed.. CRC Press LLC.
- Nandy, S., S.N. Shome, R. Somani, T. Tanmay, G. Chakraborty & C.S. Kumar (2011). Detailed slip dynamics for nonholonomic mobile robotic system. Em: *Conf. Rec. IEEE/ICMA*. Beijing, China. pp. 519–524.
- Nicosia, S., B. Siciliano, A. Bicchi & P. Valigi (2001). *RAMSET: Articulated and mobile Robotics for Services and Technologies*. Vol. 270 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. First ed.. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Inc.
- Nilson, N. (1991). A mobile automation: An application of AI techniques. Em: *Autonomous Mobile Robots*. Vol. 2. pp. 509–520.
- Ojeda, L., D. Cruz, G. Reina & J. Borenstein (2006). Current-based slippage detection and odometry correction for mobile robots and planetary rovers. *IEEE Transactions on Robotics* **22**(2), 366–378.
- Olson, B. J., S. W. Shaw & G. Stépán (2003). Nonlinear dynamics of vehicle traction. *Vehicle Systems Dynamics* **40**(6), 377–399.
- Olsson, H., K.J. Åström, C. Canudas de Wit, M. Gäfvert & P. Lischinsky (1997). Friction models and friction compensation. *Vehicle Systems Dynamics*.
- Ortega, M., J. Aracil, F. Gordillo & F. Rubio (2000). Bifurcation analysis of a feedback system with dead zone and saturation. *IEEE Control Systems Magazine* **20**(4), 91–101.
- Ortigoza, R.S., M.M. Aranda, G.S. Ortigoza, V.M.H. Guzman, M.A.M. Vilchis, G.S. Gonzalez, J.C.H. Lozada & M.O. Carbajal (2012). Wheeled mobile robots: A review. *IEEE Latin America Transactions* **10**(6), 2209–2217.
- Panagopoulos, H., K.J. Astrom & T. Haggglund (2002). Design of pid controllers based on constrained optimisation. *IEE Proceedings on Control Theory and Applications* **149**(1), 32–40.
- Pazderski, Dariusz, DorotaK. Waśkowicz & Krzysztof Kozłowski (2013). Motion Control of Vehicles with Trailers Using Transverse Function Approach. *Journal of Intelligent & Robotic Systems* pp. 1–23.
- Perez, T., G. C. Goodwin & M. M. Serón (2003). Performance degradation in feedback control due to constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**(8), 1381–1385.

- Pin, F.G. & S.M. Killough (1994). A new family of omnidirectional and holonomic wheeled platforms for mobile robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **10**(4), 480–489.
- Ploeg, J., H.E. Schouten & H. Nijmeijer (2008). Control design for a mobile robot including tire behavior. Em: *IEEE Intelligent Vehicles Symposium*. Eindhoven, Holanda. pp. 240–245.
- Ray, L. R. (1997). Nonlinear tire force estimation and road friction identification: Simulation and experiments. *Automatica* **33**(10), 1819–1833.
- Rivin, E. I. (1985). Effective rigidity of robot structures: Analysis and enhancement. Em: *American Control Conference*. pp. 381–382.
- Robillard, Mark J. (1983). *HERO 1: Advanced Programming and Interfacing*. Sams Technical Publishing.
- Robonow (2011). <http://www.robomow.com>. Acessado em julho de 2011.
- ROS (2014). <http://www.ros.org>. Acessado em março de 2014.
- Sage, H. G., M. F. De Mathelin & E. Ostertag (1999). Robust control of robot manipulators: A survey. *International Journal of Control* **72**(16), 1498–1522.
- Salcedo, C.M., C. A. P. Fernández, J. J. F. Cerqueira & A. M. N. Lima (2012). Designing a real time artificial vision system for human interaction with an omnidirectional mobile platform. Em: *Robotics Symposium and Latin American Robotics Symposium (SBR-LARS)*. IEEE. Fortaleza - Brasil. pp. 21–26.
- Samson, C. & K. Ait-Abderrahim (1990). Mobile robot control. part 1: Feedback control of nonholonomic wheeled cart in cartesian space. INRIA Report 1288.
- Samson, Claude (1995). Control of chained systems application to path following and time-varying point-stabilization of mobile robots. *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**(1), 64–77.
- Sanca, Armando Sanca (2006). Controle com compensação de atrito para estruturas de base móveis de robôs manipuladores. Tese de Mestrado. Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Bahia.
- Santos, J. T. (2014). Projeto e desenvolvimento de um sistema de controle robótico aplicado a robótica móvel. Tese de Mestrado. Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Bahia.
- Sarkar, N., X. Yun & V. Kumar (1994). Control of mechanical systems with rolling constraints: Application to dynamic control of mobile robots. *The International Journal of Robotics Research* **13**(1), 55–69.
- Selmic, R. R. & F. L. Lewis (2000). Deadzone compensation in motion control systems using neural networks. *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**(4), 602–613.
- Selmic, R. R., V. V. Phoha & F. L. Lewis (2003). Intelligent compensation of actuator nonlinearities. Em: *Conference on Decision and Control*. Maui-Hawaii, USA. pp. 4327–4332.
- Shekhar, S. (1997). Wheel rolling constraints and slip in mobile robots. Em: *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Albuquerque, New Mexico. pp. 2601–2607.
- Shi, J. & W. S. Lee (2004). Set point response and disturbance rejection tradeoff for second-order plus dead time processes. Em: *5th Asian Control Conference*. Vol. 2. pp. 881–887.
- Shojaei, K. & A.M. Shahri (2012). Adaptive robust time-varying control of uncertain non-holonomic robotic systems. *Control Theory Applications* **6**(1), 90–102.

- Sidek, N. & N. Sarkar (2008). Dynamic modeling and control of nonholonomic mobile robot with lateral slip. Em: *Third International Conference on Systems*. pp. 35–40.
- Siegwart, R. & I. R. Nourbakhsh (2004). *Introduction to Autonomous Mobile Robots*. The MIT Press. London, England.
- Sira Ramirez, H. & P. Lischinsky Arenas (1990). Dynamical discontinuous feedback control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**(12), 1373–1378.
- Smith, P. P. (2001). *Active Sensor for Local Planning in Mobile Robotics*. Vol. 26 de *World Scientific Series in Robotics and Intelligent Systems*. First ed.. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Sobolev, V.A. (1987). Integral manifolds, singular perturbations and optical control. *Ukrainian Mathematical Journal* **39**(1), 95–99.
- Song, J. & K. Boo (2004). Performance evaluation of traction control systems using a vehicle dynamic model. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering* **218**(7), 685–696.
- Song, Kai-Tai & Chao-Wu Wang (2009). Self-localization and control of an omni-directional mobile robot based on an omni-directional camera. Em: *7th Asian Control Conference*. pp. 899–904.
- Sony AIBO (2012). <http://www.sonyaibo.net/home.htm>. Acessado em setembro de 2012.
- Sony QRIO (2013). <http://www.sonyaibo.net/aboutqrio.htm>. Acessado em janeiro de 2013.
- Spong, M. W. & M. Vidyasagar (1989). *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons.
- Spong, M.W. (1989). On the force control problem for flexible joint manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control* **34**(1), 107–111.
- Spong, M.W., K. Khorasani & P.V. Kokotovic (1987). An integral manifold approach to the feedback control of flexible joint robots. *IEEE Journal of Robotics and Automation* **3**(4), 291–300.
- Stonier, D., Se-Hyoung Cho, Sung-Lok Choi, N.S. Kuppaswamy & Jong-Hwan Kim (2007). Nonlinear Slip Dynamics for an Omniwheel Mobile Robot Platform. Em: *Conf. Rec. IEEE/ICRA*. Roma, Italy. pp. 2367–2372.
- Su, Chun-Yi & Yury Stepanenko (1994). Robust motion/force control of mechanical systems with classical nonholonomic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(3), 609–614.
- Sweet, L. M. & M.C. Good (1984). Re-definition of the robot motion control problem: Effects of plant dynamics, drive system constraints, and user requirements. Em: *The 23rd IEEE Conference on Decision and Control*. Vol. 23. pp. 724–732.
- Tadakuma, K., R. Tadakuma & J. Berengeres (2007). Development of holonomic omnidirectional vehicle with omni-ball: Spherical wheels. Em: *Proceedings IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. San Diego, CA, USA. pp. 33–39.
- Taghirad, H.D. & M. A. Khosravi (2002). Stability analysis and robust composite controller synthesis for flexible joint robots. Em: *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Vol. 3. pp. 2073–2078.
- Tai, Meihua & M. Tomizuka (2000). Robust longitudinal velocity tracking of vehicles using traction and brake control. Em: *6th International Workshop on Advanced Motion Control*. pp. 305–310.
- Tan, Kok-Kiong, T.H. Lee, S.N. Huang & Jiang Xi (2001). Friction modeling and adaptive compensation using a relay feedback approach. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **48**(1), 169–176.

- Tao, G. & P. V. Kokotovic (1994). Adaptive control of plants with unknown dead-zones. *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(1), 59–68.
- Tao, G. & P. V. Kokotovic (1995). Adaptive control of systems with unknown output backlash. *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**(2), 326–330.
- Tao, G. & P. V. Kokotovic (1996). *Adaptive Control of Systems with Actuator and Sensor Nonlinearities*. John Wiley & Sons, Inc.
- Tarokh, M. & G.J. McDermott (2005). Kinematics modeling and analyses of articulated rovers. *IEEE Transactions on Robotics* **21**(4), 539–553.
- Terry, J.D. & M.A. Minor (2008). Traction estimation and control for mobile robots using the wheel slip velocity. Em: *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. pp. 2003–2009.
- Thuilot, Benoît (1995). Contribution à la modélisation et à la commande de robots mobiles à roues. Tese de Doutorado. CAS - Centre Automatique et Systèmes.
- Tian, Yu & N. Sarkar (2012). Formation control of mobile robots subject to wheel slip. Em: *Conf. Rec. IEEE/ICRA*. pp. 4553–4558.
- Tian, Yu & Nilanjan Sarkar (2013). Control of a Mobile Robot Subject to Wheel Slip. *Journal of Intelligent and Robotic Systems* p. 1.
- Tian, Yu, N. Sidek & N. Sarkar (2009). Modeling and control of a nonholonomic wheeled mobile robot with wheel slip dynamics. Em: *IEEE Symposium on Computational Intelligence in Control and Automation*. pp. 7–14.
- Trojnacki, Maciej (2013). Modeling and motion simulation of a three-wheeled mobile robot with front wheel driven and steered taking into account wheels slip. *Archive of Applied Mechanics* **83**(1), 109–124.
- Tsai, Cheng-Pei, Wei-Yen Wang, I-Hsum Li & Shun-Feng Su (2007). Dynamic slip ratio estimation and control of antilock braking systems considering wheel angular velocity. Em: *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*. pp. 3282–3287.
- Unsal, C. & P. Kachroo (1997). Analytic nonlinear observer-based design for antilock braking systems. Em: *Proceedings of the SPIE - The International Society for Optical Engineering Mobile Robots XI and Automated Vehicle Control Systems*. Vol. 2903. pp. 22–33.
- Unsal, C. & P. Kachroo (1999). Sliding mode measurement feedback control for antilock braking systems. *IEEE Transaction on Control Systems Technology* **7**(2), 271–281.
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear Systems Analysis*. Second ed.. Prentice-Hall, Inc.. Englewood Cliffs, New Jersey, USA.
- Volpe, Richard (1999). Navigation results from desert field tests of the rocky 7 mars rover prototype. **18**(7), 669–683.
- Walsh, G., D. Tilbury, S. Sastry, R. Murray & J-P Laumond (1994). Stabilization of trajectories for systems with nonholonomic constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(1), 216–222.
- Wang, D. & C. B. Low (2008). Modeling and analysis of skidding and slipping in wheeled mobile robots: Control design perspective. *IEEE Transactions on Robotics* **24**(3), 676–687.
- Wang, D., J. Zhao & W. Wang (2009). Particle filter based robust mobile robot localization. Em: *Conf. Rec. IEEE/ICMA*. Changchun, China. pp. 817–821.
- Wang, Qing, Yanze Hou & Chaoyang Dong (2012). Model reference robust adaptive control for a class of uncertain switched linear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **22**(9), 1019–1035.

- Wei, L. X., H. R. Wang & P. G. Wang (2004). Adaptive backstepping fuzzy control for x-y table with friction. Em: *Proceedings of the Third International Conference on Machine Learning and Cybernetics*. Vol. 2. pp. 683–686.
- Wei, S., M. Zefran, K. Uthaichana & R.A. DeCarlo (2007). Hybrid model predictive control for stabilization of wheeled mobile robots subject to wheel slippage. Em: *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. pp. 2373–2378.
- Wenjie Dong, Xu (2001). Adaptive tracking control of uncertain nonholonomic dynamic system. *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(3), 450–454.
- Williams, R. L., B. E. Carter, P. Gallina & G. Rosati (2002). Dynamic model with slip for wheeled omnidirectional robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **18**(3), 285–293.
- Yokoyama, Makoto (2013). *Modeling and Control of Wheeled Mobile Robots: From Kinematics to Dynamics with Slipping and Skidding*. Springer.
- Yoo, Sung Jin (2012). Approximation-based adaptive control for a class of mobile robots with unknown skidding and slipping. *International Journal of Control, Automation and Systems* **10**(4), 703.
- Yun, X. & N. Sarkar (1998). Unified formulation of robotic systems with holonomic and nonholonomic constraints. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **14**(4), 640–650.
- Yun, X. & Y. Yamamoto (1993). Internal dynamics of a wheeled mobile robot. Em: *Proceedings of the 1993 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Vol. 2. pp. 1288–1294.
- Zhao, Dongbin, Xuyue Deng & Jianqiang Yi (2009). Motion and internal force control for omnidirectional wheeled mobile robots. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics* **14**(3), 382–387.
- Zhou, J. & L. Huang (2011). Experimental study on sensor fusion to improve real time indoor localization of a mobile robot. Em: *IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics*. pp. 258–263.

Anexos do Capítulo 2

BMRs apresentam restrições cinemáticas decorrentes do tipo e geometria da roda. O número de graus de liberdade que o sistema possui para se movimentar dentro do conjunto de coordenadas generalizadas do seu espaço de trabalho está fortemente ligado com estas restrições, de tal forma que a locomoção do sistema é limitada.

A.1 Restrições pfaffianas: formulação de (2.14) usando condição de rolamento puro e não-derrapagem

Usando a reformulação para o vetor de coordenadas generalizadas mostrada na Proposição 2.2, as equações (2.6), (2.8), (2.10) e (2.12), associadas com restrições de rolamento puro, podem ser reescritas para N rodas na seguinte forma compacta:

$$R^T(q)\dot{q} \triangleq \begin{bmatrix} -\sin(\alpha+\beta+\theta) & \cos(\alpha+\beta+\theta) & l \cos \beta & 0_{N_f \times N_c} & 0_{N_f \times N_o} & r E_f \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ -\sin(\alpha+\beta+\theta) & \cos(\alpha+\beta+\theta) & l \cos \beta & & & \\ \hline -\sin(\alpha+\beta_{1_c}(t)+\theta) & \cos(\alpha+\beta_{1_c}(t)+\theta) & l \cos \beta_{1_c}(t) & 0_{N_c \times N_c} & 0_{N_c \times N_o} & r E_c \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ -\sin(\alpha+\beta_{N_c}(t)+\theta) & \cos(\alpha+\beta_{N_c}(t)+\theta) & l \cos \beta_{N_c}(t) & & & \\ \hline -\sin(\alpha+\beta_{1_o}(t)+\theta) & \cos(\alpha+\beta_{1_o}(t)+\theta) & l \cos \beta_{1_o}(t) & 0_{N_o \times N_c} & 0_{N_o \times N_o} & r E_o \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ -\sin(\alpha+\beta_{N_o}(t)+\theta) & \cos(\alpha+\beta_{N_o}(t)+\theta) & l \cos \beta_{N_o}(t) & & & \\ \hline -\sin(\alpha+\beta+\gamma+\theta) & \cos(\alpha+\beta+\gamma+\theta) & l \cos(\beta+\gamma) & 0_{N_s \times N_c} & 0_{N_s \times N_o} & r \cos \gamma E_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ -\sin(\alpha+\beta+\gamma+\theta) & \cos(\alpha+\beta+\gamma+\theta) & l \cos(\beta+\gamma) & & & \end{bmatrix} \dot{q} = 0 \quad (\text{A.1})$$

sendo

$$E_f = \begin{bmatrix} I_{N_f \times N_f} & 0_{N_f \times N_c} & 0_{N_f \times N_o} & 0_{N_f \times N_s} \end{bmatrix}, \quad E_c = \begin{bmatrix} 0_{N_c \times N_f} & I_{N_c \times N_c} & 0_{N_c \times N_o} & 0_{N_c \times N_s} \end{bmatrix}, \\ E_o = \begin{bmatrix} 0_{N_o \times N_f} & 0_{N_o \times N_c} & I_{N_o \times N_o} & 0_{N_o \times N_s} \end{bmatrix}, \quad E_s = \begin{bmatrix} 0_{N_s \times N_f} & 0_{N_s \times N_c} & 0_{N_s \times N_o} & I_{N_s \times N_s} \end{bmatrix},$$

onde $I_{N_f \times N_f}$, $I_{N_c \times N_c}$, $I_{N_o \times N_o}$ e $I_{N_s \times N_s}$ são matrizes identidade.

Usando novamente a Proposição 2.2, as equações (2.7), (2.9) e (2.11), associadas com restrições de não-derrapagem, podem ser reescritas para N rodas na seguinte forma compacta:

$$D^T(q)\dot{q} \triangleq \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta+\theta) & \sin(\alpha+\beta+\theta) & l \sin \beta & 0_{N_f \times N_c} & 0_{N_f \times N_o} & 0_{N_f \times N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \cos(\alpha+\beta+\theta) & \sin(\alpha+\beta+\theta) & l \sin \beta & & & \\ \hline \cos(\alpha+\beta_{1c}(t)+\theta) & \sin(\alpha+\beta_{1c}(t)+\theta) & l \sin \beta_{1c}(t) & 0_{N_c \times N_c} & 0_{N_c \times N_o} & 0_{N_c \times N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \cos(\alpha+\beta_{Nc}(t)+\theta) & \sin(\alpha+\beta_{Nc}(t)+\theta) & l \sin \beta_{Nc}(t) & & & \\ \hline \cos(\alpha+\beta_{1o}(t)+\theta) & \sin(\alpha+\beta_{1o}(t)+\theta) & d+l \sin \beta_{1o}(t) & 0_{N_o \times N_c} & dI_{N_o \times N_o} & 0_{N_o \times N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \cos(\alpha+\beta_{No}(t)+\theta) & \sin(\alpha+\beta_{No}(t)+\theta) & d+l \sin \beta_{No}(t) & & & \end{bmatrix} \dot{q} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Dessa forma, a equação (2.14) pode ser obtida pela união de (A.1) e (A.2).

A fim de confirmar que as limitações de mobilidade de uma BMR são relacionadas com o posto da matriz $A_N^T(q)$, consideram-se as restrições de não-derrapagem associadas com rodas padrão fixas e orientáveis no centro em (A.2), e reescreva-se como:

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta+\theta) & \sin(\alpha+\beta+\theta) & l \sin \beta & 0_{N_f \times N_c} & 0_{N_f \times N_o} & 0_{N_f \times N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \cos(\alpha+\beta+\theta) & \sin(\alpha+\beta+\theta) & l \sin \beta & & & \\ \hline \cos(\alpha+\beta_{1c}(t)+\theta) & \sin(\alpha+\beta_{1c}(t)+\theta) & l \sin \beta_{1c}(t) & 0_{N_c \times N_c} & 0_{N_c \times N_o} & 0_{N_c \times N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \cos(\alpha+\beta_{Nc}(t)+\theta) & \sin(\alpha+\beta_{Nc}(t)+\theta) & l \sin \beta_{Nc}(t) & & & \end{bmatrix} \dot{q} = 0.$$

Entretanto, utilizando a submatriz $A_N^T(q)$ de $D^T(q)$ para expressar as restrições de não-derrapagem em termos da velocidade da BMR no marco global $\{W\}$, a equação anterior pode ser reescrita na seguinte forma simplificada:

$$\begin{bmatrix} {}^0A_N^T(q) \\ \vdots \\ {}^1A_N^T(q) \end{bmatrix} \dot{\xi} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta+\theta) & \sin(\alpha+\beta+\theta) & l \sin \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(\alpha+\beta+\theta) & \sin(\alpha+\beta+\theta) & l \sin \beta \\ \hline \cos(\alpha+\beta_{1c}(t)+\theta) & \sin(\alpha+\beta_{1c}(t)+\theta) & l \sin \beta_{1c}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(\alpha+\beta_{Nc}(t)+\theta) & \sin(\alpha+\beta_{Nc}(t)+\theta) & l \sin \beta_{Nc}(t) \end{bmatrix} \dot{\xi} = 0. \quad (\text{A.3})$$

De (A.3) pode-se dizer que, para $\dot{\xi} \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &\in \ker \{A_N^T(q)\}, \quad \nu \{A_N^T(q)\} \leq 3, \\ \dot{\xi} &\notin \text{Im} \{A_N^T(q)\}, \quad \text{rank} \{A_N^T(q)\} \leq 3. \end{aligned}$$

Nota-se que,

$$\text{se } \text{rank} \{A_N^T(q)\} = 3 \text{ então } \dot{\xi} = 0,$$

ou seja, nenhum movimento na BMR poderia ser executado, o que explica porque as limitações de mobilidade são definidas pelo posto da matriz $A_N^T(q)$.

A.1.1 Cálculo das posições angulares $[\dot{\varphi}]$ e ângulos das rodas orientáveis fora do centro $[\beta_o]$

Nota-se que as restrições cinemáticas definidas em forma compacta nas equações (A.1) e (A.2) podem ser usadas para calcular $\dot{\beta}_o$ e $\dot{\varphi}$.

De (A.1) pode-se reescrever

$$R_\xi^T(q)\dot{\xi} + E(q)\dot{\varphi} = 0,$$

onde

$$R_{\xi}^T(q) \triangleq \begin{bmatrix} -\sin(\alpha+\beta+\theta) & \cos(\alpha+\beta+\theta) & l \cos \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sin(\alpha+\beta+\theta) & \cos(\alpha+\beta+\theta) & l \cos \beta \\ \hline -\sin(\alpha+\beta_{1_c}(t)+\theta) & \cos(\alpha+\beta_{1_c}(t)+\theta) & l \cos \beta_{1_c}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sin(\alpha+\beta_{N_c}(t)+\theta) & \cos(\alpha+\beta_{N_c}(t)+\theta) & l \cos \beta_{N_c}(t) \\ \hline -\sin(\alpha+\beta_{1_o}(t)+\theta) & \cos(\alpha+\beta_{1_o}(t)+\theta) & l \cos \beta_{1_o}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sin(\alpha+\beta_{N_o}(t)+\theta) & \cos(\alpha+\beta_{N_o}(t)+\theta) & l \cos \beta_{N_o}(t) \\ \hline -\sin(\alpha+\beta+\gamma+\theta) & \cos(\alpha+\beta+\gamma+\theta) & l \cos(\beta+\gamma) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\sin(\alpha+\beta+\gamma+\theta) & \cos(\alpha+\beta+\gamma+\theta) & l \cos(\beta+\gamma) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad E(q) \triangleq \begin{bmatrix} rE_f \\ rE_c \\ rE_o \\ r \cos \gamma E_s \end{bmatrix}.$$

Assim, pelo uso de (2.25), $\dot{\varphi}$ pode ser calculado como

$$\dot{\varphi} = -E^+(q)R_{\xi}^T(q)\dot{\xi} = -E^+(q)R_{\xi}^T(q)R^T(\theta)\Sigma(\beta_c)u,$$

onde $E^+(q)$ é a pseudo-inversa de $E(q)$.

Similarmente, de (A.2), pode-se reescrever

$$D_{\xi}^T(q)\dot{\xi} + dI_{N_o \times N_o}\dot{\beta}_o = 0,$$

onde

$$D_{\xi}^T(q) \triangleq \begin{bmatrix} -\cos(\alpha+\beta_{1_o}(t)+\theta) & \sin(\alpha+\beta_{1_o}(t)+\theta) & d+l \sin \beta_{1_o}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\cos(\alpha+\beta_{N_o}(t)+\theta) & \sin(\alpha+\beta_{N_o}(t)+\theta) & d+l \sin \beta_{N_o}(t) \end{bmatrix}.$$

Logo, pelo uso de (2.25), $\dot{\beta}_o$ pode ser calculado como

$$\dot{\beta}_o = -\frac{1}{d}I_{N_o \times N_o}D_{\xi}^T(q)\dot{\xi} = -\frac{1}{d}I_{N_o \times N_o}D_{\xi}^T(q)R^T(\theta)\Sigma(\beta_c)u.$$

A.2 Redutibilidade dos modelos cinemáticos para BMRs tipo (2,0) e (3,0)

A seguir será verificado por meio dos modelos associados as BMRs não-degeneradas do robô HILARE e AXEBOT que o modelo de postura cinemática [Definição 2.21 e Tabela 2.1] é sempre irreduzível que também será verificado que o modelo de configuração cinemática pode ser reduzido em número igual às velocidades generalizadas linearmente dependentes.

A.2.1 Redutibilidade dos modelos cinemáticos de posição: utilização do colchete de Lie e a Proposição 2.7

O robô HILARE tem uma BMR não-degenerada do tipo (2,0) cujo modelo cinemático de posição cartesiano é como segue [veja Tabela 2.1]:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Definindo $b_1(z) = [-\sin \theta \quad \cos \theta \quad 0]^T$, $b_2(z) = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ podemos formular uma distribuição regular $\Delta(z)$ como:

$$\Delta(z) = \text{gen} \{b_1(z), b_2(z)\}.$$

Tabela A.1: Parâmetros de simulação para as BMRs do tipo (2,0) e (3,0).

Parâmetro	Unidade	Descrição	BMR do tipo (2,0) HILARE ¹	BMR do tipo (3,0) AXEBOT
r	[m]	Raio da roda.	0.35	0.0349
l	[m]	Distância perpendicular desde o centro da BMR até o ponto de acoplamento da roda com a estrutura da BMR.	1	0.12
L	[m]	Distância do centro da BMR a um ponto qualquer.	1	0.12
M	[Kg]	Massa da BMR.	1000	1.903
I_c	[Kg-m ²]	Momento de Inércia da BMR.	500	0.0132
I_w	[Kg-m ²]	Momento de Inércia de cada roda.	1.6	1.6×10^{-5}

Calculando o colchete de Lie para $b_1(z)$ e $b_2(z)$ obtemos

$$[b_1(z), b_2(z)] = \frac{\partial b_2(z)}{\partial z} b_1(z) - \frac{\partial b_1(z)}{\partial z} b_2(z) = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\cos \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix},$$

e claramente esse vetor resultante é linearmente independente com $b_1(z)$ e $b_2(z)$. Definindo esse vetor como $b_3(z) = [\cos \theta \ \sin \theta \ 0]^T$ e calculando os colchetes de Lie dos pares $[b_1(z), b_3(z)]$ e $[b_2(z), b_3(z)]$ os resultados são

$$[b_1(z), b_3(z)] = 0_{3 \times 1}, \quad \text{e} \quad [b_2(z), b_3(z)] = b_1(z).$$

Este resultado mostra que o fechamento involutivo $\bar{\Delta}(z)$ é

$$\bar{\Delta}(z) = \text{gen} \{b_1(z), b_2(z), b_3(z)\},$$

e consequentemente $\dim \{\bar{\Delta}(z)\} = 3 = 3 + \delta_d$ [já que $\delta_d = 0$]. Pela Proposição 2.7, podemos concluir que a BMR do HILARE tem um modelo cinemático de posição cartesiano irreduzível. Em um espaço de fase para o vetor $\dot{\xi} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{\theta}]^T$ tal conclusão pode ser evidenciada por uma diferença notável nas possíveis trajetórias que esse vetor percorrerá, dependendo claramente da entrada de controle u e os valores de θ . Para exemplificar tal diferença, na Figura A.1(a) é apresentado a simulação do diagrama de fase do vetor $\dot{\xi}$ dentro da distribuição regular $\Delta(z)$ e do fechamento involutivo $\bar{\Delta}(z)$ com entradas $u = [u_1 \ u_2]^T$, apresentadas na Figura A.1(c).

A simulação foi feita para o caso em que a BMR executa uma trajetória com forma de losango² [com ambas diagonais iguais a 6.28 m] durante 4.519 s e utilizando os parâmetros apresentados na Tabela A.1.

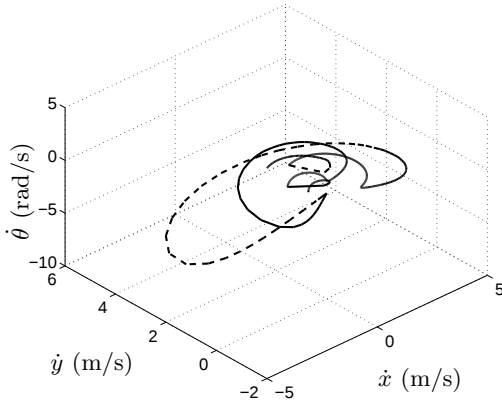
O robô AXEBOT tem uma BMR não-degenerada do tipo (3,0) cujo modelo cinemático de posição cartesiana é como segue [veja Tabela 2.1]:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

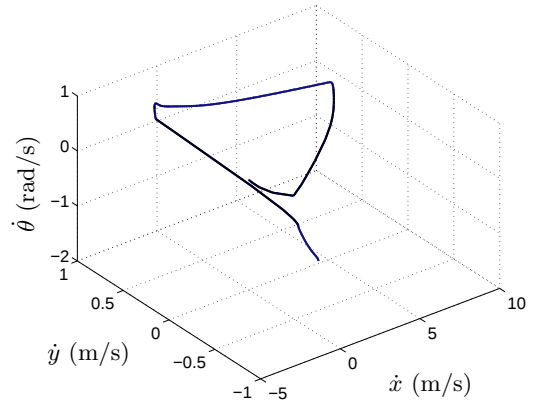
Definindo-se $b_1(z) = [\cos \theta \ \sin \theta \ 0]^T$, $b_2(z) = [-\sin \theta \ \cos \theta \ 0]^T$, $b_3(z) = [0 \ 0 \ 1]^T$

¹Para a BMR do robô HILARE, foram considerados os parâmetros de simulação encontrados em (Leroquais & D'Andrea-Novel 1996, D'Andréa-Novel *et al.* 1995).

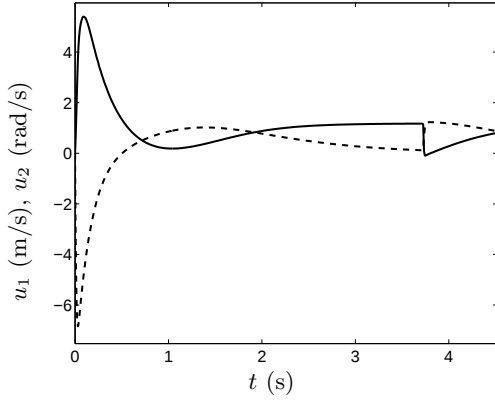
²Detalhes sobre a escolha dessa forma geométrica para a trajetória são apresentados no Capítulo 4.



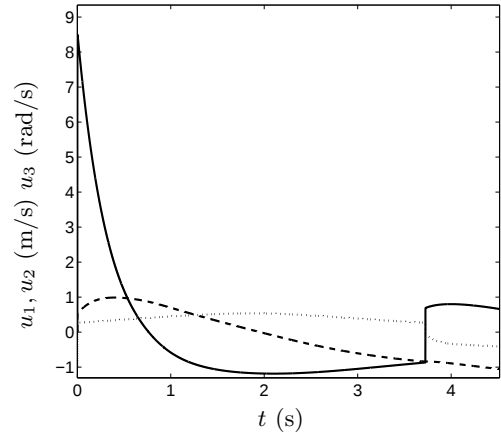
(a) $\Delta(z)$ (linha sólida), $\bar{\Delta}(z)$ (linha tracejada). HILARE: BMR tipo (2,0). Diagrama de fases diferentes devido que $\Delta(z) \neq \bar{\Delta}(z)$.



(b) $[\Delta(z)$ (linha sólida), $\bar{\Delta}(z)$ (linha tracejada). AXEBOT: BMR tipo (3,0). Diagrama de fases iguais devido que $\Delta(z) = \bar{\Delta}(z)$.



(c) u_1 (linha sólida), u_2 (linha tracejada).



(d) u_1 (linha sólida), u_2 (linha tracejada), u_3 (linha pontilhada).

Figura A.1: Diagrama de fase para o vetor $\dot{\xi}$ na BMR do HILARE e do AXEBOT. Ambas sujeitas à distribuição regular $\Delta(z)$ (linha sólida) e ao fechamento involutivo $\bar{\Delta}(z)$ (linha tracejada).

podemos formular uma distribuição regular $\Delta(z)$ como

$$\Delta(z) = \text{gen} \{b_1(z), b_2(z), b_3(z)\},$$

e claramente, pelo exemplo da BMR tipo (2,0) apresentado anteriormente, essa distribuição é o próprio fechamento involutivo $\bar{\Delta}(z)$. Dessa forma, $\dim \{\bar{\Delta}(z)\} = 3 = 3 + \delta_d$ [já que $\delta_d = 0$]; ou seja, o modelo cinemático de posição cartesiana do AXEBOT é irreduzível.

Foi feita uma simulação para o caso em que a BMR executa uma trajetória com forma de losango [com ambas diagonais iguais a 6.28 m] durante 4.519 s de acordo com os parâmetros na Tabela A.1. Na Figura A.1(b) é exemplificado um diagrama de fase para o vetor $\dot{\xi}$ gerado na distribuição regular $\Delta(z)$ e no fechamento involutivo $\bar{\Delta}(z)$ com entradas $u = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ [apresentadas na Figura A.1(d)].

A.2.2 Redutibilidade do modelo cinemático de configuração: consequência da Proposição 2.4

Para o AXEBOT tem-se que $\delta_m = 3$ e as coordenadas generalizadas de configuração são $q = [x \ y \ \theta \ \varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3]^T$. Logo, o modelo cinemático de configuração é caracterizado pela matriz

$S(q)$ [Tabela 2.2], definida como

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2r} & \frac{1}{2r} & \frac{l}{r} \\ 0 & -\frac{1}{r} & \frac{l}{r} \\ \frac{\sqrt{3}}{2r} & \frac{1}{2r} & \frac{l}{r} \end{bmatrix},$$

onde r é o raio da roda.

Verifica-se que $\dim \{\Delta(q)\} = \dim \{\text{gen} \{\text{col} \{S(q)\}\}\} = 3$, e usando o colchete de Lie para $b_1(q) = [\cos \theta \ -\sin \theta \ 0 \ -\frac{\sqrt{3}}{2r} \ 0 \ \frac{\sqrt{3}}{2r}]^T$, $b_2(q) = [\sin \theta \ \cos \theta \ 0 \ \frac{1}{2r} \ -\frac{1}{r} \ \frac{1}{2r}]^T$ e $b_3(q) = [0 \ 0 \ 1 \ \frac{l}{r} \ \frac{l}{r} \ \frac{l}{r}]^T$, temos que

$$\begin{aligned} [b_1(q), b_2(q)] &= 0_{6 \times 1}; \quad [b_1(q), b_3(q)] = [\sin \theta \ \cos \theta \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T; \\ [b_2(q), b_3(q)] &= [-\cos \theta \ \sin \theta \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T. \end{aligned}$$

Considerando-se o resultado dos últimos dois colchetes como $b_4(q) = [\sin \theta \ \cos \theta \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $b_5(q) = [-\cos \theta \ \sin \theta \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, e calculando-se o colchete de Lie para para os pares $[b_4(q), b_1(q)]$, $[b_4(q), b_2(q)]$, $[b_4(q), b_3(q)]$, $[b_5(q), b_1(q)]$, $[b_5(q), b_2(q)]$ e $[b_5(q), b_3(q)]$, obtêm-se, respectivamente

$$\begin{aligned} [b_4(q), b_1(q)] &= 0_{6 \times 1}; \quad [b_4(q), b_2(q)] = 0_{6 \times 1}; \quad [b_4(q), b_3(q)] = b_5(q); \\ [b_5(q), b_1(q)] &= 0_{6 \times 1}; \quad [b_5(q), b_2(q)] = 0_{6 \times 1}; \quad [b_5(q), b_3(q)] = -b_4(q). \end{aligned}$$

Esse resultado mostra que o fechamento involutivo é

$$\bar{\Delta}(q) = \text{gen} \{b_1(q), b_2(q), b_3(q), b_4(q), b_5(q)\},$$

e que $\dim \{\bar{\Delta}(q)\} = 5$. Logo, o número de coordenadas generalizadas que podem ser reduzidas é $\dim \{q\} - \dim \{\bar{\Delta}(q)\} = 6 - 5 = 1$. De fato, pela estrutura da configuração em $S(q)$ temos que

$$\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3 = \frac{3l}{r}\dot{\theta},$$

ou mesmo dizer que, há uma função $\tilde{r}_1 = \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_3$ e a uma função $\tilde{r}_2 = -\frac{3l}{r}\dot{\theta}$ tal que $\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2$ é uma função suave em q que permanece constantemente nula ao longo de uma trajetória sujeita às restrições da BMR. Assim, é possível eliminar uma coordenada generalizada de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ e θ . Na Figura A.2(a) é apresentada a simetria de $\tilde{r}_1$ e $\tilde{r}_2$ com relação ao eixo horizontal $[\tilde{r} = 0]$ para uma simulação quando a BMR do AXEBOT faz o seguimento de uma trajetória de referência com forma de losango [com ambas diagonais iguais a 6.28 m] durante 4.519 s.

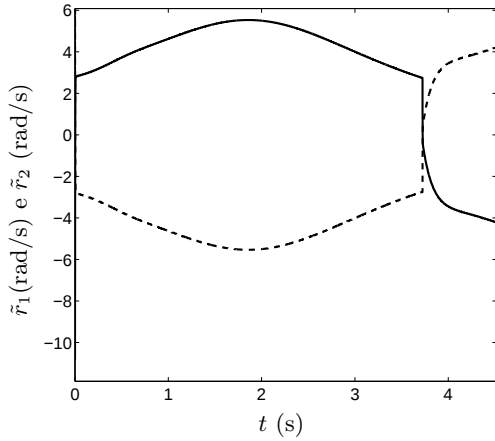
Para o HILARE temos que $\delta_m = 2$ e as coordenadas generalizadas de configuração são $q = [x \ y \ \theta \ \varphi_1 \ \varphi_2]^T$. Para essa BMR, o modelo cinemático de configuração é caracterizado pela matriz $S(q)$ [Tabela 2.2] definida como

$$S(q) = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{r} & -\frac{l}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{l}{r} \end{bmatrix}.$$

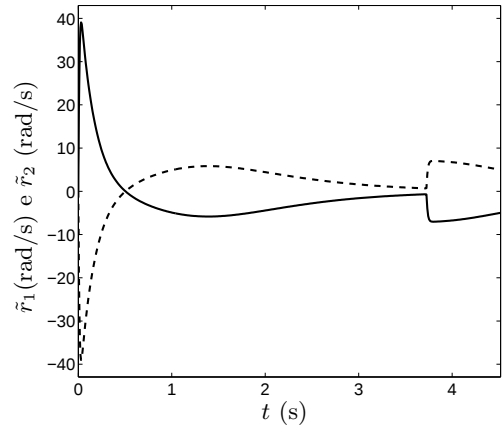
Verifica-se que $\dim \{\Delta(q)\} = 2$ e $\dim \{\bar{\Delta}(q)\} = 4$. Logo, o número de coordenadas generalizadas que podem ser reduzidas é $\dim \{q\} - \dim \{\bar{\Delta}(q)\} = 5 - 4 = 1$. Pela estrutura da configuração em $S(q)$, comprova-se que

$$\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 = -\frac{2l}{r}\dot{\theta},$$

ou seja, que $\tilde{r}_1 = \dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2$ e $\tilde{r}_2 = \frac{2l}{r}\dot{\theta}$ são funções suaves em q tal que $\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2$ permanece



(a) $\tilde{r}_1$ (linha sólida) e $\tilde{r}_2$ (linha tracejada) para o AXEBOT, BMR tipo (3,0).



(b) $\tilde{r}_1$ (linha sólida) e $\tilde{r}_2$ (linha tracejada) para o HILARE, BMR tipo (2,0).

Figura A.2: Verificação da simetria de duas funções suaves em q , $\tilde{r}_1$ e $\tilde{r}_2$, tal que a sua soma $\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2$ permanece constantemente nula ao longo de uma trajetória com forma de losango sujeita às restrições de uma BMR não-degenerada. As funções apresentam simetria com relação ao eixo horizontal $\tilde{r} = 0$, consequentemente a sua soma é zero.

constantemente nula ao longo de uma trajetória sujeita às restrições da BMR. Assim, é possível eliminar uma coordenada generalizada de φ_1, φ_2 e θ . Na Figura A.2(b) é apresentada a simetria de $\tilde{r}_1$ e $\tilde{r}_2$ com relação o eixo horizontal $[\tilde{r} = 0]$ quando a BMR do HILARE faz o seguimento de uma trajetória de referência com forma de losango [com ambas diagonais iguais a 6.28 m] durante 4.519 s.

A.3 Controlabilidade do modelo cinemático de configuração para BMRs tipo (2,0) e (3,0): Teorema de Chow

Pela Definição 2.3, a dimensão correspondente ao espaço tangente $T_q \mathbb{R}^{3+N_o+\delta_d+N}$ é igual a $3 + N_o + \delta_d + N$. Das revisões feitas na Subseção A.2.2 associadas com a redutibilidade dos modelos cinemáticos de configuração para as BMRs tipo (3,0) e (2,0), pode-se verificar se a condição de posto de controlabilidade é satisfeita.

Da Subseção A.2.2, tem-se que o fechamento involutivo para a BMR tipo (3,0) é definido por:

$$\bar{\Delta}(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & \sin \theta & -\cos \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2r} & \frac{1}{2r} & \frac{l}{r} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} & \frac{l}{r} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2r} & \frac{1}{2r} & \frac{l}{r} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e dado que suas colunas são linearmente independentes então $\text{rank} \{ \bar{\Delta}(q) \} = 5$. Visto que o modelo cinemático de configuração é redutível em uma variável então $\dim \{ T_q \mathbb{R}^{3+N_o+\delta_d+N} \} = 5$. Dessa forma é concluído pelo Teorema 2.2 [Teorema de Chow] que o modelo cinemático de configuração da BMR tipo (3,0) é controlável.

Da Subseção A.2.2, tem-se que o fechamento involutivo para a BMR tipo (2,0) é definido por:

$$\bar{\Delta}(q) = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 & -\cos \theta & \sin \theta \\ \cos \theta & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r} & -\frac{l}{r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & -\frac{l}{r} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e como suas colunas são linearmente independentes então $\text{rank} \{ \bar{\Delta}(q) \} = 4$. Da mesma forma

que na BMR tipo (3,0), o modelo cinemático de configuração é redutível em uma variável, logo $\dim \{T_q \mathbb{R}^{3+N_o+\delta_d+N}\} = 4$. Dessa forma é concluído pelo Teorema 2.2 [Teorema de Chow] que o modelo cinemático de configuração da BMR tipo (2,0) é controlável.

Anexos do Capítulo 3

Embora os modelos para BMRs totalmente rígidos tenham sido úteis em muitas aplicações de controle de trajetória, quando é assumido que as restrições cinemáticas são satisfeitas, é preciso mudar a abordagem para uma aproximação que considere a flexibilidade e a violação das restrições. Essa consideração permite utilizar a teoria de perturbações singulares para descrever dinâmicas lentas e dinâmicas rápidas associadas respectivamente com a dinâmica rígida da BMR e com a violação das restrições cinemáticas.

B.1 Modelo dinâmico genérico singularmente perturbado para BMRs: detalhes do modelo (3.8)-(3.9)

Como foi mencionado na Subseção 3.2.2, $\dot{q}$ não pode ser gerada completamente pela distribuição $\Delta(q)$ definida em (2.35) e deve existir uma base de campos vetoriais complementar tal que a configuração cinemática seja totalmente descrita. Dessa forma, $\dot{q}$ tem um complemento no espaço ortogonal ao espaço gerado por $\Delta(q)$ [ou seja $\text{Im} \{A(q)\} \in \Omega(q) \subseteq \mathbb{R}^{3+N_o+\delta_d+N}$], tal que

$$\dot{q} = S(q)\eta + A(q)\varepsilon\mu. \quad (\text{B.1})$$

Diferenciando (B.1) tem-se que

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} S(q) & A(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \varepsilon\dot{\mu} \end{bmatrix} + \left\{ \frac{\partial S}{\partial q} [S(q)\eta + A(q)\varepsilon\mu] \right\} \eta + \left\{ \frac{\partial A}{\partial q} [S(q)\eta + A(q)\varepsilon\mu] \right\} \varepsilon\mu$$

e, da mesma forma que foi feito para o caso ideal em (2.42), pode-se substituir a equação anterior em (2.40) e multiplica-la à esquerda pela matriz $\begin{bmatrix} S^T(q) \\ A^T(q) \end{bmatrix}$ resultando em

$$J(q) \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \varepsilon\dot{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^T(q) \\ A^T(q) \end{bmatrix} \left\{ C(q, S(q)\eta + A(q)\varepsilon\mu) + B(q)\tau - M(q) \left\{ \frac{\partial S}{\partial q} [S(q)\eta + A(q)\varepsilon\mu] \eta + \frac{\partial A}{\partial q} [S(q)\eta + A(q)\varepsilon\mu] \varepsilon\mu \right\} \right\} + \begin{bmatrix} 0 \\ -A^T(q)A(q)K(q, \eta, \varepsilon\mu)A^T(q)A(q)\mu \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

onde $J(q) \in \mathbb{R}^{(\delta_u+K_r) \times (\delta_u+K_r)}$ é definida como:

$$J(q) = \begin{bmatrix} S^T(q)M(q)S(q) & S^T(q)M(q)A(q) \\ A^T(q)M(q)S(q) & A^T(q)M(q)A(q) \end{bmatrix}.$$

Uma aproximação do modelo (B.2) dentro da abordagem de perturbações singulares pode

ser obtida se a reescrevemos na forma espaço-estado não-linear:

$$\begin{cases} \dot{q} = S(q)\eta + A(q)\varepsilon\mu & (B.3) \\ \dot{\eta} = D_1(q)\tau + \rho_1(q, \eta, \mu, \varepsilon) & (B.4) \\ \varepsilon\dot{\mu} = D_2(q)\tau + \rho_2(q, \eta, \mu, \varepsilon) & (B.5) \end{cases}$$

onde $D_1(q) \in \mathbb{R}^{\delta_u \times \delta_u}$ e $D_2(q) \in \mathbb{R}^{K_r \times \delta_u}$ são:

$$D(q) = \begin{bmatrix} D_1(q) \\ D_2(q) \end{bmatrix} = R(q) \begin{bmatrix} S^T(q) \\ A^T(q) \end{bmatrix} B(q),$$

com $\rho_1(q, \eta, \mu, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{\delta_u}$, $\rho_2(q, \eta, \mu, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{K_r}$ e $R(q) \in \mathbb{R}^{(\delta_u + K_r) \times (\delta_u + K_r)}$ definidos como

$$\begin{aligned} \rho(q, \eta, \mu, \varepsilon) &= \begin{bmatrix} \rho_1(q, \eta, \mu, \varepsilon) \\ \rho_2(q, \eta, \mu, \varepsilon) \end{bmatrix} \\ &= R(q) \begin{bmatrix} S^T(q) \\ A^T(q) \end{bmatrix} \left\{ C(q, S(q)\eta + A(q)\varepsilon\mu) + B(q)\tau - M(q) \left\{ \frac{\partial S}{\partial q} [S(q)\eta + A(q)\varepsilon\mu] \eta \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\partial A}{\partial q} [S(q)\eta + A(q)\varepsilon\mu] \varepsilon\mu \right\} \right\} + R(q) \begin{bmatrix} 0 \\ -A^T(q)A(q)K(q, \eta, \varepsilon\mu)A^T(q)A(q)\mu \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$R(q) = J^{-1}(q) = \begin{bmatrix} R_{11}(q) & R_{12}(q) \\ R_{12}^T(q) & R_{22}(q) \end{bmatrix}. \quad (B.6)$$

Lema B.1 ((D'Andréa-Novet *et al.* 1995)). *O modelo definido por (B.3) - (B.5) tem as seguintes propriedades:*

- i) $\text{rank} \{D_1(q)\} = \delta_u$, tal que $S^T(q)B(q)$ seja não-singular,
- ii) $R_{22}(q) > 0$ tal que $R(q) > 0$,
- iii) $\rho_1(q, \eta, \mu, \varepsilon)$ e $\rho_2(q, \eta, \mu, \varepsilon)$ denotam polinômios em ε tal que:

$$\begin{aligned} \rho_1(q, \eta, \mu, \varepsilon) &\triangleq \sum_{i=1}^{N_1} \varepsilon^i \rho_{1,i}(q, \eta, \mu) \\ \rho_2(q, \eta, \mu, \varepsilon) &\triangleq \sum_{i=1}^{N_2} \varepsilon^i \rho_{2,i}(q, \eta, \mu) \end{aligned}$$

onde N_1 e N_2 são graus de robustez.

- iv) Cada um dos termos envolvidos, em termos de q , e suas respectivas derivadas parciais são uniformemente limitadas com respeito a q .

B.1.1 Modelo singularmente perturbado para BMR tipo (2,0)

Da Tabela 3.1 escolhemos $q = [x \ y \ \theta \ \varphi_1 \ \varphi_2]^T$ e, como a configuração (2,0) tem duas rodas fixas, o vetor μ está associado com derrapagem e escorregamento dessas rodas. Para exemplificar, na Figura B.1 é apresentada a distribuição de variáveis cinemáticas e dinâmicas de BMR tipo (2,0) do robô HILARE. Observa-se que $N = 2$ [ou seja, $N_f = 2, N_o = 0, N_c = 0, N_s = 0$]. As rodas livres só fornecem apoio à BMR, sendo então não-controláveis e desconsideradas na modelagem da BMR.

Considerando-se as expressões para as restrições cinemáticas das rodas fixas apresentadas em (2.7) e (2.6), as matrizes $D^T(q)$ e $R^T(q)$ nas equações (A.2) e (A.1) têm, respectivamente, a forma:

$$\begin{aligned} D^T(q) &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ -\cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ R^T(q) &= \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & l & r & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & l & 0 & r \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

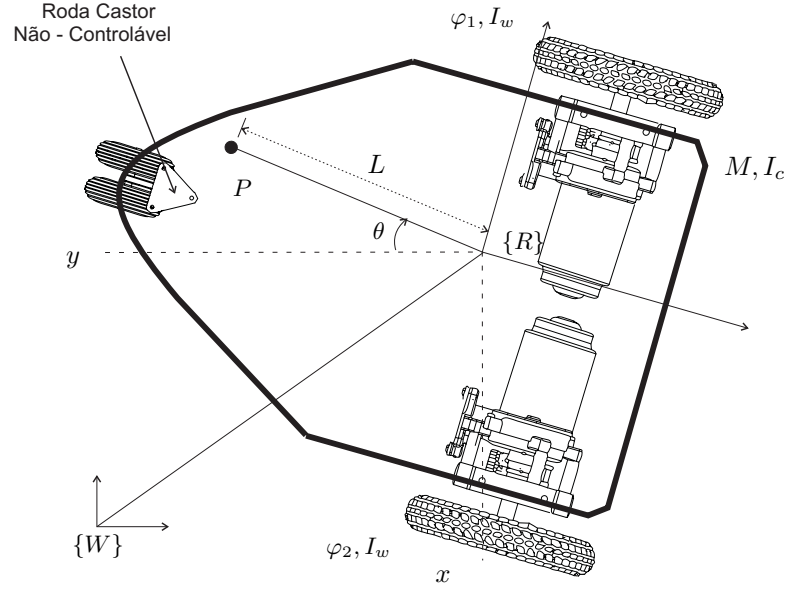


Figura B.1: Representação das variáveis cinemáticas e dinâmicas da BMR tipo (2,0) com duas rodas fixas do robô HILARE. A roda livre é não-controlável e desconsiderada na modelagem.

Pela equação (2.15), ${}^0A_N^T(q) = D^T(q)$ e ${}^1A_N^T(q)$ não existe, visto que uma BMR tipo (2,0) não possui rodas orientáveis no centro. Sabe-se também que $\delta_m = 2$, $\delta_d = 0$, e pela Definição 2.19 que $\text{rank} \{A_N^T(q)\} = 1$. Logo, pelo item (ii) da Definição 2.21 temos que $\text{rank} \{{}^0A_N^T(q)\} = 1$ [o que é correto porque a matriz $D^T(q)$ tem as duas linhas linearmente dependentes].

Observação B.1 ($V_{i,x} \parallel V_{j,x}$ implica linhas linearmente dependentes em $D^T(q)$ para $i \neq j$): O fato de duas ou mais linhas da matriz $D^T(q)$, denotadas pelos índices i e j , serem linearmente dependentes significa que os vetores $V_{i,x}$ e $V_{j,x}$ são paralelos. Logo uma linha é suficiente para garantir as suas representações na matriz de restrições pfaffianas. Da mesma forma, o fato de duas ou mais linhas da matriz $R^T(q)$, denotadas pelos índices i e j , serem linearmente dependentes significa que os vetores $V_{i,y}$ e $V_{j,y}$ são paralelos. Logo uma linha é suficiente para garantir as suas representações na matriz de restrições pfaffianas.

Pela Observação B.1, elimina-se uma linha da matriz $D^T(q)$ e a matriz $A^T(q) \in \mathbb{R}^{K_r \times 5}$ [com $K_r = 2N - \text{rank} \{{}^0A_N^T(q)\} - \delta_d - N_s = 2(2) - 1 - 0 - 0 = 3$], fica definida como

$$A^T(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & l & r & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & l & 0 & r \end{bmatrix} \triangleq A^T(\theta).$$

As matrizes $M(q), C(q, \dot{q}), B(q)$ associadas ao modelo dinâmico (2.38) têm a forma

$$M(q) = \text{diag} (\begin{matrix} M & M & I_c & I_w & I_w \end{matrix}); \quad C(q, \dot{q}) = 0_{5 \times 1}; \quad B(q) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 2} \\ I_{2 \times 2} \end{bmatrix},$$

sendo M a massa da BMR, I_c o seu momento de inércia e I_w o momento de inércia de cada roda fixa¹. Da Subseção A.2.2 temos que

$$S(q) = \begin{bmatrix} -\sin \theta & 0 \\ \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{r} & -\frac{l}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{l}{r} \end{bmatrix} \triangleq S(\theta).$$

Os componentes longitudinal e transversal das forças aplicadas pela superfície de movimento em cada roda são dados por (3.46). Nessa expressão, V_x e $(V_y - r\dot{\phi})$ podem ser lineares em

¹O fato do vetor $C(q, \dot{q})$ ser nulo significa que o centro de massa da BMR coincide com o seu centro geométrico.

termos dos componentes de $A^T(q)\dot{q}$, como definido em (3.47). Para uma BMR tipo (2,0), as matrizes $L_i(q)$ [com $i=1,2$] são definidas como

$$L_1(q) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad L_2(q) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pela Suposição 3.8, para cada roda a matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}$$

na equação (3.51) é expressa como

$$\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & G_0 \end{bmatrix};$$

tal que $D_0 = \varepsilon D$ e $G_0 = \varepsilon G$ sejam valores normalizados dos coeficiente de rigidez transversal e longitudinal, respectivamente. Agora, pelo uso da Suposição 3.7, a matriz $K(q, \eta, \varepsilon\mu)$ na equação (3.52) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} K(q, \eta, \varepsilon\mu) &= \frac{1}{\|V(q, \eta, \mu)\|} (L_1^T(q) + L_2^T(q)) \begin{bmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & G_0 \end{bmatrix} (L_1(q) + L_2(q)) \\ &= \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} 4D_0 & 0 & 0 \\ 0 & G_0 & G_0 \\ 0 & G_0 & G_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como $\eta \in \mathbb{R}^{\delta_u}$ e $\delta_u = \delta_m + \delta_d = 2$, então $\eta = [\eta_1 \ \eta_2]^T \in \mathbb{R}^2$. Assim, em posse das matrizes anteriores, o vetor de estados pode ser definido como $x = [q \ \eta]^T$ e o modelo (3.8) - (3.9) como (Fernández *et al.* 2014c)

$$\begin{cases} \dot{x} = Z_0(q)\eta + \varepsilon Z_1(q)\mu + Z_2(q)\mu + Z_3(q)\tau \\ \varepsilon\dot{\mu} = G_0(q)\eta + \varepsilon G_1(q)\mu + G_2(q)\mu + G_3(q)\tau \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(B.7)} \\ \text{(B.8)} \end{matrix}$$

onde

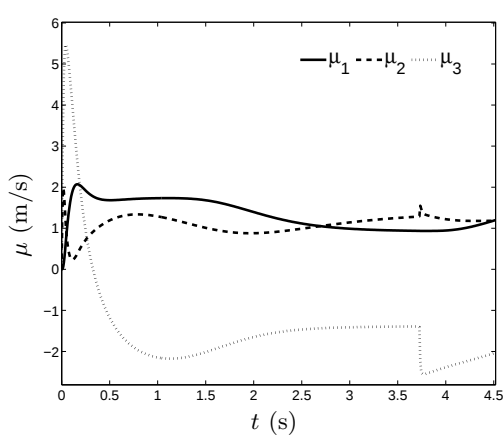
$$Z_0(q) = \begin{bmatrix} S(\theta) \\ \Delta_0 \end{bmatrix}, \quad Z_1(q) = \begin{bmatrix} A(\theta) \\ \Delta_1 \end{bmatrix}, \quad Z_2(q) = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 3} \\ \Delta_2 \end{bmatrix}, \quad Z_3(q) = \begin{bmatrix} 0_{5 \times 2} \\ \Delta_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} G_0(q) &= \begin{bmatrix} -\dot{\theta} \cos 2\theta & 0 \\ \frac{1}{3} \dot{\theta} \sin 2\theta & 0 \\ -\frac{1}{3} \dot{\theta} \sin 2\theta & 0 \end{bmatrix}, \quad G_1(q) = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta} & -\dot{\theta} \\ \frac{1}{3} \dot{\theta} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} \dot{\theta} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ G_2(q) &= \begin{bmatrix} a_3 D_o & 0 & 0 \\ 0 & a_4 G_o & a_4 G_o \\ 0 & a_4 G_o & a_4 G_o \end{bmatrix}, \quad G_3(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

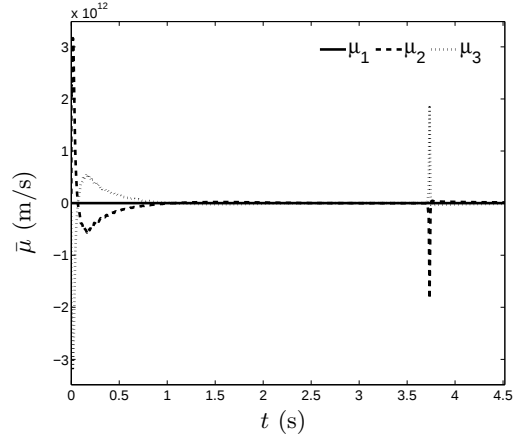
$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \dot{\theta} \sin 2\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \dot{\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Delta_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 G_o & a_2 G_o \end{bmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} -a_1 & a_1 \\ -a_1 & -a_1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{r^2}{3 I_w}, \quad a_2 = -\frac{2 I_w l^2 - 2 I_c r^2}{I_c I_w \|V(q, \eta, \mu)\|}, \\ a_3 &= -\frac{4}{M \|V(q, \eta, \mu)\|}, \quad a_4 = -\frac{2 l^2}{I_c \|V(q, \eta, \mu)\|} - \frac{r^2}{I_w \|V(q, \eta, \mu)\|}. \end{aligned}$$

Dado que a matriz $A^T(q)$ tem três linhas [$K_r = 3$], o vetor $A^T(q)\dot{q}$ representa a violação

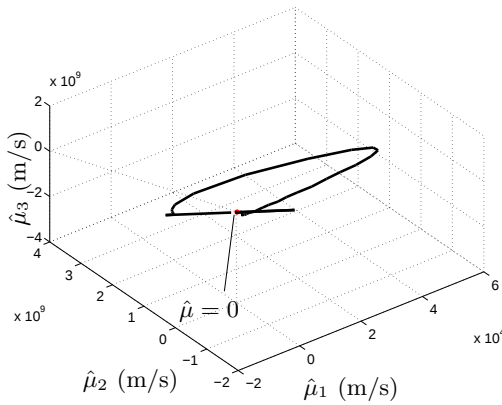


(a) μ_1 : associado com derrapagem $\delta_{x,1}, \delta_{x,2}$, μ_2 : associado com deslizamento s_1 da roda 1 (φ_1), μ_3 : associado com deslizamento s_2 da roda 2 (φ_2).

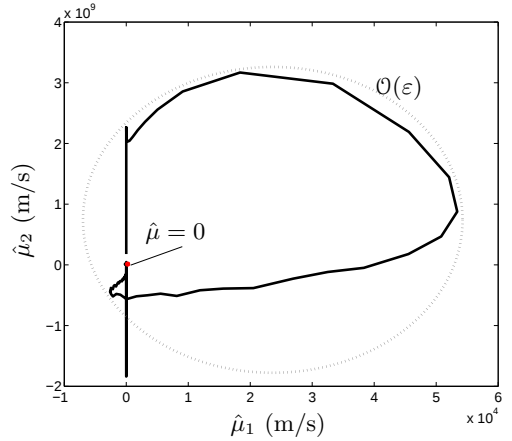


(b) $\bar{\mu}_1$: associado com derrapagem $\delta_{x,1}, \delta_{x,2}$, $\bar{\mu}_2$: associado com deslizamento s_2 da roda 1 (φ_1), $\bar{\mu}_3$: associado com deslizamento s_2 da roda 2 (φ_2).

Figura B.2: Evolução dos vetores μ e $\bar{\mu}$ para o modelo singularmente perturbado de uma BMR não-degenerada tipo (2,0).



(a) Evolução do vetor $\hat{\mu}$, vista em três dimensões: $\hat{\mu}_1 \times \hat{\mu}_2 \times \hat{\mu}_3$.



(b) Evolução do vetor $\hat{\mu}$, vista superior: $\hat{\mu}_1 \times \hat{\mu}_2$. A linha de pontos cinza representa a vizinhança $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

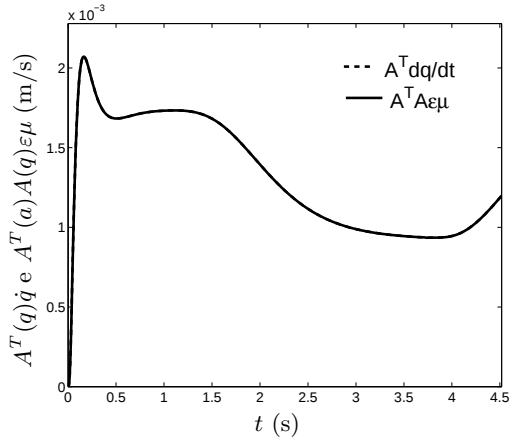
Figura B.3: Diagrama de fase do vetor $\hat{\mu}$ para o modelo singularmente perturbado de uma BMR não-degenerada tipo (2,0).

das restrições cinemáticas, sendo a primeira linha associada com a restrição de não-derrapagem da BMR² e as duas linhas seguintes associadas com as restrições de rolamento puro das duas rodas [relacionadas com φ_1 e φ_2]. Consequentemente, o vetor μ tem seu primeiro componente associado com *derrapagem* da BMR [ou $\delta_{x,1}, \delta_{x,2}$], e os outros componentes com o *deslizamento* s_1, s_2 das rodas, tal como foi indicado na Tabela 3.1.

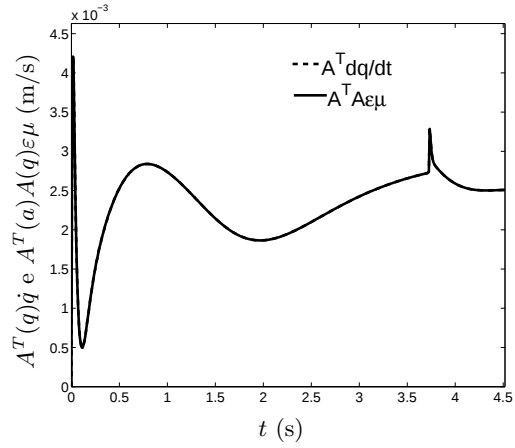
Na Figura B.2(a), é apresentada a evolução de μ para uma simulação da BMR tipo (2,0) durante 4.519 s, quando a BMR executa uma trajetória com forma de losango [com ambas diagonais iguais a 6.28 m]. Os parâmetros usados na simulação são apresentados na Tabela A.1. Para efeitos de simulação, considerando a Suposição 3.8 e o critério (3.53), foi escolhido $\varepsilon = 10^{-3}$ tal que $D_0 = G_0 = 1$ N [$D = G = 1000$ N]³.

²Como as duas primeiras linhas da matriz $D^T(q)$ são linearmente dependentes, ou seja, as restrições de não-derrapagem são linearmente dependentes, então uma linha pode ser considerada a representação das duas restrições de não-derrapagem ou, equivalentemente, a representação da restrição de não-derrapagem da BMR em geral.

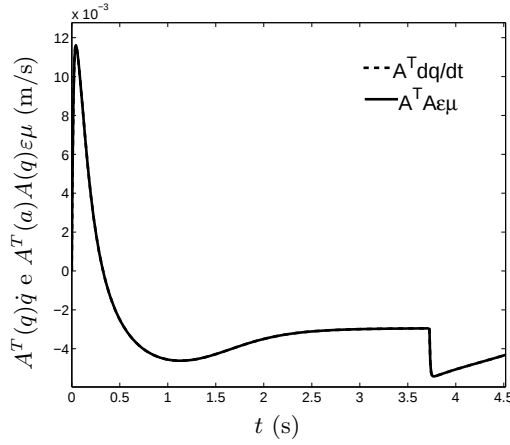
³Para efeitos de concordância de unidades métricas e devido que o ângulo de derrapagem e o deslizamento são adimensionais em (3.43) e (3.44), respectivamente, então as unidades usadas para os coeficientes D e G serão dadas em Newtons [N].



(a) Evolução do componente das restrições pfaffianas equivalente com a restrição de não-derrapagem da BMR.



(b) Evolução do componente das restrições pfaffianas equivalente com a restrição de rolamento puro da roda associada com φ_1 .



(c) Evolução do componente das restrições pfaffianas equivalente com a restrição de rolamento puro da roda associada com φ_2 .

Figura B.4: Comparação dos vetores $A^T(q)A(q)\varepsilon\mu$ e $A^T(q)\dot{q}$ em uma BMR tipo (2,0) quando $\varepsilon = 10^{-3}$ e $D_0 = G_0 = 1 \text{ N}$ ($D = G = 1000 \text{ N}$).

Fazendo $\varepsilon = 0$ em (B.8), tem-se que existe uma raiz isolada

$$\bar{\mu} = H(x, t) = -G_2^{-1}(q) G_0(q)\eta - G_2^{-1}(q) G_3(q)\tau \quad (\text{B.9})$$

que é solução de (3.12). Assim, o modelo definido por (B.7) -(B.8) é singularmente perturbado padrão, e como decorrência da diferenciabilidade dos termos envolvidos nas equações (B.7) - (B.8), e da equação (B.9), a Condição 3.1 é satisfeita. Na Figura B.2(b) é apresentada a evolução do vetor $\bar{\mu}$.

Claramente as evoluções de μ e $\bar{\mu}$ são diferentes, o que sugere impor um limite sobre o tempo t e um modelo reduzido da dinâmica rápida μ [modelo de camada limite], representado por $\hat{\mu} = \mu - \bar{\mu}$ [veja Definição 3.3 e equação (3.16)], a fim de observar que $\bar{\mu}$ é uma boa aproximação de μ . Na Figura B.3 é observada a evolução do vetor $\hat{\mu}$. Nota-se que o diagrama de fase converge uniformemente para $\hat{\mu} = 0$. Assim, a Condição 3.2 é satisfeita e, pelo Teorema 3.1 [Teorema de Tikhonov], existem $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$ e $\varepsilon^* > 0$ tal que o modelo reduzido definido por (B.7) [com $\varepsilon = 0$, $z = [x \ y \ \theta]^T$, $w = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \eta_1 \ \eta_2]^T$ e $H(x, t)$ em (B.9)], seja exponencialmente uniformemente estável.

Observação B.2 (Atenuação de restrições pfaffianas por ε): Pela equação (3.6), sabemos que o vetor μ esta diretamente relacionado com as restrições pfaffianas. Nas Figuras B.4(a), B.4(b) e B.4(c) são apresentadas as evoluções das restrição de não-derrapagem, de rolamento puro da roda associada com φ_1 e de rolamento puro da roda associada com φ_2 , respectivamente, quando

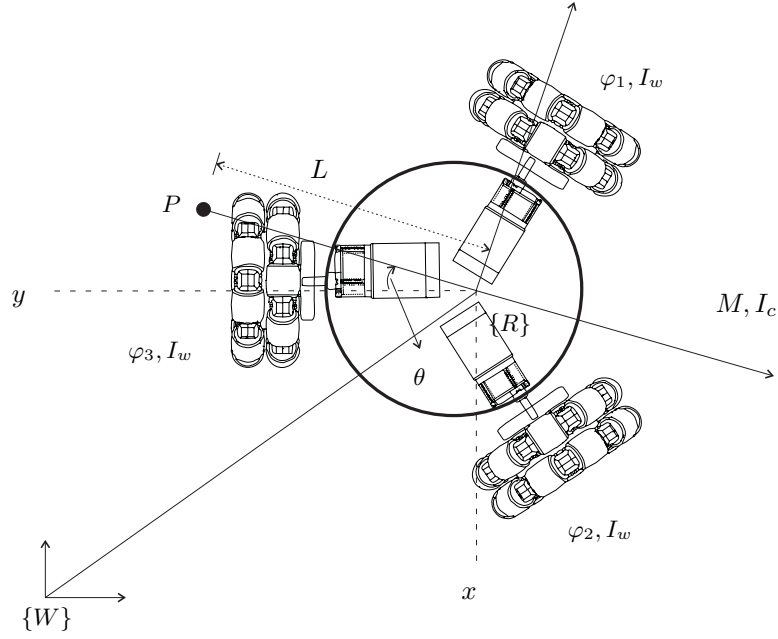


Figura B.5: Representação das variáveis cinemáticas e dinâmicas da BMR tipo (3,0) com três rodas suecas do robô AXEBOT. O ângulo de direção com respeito ao plano de rotação da roda é $\gamma = 0$.

$\varepsilon = 10^{-3}$. Nota-se que o comportamento de $A^T(q)A(q)\varepsilon\mu$ é similar com o comportamento de μ apresentado na Figura B.2(a); com a diferença de que seu contradomínio é atenuado pelo valor de ε .

Pela Observação B.1, a Figura B.4(a) representa as violações das restrições cinemáticas da derrapagem $\delta_{x,1}$ associada com a posição φ_1 e da derrapagem $\delta_{x,2}$ associada com a posição φ_2 .

B.1.2 Modelo singularmente perturbado para BMR tipo (3,0)

Da Tabela 3.1 escolhe-se $q = [x \ y \ \theta \ \varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3]^T$ e, como a configuração (3,0) tem duas rodas suecas, o vetor μ está associado com os deslizamentos s_1, s_2, s_3 dessas rodas. Para exemplificar, na Figura B.5 é apresentada a distribuição das variáveis cinemáticas e dinâmicas de BMR tipo (3,0) do robô AXEBOT. Observa-se que $N = 3$ [ou seja, $N_f = 0, N_o = 0, N_c = 0, N_s = 3$]. Comparando-se as rodas da Figura B.5 com as apresentadas na Figura (3.1(c)), o ângulo de direção com respeito ao plano de rotação da roda é $\gamma = 0$.

Considerando-se as expressões para as restrições cinemáticas das rodas suecas apresentadas em (2.12), a matriz $R^T(q)$ na equação (A.1) tem a forma:

$$R^T(q) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & l & r & 0 & 0 \\ -\sin \theta & -\cos \theta & l & 0 & r & 0 \\ \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & l & 0 & 0 & r \end{bmatrix}.$$

Pela equação (2.15), ${}^0A_N^T(q)$ e ${}^1A_N^T(q)$ não existem visto que uma BMR tipo (3,0) não possui restrições de não-derrapagem e não possui rodas orientáveis no centro. Sabe-se também que $\delta_m = 3, \delta_d = 0$ e que pela Definição 2.19 $\text{rank} \{A_N^T(q)\} = 0$. Logo, pelo item (ii) da Definição 2.21 tem-se que $\text{rank} \{{}^0A_N^T(q)\} = 0$ [o que é correto porque a matriz $D^T(q)$ é nula]. Esse fato nos permite afirmar que a matriz $A^T(q) \in \mathbb{R}^{K_r \times 6}$ [com $K_r = 2N - \text{rank} \{{}^0A_N^T(q)\} - \delta_d - N_s = 2(3) - 0 - 0 - 3 = 3$], fica definida como

$$A^T(q) = \begin{bmatrix} -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & l & r & 0 & 0 \\ -\sin \theta & -\cos \theta & l & 0 & r & 0 \\ \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & l & 0 & 0 & r \end{bmatrix} \triangleq A^T(\theta).$$

As matrizes $M(q), C(q, \dot{q}), B(q)$ associadas ao modelo dinâmico (2.38) têm a forma

$$M(q) = \text{diag} \begin{pmatrix} M & M & I_c & I_w & I_w & I_w \end{pmatrix}; \quad C(q, \dot{q}) = 0_{6 \times 1}; \quad B(q) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix},$$

sendo M a massa da BMR, I_c o seu momento de inércia e I_w o momento de inércia de cada roda sueca⁴. Da Subseção A.2.2, tem-se que

$$S(q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2r} & \frac{1}{2r} & \frac{l}{r} \\ 0 & -\frac{1}{r} & \frac{l}{r} \\ \frac{\sqrt{3}}{2r} & \frac{1}{2r} & \frac{l}{r} \end{bmatrix} \triangleq S(\theta).$$

Os componentes longitudinal e transversal das forças aplicadas pela superfície de movimento em cada roda são dados por (3.46). Nessa expressão, V_x e $(V_y - r\dot{\varphi})$ podem ser lineares em termos dos componentes de $A^T(q)\dot{q}$ como definido em (3.47). Para uma BMR tipo (3,0) as matrizes $L_i(q)$ [com $i=1,2,3$] são definidas como

$$L_1(q) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2(q) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad L_3(q) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma que no modelo da BMR tipo (2,0), a matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}$$

na equação (3.51) é expressada como

$$\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & G_0 \end{bmatrix},$$

tal que, $D_0 = \varepsilon D$ e $G_0 = \varepsilon G$ sejam valores normalizados dos coeficiente de rigidez transversal e longitudinal. Agora, pelo uso da Suposição 3.7, a matriz $K(q, \eta, \varepsilon\mu)$ na equação (3.52) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} K(q, \eta, \varepsilon\mu) &= \frac{1}{\|V(q, \eta, \mu)\|} (L_1^T(q) + L_2^T(q) + L_3^T(q)) \begin{bmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & G_0 \end{bmatrix} (L_1(q) + L_2(q) + L_3(q)) \\ &= \frac{1}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{\theta}^2)^{1/2}} \begin{bmatrix} 4D_0 & 2D_0 & 0 \\ 2D_0 & D_0 + G_0 & 2G_0 \\ 0 & 2G_0 & 4G_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como $\eta \in \mathbb{R}^{\delta_u}$ e $\delta_u = \delta_m + \delta_d = 3$ então $\eta = [\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3]^T \in \mathbb{R}^3$. Assim, em posse das matrizes anteriores, o vetor de estados pode ser definido como $x = [q \ \eta]^T$ e o modelo (3.8) - (3.9) como (Fernández *et al.* 2014b)

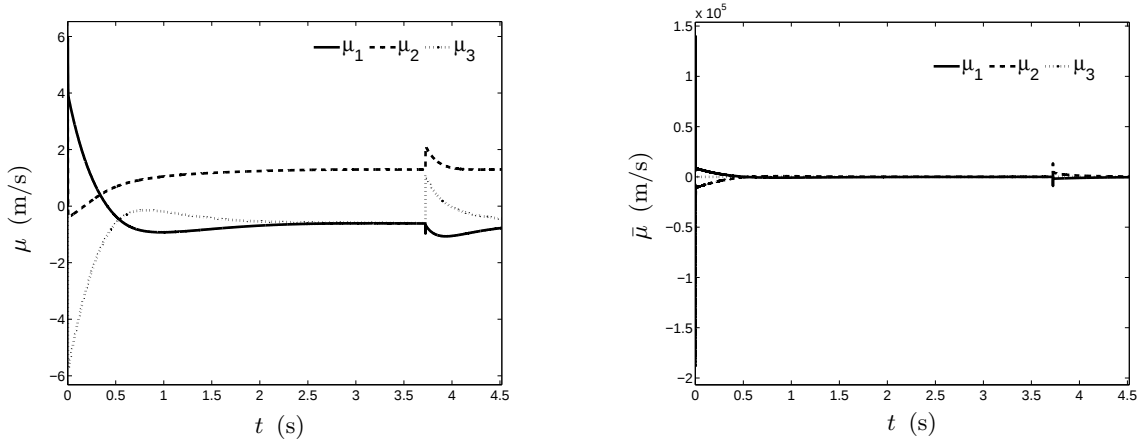
$$\begin{cases} \dot{x} = Z_0(q)\eta + \varepsilon Z_1(q)\mu + Z_2(q)\mu + Z_3(q)\tau \\ \varepsilon \dot{\mu} = G_0(q)\eta + \varepsilon G_1(q)\mu + G_2(q)\mu + G_3(q)\tau \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(B.10)} \\ \text{(B.11)} \end{matrix}$$

onde

$$Z_0(q) = \begin{bmatrix} S(\theta) \\ \Delta_0 \end{bmatrix}, \quad Z_1(q) = \begin{bmatrix} A(\theta) \\ \Delta_1 \end{bmatrix}, \quad Z_2(q) = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 3} \\ \Delta_2 \end{bmatrix}, \quad Z_3(q) = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 2} \\ \Delta_3 \end{bmatrix},$$

$$G_0(q) = \begin{bmatrix} a_{37} & a_{38} & a_{39} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{bmatrix}, \quad G_1(q) = \begin{bmatrix} a_{46} & a_{47} & a_{48} \\ a_{49} & a_{50} & a_{51} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{bmatrix}, \quad G_2(q) = \begin{bmatrix} a_{64} & a_{65} & a_{66} \\ a_{67} & a_{68} & a_{69} \\ a_{70} & a_{71} & a_{72} \end{bmatrix},$$

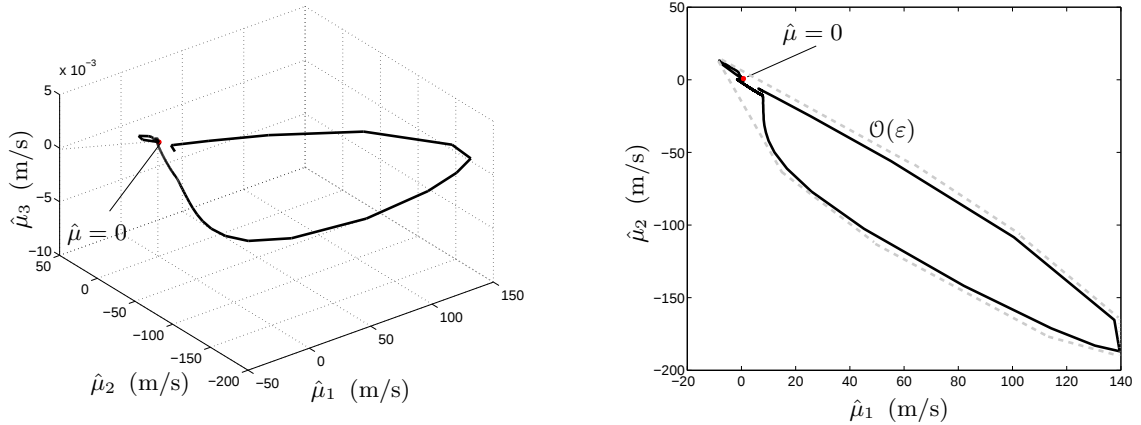
⁴Da mesma forma que no modelo para a BMR tipo (2,0), $C(q, \dot{q}) = 0$ significa que o centro de massa da BMR coincide com seu centro geométrico.



(a) μ_1 : associado com deslizamento s_1 da roda 1 (φ_1), μ_2 : associado com deslizamento s_2 da roda 2 (φ_2), μ_3 : associado com deslizamento s_3 da roda 3 (φ_3).

(b) $\bar{\mu}_1$: associado com deslizamento s_1 da roda 1 (φ_1), $\bar{\mu}_2$: associado com deslizamento s_2 da roda 2 (φ_2), $\bar{\mu}_3$: associado com deslizamento s_3 da roda 3 (φ_3).

Figura B.6: Evolução dos vetores μ e $\bar{\mu}$ para o modelo singularmente perturbado de uma BMR não-degenerada tipo (3,0).



(a) Evolução do vetor $\hat{\mu}$, vista em três dimensões: $\hat{\mu}_1 \times \hat{\mu}_2 \times \hat{\mu}_3$.

(b) Evolução do vetor $\hat{\mu}$, vista superior: $\hat{\mu}_1 \times \hat{\mu}_2$. A linha de pontos cinza representa a vizinhança $\mathcal{O}(\varepsilon)$.

Figura B.7: Diagrama de fase do vetor $\hat{\mu}$ para o modelo singularmente perturbado de uma BMR não-degenerada tipo (3,0).

$$G_3(q) = \begin{bmatrix} a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{58} & a_{59} & a_{60} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} \end{bmatrix}, \quad \Delta_0 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{16} & a_{17} & a_{18} \end{bmatrix},$$

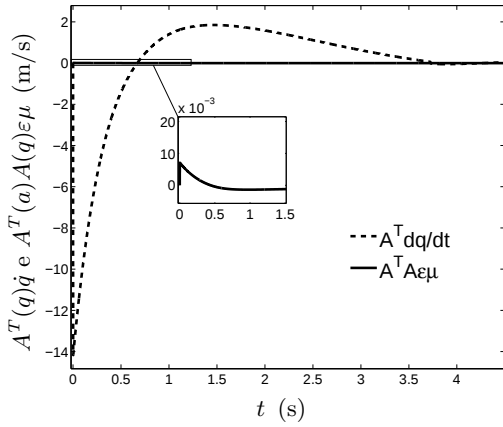
$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_{28} & a_{29} & a_{30} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{bmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} a_{19} & a_{20} & a_{21} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{25} & a_{26} & a_{27} \end{bmatrix},$$

e cada a_i , para $i = 1, 2, \dots, 72$, representa um valor conhecido e definido como

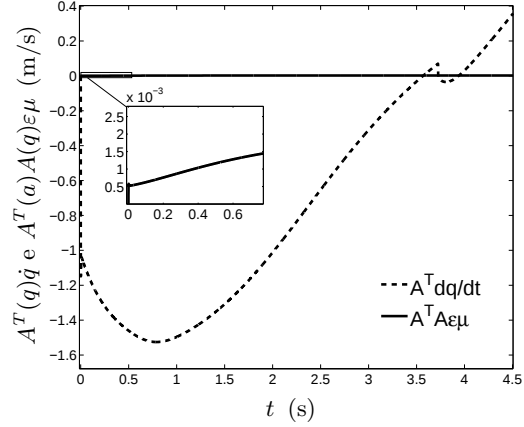
$$a_i \triangleq a_i(\|V(q, \eta, \mu)\|, D_0, G_0),$$

sendo $\|V(q, \eta, \mu)\|$ a velocidade do centro de cada roda sueca. No final deste apêndice são apresentados detalhadamente os termos $a_i(\|V(q, \eta, \mu)\|, \eta, \mu)$.

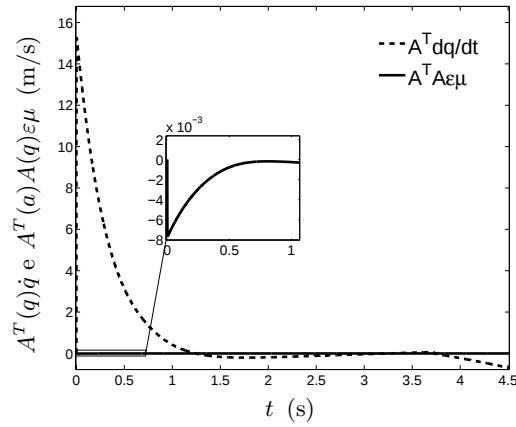
Visto que a matriz $A^T(q)$ tem três linhas [$K_r = 3$], o vetor $A^T(q)\dot{q}$ representa a violação das restrições cinemáticas, sendo que cada linha está associada com a restrição de rolamento puro de cada roda sueca [relacionadas a φ_1 , φ_2 e φ_3]. Consequentemente, o vetor μ tem cada componente associado com o *deslizamento* s_1, s_2, s_3 de cada roda sueca, tal como foi indicado



(a) Evolução do componente das restrições pfaffianas equivalente com a restrição de rolamento puro da roda associada com φ_1 .



(b) Evolução do componente das restrições pfaffianas equivalente com a restrição de rolamento puro da roda associada com φ_2 .



(c) Evolução do componente das restrições pfaffianas equivalente com a restrição de rolamento puro da roda associada com φ_3 .

Figura B.8: Comparação dos vetores $A^T(q)A(q)\varepsilon\mu$ e $A^T(q)\dot{q}$ em uma BMR tipo (3,0) quando $\varepsilon = 10^{-3}$ e $D_0 = G_0 = 1$ N ($D = G = 1000$ N).

na Tabela 3.1.

Na Figura B.6(a), é apresentada a evolução de μ para uma simulação da BMR tipo (3,0) durante 4.519 s quando a BMR executa uma trajetória com forma de losango [com ambas diagonais iguais a 6.28 m]. Os parâmetros usados na simulação são apresentados na Tabela A.1. Para efeitos de simulação e considerando a Suposição 3.8 e o critério (3.53), foi escolhido $\varepsilon = 10^{-3}$ tal que $D_0 = G_0 = 1$ N [$D = G = 1000$ N].

Fazendo $\varepsilon = 0$ em (B.11) tem-se que existe uma raiz isolada

$$\bar{\mu} = H(x, t) = -G_2^{-1}(q)G_0(q)\eta - G_2^{-1}(q)G_3(q)\tau \quad (\text{B.12})$$

que é solução de (3.12). Assim, o modelo definido por (B.10) -(B.11) é um modelo singularmente perturbado padrão, e como decorrência da diferenciabilidade dos termos envolvidos nas equações (B.10) -(B.11) e da equação (B.12), a Condição 3.1 é satisfeita. Na Figura B.6(b) é apresentada a evolução do vetor $\bar{\mu}$.

Da mesma forma que na modelagem da BMR tipo (2,0), a evolução de μ e $\bar{\mu}$ são diferentes, o que sugere impor um limite sobre o tempo t e um modelo reduzido da dinâmica rápida μ [modelo de camada limite] a fim de observar que $\bar{\mu}$ é uma boa aproximação de μ . Na Figura B.7 é observada a evolução do vetor $\hat{\mu}$. Nota-se que o diagrama de fase converge uniformemente para $\hat{\mu} = 0$, assim, a Condição 3.2 é satisfeita e, pelo Teorema 3.1 [Teorema de Tikhonov], existem $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$ e $\varepsilon^* > 0$ tal que o modelo reduzido definido por (B.10) [com

$\varepsilon = 0$, $z = [x \ y \ \theta]^T$, $w = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3]^T$ e $H(x, t)$ em (B.12)], seja exponencialmente uniformemente estável.

Nas Figuras B.8(a), B.8(b) e B.8(c) são apresentadas as evoluções da restrições de rolamento puro para as rodas associadas com φ_1 , φ_2 e φ_3 , respectivamente, quando $\varepsilon = 10^{-3}$. Nota-se que os valores de $A^T(q)A(q)\varepsilon\mu$ apresentam maior atenuação que os valores de $A^T(q)\dot{q}$, o que confirma, de acordo com as Observações B.2 e 3.1, que ε é um fator atenuante do vetor μ .

Termos na forma a_i ($\|V(q, \eta, \mu)\|$, D_0, G_0) para uma BMR tipo (3,0)

Sobre a modelagem dinâmica baseada na teoria de perturbações singulares definida pelo modelo (B.10) - (B.10), cada um dos termos na forma a_i ($\|V(q, \eta, \mu)\|$, η, μ) são definidos por funções não lineares em q como mostrados a seguir:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -\frac{6\dot{\theta}r^2\sin 2\theta}{4r^4 - 12\cos 2\theta r^2 + 9}, \\
 a_2 &= \frac{r^2\dot{\theta}(6\cos 2\theta - 4r^2)}{4r^4 - 12\cos 2\theta r^2 + 9}, \\
 a_3 &= 0, \\
 a_4 &= \frac{r^2\dot{\theta}(4r^2 - 6\cos 2\theta)}{4r^4 - 12\cos 2\theta r^2 + 9}, \\
 a_5 &= -\frac{6r^2\dot{\theta}\sin 2\theta}{4r^4 - 12\cos 2\theta r^2 + 9}, \\
 a_6 &= a_7 = a_8 = a_9 = 0, \\
 a_{10} &= m\dot{\theta}(\delta + \|V\|)(2\sqrt{3}r^2\sin 2\theta - 2r^2\cos 2\theta + 3), \\
 a_{11} &= 2m\dot{\theta}(\delta + \|V\|)(2r^2\cos 2\theta - 3), \\
 a_{12} &= -a_{10} \\
 a_{13} &= \frac{r^2\dot{\theta}(2\sqrt{3}r^2\cos 2\theta + 2r^2\sin 2\theta - 3\sqrt{3})}{4r^4 - 12\cos 2\theta r^2 + 9}, \\
 a_{14} &= -\frac{4\dot{\theta}r^4\sin 2\theta}{4r^4 - 12\cos 2\theta r^2 + 9}, \\
 a_{15} &= \frac{r^2\dot{\theta}(2r^2\sin 2\theta + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}r^2\cos 2\theta)}{4r^4 - 12\cos 2\theta r^2 + 9}, \\
 a_{16} &= a_{17} = a_{18} = 0, \\
 a_{19} &= \frac{(2\sin 2\theta + 2\sqrt{3}\cos 2\theta)r^3 - 3\sqrt{3}r}{I_w(4r^4 - 12\cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
 a_{20} &= -\frac{4r^3\sin 2\theta}{I_w(4r^4 - 12\cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
 a_{21} &= \frac{(2\sin 2\theta - 2\sqrt{3}\cos 2\theta)r^3 + 3\sqrt{3}r}{I_w(4r^4 - 12\cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
 a_{22} &= \frac{3r - r^3(2\cos 2\theta - 2\sqrt{3}\sin 2\theta)}{I_w(4r^4 - 12\cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
 a_{23} &= \frac{2r(2r^2\cos 2\theta - 3)}{I_w(4r^4 - 12\cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
 a_{24} &= \frac{3r - r^3(2\cos 2\theta + 2\sqrt{3}\sin 2\theta)}{I_w(4r^4 - 12\cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
 a_{25} &= a_{26} = a_{27} = \frac{br}{I_w(3b^2 - r^2)}, \\
 a_{28} &= -\frac{\sqrt{3}r^2(2r^2 + 3)(I_w + m\cos 2\theta)(6 + 4r^2)}{I_w m(\delta + \|V\|)(4r^4 - 12\cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
 a_{29} &= 0, \\
 a_{30} &= \frac{\sqrt{3}r^2(10I_w + m\cos 2\theta)(2r^2 + 3)(6 + 4r^2)}{10I_w m(\delta + \|V\|)(4r^4 - 12\cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
 a_{31} &= -\frac{r^2 18\sqrt{3}\sin 2\theta}{I_w(\delta + \|V\|)(4r^4 - 12\cos 2\theta r^2 + 9)} - \frac{r^2(24\sqrt{3}r^2\sin 2\theta + 8\sqrt{3}r^4\sin 2\theta)}{I_w(\delta + \|V\|)(4r^4 - 12\cos 2\theta r^2 + 9)},
 \end{aligned}$$

$$a_{32} = 0,$$

$$a_{33} = \frac{r^2 18 \sqrt{3} \sin 2\theta}{I_w (\delta + \|V\|) (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)} + \frac{r^2 (24 \sqrt{3} r^2 \sin 2\theta + 8 \sqrt{3} r^4 \sin 2\theta)}{I_w (\delta + \|V\|) (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)},$$

$$a_{34} = \frac{3br^2 (3b^2 + r^2) (I_c + I_w) (12b^2 + 4r^2)}{2I_c I_w (\delta + \|V\|) (3b^2 - r^2)^2},$$

$$a_{35} = \frac{3br^2 (3b^2 + r^2) (I_c + I_w) (12b^2 + 4r^2)}{2I_c I_w (\delta + \|V\|) (3b^2 - r^2)^2},$$

$$a_{36} = \frac{3br^2 (3b^2 + r^2) (I_c + I_w) (12b^2 + 4r^2)}{2I_c I_w (\delta + \|V\|) (3b^2 - r^2)^2},$$

$$a_{37} = \frac{\dot{\theta} \cos 2\theta \Delta_1}{I_c I_w (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)} - \frac{\dot{\theta} r^2 (2I_w + 2m \cos 2\theta - 2\sqrt{3}m \sin 2\theta)}{I_w (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)} \\ + \frac{m\dot{\theta} \cos (2\theta + 2\pi/3) \Delta_2}{I_c I_w m (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)} - \frac{m\dot{\theta} \sin (2\theta + \pi/6) \Delta_1}{I_c I_w m (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)},$$

$$a_{38} = \frac{m\dot{\theta} \sin (2\theta + \pi/3) \Delta_2}{I_c I_w m (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)} - \frac{\dot{\theta} r^2 (2\sqrt{3}I_w + 2m \sin 2\theta + 2\sqrt{3}m \cos 2\theta)}{I_w (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)} \\ - \frac{m\dot{\theta} \sin (2\theta - \pi/3) \Delta_1}{I_c I_w m (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)},$$

$$a_{39} = 0,$$

$$a_{40} = \frac{36I_w \dot{\theta} b^4 r^2 - 54I_w \dot{\theta} \cos 2\theta b^4 - 24I_w \dot{\theta} b^2 r^4}{\Delta_5} + \frac{36I_w \dot{\theta} \cos 2\theta b^2 r^2 + 4I_w \dot{\theta} r^6 - 6I_w \dot{\theta} \cos 2\theta r^4}{\Delta_5},$$

$$a_{41} = -\frac{6\dot{\theta} \sin 2\theta}{4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9},$$

$$a_{42} = 0,$$

$$a_{43} = \frac{\dot{\theta} \cos 2\theta \Delta_1}{I_c I_w (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)} - \frac{\dot{\theta} r^2}{I_w} + \frac{m\dot{\theta} \sin (2\theta + \pi/6) \Delta_2}{I_c I_w m (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)} \\ - \frac{m\dot{\theta} \cos (2\theta + \pi/3) \Delta_1}{I_c I_w m (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)},$$

$$a_{44} = \frac{\dot{\theta} r^2}{I_w} + \frac{m\dot{\theta} \sin (2\theta - \pi/3) \Delta_2}{I_c I_w m (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)} \\ + \frac{\dot{\theta} \sin 2\theta \Delta_1}{I_c I_w (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)} - \frac{m\dot{\theta} \sin (2\theta + \pi/3) \Delta_1}{I_c I_w m (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)},$$

$$a_{45} = 0,$$

$$a_{46} = -\frac{4\dot{\theta} r^2 \sin 2\theta}{4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9},$$

$$a_{47} = \frac{\dot{\theta} (3\sqrt{3}I_w + 2I_w r^2 \sin 2\theta - 2\sqrt{3}I_w r^2 \cos 2\theta)}{I_w (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)},$$

$$a_{48} = \frac{r^2 (2\dot{\theta} \sin 2\theta + 2\sqrt{3}\dot{\theta} \cos 2\theta) - 3\sqrt{3}\dot{\theta}}{4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9},$$

$$a_{49} = -\frac{3\sqrt{3}\dot{\theta} - \dot{\theta} r^2 (2 \sin 2\theta + 2\sqrt{3} \cos 2\theta)}{4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9},$$

$$a_{50} = -\frac{4\dot{\theta} r^2 \sin 2\theta}{4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9},$$

$$a_{51} = \frac{\dot{\theta} (2 \sin 2\theta - 2\sqrt{3} \cos 2\theta) r^2 + 3\sqrt{3}\dot{\theta}}{4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9},$$

$$a_{52} = \frac{\dot{\theta} \Delta_3}{2I_w (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)},$$

$$a_{53} = -\frac{\dot{\theta} \Delta_4}{I_w (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)},$$

$$a_{54} = -\frac{4\dot{\theta} r^2 \sin 2\theta}{4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9},$$

$$a_{55} = -\frac{4r^5 + (-8b^2 - 8 \cos 2\theta) r^3 + (12 \cos 2\theta b^2 + 3) r}{I_w (3b^2 - r^2) (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)},$$

$$\begin{aligned}
a_{56} &= \frac{r^3 (-4b^2 + 2 \cos 2\theta + 2\sqrt{3} \sin 2\theta) - r (6\sqrt{3}b^2 \sin 2\theta - 6b^2 \cos 2\theta + 3)}{I_w (3b^2 - r^2) (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
a_{57} &= -\frac{r^3 (4b^2 - 2 \cos 2\theta + 2\sqrt{3} \sin 2\theta) - r (6b^2 \cos 2\theta + 6\sqrt{3}b^2 \sin 2\theta - 3)}{I_w (3b^2 - r^2) (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
a_{58} &= -\frac{r^3 (4b^2 - 2 \cos 2\theta + 2\sqrt{3} \sin 2\theta) - r (6b^2 \cos 2\theta + 6\sqrt{3}b^2 \sin 2\theta - 3)}{I_w (3b^2 - r^2) (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
a_{59} &= -\frac{4r^5 + (-8b^2 - 8 \cos 2\theta) r^3 + (12 \cos 2\theta b^2 + 3) r}{I_w (3b^2 - r^2) (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
a_{60} &= \frac{r^3 (-4b^2 + 2 \cos 2\theta + 2\sqrt{3} \sin 2\theta) - r (6\sqrt{3}b^2 \sin 2\theta - 6b^2 \cos 2\theta + 3)}{I_w (3b^2 - r^2) (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
a_{61} &= \frac{r^3 (-4b^2 + 2 \cos 2\theta + 2\sqrt{3} \sin 2\theta) - r (6\sqrt{3}b^2 \sin 2\theta - 6b^2 \cos 2\theta + 3)}{I_w (3b^2 - r^2) (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
a_{62} &= -\frac{r^3 (4b^2 - 2 \cos 2\theta + 2\sqrt{3} \sin 2\theta) - r (6b^2 \cos 2\theta + 6\sqrt{3}b^2 \sin 2\theta - 3)}{I_w (3b^2 - r^2) (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
a_{63} &= -\frac{4r^5 + (-8b^2 - 8 \cos 2\theta) r^3 + (12 \cos 2\theta b^2 + 3) r}{I_w (3b^2 - r^2) (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
a_{64} &= -\frac{\Delta_{12} + \Delta_6 + \Delta_8}{I_w m (\delta + \|V\|) (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)} \\
&\quad - \frac{\Delta_{13}}{I_c I_w m (\delta + \|V\|) (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
a_{65} &= -\frac{\Delta_{10} + \Delta_{14}}{I_w m (\delta + \|V\|) (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)} \\
&\quad - \frac{\Delta_{15}}{I_c I_w m (\delta + \|V\|) (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
a_{66} &= \frac{\Delta_{17}}{I_w m (\delta + \|V\|) (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)} \\
&\quad - \frac{\Delta_{18}}{I_c I_w m (\delta + \|V\|) (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
a_{67} &= -\frac{(12b^2 + 4r^2) \Delta_{16}}{2 I_c I_w (\delta + \|V\|) (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
a_{68} &= -\frac{(3b^2 + r^2) (+) \Delta_{16}}{I_c I_w (\delta + \|V\|) (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
a_{69} &= -\frac{(12b^2 + 4r^2) \Delta_{16}}{2 I_c I_w (\delta + \|V\|) (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
a_{70} &= \frac{\Delta_{12} + \Delta_7 + \Delta_9}{I_w m (\delta + \|V\|) (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)} \\
&\quad - \frac{\Delta_{13}}{I_c I_w m (\delta + \|V\|) (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
a_{71} &= -\frac{\Delta_{11} + \Delta_{14}}{I_w m (\delta + \|V\|) (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)} \\
&\quad - \frac{\Delta_{15}}{I_c I_w m (\delta + \|V\|) (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)}, \\
a_{72} &= -\frac{\Delta_{19}}{I_w m (\delta + \|V\|) (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)} \\
&\quad - \frac{\Delta_{20}}{I_c I_w m (\delta + \|V\|) (3b^2 - r^2)^2 (4r^4 - 12 \cos 2\theta r^2 + 9)},
\end{aligned}$$

com Δ_i , para $i = 1, \dots, 20$, definidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 18I_c I_w b^4 + 2I_c I_w r^4 - 9I_w b^2 m - 3I_c m r^2 + 4I_c m r^4 \cos 2\theta - 12I_c I_w b^2 r^2 - 8I_c b^2 m r^4 + 12I_c b^4 m r^2 \\
&\quad - 4I_w b^2 m r^4 + 12I_w b^2 m r^2 \cos 2\theta, \\
\Delta_2 &= 36I_c I_w b^4 + 4I_c I_w r^4 + 9I_w b^2 m + 3I_c m r^2 + 4I_c m r^6 - 4I_c m r^4 \cos 2\theta - 24I_c I_w b^2 r^2 - 16I_c b^2 m r^4 \\
&\quad + 24I_c b^4 m r^2 + 4I_w b^2 m r^4 - 12I_w b^2 m r^2 \cos 2\theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &= 6\sqrt{3}I_w - 9r^2 \cos 2\theta + 6r^4 \cos 4\theta - 4r^6 \cos 2\theta - 9r^2 \sin 2\theta + 6r^4 \sin 4\theta - 4r^6 \sin 2\theta + 6\sqrt{3}r^4 + 6r^4 \\
&\quad - 9\sqrt{3}r^2 \cos 2\theta + 6\sqrt{3}r^4 \cos 4\theta - 4\sqrt{3}r^6 \cos 2\theta + 9\sqrt{3}r^2 \sin 2\theta - 6\sqrt{3}r^4 \sin 4\theta + 4\sqrt{3}r^6 \sin 2\theta + 4\sqrt{3}mr^2 \\
\Delta_4 &= 3\sqrt{3}I_w - 9r^2 \cos 2\theta + 6r^4 \cos 4\theta - 4r^6 \cos 2\theta - 9r^2 \sin 2\theta + 6r^4 \sin 4\theta - 4r^6 \sin 2\theta + 6r^4 + 2\sqrt{3}mr^2, \\
\Delta_5 &= 36I_w b^4 r^4 - 108I_w \cos 2\theta b^4 r^2 + 81I_w b^4 - 24I_w b^2 r^6 + 72I_w \cos 2\theta b^2 r^4 - 54I_w b^2 r^2 + 4I_w r^8 \\
&\quad - 12I_w \cos 2\theta r^6 + 9I_w r^4, \\
\Delta_6 &= \frac{27}{2}mr^4 + 27mr^6 + 24mr^8 + 16mr^{10} - \frac{27}{2}mr^4 + 9mr^6 - 18mr^6 \cos 2\theta - 24mr^8 \cos 2\theta + 18mr^6 \cos 2\theta, \\
\Delta_7 &= -\frac{27}{2}mr^4 - 9mr^6 + 12mr^8 + \frac{27}{2}mr^4 + 9mr^6 + 12mr^8 + 18mr^6 \cos 2\theta + 24mr^8 \cos 2\theta - 18mr^6 \cos 2\theta, \\
\Delta_8 &= \frac{81}{2}b^2 mr^2 + 27b^2 mr^4 + 162b^4 mr^2 - 72b^2 mr^6 + 54b^4 mr^4 + 162b^6 mr^2 + 36b^4 mr^6 \\
&\quad + 108b^6 mr^4 - \frac{81}{2}b^2 mr^2 - 27b^2 mr^4 + 162b^4 mr^2 - 72b^2 mr^6 + 162b^4 mr^4 - 162b^6 mr^2 + 108b^4 mr^6 \\
&\quad - 108b^6 mr^4 - 54b^2 mr^4 \cos 2\theta - 108b^2 mr^6 \cos 2\theta - 108b^4 mr^4 \cos 2\theta + 54b^2 mr^4 \cos 2\theta \\
&\quad - 36b^2 mr^6 \cos 2\theta - 108b^4 mr^4 \cos 2\theta, \\
\Delta_9 &= -\frac{81}{2}b^2 mr^2 - 135b^2 mr^4 - 108b^2 mr^6 + 54b^4 mr^4 + 162b^6 mr^2 - 72b^2 mr^8 - 36b^4 mr^6 \\
&\quad + 108b^6 mr^4 + \frac{81}{2}b^2 mr^2 - 81b^2 mr^4 - 36b^2 mr^6 + 162b^4 mr^4 - 162b^6 mr^2 - 24b^2 mr^8 \\
&\quad + 36b^4 mr^6 - 108b^6 mr^4 + 54b^2 mr^4 \cos 2\theta + 108b^2 mr^6 \cos 2\theta + 108b^4 mr^4 \cos 2\theta - 54b^2 mr^4 \cos 2\theta \\
&\quad + 36b^2 mr^6 \cos 2\theta + 108b^4 mr^4 \cos 2\theta, \\
\Delta_{10} &= (3b^2 + r^2) (81I_w b^4 - 81I_w b^4 + 9I_w r^4 + 6I_w r^6 - 9I_w r^4 - 6I_w r^6 + 9mr^4 + 6mr^6 + 8mr^8 \\
&\quad + 9mr^4 - 6mr^6 - 12mr^6 \cos 2\theta - 12mr^6 \cos 2\theta - 54I_w b^2 r^2 - 36I_w b^2 r^4 + 54I_w b^4 r^2 + 54I_w b^2 r^2 \\
&\quad + 36I_w b^2 r^4 - 54I_w b^4 r^2 + 27b^2 mr^2 - 36b^2 mr^4 + 54b^4 mr^2 - 12b^2 mr^6 + 36b^4 mr^4 + 27b^2 mr^2 \\
&\quad + 36b^2 mr^4 - 54b^4 mr^2 + 36b^2 mr^6 - 36b^4 mr^4), \\
\Delta_{11} &= (3b^2 + r^2) (81I_w b^4 - 81I_w b^4 - 9I_w r^4 - 6I_w r^6 + 9I_w r^4 + 6I_w r^6 + 9mr^4 - 6mr^6 + 9mr^4 \\
&\quad + 6mr^6 + 8mr^8 - 12mr^6 \cos 2\theta - 12mr^6 \cos 2\theta + 54I_w b^2 r^2 + 36I_w b^2 r^4 - 54I_w b^4 r^2 - 54I_w b^2 r^2 \\
&\quad - 36I_w b^2 r^4 + 54I_w b^4 r^2 + 27b^2 mr^2 + 36b^2 mr^4 - 54b^4 mr^2 + 36b^2 mr^6 - 36b^4 mr^4 + 27b^2 mr^2 \\
&\quad - 36b^2 mr^4 + 54b^4 mr^2 - 12b^2 mr^6 + 36b^4 mr^4), \\
\Delta_{12} &= \frac{243}{2}I_w b^4 + 243I_w b^6 + \frac{243}{2}I_w b^4 - 243I_w b^6 + \frac{27}{2}I_w r^4 + 27I_w r^6 + 12I_w r^8 + \frac{27}{2}I_w r^4 + 9I_w r^6 \\
&\quad - 81I_w b^2 r^2 - 135I_w b^2 r^4 + 81I_w b^4 r^2 - 54I_w b^2 r^6 + 162I_w b^6 r^2 - 81I_w b^2 r^2 - 81I_w b^2 r^4 \\
&\quad + 243I_w b^4 r^2 - 18I_w b^2 r^6 + 108I_w b^4 r^4 - 162I_w b^6 r^2, \\
\Delta_{13} &= \frac{243}{2}I_w b^4 m + 243I_w b^6 m - \frac{243}{2}I_w b^4 m + 243I_w b^6 m + \frac{81}{2}I_w b^2 mr^2 + 54I_w b^2 mr^4 + 243I_w b^4 mr^2 \\
&\quad + 18I_w b^2 mr^6 + 54I_w b^4 mr^4 + 24I_w b^2 mr^8 + 108I_w b^4 mr^6 + 108I_w b^6 mr^4 - \frac{81}{2}I_w b^2 mr^2 + 81I_w b^4 mr^2 \\
&\quad - 18I_w b^2 mr^6 - 54I_w b^4 mr^4 + 36I_w b^4 mr^6 + 108I_w b^6 mr^4 - 54I_w b^2 mr^4 \cos 2\theta - 162I_w b^4 mr^2 \cos 2\theta \\
&\quad - 72I_w b^2 mr^6 \cos 2\theta - 324I_w b^4 mr^4 \cos 2\theta - 324I_w b^6 mr^2 \cos 2\theta + 54I_w b^2 mr^4 \cos 2\theta + 162I_w b^4 mr^2 \cos 2\theta \\
&\quad - 108I_w b^4 mr^4 \cos 2\theta - 324I_w b^6 mr^2 \cos 2\theta, \\
\Delta_{14} &= -36b^2 mr^4 \cos 2\theta - 36b^2 mr^4 \cos 2\theta, \\
\Delta_{15} &= (3b^2 + r^2) (81I_w b^4 m + 81I_w b^4 m + 27I_w b^2 mr^2 + 12I_w b^2 mr^6 + 36I_w b^4 mr^4 + 27I_w b^2 mr^2 + 12I_w b^2 mr^6 \\
&\quad + 36I_w b^4 mr^4 - 36I_w b^2 mr^4 \cos 2\theta - 108I_w b^4 mr^2 \cos 2\theta - 36I_w b^2 mr^4 \cos 2\theta - 108I_w b^4 mr^2 \cos 2\theta), \\
\Delta_{16} &= 81I_w b^4 + 9I_w r^4 + 4I_w r^8 + 27I_w b^2 r^2 + 12I_w b^2 r^6 + 27I_w b^2 r^2 + 12I_w b^2 r^6 + 36I_w b^4 r^4 - 12I_w r^6 \cos 2\theta \\
&\quad - 36I_w b^2 r^4 \cos 2\theta - 36I_w b^2 r^4 \cos 2\theta - 108I_w b^4 r^2 \cos 2\theta, \\
\Delta_{17} &= \frac{243}{2}I_w b^4 - 243I_w b^6 + \frac{243}{2}I_w b^4 + 243I_w b^6 + \frac{27}{2}I_w r^4 + 9I_w r^6 + \frac{27}{2}I_w r^4 + 27I_w r^6 + 12I_w r^8 \\
&\quad + \frac{27}{2}mr^4 + 9mr^6 + 12mr^8 - \frac{27}{2}mr^4 - 9mr^6 + 12mr^8 - 18mr^6 \cos 2\theta + 18mr^6 \cos 2\theta + 24mr^8 \cos 2\theta \\
&\quad - 162I_w b^2 r^2 - 81I_w b^2 r^4 + 243I_w b^4 r^2 - 18I_w b^2 r^6 + 108I_w b^4 r^4 - 162I_w b^6 r^2 - 135I_w b^2 r^4 + 81I_w b^4 r^2 \\
&\quad - 54I_w b^2 r^6 + 162I_w b^6 r^2 + \frac{81}{2}b^2 mr^2 - 81b^2 mr^4 - 36b^2 mr^6 + 162b^4 mr^4 - 162b^6 mr^2 - 24b^2 mr^8 \\
&\quad + 36b^4 mr^6 - 108b^6 mr^4 - \frac{81}{2}b^2 mr^2 - 135b^2 mr^4 - 108b^2 mr^6 + 54b^4 mr^4 + 162b^6 mr^2 - 72b^2 mr^8 - 36b^4 mr^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 108b^6mr^4 - 54b^2mr^4 \cos 2\theta + 36b^2mr^6 \cos 2\theta + 108b^4mr^4 \cos 2\theta + 54b^2mr^4 \cos 2\theta + 108b^2mr^6 \cos 2\theta \\
& + 108b^4mr^4 \cos 2\theta, \\
\Delta_{18} = & 243I_w b^6 m - \frac{243}{2}I_w b^4 m + \frac{243}{2}I_w b^4 m + 243I_w b^6 m - \frac{81}{2}I_w b^2 mr^2 + 81I_w b^4 mr^2 - 18I_w b^2 mr^6 \\
& - 54I_w b^4 mr^4 + 36I_w b^4 mr^6 + 108I_w b^6 mr^4 + \frac{81}{2}I_w b^2 mr^2 + 54I_w b^2 mr^4 + 243I_w b^4 mr^2 + 18I_w b^2 mr^6 \\
& + 54I_w b^4 mr^4 + 24I_w b^2 mr^8 + 108I_w b^4 mr^6 + 108I_w b^6 mr^4 + 54I_w b^2 mr^4 \cos 2\theta + 162I_w b^4 mr^2 \cos 2\theta \\
& - 108I_w b^4 mr^4 \cos 2\theta - 324I_w b^6 mr^2 \cos 2\theta - 54I_w b^2 mr^4 \cos 2\theta - 162I_w b^4 mr^2 \cos 2\theta - 72I_w b^2 mr^6 \cos 2\theta \\
& - 324I_w b^4 mr^4 \cos 2\theta - 324I_w b^6 mr^2 \cos 2\theta, \\
\Delta_{19} = & \frac{243}{2}I_w b^4 - 324I_w b^6 + 162I_w b^8 + \frac{243}{2}I_w b^4 + 324I_w b^6 + 162I_w b^8 + \frac{27}{2}I_w r^4 + 6I_w r^6 + \frac{27}{2}I_w r^4 \\
& + 30I_w r^6 + 16I_w r^8 - 9mr^4 + 9mr^6 + 9mr^4 + 21mr^6 + 24mr^8 + 16mr^{10} + 12mr^6 \cos 2\theta \\
& - 12mr^6 \cos 2\theta - 16mr^8 \cos 2\theta - 81I_w b^2 r^2 - 72I_w b^2 r^4 + 270I_w b^4 r^2 - 12I_w b^2 r^6 + 90I_w b^4 r^4 \\
& - 216I_w b^6 r^2 - 81I_w b^2 r^2 - 144I_w b^2 r^4 + 54I_w b^4 r^2 - 60I_w b^2 r^6 - 54I_w b^4 r^4 + 216I_w b^6 r^2 \\
& - 27b^2 mr^2 - 36b^2 mr^4 + 135b^4 mr^2 - 60b^2 mr^6 + 180b^4 mr^4 - 216b^6 mr^2 + 84b^4 mr^6 - 144b^6 mr^4 \\
& + 108b^8 mr^2 + 27b^2 mr^2 + 135b^4 mr^2 - 84b^2 mr^6 + 36b^4 mr^4 + 216b^6 mr^2 - 16b^2 mr^8 - 12b^4 mr^6 \\
& + 144b^6 mr^4 + 108b^8 mr^2 + 36b^2 mr^4 \cos 2\theta - 24b^2 mr^6 \cos 2\theta - 72b^4 mr^4 \cos 2\theta - 36b^2 mr^4 \cos 2\theta \\
& - 72b^2 mr^6 \cos 2\theta - 72b^4 mr^4 \cos 2\theta, \\
\Delta_{20} = & \frac{9}{2}b^2 - 9b^4 - \frac{9}{2}b^2 - 9b^4 + \frac{3}{2}r^2 - \frac{3}{2}r^2 - 2r^4 - 3b^2 r^2 - 9b^2 r^2 - 81I_w b^4 m + 162I_w b^6 m + 81I_w b^4 m \\
& + 162I_w b^6 m - 27I_w b^2 mr^2 + 54I_w b^4 mr^2 - 12I_w b^2 mr^6 - 36I_w b^4 mr^4 + 24I_w b^4 mr^6 + 72I_w b^6 mr^4 \\
& + 27I_w b^2 mr^2 + 36I_w b^2 mr^4 + 162I_w b^4 mr^2 + 12I_w b^2 mr^6 + 36I_w b^4 mr^4 + 16I_w b^2 mr^8 + 72I_w b^4 mr^6 \\
& + 72I_w b^6 mr^4 + 36I_w b^2 mr^4 \cos 2\theta + 108I_w b^4 mr^2 \cos 2\theta - 72I_w b^4 mr^4 \cos 2\theta - 216I_w b^6 mr^2 \cos 2\theta \\
& - 36I_w b^2 mr^4 \cos 2\theta - 108I_w b^4 mr^2 \cos 2\theta - 48I_w b^2 mr^6 \cos 2\theta - 216I_w b^4 mr^4 \cos 2\theta - 216I_w b^6 mr^2 \cos 2\theta.
\end{aligned}$$

Anexos do Capítulo 4

Quando as BMRs não satisfazem as restrições cinemáticas de rolamento puro e não-derrapagem as forças de interação devem ser formuladas por equações físicas que modelam o contato entre a superfície e a roda. Modelos lineares dessas forças têm sido considerados, entretanto, o controlador dinâmico não consegue estimar componentes de maior crescimento associados com as forças de tração. Dessa forma remanescências de deslizamento e derrapagem, não estimáveis, estarão presentes durante o seguimento de uma determinada trajetória.

C.1 Observações adicionais

Como já foi comentado na Seção 4.5, a compensação por controle antecipativo pode responder mais rapidamente para tipos de perturbações conhecidas e mensuráveis. Aqui é considerado como pré-requisito para implementar o esquema de compensação por controle antecipativo que a função h_γ [definida em (4.136)] seja mensurável para diferentes trajetórias. Dessa forma, aqui será observado o comportamento das BMRs tipo (2,0) e (3,0) para as trajetórias apresentadas na Tabela C.1.

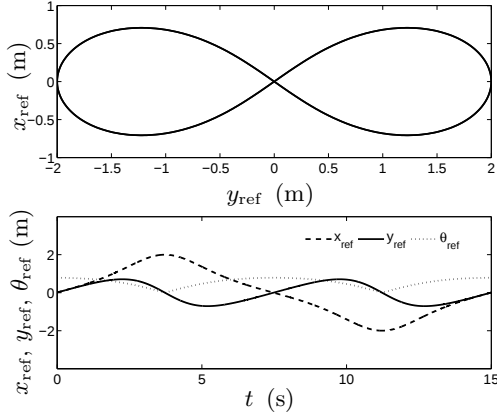
Tabela C.1: Trajetórias de referência.

$h_{\text{ref}} = [x_{\text{ref}} \ y_{\text{ref}}]^T$	θ_{ref}	Descrição
$\begin{cases} x_{\text{ref}}(t) = 2 \frac{\sin 4\pi t}{1 + \cos^2(4\pi t)} \\ y_{\text{ref}}(t) = 2 \frac{\sin 4\pi t \cos 4\pi t}{1 + \cos^2(4\pi t)} \end{cases}$	$\tan^{-1}(\cos 4\pi t)$	Lemniscata
$\begin{cases} x_{\text{ref}}(t) = 2^{t+1} \cos 4\pi t \\ y_{\text{ref}}(t) = 2^{t+1} \sin 4\pi t \end{cases}$	$4\pi t$	Espiral

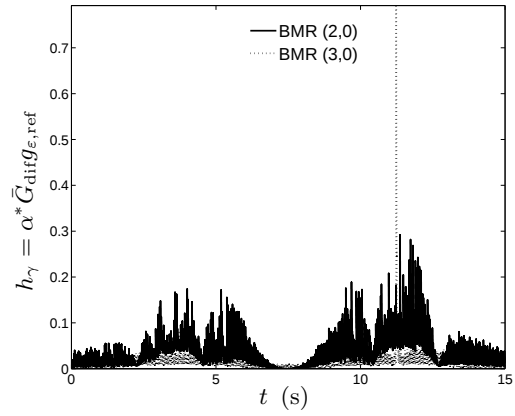
Nas Figuras C.1(b) e C.1(d), o fator $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}}$ em (4.136) tem sido configurado com valor unitário para observar o comportamento da função $g_{\varepsilon, \text{ref}}$ em (4.132). Nota-se que a norma apresenta picos associados com as regiões da trajetória de referência onde existe uma mudança mais abrupta de orientação [veja o componente paramétrico $\theta_{\text{ref}}(t)$ nas Figuras C.1(a) e C.1(c)].

BMR tipo (2,0)

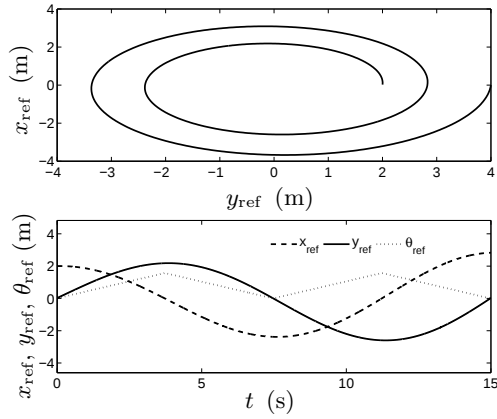
A fim de observar a evolução do controlador com compensação das remanescências de deslizamento e derrapagem, nas Figuras C.2 e C.3 pode ser conferido, respectivamente, o seguimento das trajetórias de referência lemniscata e espiral [descritas na Tabela C.1] quando



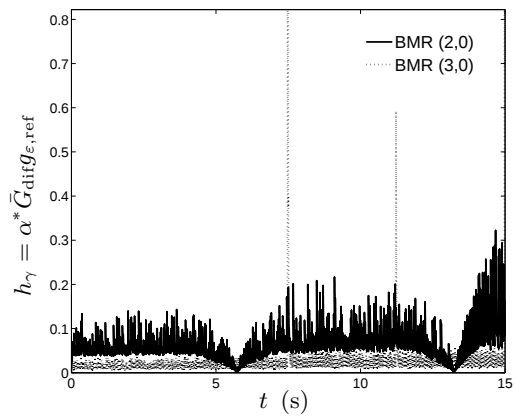
(a) Trajetória de referência lemniscata (superior). Componentes paramétricas $x_{\text{ref}}(t)$, $y_{\text{ref}}(t)$ (inferior).



(b) Evolução da função de h_γ em (4.133) associada com a trajetória de referência lemniscata.



(c) Trajetória de referência espiral (superior). Componentes paramétricas $x_{\text{ref}}(t)$, $y_{\text{ref}}(t)$ (inferior).



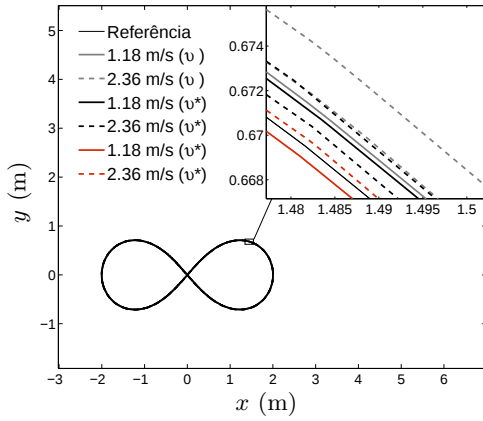
(d) Evolução da função de h_γ em (4.133) associada com a trajetória de referência espiral.

Figura C.1: Trajetórias de referência com seus componentes paramétricos x_{ref} , y_{ref} e θ_{ref} (esquerda). Evolução da função h_γ definida em (4.133) para as trajetórias de referência da Tabela C.1 com $T = 15$ s e $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} = 1$ (direita).

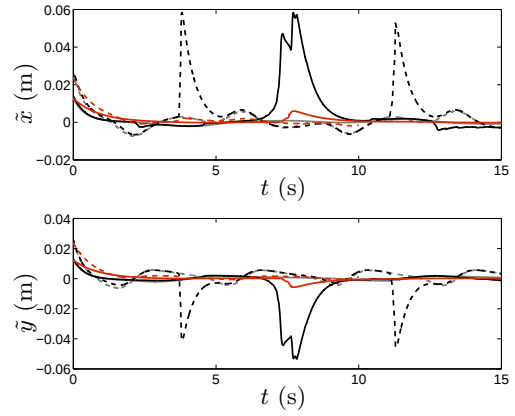
são usadas as leis de controle auxiliar v [sem compensação das remanescências, ajustada como no Caso 1 da Tabela 4.2] e a lei de controle auxiliar v^* [com compensação das remanescências] com $T = 15$ s, $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} = 300.8$ e $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \lambda^* = 12.35$ para os quatro casos de $\|V_i\|_{\text{med}}$. Na Tabela C.2 podem ser conferidos os índices IAE relacionados com o desempenho do controlador.

Pode ser conferido que, diferentemente do seguimento da trajetória espiral, no seguimento da trajetória lemniscata, para $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 2.36$ m/s, o erro de seguimento apresenta incrementos abruptos quando é usada a lei de controle auxiliar v^* e um maior índice IAE [veja Figura C.2(b) e células em negrito da Tabela C.2]. Então, de acordo com a Observação 4.22, será feita uma modificação das matrizes K_1 e K_2 a fim de diminuir tais incrementos. Na Tabela C.2 pode ser observada a diminuição do índice IAE pelo re-ajuste das matrizes K_1 e K_2 , e na Figura C.2(b) pode ser conferida a redução de erro [veja as linhas vermelhas]. No caso em que é usada a lei v sobre a mesma modificação de K_1 e K_2 pode ser verificado, nos índices IAE, que o seguimento da trajetória é comprometido. Similarmente ao caso com a trajetória de referência losango [no Capítulo 4], nas Figuras C.2(c) e C.3(a) pode ser conferido o comportamento instável do controlador quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 61.25$ m/s nas trajetórias lemniscata e espiral, respectivamente.

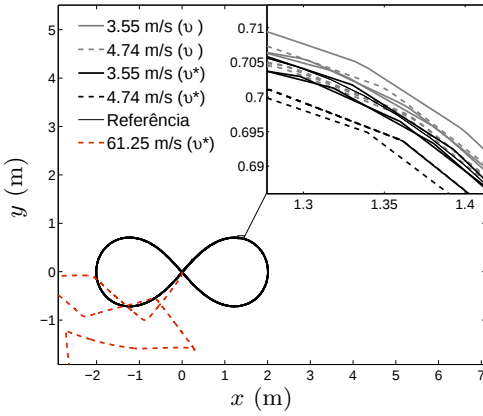
Similarmente a como foi calculado no Capítulo 4, foram usadas duas triplas $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle$, com valores mínimo e máximo de χ_3 do mapa χ_ε , para projetar os planos π_1 e π_2 , como também o espaço confinando U_V .



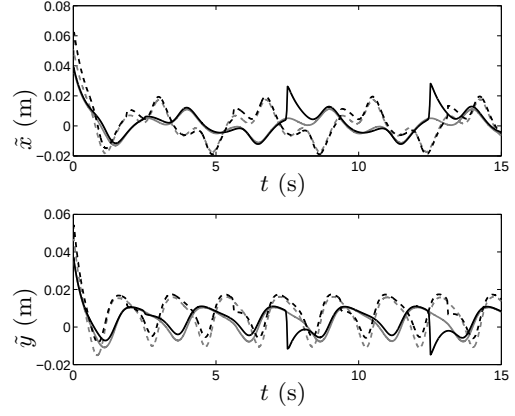
(a) Seguimento da trajetória lemniscata para utilização da lei de controle flexível (3.78) usando v e v^* para $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 2.36$ m/s.



(b) Evolução do erro de seguimento da trajetória lemniscata ($h - h_{\text{ref}}$) usando v e v^* para $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 2.36$ m/s.



(c) Seguimento da trajetória lemniscata para utilização da lei de controle flexível (3.78) usando v e v^* para $\|V_i\|_{\text{med}} = 3.55$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 4.74$ m/s.

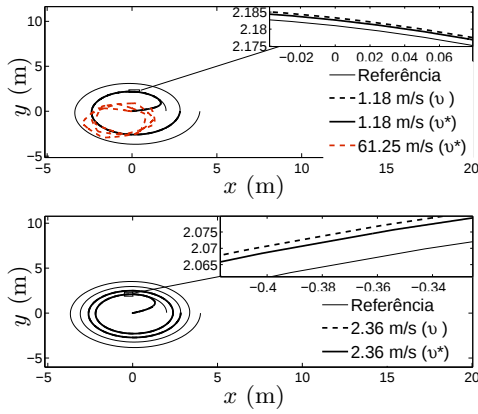


(d) Evolução do erro de seguimento da trajetória lemniscata ($h - h_{\text{ref}}$) usando v e v^* para $\|V_i\|_{\text{med}} = 3.55$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 4.74$ m/s.

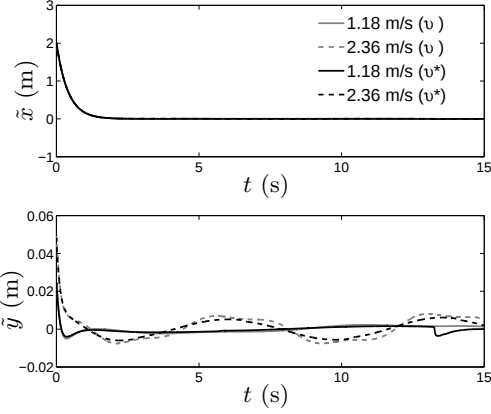
Figura C.2: Seguimento da trajetória lemniscata para BMR tipo (2,0) usando v e v^* . Redução pelo re-ajuste de K_1 e K_2 (linhas vermelhas na Subfigura C.3(b)). Caso de instabilidade quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 61.25$ m/s (linha vermelha na Subfigura C.2(c)).

Tabela C.2: Índice IAE para uma BMR do tipo (2,0) com incrementos em $\|V_i\|_{\text{med}}$ no seguimento das trajetórias da Tabela C.1 por meio da lei de controle auxiliar modificada (4.140) com $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} = 300.8$ e $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \lambda^* = 12.35$.

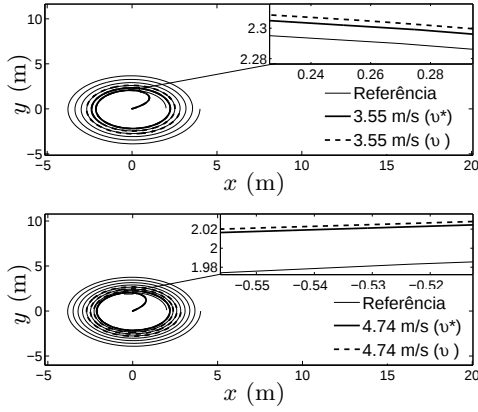
$\ V_i\ _{\text{med}}$ (m/s)	Lemniscata		Espiral		$K_1 I_{2 \times 2}$	$K_2 I_{2 \times 2}$
	IAE v^*	IAE v	IAE v^*	IAE v		
1.18	0.198	0.036	0.345	3.101	300	120
2.36	0.223	0.160	0.584	19.786		
3.55	0.169	0.382	0.530	28.472		
4.74	0.929	1.696	0.810	54.781		
Modificação para K_1, K_2 [Lemniscata para $\ V_i\ _{\text{med}} = 1.18$ m/s e $\ V_i\ _{\text{med}} = 2.36$ m/s]						
1.18	0.030	0.048	-	-	2000	1800
2.36	0.003	0.082	-	-	800	600



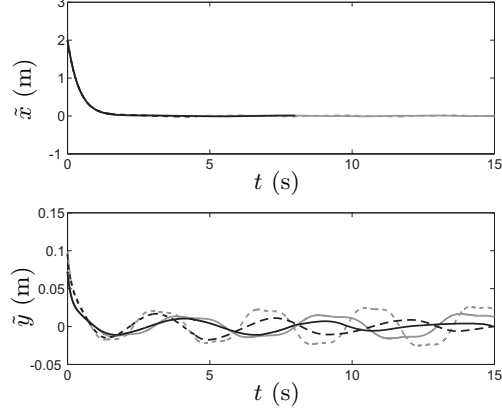
(a) Seguimento da trajetória espiral para utilização da lei de controle flexível (3.78) usando v e v^* para $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 2.36$ m/s.



(b) Evolução do erro de seguimento da trajetória espiral ($h - h_{\text{ref}}$) usando v e v^* para $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 2.36$ m/s.



(c) Seguimento da trajetória espiral para utilização da lei de controle flexível (3.78) usando v e v^* para $\|V_i\|_{\text{med}} = 3.55$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 4.74$ m/s.



(d) Evolução do erro de seguimento da trajetória espiral ($h - h_{\text{ref}}$) usando v e v^* para $\|V_i\|_{\text{med}} = 3.55$ m/s e $\|V_i\|_{\text{med}} = 4.74$ m/s.

Figura C.3: Seguimento da trajetória espiral para BMR tipo (2,0) usando v e v^* . Caso de instabilidade quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 61.25$ m/s (linha vermelha na Subfigura C.3(a)).

Para a trajetória lemniscata foi obtido $V_T^* \approx 2$ s/m. Com esse valor e com as triplas $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle \approx \langle 3.9277 \times 10^3, 3.9277 \times 10^3, 0.4657 \rangle$ [sendo $0.4657 \leq \chi_3$, para $\forall \chi_3 \in \chi_\epsilon$] e $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle \approx \langle 10.2712, 10.2712, 3.3594 \rangle$ [sendo $3.3594 \geq \chi_3$, para $\forall \chi_3 \in \chi_\epsilon$], temos que

$$\begin{aligned} \pi_2 : \quad & \chi_3 - 0.11856 \times 10^{-3} \chi_1 - 0.11856 \times 10^{-3} \chi_2 = 0, \\ \pi_1 : \quad & \chi_3 - 0.32706 \chi_1 - 0.32706 \chi_2 = 0, \end{aligned}$$

tal que $\|V_t(q, \eta, \mu)\| < 1379.30161$. Na Figura C.4 também pode ser conferido que quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 61.25$ m/s as triplas $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle$ permanecem fora dos planos π_1 e π_2 .

Para a trajetória espiral foi obtido $V_T^* \approx 1.3$ s/m e as triplas escolhidas foram: $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle \approx \langle 867.9635, 867.9635, 0.7883 \rangle$ [sendo $0.7883 \leq \chi_3$, para $\forall \chi_3 \in \chi_\epsilon$] e $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle \approx \langle 1.9672, 1.9672, 5.9081 \rangle$ [sendo $5.9081 \geq \chi_3$, para $\forall \chi_3 \in \chi_\epsilon$]. Assim,

$$\begin{aligned} \pi_2 : \quad & \chi_3 - 9.08217 \times 10^{-4} \chi_1 - 9.08217 \times 10^{-4} \chi_2 = 0, \\ \pi_1 : \quad & \chi_3 - 3.0033 \chi_1 - 3.0033 \chi_2 = 0, \end{aligned}$$

tal que $\|V_t(q, \eta, \mu)\| < 2543.699$. Na Figura C.5 também pode ser conferido que quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 61.25$ m/s as triplas $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle$ permanecem fora dos planos π_1 e π_2 .

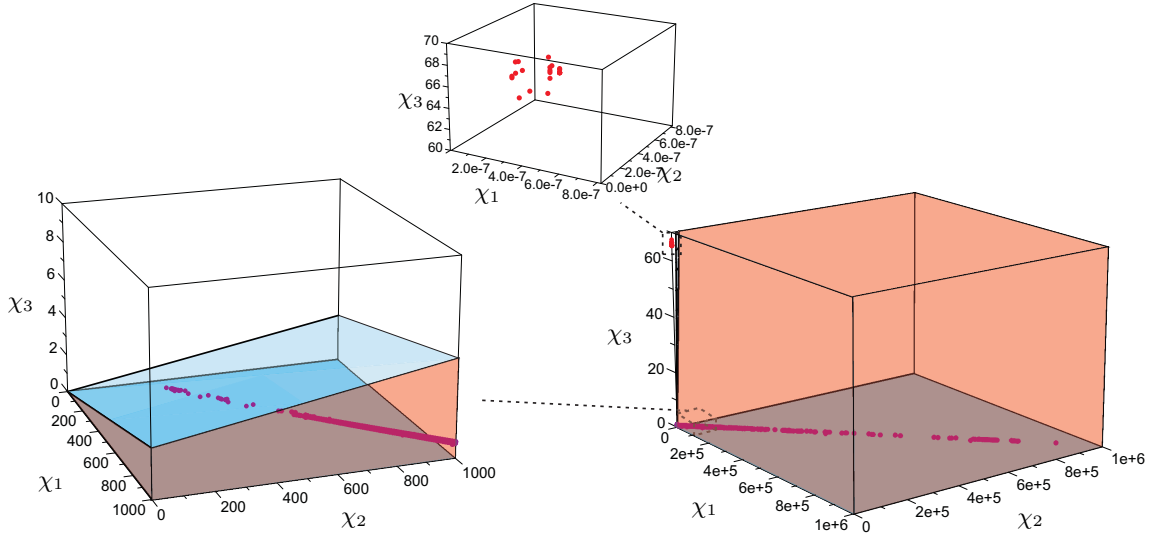


Figura C.4: Espaço confinado U_V quando $\|V_i\|$ é incrementado no seguimento da trajetória de referência lemniscata pelo uso de v^* na BMR tipo (2,0).

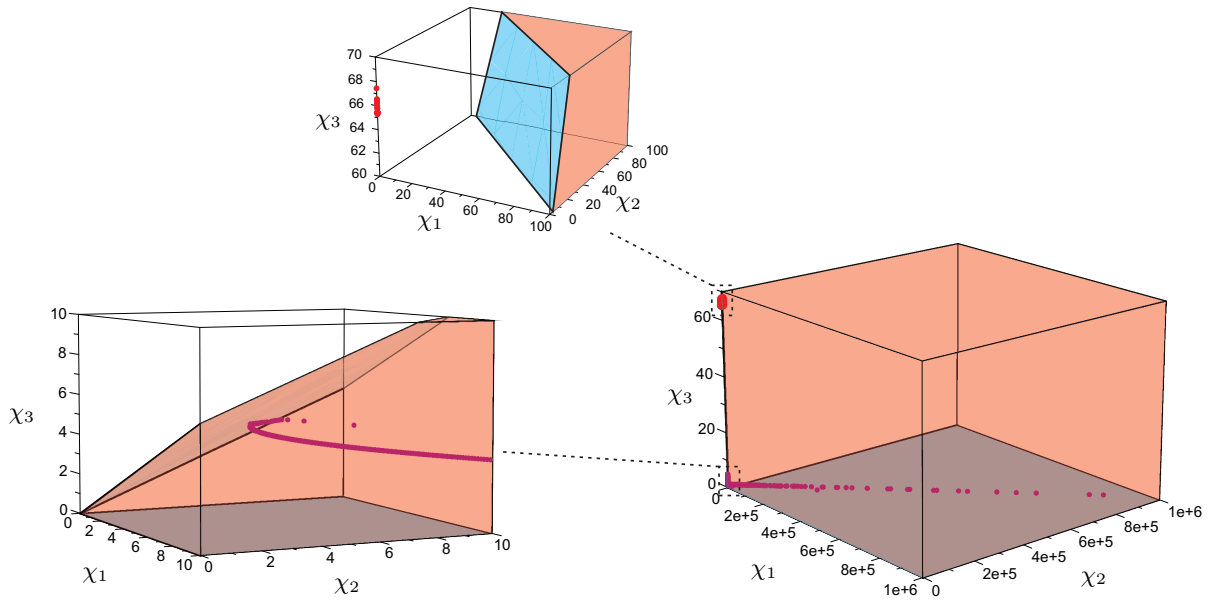
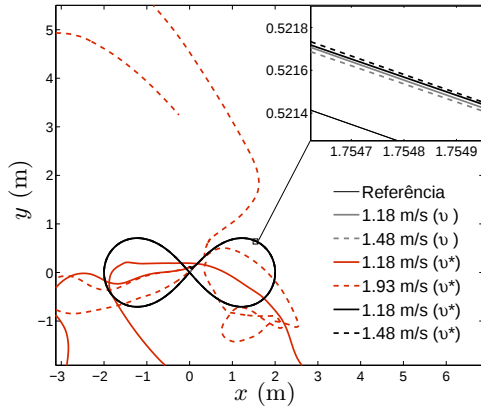


Figura C.5: Espaço confinado U_V quando $\|V_i\|$ é incrementado no seguimento da trajetória de referência espiral pelo uso de v^* na BMR tipo (2,0).

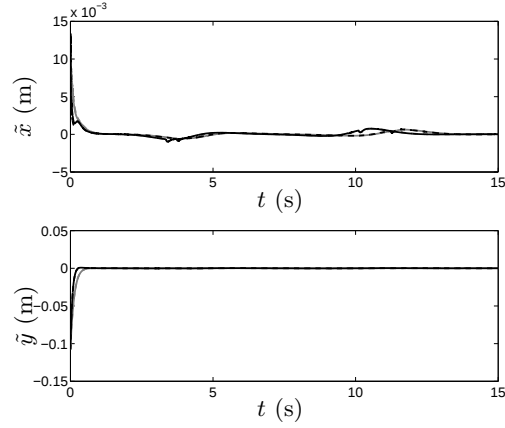
BMR tipo (3,0)

Do mesmo modo que no caso da BMR tipo (2,0), na Figura C.6 pode ser conferido o seguimento das trajetórias de referência lemniscata e espiral [descritas na Tabela C.1] quando são usadas as leis de controle auxiliar v [sem compensação das remanescências, ajustada como no Caso 4 da Tabela 4.2] e a lei de controle auxiliar v^* [com compensação das remanescências] com $T = 15$ s, $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} = 10.42$ e $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \lambda^* = 10^{-25}$ para os dois casos de $\|V_i\|_{\text{med}}$.

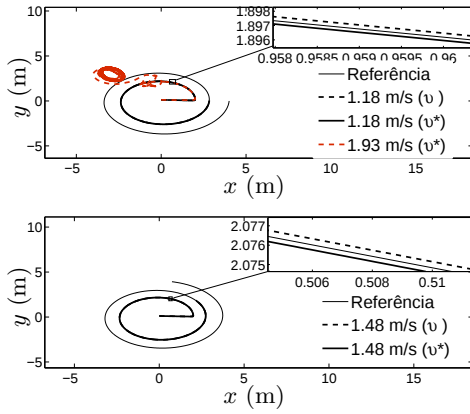
Na Tabela C.3 pode ser observado que a utilização da lei de controle v^* consegue um melhor desempenho do controlador. No entanto, no caso particular da trajetória lemniscata a utilização das matrizes $K_1 = 1600$ e $K_2 = 45$, usados para a trajetória de referência espiral, instabiliza o seguimento da trajetória [veja o caso $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18$ m/s representado pela linha vermelha sólida na Figura C.6(a) e células em negrito da Tabela C.3]. A fim de melhorar o desempenho do controlador tais matrizes são re-ajustadas a $K_1 = 1600$ e $K_2 = 200$, como indicado na Tabela C.3. Também pode ser observado nas Figuras C.6(a) e C.6(c) [linhas vermelhas] que quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.93$ m/s sistema de controle se torna instável.



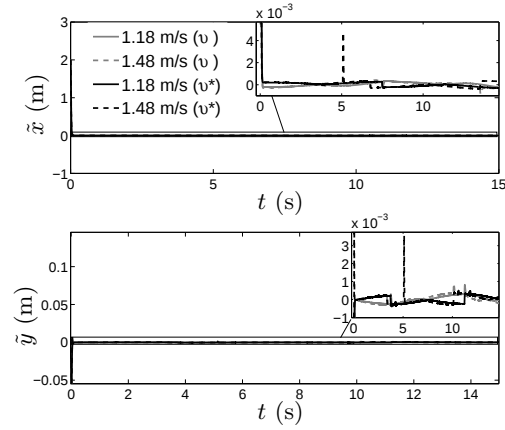
(a) Seguimento da trajetória lemniscata para utilização da lei de controle flexível (3.78) com/sem compensação das remanescências para $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18 \text{ m/s}$ e $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.48 \text{ m/s}$.



(b) Evolução do erro de seguimento da trajetória lemniscata ($h - h_{\text{ref}}$) usando v e v^* para $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18 \text{ m/s}$ e $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.48 \text{ m/s}$.



(c) Seguimento da trajetória espiral para utilização da lei de controle flexível (3.78) usando v e v^* para $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18 \text{ m/s}$ e $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.48 \text{ m/s}$.



(d) Evolução do erro de seguimento da trajetória espiral ($h - h_{\text{ref}}$) usando v e v^* para $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.18 \text{ m/s}$ e $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.48 \text{ m/s}$.

Figura C.6: Seguimento das trajetórias espiral e lemniscata para BMR tipo (3,0) usando v e v^* . Caso de instabilidade quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 1.93 \text{ m/s}$ (linha vermelha tracejada nas Subfiguras C.6(a) e C.6(c)).

Tabela C.3: Índice IAE para uma BMR do tipo (3,0) com incrementos em $\|V_i\|_{\text{med}}$ no seguimento das trajetórias da Tabela C.1 por meio da lei de controle auxiliar modificada (4.143) com $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} = 10.42$ e $\alpha^* \bar{G}_{\text{dif}} \lambda^* = 10^{-25}$.

$\ V_i\ _{\text{med}}$ (m/s)	Lemniscata		Espiral		$K_1 I_{2 \times 2}$	$K_2 I_{2 \times 2}$
	IAE v^*	IAE v	IAE v^*	IAE v		
1.18	45.305	775.15	0.0867	1.1258	1600	45
1.48	26.051	987.55	0.0613	1.4316		
Modificação para K_1, K_2 (para Lemniscata)						
1.18	0.1706	2.3901	-	-	1600	200
1.48	0.3221	3.8721	-	-		

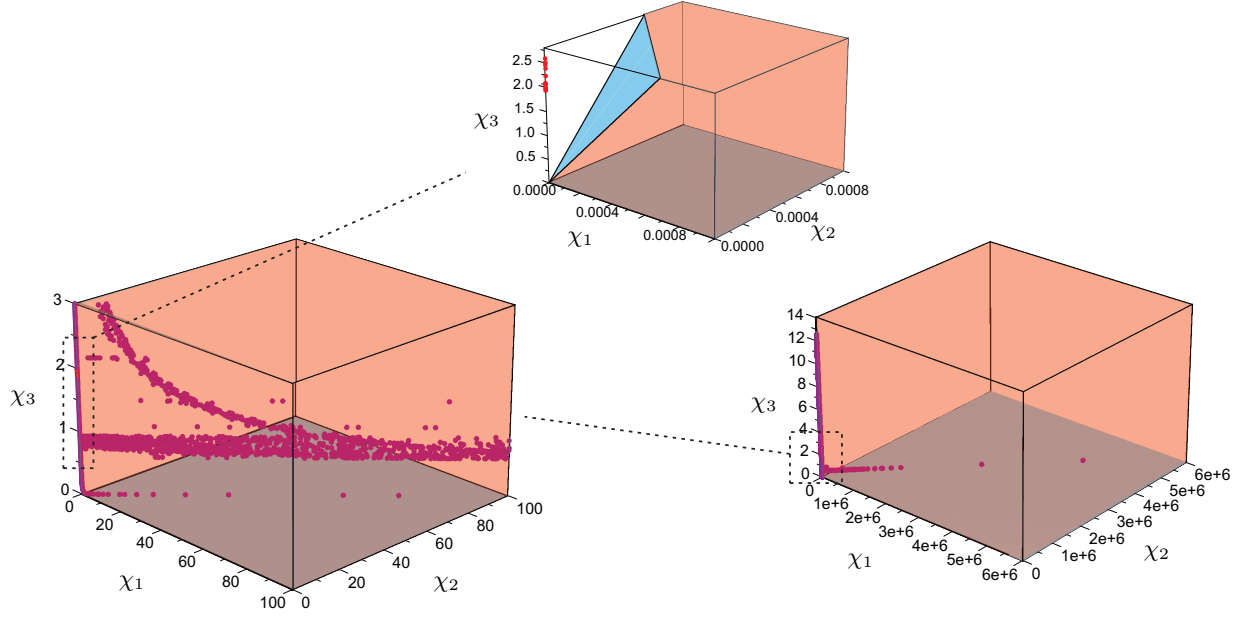


Figura C.7: Espaço confinado U_V quando $\|V_i\|$ é incrementado no seguimento da trajetória de referência lemniscata pelo uso de v^* na BMR tipo (3,0).

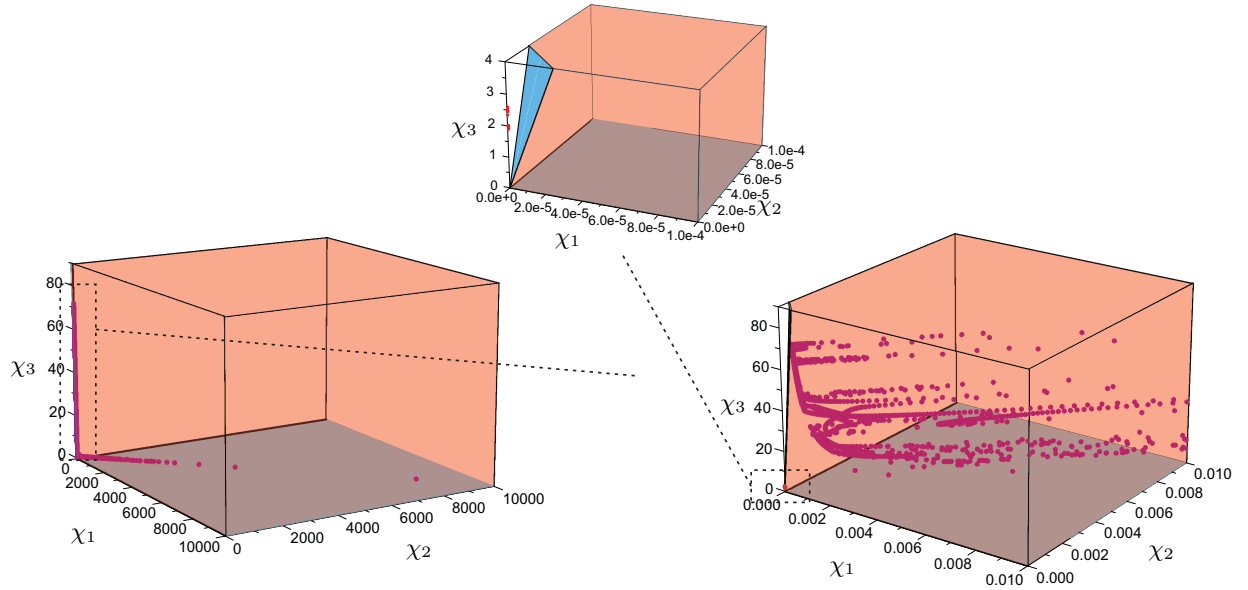


Figura C.8: Espaço confinado U_V quando $\|V_i\|$ é incrementado no seguimento da trajetória de referência espiral pelo uso de v^* na BMR tipo (3,0).

Para a trajetória lemniscata foi obtido $V_T^* \approx 0.95$ s/m. Com esse valor e com as triplas $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle \approx \langle 130.1798, 130.1798, 0.6371 \rangle$ [sendo $0.6371 \leq \chi_3$, para $\forall \chi_3 \in \chi_\varepsilon$] e $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle \approx \langle 0.0023, 0.0023, 12.5440 \rangle$ [sendo $12.5440 \geq \chi_3$, para $\forall \chi_3 \in \chi_\varepsilon$], temos que

$$\begin{aligned} \pi_2 : \quad & \chi_3 - 4.8940 \times 10^{-3} \chi_1 - 4.8940 \times 10^{-3} \chi_2 = 0, \\ \pi_1 : \quad & \chi_3 - 5453.91 \chi_1 - 5453.91 \chi_2 = 0, \end{aligned}$$

tal que $\|V_t(q, \eta, \mu)\| < 1173060.4607$. Na Figura C.7 também pode ser conferido que quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 61.25$ m/s as triplas $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle$ permanecem fora dos planos π_1 e π_2 .

Para a trajetória espiral foi obtido $V_T^* \approx 1.1$ s/m e as triplas escolhidas foram: $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle \approx \langle 42.0109, 42.0109, 0.9596 \rangle$ [sendo $0.9596 \leq \chi_3$, para $\forall \chi_3 \in \chi_\varepsilon$] e $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle \approx \langle 4.37 \times$

$10^{-4}, 4.37 \times 10^{-4}, 71.98\rangle$ [sendo $71.98 \geq \chi_3$, para $\forall \chi_3 \in \chi_\varepsilon$]. Assim,

$$\pi_2 : \quad \chi_3 - 0.02284\chi_1 - 0.02284\chi_2 = 0,$$

$$\pi_1 : \quad \chi_3 - 164713.958\chi_1 - 164713.958\chi_2 = 0,$$

tal que $\|V_t(q, \eta, \mu)\| < 6556040.3598$. Na Figura C.8 também pode ser conferido que quando $\|V_i\|_{\text{med}} = 61.25$ m/s as triplas $\langle \chi_1, \chi_2, \chi_3 \rangle$ permanecem fora dos planos π_1 e π_2 .