



**PPGEE/UFBA**

CONTROLE ROBUSTO  $\mathcal{H}_\infty$  PARA CONVERSORES DE POTÊNCIA PWM  
ELEVADORES SUJEITOS A AÇÃO DO ENVELHECIMENTO DO  
CAPACITOR

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Caio dos Santos Magalhães

Dissertação de Mestrado apresentada ao  
Programa de Pós-graduação em Engenharia  
Elétrica, da Universidade Federal da Bahia,  
como parte dos requisitos necessários à  
obtenção do título de Mestre em Engenharia  
Elétrica.

Orientadores: Bernardo Ordoñez

Humberto Xavier de Araújo

Salvador

Novembro de 2020

Magalhães, Caio dos Santos

Controle Robusto  $\mathcal{H}_\infty$  para Conversores de Potência PWM Elevadores Sujeitos a Ação do Envelhecimento do Capacitor/Caio dos Santos Magalhães. – Salvador: UFBA/PPGEE, 2020.

XIX, 82 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Bernardo Ordoñez

Humberto Xavier de Araújo

Dissertação (mestrado) – UFBA/Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica, 2020.

Referências Bibliográficas: p. 78 – 82

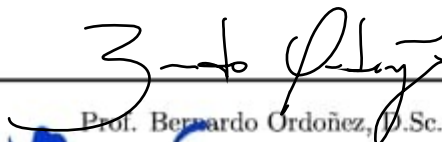
1. Controle Robusto. 2. Conversores CC-CC. 3. Modelagem Politópica. 4. Otimização Convexa. 5. Monitoramento de Condições. 6. Envelhecimento de Capacitores. I. Ordoñez, Bernardo *et al.*. II. Universidade Federal da Bahia, Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica. III. Título.

CONTROLE ROBUSTO  $H_\infty$  PARA CONVERSORES DE POTÊNCIA PWM  
ELEVADORES SUJEITOS A AÇÃO DO ENVELHECIMENTO DO  
CAPACITOR.

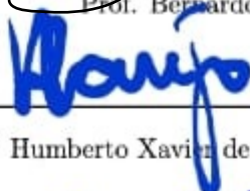
Caio dos Santos Magalhães

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE  
PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA DA UNIVERSIDADE FE-  
DERAL DA BAHIA (PPGEE / UFBA) COMO PARTE DOS REQUISITOS NE-  
CESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA  
ELÉTRICA.

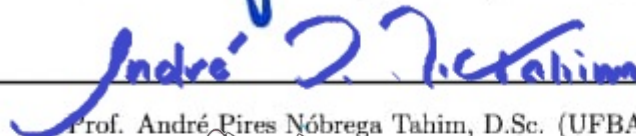
Examinada por:



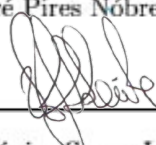
Prof. Bernardo Ordoñez, D.Sc. (Orientador)



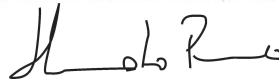
Prof. Humberto Xavier de Araújo, D.Sc. (Coorientador)



Prof. André Pires Nóbrega Tahim, D.Sc. (UFBA)



Prof. Valter Júnior Souza Leite, D.Sc. (CEFET-MG)



Prof. Humberto Pinheiro, D.Sc. (UFMS)

SALVADOR, BA - BRASIL  
NOVEMBRO DE 2020

*Dentro de nós há uma coisa que não tem nome, essa coisa é  
o que somos. (José Saramago)*

# Agradecimentos

Primeiramente, a Deus, ou qualquer entidade superior que seja, pelo privilégio da vida. Um tesouro inestimável no seu infinito de possibilidades.

A todos os meus professores, especialmente aos meus orientadores Bernardo Ordoñez e Humberto Xavier de Araújo, que contribuíram para a elaboração desta dissertação com muito empenho e profissionalismo. Agradeço por terem me estimulado a pensar criticamente e a apreciar a pesquisa como uma atividade instigante e altamente recompensadora. Espero que tenhamos outras oportunidades de trabalhar juntos.

Aos professores doutores Humberto Pinheiro, Valter Júnior Souza Leite e André Pires Nóbrega Tahim, que compuseram a banca examinadora da defesa. Agradeço pelos elogios, críticas e sugestões, que contribuíram substancialmente para tornar esta dissertação um trabalho melhor.

A Henrique Gaspar Ribeiro, que sempre foi muito próximo a mim desde o começo da graduação. Agradeço pela ajuda com a formatação das figuras extraídas do PSIM. Espero que a amizade dure para sempre.

Aos meus familiares, que sempre foram a base da minha formação pessoal e fonte de suporte emocional. Especialmente ao meu pai Sandro, que embora tenha falecido ainda durante a minha infância, deixou um exemplo de vida marcado por honestidade e trabalho. A minha mãe Virgínia e minha falecida avó Magnólia, por todo o amor, cuidado e dedicação que tiveram na minha criação. Obrigado por terem me tornado o homem que sou hoje.

A todos que contribuíram de alguma forma com esta dissertação, meu muito obrigado.

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGE/UFBA como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

CONTROLE ROBUSTO  $\mathcal{H}_\infty$  PARA CONVERSORES DE POTÊNCIA PWM  
ELEVADORES SUJEITOS A AÇÃO DO ENVELHECIMENTO DO  
CAPACITOR

Caio dos Santos Magalhães

Novembro/2020

Orientadores: Bernardo Ordoñez

Humberto Xavier de Araújo

Conversores elevadores são uma topologia de conversor CC-CC chaveado que possui várias aplicações, incluindo fontes de alimentação, interface de veículos híbridos, sistemas fotovoltaicos e indústria aeroespacial. Estes equipamentos comumente empregam capacitores eletrolíticos de alumínio devido ao seu baixo custo e elevada densidade de potência. Entretanto estes dispositivos são bastante afetados pela ação do envelhecimento devido à evaporação do eletrólito interno, o que gera um aumento no ESR e a diminuição da sua capacitância. Embora o capacitor seja uma das principais causas de falha em conversores de potência, a incerteza paramétrica associada ao dispositivo ainda não foi devidamente investigada pelas pesquisas no âmbito de controle robusto de conversores elevadores.

Nesta dissertação, considera-se o problema de controle linear robusto do conversor elevador, operando em CCM, tendo como objetivo a regulação da tensão de saída. É desenvolvida uma modelagem mais abrangente, incluindo as incertezas no ESR do capacitor e na capacitância. A consideração usual de incerteza na razão cíclica e resistência de carga é mantida na modelagem e a corrente de carga e a tensão de entrada são consideradas como fontes de perturbação no circuito do conversor.

Utiliza-se uma modelagem convexa a partir da construção de um politopo que contempla todos os possíveis modelos linearizados do conversor. Os vértices do politopo são então determinados a partir da cobertura politópica das projeções dessa região, de modo a minimizar o volume do politopo e, desta forma, reduzir o conservadorismo da abordagem proposta. A síntese do controlador robusto  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de estado é feita a partir de um problema de otimização convexa baseado em LMIs. No algoritmo, são incluídas restrições de alocação dos polos de malha fechada.

Um dos estados do sistema é a tensão interna do capacitor, que não pode ser mensurada diretamente, e, portanto, deve ser estimada para que a realimentação seja possível. Assim, a solução proposta consiste em medir a corrente do capacitor para, juntamente com a tensão de saída, identificar o ESR do capacitor e determinar o estado não-mensurável. O circuito de identificação do ESR, embora adicione complexidade ao sistema, pode ser utilizado não apenas para fins de controle, mas também para o monitoramento das condições de funcionamento do conversor. A solução proposta é validada a partir de resultados de simulações no programa PSIM, considerando-se um estudo de caso específico.

Abstract of Dissertation presented to PPGEE/UFBA as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

## ROBUST $\mathcal{H}_\infty$ CONTROL FOR PWM BOOST CONVERTERS SUBJECT TO AGING CAPACITOR CONDITIONS

Caio dos Santos Magalhães

November/2020

Advisors: Bernardo Ordoñez

Humberto Xavier de Araújo

Boost converters are a topology of DC-DC switch-mode converter that is used in several applications, including power supplies, powertrain interface for hybrid vehicles, photovoltaic systems and aerospace industry. These converters usually employ aluminum electrolytic capacitors due to its low cost and high power density. However, these components are heavily affected by aging owing to electrolyte evaporation, which leads to an increase on the ESR value and a decrease on capacitance. Although the capacitor is one the main causes of failure in power converters, the parameter uncertainty related to this device has not been properly investigated in the publications about robust control of power converters.

This dissertation addresses the problem of linear robust control of the boost converter, operating in CCM, with the purpose of output voltage regulation. A more comprehensive model is developed, including the uncertainties in the capacitor ESR and its capacitance. The usual consideration of uncertainty in the duty cycle and load resistance is kept in the model. Moreover, output load and input voltage are considered as sources of disturbance in the converter circuit.

A convex modeling is accomplished by the construction of a polytope that comprises all possible linearized models of the converter. In order to minimize the polytope volume and, consequently, reduce the conservatism of the proposed solution,

the polytope vertices are determined by the polytopic covering of the projections of the uncertainty region. The synthesis of a robust  $\mathcal{H}_\infty$  state feedback controller is performed by a convex optimization problem based on LMIs. The algorithm includes pole placement restrictions in closed-loop.

One of the states of the system is an unmeasurable voltage related to the capacitor, therefore it must be estimated for implementing the state feedback control. Hence, the proposed solution consists in measuring the capacitor current, so that it can be used alongside the output voltage to identify the capacitor ESR and determine the unmeasurable state. Albeit it increases the system complexity, the ESR identification circuit can be used not only for control purposes, but also for monitoring the operational conditions of the converter. The proposed solution is validated by the results of PSIM simulations, considering an specific study of case.

# Sumário

|                                                                            |            |
|----------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Lista de Figuras</b>                                                    | <b>xii</b> |
| <b>Lista de Tabelas</b>                                                    | <b>xvi</b> |
| <b>1 Introdução</b>                                                        | <b>1</b>   |
| 1.1 Motivação . . . . .                                                    | 2          |
| 1.2 Objetivo . . . . .                                                     | 3          |
| 1.3 Organização do Documento . . . . .                                     | 4          |
| <b>2 Revisão Bibliográfica</b>                                             | <b>5</b>   |
| <b>3 Modelagem do conversor de potência CC-CC elevador</b>                 | <b>9</b>   |
| 3.1 Modelo comutado do conversor elevador . . . . .                        | 11         |
| 3.2 Modelo médio do conversor elevador . . . . .                           | 13         |
| 3.3 Modelo linearizado do conversor elevador . . . . .                     | 15         |
| 3.3.1 Cálculo do ponto de equilíbrio . . . . .                             | 15         |
| 3.3.2 Linearização do sistema em torno do ponto de equilíbrio . . . . .    | 16         |
| 3.4 Modelo aumentado do conversor elevador . . . . .                       | 17         |
| 3.5 Modelo incerto do conversor elevador . . . . .                         | 18         |
| 3.5.1 Polítopo convexo e as projeções da região de incerteza . . . . .     | 21         |
| 3.5.2 Polítopo convexo e a região de incerteza . . . . .                   | 28         |
| <b>4 Capacitores eletrolíticos e o sistema de identificação e controle</b> | <b>30</b>  |
| 4.1 Incertezas associadas ao ESR . . . . .                                 | 32         |
| 4.2 Incertezas associadas à capacitância . . . . .                         | 34         |
| 4.3 Sistema de controle proposto . . . . .                                 | 35         |
| 4.3.1 Sistema auxiliar de identificação e estimação . . . . .              | 36         |

|          |                                                                                  |           |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5</b> | <b>Controle robusto <math>\mathcal{H}_\infty</math>: abordagem via LMI</b>       | <b>38</b> |
| 5.1      | Definição e propriedades das LMIs                                                | 38        |
| 5.1.1    | Complemento de Schur                                                             | 40        |
| 5.1.2    | O procedimento S                                                                 | 40        |
| 5.2      | Realimentação de estado                                                          | 41        |
| 5.3      | Estabilidade quadrática                                                          | 42        |
| 5.4      | Controle $\mathcal{H}_\infty$ com alocação de polos                              | 42        |
| 5.4.1    | Alocação dos polos                                                               | 44        |
| 5.4.2    | A síntese do controlador robusto $\mathcal{H}_\infty$                            | 46        |
| 5.5      | Análise do controlador robusto $\mathcal{H}_\infty$ via Lema de Finsler          | 46        |
| 5.5.1    | O Lema de Finsler                                                                | 47        |
| 5.5.2    | Aplicação em sistemas autônomos: estabilidade                                    | 47        |
| 5.5.3    | Aplicação em sistemas com entradas e saídas: norma $\mathcal{H}_\infty$          | 49        |
| 5.5.4    | A análise do controlador robusto $\mathcal{H}_\infty$                            | 51        |
| <b>6</b> | <b>Resultado das Simulações</b>                                                  | <b>52</b> |
| 6.1      | Controle $\mathcal{H}_\infty$ robusto do conversor <i>boost</i>                  | 54        |
| 6.2      | Perturbação de carga com capacitor novo ( $R_C = 0,2\Omega$ e $C = 120\mu F$ )   | 56        |
| 6.3      | Perturbação de carga com capacitor envelhecido ( $R_C = 0,6\Omega$ e $C =$       |           |
|          | $96\mu F$ )                                                                      | 60        |
| 6.4      | Perturbação de entrada com capacitor novo ( $R_C = 0,2\Omega$ e $C = 120\mu F$ ) | 62        |
| 6.5      | Perturbação de entrada com capacitor envelhecido ( $R_C = 0,6\Omega$ e           |           |
|          | $C = 96\mu F$ )                                                                  | 67        |
| 6.6      | Simulação com ESL no capacitor                                                   | 70        |
| 6.6.1    | Simulação com capacitor novo                                                     | 71        |
| 6.6.2    | Simulação com capacitor envelhecido                                              | 71        |
| <b>7</b> | <b>Conclusões</b>                                                                | <b>76</b> |
|          | <b>Referências Bibliográficas</b>                                                | <b>78</b> |

# Lista de Figuras

|      |                                                                                            |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Conversor Boost comercial de 150W produzido pela empresa <i>Yeeco</i> .                    | 2  |
| 3.1  | Diagrama de um conversor PWM da topologia <i>Boost</i> .                                   | 10 |
| 3.2  | Modulação PWM de frequência fixa.                                                          | 10 |
| 3.3  | Circuito do conversor <i>Boost</i> com $u_b = 1$ .                                         | 11 |
| 3.4  | Circuito do conversor <i>Boost</i> com $u_b = 0$ .                                         | 12 |
| 3.5  | Função de incerteza (preto) e politopo convexo conservador (verde).                        | 21 |
| 3.6  | Vista 1 da região de incerteza com curvas destacadas.                                      | 22 |
| 3.7  | Vista 2 da região de incerteza com curvas destacadas.                                      | 23 |
| 3.8  | Vista 3 da região de incerteza com curvas destacadas.                                      | 23 |
| 3.9  | Projeção da região de incerteza no plano $\eta - \delta$ .                                 | 24 |
| 3.10 | Politopo convexo no plano $\eta - \delta$ .                                                | 25 |
| 3.11 | Projeção da região de incerteza no plano $\epsilon - \delta$ .                             | 26 |
| 3.12 | Politopo convexo no plano $\epsilon - \delta$ .                                            | 26 |
| 3.13 | Projeção da região de incerteza no plano $\eta - \epsilon$ .                               | 27 |
| 3.14 | Politopo convexo no plano $\eta - \epsilon$ .                                              | 27 |
| 3.15 | Politopo convexo menos conservador.                                                        | 29 |
| 4.1  | Estrutura física de um capacitor eletrolítico [1].                                         | 31 |
| 4.2  | Circuito equivalente (a) e impedância característica de um capacitor eletrolítico (b) [2]. | 32 |
| 4.3  | Resultados experimentais do aumento do ESR conforme o tempo de uso [2].                    | 33 |
| 4.4  | Medidas do ESR em função da temperatura para o capacitor novo e o antigo [3].              | 34 |

|      |                                                                                                               |    |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.5  | Medidas do ESR em função da frequência para o capacitor novo e o antigo [3]. . . . .                          | 35 |
| 4.6  | Medidas de $C$ em função da temperatura para o capacitor novo e o antigo [3]. . . . .                         | 35 |
| 4.7  | Diagrama do sistema de controle proposto. . . . .                                                             | 36 |
| 4.8  | Diagrama do sistema auxiliar de identificação e estimação. . . . .                                            | 37 |
| 5.1  | Gráfico de magnitude do diagrama de Bode de um sistema SISO. . .                                              | 44 |
| 5.2  | Região $S(\alpha, \theta, \rho)$ no plano $s$ . . . . .                                                       | 45 |
| 6.1  | Esquemático do circuito de controle na interface do PSIM. . . . .                                             | 53 |
| 6.2  | Esquemático do circuito do conversor elevador. . . . .                                                        | 53 |
| 6.3  | Esquemático do subsistema de identificação. . . . .                                                           | 53 |
| 6.4  | Comparação entre o custo garantido e as normas $\mathcal{H}_\infty$ do sistema incerto. . .                   | 55 |
| 6.5  | Posicionamento dos polos de malha fechada para o sistema incerto. . .                                         | 55 |
| 6.6  | Efeito da perturbação na corrente de carga sobre a tensão de saída $v_o$ (capacitor novo). . . . .            | 56 |
| 6.7  | Efeito da perturbação na corrente de carga sobre a corrente de indutor $i_L$ (capacitor novo). . . . .        | 57 |
| 6.8  | Comportamento do sinal de controle $u$ mediante perturbação de carga (capacitor novo). . . . .                | 58 |
| 6.9  | Identificação <i>online</i> de $R_C$ mediante perturbação de carga (capacitor novo). . . . .                  | 58 |
| 6.10 | Sinais de $v_C$ estimado e real e o erro de estimação (capacitor novo). . .                                   | 59 |
| 6.11 | Esquemático do circuito para varredura em frequência da impedância de saída no PSIM. . . . .                  | 59 |
| 6.12 | Diagrama de Bode da impedância de saída do conversor elevador (capacitor novo). . . . .                       | 60 |
| 6.13 | Efeito da perturbação na corrente de carga sobre a tensão de saída $v_o$ (capacitor envelhecido). . . . .     | 61 |
| 6.14 | Efeito da perturbação na corrente de carga sobre a corrente de indutor $i_L$ (capacitor envelhecido). . . . . | 61 |

|                                                                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 6.15 Comportamento do sinal de controle $u$ mediante perturbação de carga<br>(capacitor envelhecido).           | 62 |
| 6.16 Identificação <i>online</i> de $R_C$ mediante perturbação de carga (capacitor<br>envelhecido).             | 63 |
| 6.17 Diagrama de Bode da impedância de saída do conversor elevador<br>(capacitor envelhecido).                  | 63 |
| 6.18 Efeito da perturbação na tensão de entrada sobre a tensão de saída<br>$v_o$ (capacitor novo).              | 64 |
| 6.19 Efeito da perturbação na tensão de entrada sobre a corrente de indu-<br>tor $i_L$ (capacitor novo).        | 65 |
| 6.20 Comportamento do sinal de controle $u$ mediante perturbação de en-<br>trada (capacitor novo).              | 65 |
| 6.21 Identificação <i>online</i> de $R_C$ mediante perturbação de entrada (capaci-<br>tor novo).                | 66 |
| 6.22 Esquemático do circuito para varredura em frequência do ganho direto<br>no PSIM.                           | 66 |
| 6.23 Diagrama de Bode do ganho direto do conversor elevador (capacitor<br>novo).                                | 67 |
| 6.24 Efeito da perturbação na tensão de entrada sobre a tensão de saída<br>$v_o$ (capacitor envelhecido).       | 68 |
| 6.25 Efeito da perturbação na tensão de entrada sobre a corrente de indu-<br>tor $i_L$ (capacitor envelhecido). | 68 |
| 6.26 Comportamento do sinal de controle $u$ mediante perturbação de en-<br>trada (capacitor envelhecido).       | 69 |
| 6.27 Identificação <i>online</i> de $R_C$ mediante perturbação de entrada (capaci-<br>tor envelhecido).         | 69 |
| 6.28 Diagrama de Bode do ganho direto do conversor elevador (capacitor<br>envelhecido).                         | 70 |
| 6.29 Esquemático do circuito do conversor elevador incluindo ESL no mo-<br>delo do capacitor.                   | 71 |
| 6.30 Efeito da perturbação de carga sobre a tensão de saída $v_o$ (capacitor<br>novo com ESL).                  | 72 |

|      |                                                                                                       |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 6.31 | Identificação online de $R_C$ mediante perturbação de entrada (capacitor novo com ESL).               | 72 |
| 6.32 | Sinais $v_C$ estimado e real e o erro da estimação (capacitor novo com ESL).                          | 73 |
| 6.33 | Efeito da perturbação de carga sobre a tensão de saída $v_o$ (capacitor envelhecido com ESL).         | 74 |
| 6.34 | Identificação <i>online</i> de $R_C$ mediante perturbação de entrada (capacitor envelhecido com ESL). | 74 |
| 6.35 | Sinais $v_C$ estimado e real e o erro da estimação (capacitor envelhecido com ESL).                   | 75 |

# Lista de Tabelas

|     |                                           |    |
|-----|-------------------------------------------|----|
| 3.1 | Pontos extremos das curvas de referência. | 22 |
| 3.2 | Vértices do politopo convexo final.       | 28 |
| 6.1 | Parâmetros do conversor <i>boost</i> .    | 52 |
| 6.2 | Dados das simulações.                     | 70 |

# Símbolos e Abreviaturas

## Símbolos

|                     |                                                  |
|---------------------|--------------------------------------------------|
| $C$                 | Capacitância                                     |
| $D$                 | Razão cíclica média                              |
| $D'$                | Complementar da razão cíclica média              |
| $f_s$               | Frequência de chaveamento                        |
| $i_C$               | Corrente de capacitor                            |
| $i_L$               | Corrente de indutor                              |
| $i_{load}$          | Perturbação na corrente de carga                 |
| $i_o$               | Corrente de saída                                |
| $K$                 | Ganho do controlador por realimentação de estado |
| $L$                 | Indutância                                       |
| $R$                 | Resistência de carga                             |
| $R_C$               | Componente resistiva do capacitor                |
| $R_L$               | Componente resistiva do indutor                  |
| $v_C$               | Tensão sobre a capacitância                      |
| $v_g$               | Tensão de entrada                                |
| $v_L$               | Tensão sobre o indutor                           |
| $v_o$               | Tensão de saída                                  |
| $V_M$               | Amplitude do sinal da portadora                  |
| $t_{on}$            | Intervalo com chave fechada                      |
| $t_{off}$           | Intervalo com chave aberta                       |
| $T_s$               | Período de comutação                             |
| $\langle(.)\rangle$ | Operador média móvel                             |
| $\tilde{(.)}$       | Operador de pequeno sinal                        |

|                        |                              |
|------------------------|------------------------------|
| $\ (\cdot)\ _{\infty}$ | Norma $\mathcal{H}_{\infty}$ |
| $\ (\cdot)\ _2$        | Norma $\mathcal{H}_2$        |

## Abreviaturas

|      |                                         |
|------|-----------------------------------------|
| AEC  | <i>Aluminium Electrolytic Capacitor</i> |
| CA   | Corrente alternada                      |
| CC   | Corrente contínua                       |
| CCM  | <i>Continuous Current Mode</i>          |
| DCM  | <i>Discontinuous Current Mode</i>       |
| ESR  | <i>Equivalent Series Resistance</i>     |
| ESL  | <i>Equivalent Series Inductance</i>     |
| LMI  | <i>Linear Matrix Inequality</i>         |
| MPC  | <i>Model Predictive Control</i>         |
| PWM  | <i>Pulse Width Modulation</i>           |
| RMS  | <i>Root Mean Square</i>                 |
| SMPS | <i>Switched Mode Power Supply</i>       |

# Capítulo 1

## Introdução

Os conversores de potência CC-CC chaveados surgiram para resolver o problema recorrente de ajustar os níveis de tensão e corrente da fonte disponível aos níveis adequados à alimentação das cargas [4]. Devido à dinâmica de chaveamento, as perdas durante este processo de conversão costumam ser menores do que aquelas geradas por fontes lineares convencionais [5]. Assim, o uso dos conversores CC-CC comutados se popularizou no projeto de fontes de alimentação comutadas (SMPS, na sigla em inglês), utilizadas em grande parte dos equipamentos eletrônicos microprocessados [6], incluindo computadores, celulares e televisores digitais. Em particular, o conversor da topologia *Boost*, também conhecido como *step-up* ou elevador, vem sendo bastante estudado devido a sua ampla gama de aplicações, como na indústria aeroespacial [7], interface de acionamento em veículos elétricos híbridos [8] e sistemas de geração fotovoltaica [9]. O crescente interesse em micro redes CC [10, 11], que são empregadas na integração de unidades de geração distribuída, unidades de armazenamento de energia e cargas, possuindo diversas aplicações, também contribuiu para a importância do estudo do conversor elevador. Na Figura 1.1, um conversor *Boost* de uso comercial é exemplificado.

Para manter o correto funcionamento desses conversores, é necessário um sistema de controle auxiliar integrado ao dispositivo. O objetivo principal em muitas aplicações é regular a tensão de saída a despeito da presença de perturbações (usualmente na tensão de entrada e corrente de carga), dinâmicas não-lineares e incertezas paramétricas. Adicionalmente, é importante assegurar um comportamento razoável em regime transitório, minimizando sobressinal e tempo de acomodação [12].

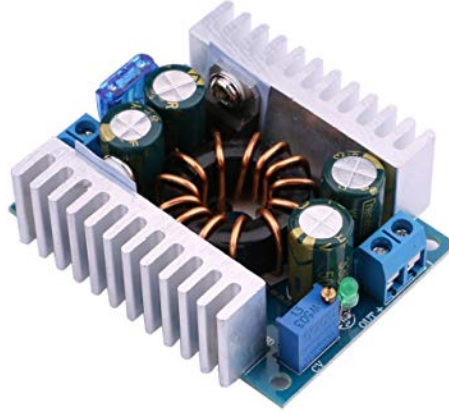


Figura 1.1: Conversor Boost comercial de 150W produzido pela empresa *Yeeco*.

Outro problema relacionado a conversores CC-CC diz respeito à prevenção de condições de falha, de modo a aprimorar a confiabilidade do sistema de potência. Neste sentido, pesquisas industriais indicam que os capacitores estão entre os componentes mais frágeis dos conversores [13], chegando a ser a causa de 30% das falhas nesses dispositivos. De fato, como mencionado em vários trabalhos [14, 2, 15, 16], conversores de potência tendem a usar capacitores eletrolíticos de alumínio (AEC, na sigla em inglês), pois são relativamente baratos e apresentam alta densidade de potência. Entretanto, estes componentes costumam sofrer intensa degradação durante sua vida útil devido à evaporação do eletrólito, o que diminui o valor da capacitância e aumenta a resistência equivalente série (ESR, em inglês) do capacitor. Fabricantes costumam considerar que uma redução da capacitância a 80% do valor original e/ou um ESR duas a três vezes maior que o nominal indicam que o AEC atingiu o fim da sua vida útil [17]. Por isto, muitos estudos de monitoramento das condições de operação do conversor foram desenvolvidos a partir da identificação *online* dos parâmetros do capacitor [14, 2, 15, 16].

## 1.1 Motivação

Na última década, surgiram muitos trabalhos acadêmicos que tratam do problema de controle robusto de conversores de potência CC-CC. Há um esforço contínuo para otimizar o funcionamento desses dispositivos, devido a sua ampla gama de aplicações. O problema envolve tanto eletrônica de potência como técnicas avançadas

de controle, de modo que sua complexidade conduz a soluções distintas e variadas. Trata-se, portanto, de um problema que ainda merece investigação.

Em particular, a síntese robusta via desigualdades matriciais lineares (LMI, em inglês) de um controlador linear por realimentação de estado é uma das soluções possíveis. Neste caso, as incertezas paramétricas podem ser modeladas utilizando-se um politopo convexo e o controlador é projetado a partir de um problema de otimização. Algumas vantagens de se realizar a síntese baseada em LMIs são as seguintes:

- grande versatilidade e simplicidade quanto à incorporação de requisitos de projeto como alocação de polos, rejeição de perturbação através de limitante da norma  $\mathcal{H}_\infty/\mathcal{H}_2$  ou restrição do esforço de controle. Todos estes requisitos podem ser escritos como LMIs e incluídos diretamente no problema de otimização;
- incertezas paramétricas, variantes ou não no tempo, podem ser levadas em consideração na síntese do controlador de forma explícita com as desigualdades matriciais;
- o algoritmo de síntese é resolvido em modo *offline* por programas de otimização convexa bastante eficientes;
- a simplicidade do controlador obtido, que consiste em ganhos fixos, permite que o sistema de controle possa ser implementado tanto por meios analógicos quanto digitais.

## 1.2 Objetivo

Com o objetivo de tratar de algumas limitações de trabalhos passados, esta dissertação propõe investigar o controle para o conversor CC-CC da topologia *Boost* operando em modo de condução contínua (CCM, em inglês), buscando integrar técnicas de controle robusto, descritas no contexto das LMIs, com identificação paramétrica *online*, para fins de controle e monitoramento do conversor. Ao contrário da prática usual, a modelagem do dispositivo deve considerar a presença dos ESRs do indutor e do capacitor. Pretende-se desenvolver um modelo do sistema incerto

para abranger não apenas incertezas na carga e na razão cíclica de chaveamento, mas também considerar a lenta variação temporal da capacitância e ESR do capacitor devido ao seu envelhecimento. Foram definidos os seguintes objetivos específicos:

- dedução do modelo matemático do conversor elevador;
- desenvolvimento do modelo politópico do sistema incerto, considerando-se incertezas na carga, razão cíclica, ESR do capacitor e capacitância. Exemplificação do conceito com estudo de caso;
- apresentação e discussão do esquema de controle juntamente com o circuito responsável pela identificação *online*;
- estabelecimento do algoritmo de síntese do controlador baseado em restrições do tipo LMI. Dedução do controlador para o caso em estudo;
- simulação do conversor controlado no programa PSIM com análise dos resultados.

### 1.3 Organização do Documento

Esta dissertação é organizada em capítulos, sendo este primeiro apenas introdutório. No segundo capítulo, é feito um estudo bibliográfico sobre as técnicas de controle robusto e identificação de parâmetros relacionados aos conversores CC-CC elevadores. O capítulo 3 é dedicado à modelagem do circuito do conversor elevador e são deduzidos os modelos nominal e incerto do sistema, este último utilizando o conceito de politopo convexo. Uma breve descrição da estrutura e da dinâmica de funcionamento dos capacitores eletrolíticos é feita no capítulo 4, de modo a explicar as causas das incertezas paramétricas desse dispositivo. O capítulo 5 apresenta a definição e algumas propriedades importantes das LMIs, bem como o algoritmo de síntese ótima do controlador. No capítulo 6, são discutidos os resultados das simulações no PSIM e o capítulo 7 conclui o trabalho com as considerações finais.

## Capítulo 2

# Revisão Bibliográfica

Conversores CC-CC são tradicionalmente modelados a partir do conceito de média móvel [18], que permite representar matematicamente o circuito em comutação como uma média ponderada entre os estados topológicos de condução e não condução. Essa aproximação só é válida se o sinal de controle, que é a razão cíclica do chaveamento, variar de forma muito lenta em relação ao intervalo de comutação. Esta consideração é suposta verdadeira na maioria das aplicações, pois as frequências de chaveamento desses conversores são tipicamente da ordem de dezenas até centenas de kHz, podendo chegar ao nível de alguns MHz [5].

Porém, no caso do conversor elevador, o modelo médio apresenta uma não-linearidade, conhecida como bilinearidade, caracterizada pelos produtos entre os estados e o sinal de controle [18]. A solução convencional é utilizar o modelo médio linearizado em torno de um ponto de operação, de modo a ser possível projetar um controlador em malha fechada a partir de técnicas de controle lineares. Esta estratégia, embora seja relativamente simples, desconsidera o efeito de incertezas paramétricas e não-linearidades do sistema [4]. Assim, pode-se obter resultados indesejados na tensão de saída do conversor, especialmente quando o dispositivo é acometido por perturbações na corrente de carga ou tensão de entrada.

Frente a essas dificuldades, surgiram muitos trabalhos na última década propondo soluções mais sofisticadas para o problema de controle de conversores de potência. Para exemplificação, em [19], foi estudada a aplicação de um controlador de lógica *fuzzy*, de modo que a lei de controle varia conforme a posição dos estados do sistema dentro do conjunto de regiões *fuzzy*. Este método apresenta melhor robustez

e resposta transitória mais rápida em comparação com o controle PID tradicional, embora tenha a desvantagem de aumentar o custo computacional e a complexidade da implementação. Em [20], o uso de controle preditivo baseado em modelo foi investigado, sendo que o problema de otimização é resolvido *offline* para diversas configurações e o controlador é sintetizado por meio de uma tabela de inspeção na qual cada região do espaço de estados corresponde a uma lei de controle específica. Assim, o esforço computacional *online* é reduzido a simples uma busca na tabela. O projeto de controladores robustos não-lineares adaptativos foi abordado em [6] para aplicação em conversores *buck* multifase síncronos, enquanto em [21] é proposta uma integração da otimização via LMI com modelagem de pequeno sinal por meio de redes neurais, também aplicada ao conversor *buck*.

Outros pesquisadores se dedicaram à síntese de controladores lineares robustos. Em [22], sugeriu-se um esquema cascata com controle  $\mathcal{H}_\infty$  na malha externa e controle *sliding-mode* de corrente na malha interna. O potencial do projeto de controle linear via LMI foi explorado em [23, 24], sendo o primeiro para um controlador ótimo LQR e o segundo para um controlador ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de estado. Um refinamento desse último trabalho foi feito em [12], no qual a modelagem das incertezas é aprimorada e a bilinearidade também é incluída na síntese como restrições do tipo LMI. Em [25] há o desenvolvimento de uma solução semelhante a vista em [24], mas utilizando controle  $\mathcal{H}_2$  e incluindo a tensão de entrada como parâmetro incerto na modelagem. Por fim, [26] apresenta uma estratégia de controle robusto de ganho ajustável baseada em otimização via LMIs. Neste caso, os controladores dependem do ponto de operação do conversor e tem a vantagem de serem deduzidos a partir de uma modelagem de parâmetros lineares e variantes no tempo, abordagem que permite melhor desempenho do sistema em termos de rejeição de perturbação.

Houve ainda um aprofundamento dos estudos sobre a aplicação de controle preditivo ao problema de regulação dos conversores elevadores. Em [27], uma estratégia MPC por realimentação de saída é desenvolvida com a combinação de um MPC por realimentação de estado com um observador de Luenberger. Além de garantir a convergência global da saída, esse método tem a vantagem de não necessitar de medição da corrente do indutor. Outra estratégia MPC é proposta em [28], mas utilizando um esquema cascata com controlador preditivo na malha interna e controlador PI

na malha externa. Ambos os métodos derivam suas leis de controle a partir do modelo bilinear do conversor, mas desconsideram o efeito de incertezas paramétricas e também as ESRs no indutor e capacitor. Em [29], uma solução SPCC (*sensorless predictive current control*) com observador é implementada juntamente com um sistema de identificação dos parâmetros do indutor (ESR e indutância). Neste caso, a estimação paramétrica é importante para tornar a observação da corrente de indutor mais precisa, e assim melhorar o desempenho do sistema de controle em termos de sobressinal e tempo de acomodação.

Além do problema de regulação, é conveniente que conversores CC-CC possuam sistemas auxiliares para monitorar as condições de funcionamento do circuito de potência, de modo a facilitar a manutenção preventiva e contribuir para uma maior confiabilidade do fornecimento de energia. Como já mencionado, os capacitores eletrolíticos são um dos principais limitantes da vida útil do conversor, o que significa que a identificação dos parâmetros desses componentes pode ser utilizada como indicador da saúde geral do sistema. A título de exemplificação, em [14], é proposto um método para avaliar o estado de deterioração do capacitor em cicloconversores a partir da identificação em tempo real de seu ESR. A teoria de funcionamento é baseada no cálculo das perdas no capacitor, que dependem apenas do ESR e do valor RMS da corrente que atravessa o componente. Em [2], uma estratégia similar é apresentada, entretanto sem a necessidade de CIs específicos para extrair o valor RMS de corrente e tensão do capacitor.

Algumas publicações mais recentes se dedicam especificamente ao monitoramento de condições do conversor *Boost*. Em [15], é proposta uma estratégia de identificação de parâmetros baseada no método dos mínimos quadrados recursivo, cuja vantagem é necessitar apenas das medições da tensão de saída e corrente de indutor para a estimação do ESR do capacitor. Em [16], o método de cálculo do ESR é baseado nos valores de ondulação da saída e corrente de pico do indutor, o que possibilita a identificação mesmo que o conversor esteja alimentando uma carga indutiva ou mesmo outro conversor. Por fim, [1] utiliza um princípio de estimação semelhante, mas utilizando sensores de corrente magnéticos TMR (*tunnel magneto-resistance*), que são menos invasivos e mais compactos que outros sensores comuns, como sensores de efeito Hall e resistores *shunt*.

Ressalta-se que todos os trabalhos citados ou desconsideram as incertezas paramétricas presentes no capacitor ou as consideram apenas para o problema de monitoramento das condições de operação do conversor. Neste trabalho, as incertezas do capacitor são incorporadas em ambos os problemas de controle e monitoramento, sendo estes solucionados de maneira integrada.

## Capítulo 3

# Modelagem do conversor de potência CC-CC elevador

O esquema do circuito de um conversor *Boost* alimentando uma carga resistiva é apresentado na Figura 3.1. Nota-se que  $v_g$  representa a tensão de entrada enquanto  $v_o$  corresponde à tensão de saída e  $i_{load}$  é a perturbação na corrente de carga. Embora não exista fisicamente, a fonte de corrente  $i_{load}$  é conveniente para representar transitórios devido a alterações de carga. A tensão  $v_g$  idealmente contém apenas a componente CC  $V_g$ , mas pode existir uma perturbação CA  $\tilde{v}_g$ . O indutor e o capacitor são considerados como uma associação em série entre uma resistência pura (representando o ESR  $R_L$  ou  $R_C$ , respectivamente) e uma indutância  $L$  ou uma capacitância  $C$  puras. Os sinais mensuráveis do sistema são  $v_o$  e a corrente de indutor  $i_L$ , enquanto  $v_C$  é um estado interno não-mensurável associado ao capacitor. Assume-se que o conversor opera em modo de condução contínua.

A operação do sistema é controlada pelo sinal binário  $u_b$ , que determina a abertura e fechamento da chave transistorizada do conversor. Este valor lógico é gerado por um circuito de modulação PWM, como mostrado na Figura 3.2, no qual um sinal de controle  $d$  é comparado com uma portadora triangular de frequência fixa  $f_s$  e amplitude  $V_M$ . É possível então controlar o percentual de tempo dentro de um período de comutação em que a chave  $Q$  fica fechada, o que ocorre quando o sinal  $u_b$  está em valor lógico alto. A razão  $t_{on}/T_s$  é chamada de razão cíclica do chaveamento, e corresponde ao próprio valor do sinal  $d$  no caso de  $V_M$  unitário [4].

A modelagem de um conversor de potência pode ser iniciada com a dedução do

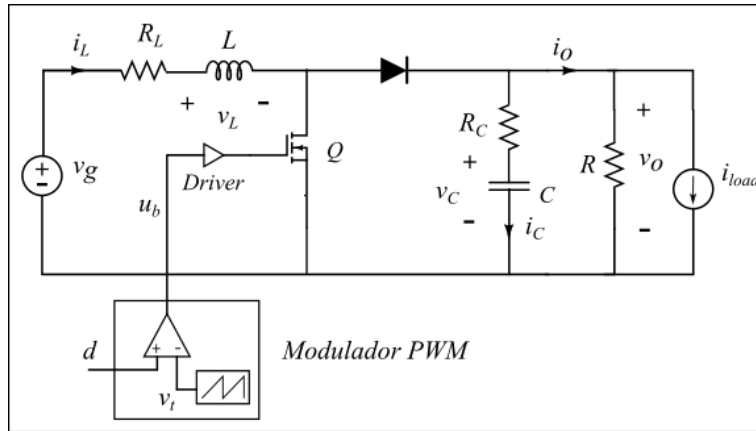


Figura 3.1: Diagrama de um conversor PWM da topologia *Boost*.

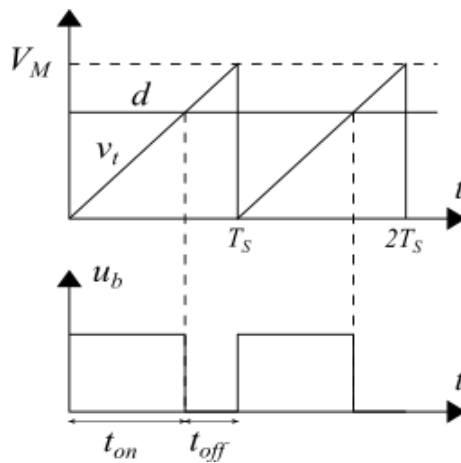


Figura 3.2: Modulação PWM de frequência fixa.

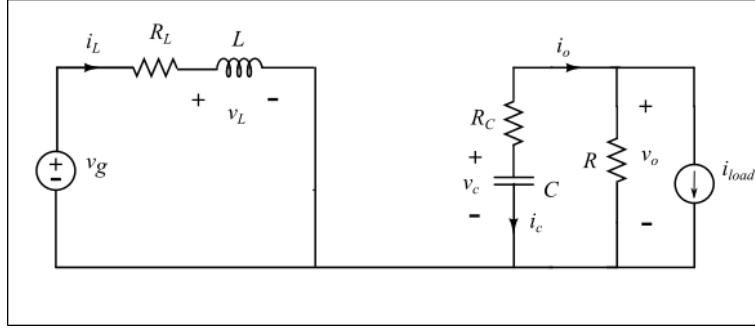


Figura 3.3: Circuito do conversor *Boost* com  $u_b = 1$ .

modelo comutado, que é o modelo no espaço de estados tendo  $u_b$  como sinal de entrada. Em seguida, pode-se utilizar o conceito de média móvel para encontrar o modelo médio, que tem como sinal de entrada a razão cíclica  $d$ .

### 3.1 Modelo comutado do conversor elevador

O modelo comutado do conversor elevador pode ser definido a partir da representação da dinâmica do circuito para ambos os estados topológicos do conversor. Na Figura 3.3, é apresentado o circuito do dispositivo com o sinal  $u_b = 1$ . Nesta situação, o transistor atua como chave fechada (supostamente ideal) e o diodo está reversamente polarizado, e, portanto, não conduz.

Dessa forma, o comportamento dinâmico do circuito com  $u_b = 1$  é regido pelas equações:

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt}(t) = -\frac{R_L}{L}i_L + \frac{v_g}{L}, \\ \frac{dv_C}{dt}(t) = -\frac{v_C}{(R+R_C)C} - \frac{R}{(R+R_C)C}i_{load}, \\ v_o(t) = \frac{R}{R+R_C}v_C - \frac{R_C R}{R+R_C}i_{load}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Sejam  $x_{co} = [i_L \ v_C]'$  o vetor de estado e  $w_{co} = [v_g \ i_{load}]'$  o vetor de perturbação. Assim, o sistema de equações pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} \dot{x}_{co}(t) = \mathbf{A}_{on}x_{co}(t) + \mathbf{B}_{on}w_{co}(t), \\ v_o(t) = \mathbf{C}_{on}x_{co}(t) + \mathbf{D}_{on}w_{co}(t), \end{cases} \quad (3.2)$$

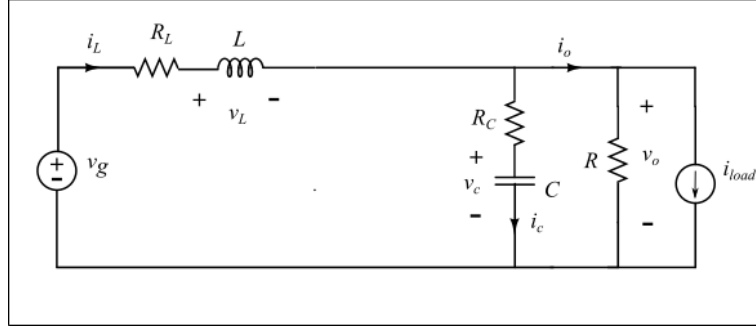


Figura 3.4: Circuito do conversor *Boost* com  $u_b = 0$

sendo

$$\mathbf{A}_{on} = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{(R+R_C)C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{on} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-R}{(R+R_C)C} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{on} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R}{R+R_C} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D}_{on} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-R_C R}{R+R_C} \end{bmatrix}.$$

O segundo estado topológico é definido para  $u_b = 0$ , como mostrado na Figura 3.4. Nota-se que, neste caso, o transistor atua como chave aberta e o diodo está diretamente polarizado, logo conduz corrente.

As equações que descrevem o comportamento dinâmico do sistema com  $u_b = 0$  são:

$$\begin{cases} \frac{di_L}{dt}(t) = -\frac{R_L R + R_C R + R_L R_C}{(R+R_C)L} i_L - \frac{R}{(R+R_C)L} v_C + \frac{v_g}{L} + \frac{R_C R}{(R+R_C)L} i_{load}, \\ \frac{dv_C}{dt}(t) = \frac{R}{(R+R_C)C} i_L - \frac{v_C}{(R+R_C)C} - \frac{R}{(R+R_C)C} i_{load}, \\ v_o(t) = \frac{R_C R}{R+R_C} i_L + \frac{R}{R+R_C} v_C - \frac{R_C R}{R+R_C} i_{load}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Utilizando-se as mesmas definições anteriores para os vetores de estado e perturbação, tem-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_{co}(t) = \mathbf{A}_{off} x_{co}(t) + \mathbf{B}_{off} w_{co}(t), \\ v_o(t) = \mathbf{C}_{off} x_{co}(t) + \mathbf{D}_{off} w_{co}(t), \end{cases} \quad (3.4)$$

sendo

$$\mathbf{A}_{off} = \begin{bmatrix} -\frac{R_L R + R_C R + R_L R_C}{(R+R_C)L} & \frac{-R}{(R+R_C)L} \\ \frac{R}{(R+R_C)C} & \frac{-1}{(R+R_C)C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{off} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{R_C R}{(R+R_C)L} \\ 0 & \frac{-R}{(R+R_C)C} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{off} = \begin{bmatrix} \frac{-R_C R}{R+R_C} & \frac{R}{R+R_C} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D}_{off} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-R_C R}{R+R_C} \end{bmatrix}.$$

O modelo comutado consiste na unificação das equações (3.2) e (3.4) utilizando-se o sinal de controle como um fator binário de seleção entre os estados topológicos [18]. Assim, é possível representar o conversor em um único modelo:

$$\begin{cases} \dot{x}_{co} = [\mathbf{A}_{off} + (\mathbf{A}_{on} - \mathbf{A}_{off})u_b]x_{co} + [\mathbf{B}_{off} + (\mathbf{B}_{on} - \mathbf{B}_{off})u_b]w_{co}, \\ v_o(t) = [\mathbf{C}_{off} + (\mathbf{C}_{on} - \mathbf{C}_{off})u_b]x_{co} + [\mathbf{D}_{off} + (\mathbf{D}_{on} - \mathbf{D}_{off})u_b]w_{co}. \end{cases} \quad (3.5)$$

A descontinuidade decorrente do sinal de controle binário  $u_b$  indica que o modelo comutado não é linear. Além disso, existe outro tipo de não linearidade associada ao produto entre os estados e o sinal de controle, que é chamado de bilinearidade. O modelo comutado não apresenta nenhuma simplificação além das considerações de idealidade dos dispositivos. Sendo assim, é o modelo mais próximo a representar o comportamento real do conversor de potência.

## 3.2 Modelo médio do conversor elevador

Embora o modelo comutado seja o mais preciso, ele é utilizado somente nas estratégias de controle não-lineares, capazes de lidar com dinâmicas de alta frequência, como controle de estrutura variável e controle via histerese [18]. Na maioria dos casos, deseja-se apenas manipular a dinâmica dominante de baixa frequência do conversor. Assim, surgiu a ideia do modelo médio, que consiste em extrair os valores médios das variáveis do processo e desta forma filtrar as componentes de alta frequência decorrentes do chaveamento. O resultado final é um modelo que corresponde a uma média ponderada entre os dois estados topológicos.

O modelo médio para conversores de potência vem sendo estudado desde a década de 1970 [30]. O conceito de média móvel de um sinal é essencial para o entendimento da dedução do modelo. Assim, para um sinal genérico  $f(t)$ , sua média móvel é dada

por:

$$\langle f \rangle(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t f(\tau) d\tau. \quad (3.6)$$

Nota-se que se trata de uma função variável no tempo, que fornece uma média do sinal a cada instante  $t$ , sendo esta média calculada dentro da janela de tempo  $T$  imediatamente anterior a  $t$ . Existem duas propriedades da média móvel que são importantes para o desenvolvimento do modelo médio. A primeira é que a média da derivada é igual a derivada da média, como pode ser facilmente verificado usando o teorema fundamental do Cálculo. A segunda é que a média móvel do produto de dois sinais pode ser aproximada pelo produto das médias, contanto que um dos sinais seja aproximadamente constante em relação ao outro. Essa propriedade é muito útil para conversores devido à consideração de pequena ondulação dos sinais [18].

Assim, pode-se aplicar a média móvel em ambos os lados da equação 3.5 e obter o modelo médio do conversor:

$$\begin{cases} \langle \dot{x}_{co} \rangle = [\mathbf{A}_{off} + (\mathbf{A}_{on} - \mathbf{A}_{off})d] \langle x_{co} \rangle + [\mathbf{B}_{off} + (\mathbf{B}_{on} - \mathbf{B}_{off})d] \langle w_{co} \rangle, \\ \langle v_o \rangle = [\mathbf{C}_{off} + (\mathbf{C}_{on} - \mathbf{C}_{off})d] \langle x_{co} \rangle + [\mathbf{D}_{off} + (\mathbf{D}_{on} - \mathbf{D}_{off})d] \langle w_{co} \rangle. \end{cases} \quad (3.7)$$

Neste caso, a média móvel de  $u_b$  foi substituída pela razão cíclica  $d$ , pois são equivalentes. Para simplificar a notação, novas variáveis são definidas para substituir as médias móveis, ou seja  $\langle x_{co} \rangle = x_m$ ,  $\langle w_{co} \rangle = w$  e  $\langle v_o \rangle = z$ . Também é conveniente trocar a notação  $d$  da razão cíclica para  $u$ , seguindo-se a notação usual para o sinal de controle. Portanto, o modelo médio a partir da equação (3.7) pode ser expresso como:

$$\begin{cases} \dot{x}_m(t) = \mathbf{A}_m x_m(t) + \mathbf{B}_{xu} x_m(t) u(t) + \mathbf{B}_w w(t) + \mathbf{B}_{wu} w(t) u(t), \\ z(t) = \mathbf{C}_m x_m(t) + \mathbf{D}_{xu} x_m(t) u(t) + \mathbf{D}_w w(t), \end{cases} \quad (3.8)$$

sendo

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{A}_{off}, \quad \mathbf{B}_{xu} = \mathbf{A}_{on} - \mathbf{A}_{off} = \begin{bmatrix} \frac{R_C R}{(R+R_C)L} & \frac{R}{(R+R_C)L} \\ \frac{-R}{(R+R_C)C} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_w = \mathbf{B}_{off}, \quad \mathbf{B}_{wu} = \mathbf{B}_{on} - \mathbf{B}_{off} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-R_C R}{(R+R_C)L} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_m = \mathbf{C}_{off}, \quad \mathbf{D}_{xu} = \mathbf{C}_{on} - \mathbf{C}_{off} = \begin{bmatrix} \frac{-R_C R}{R+R_C} & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D}_w = \mathbf{D}_{off}.$$

### 3.3 Modelo linearizado do conversor elevador

A linearização é feita em torno do ponto de equilíbrio do sistema. Considera-se que as variáveis são compostas por uma componente CC, que corresponde ao valor de regime permanente da grandeza e é representado por uma letra maiúscula, e um desvio incremental em torno desse ponto, que é grafado com o sinal til. Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned} x_m &= X + \tilde{x}_m, \\ z &= V_o + \tilde{z}, \\ u &= D + \tilde{u}, \\ w &= W + \tilde{w}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

#### 3.3.1 Cálculo do ponto de equilíbrio

Seja  $I_L$  e  $V_C$  os valores de regime permanente da corrente de indutor e tensão do capacitor, respectivamente. Para encontrar  $X = \begin{bmatrix} I_L & V_C \end{bmatrix}'$  e  $V_o$ , é primeiro preciso determinar  $W$ . Como descrito anteriormente, o valor CC da tensão de entrada é  $V_g$  e a perturbação de corrente de saída  $i_{load}$  não existe fisicamente, sendo utilizada apenas para modelar os transitórios de carga. Portanto, a componente CC  $I_{load}$  é considerada nula. Por conseguinte,  $W = \begin{bmatrix} V_g & 0 \end{bmatrix}'$ . Da equação (3.8), em regime permanente, tem-se:

$$\mathbf{A}_m \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} + \mathbf{B}_{xu} \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} D + \mathbf{B}_w \begin{bmatrix} V_g \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{B}_{wu} \begin{bmatrix} V_g \\ 0 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Logo,

$$V_C = \frac{D'R(R + R_C)}{R_L R + R_L R_C + D'R_C R + D'^2 R^2} V_g \quad (3.11)$$

e

$$I_L = \frac{V_C}{D'R} = \frac{R + R_C}{R_L R + R_L R_C + D'R_C R + D'^2 R^2} V_g, \quad (3.12)$$

sendo  $D' = 1 - D$ .

Determinado  $X$ , o cálculo de  $V_o$  vem diretamente da equação 3.8:

$$V_o = \mathbf{C}_m \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} + \mathbf{D}_{xu} \begin{bmatrix} I_L \\ V_C \end{bmatrix} D + \mathbf{D}_w \begin{bmatrix} V_g \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Como consequência, tem-se:

$$V_o = \frac{D'R_C R}{R + R_C} I_L + \frac{R}{R + R_C} V_C = \frac{D'R(R + R_C)}{R_L R + R_L R_C + D'R_C R + D'^2 R^2} V_g, \quad (3.14)$$

o que implica em:

$$V_o = V_C.$$

Esse resultado era esperado, pois a tensão de saída  $v_o$  é igual à queda de tensão no capacitor  $v_C + R_C C \dot{v}_c$  em qualquer instante. Assim, o valor médio de equilíbrio da saída é necessariamente igual ao valor médio de equilíbrio da tensão sobre o capacitor.

### 3.3.2 Linearização do sistema em torno do ponto de equilíbrio

Uma das maneiras de linearizar o sistema é utilizar o conceito de diferencial de funções de múltiplas variáveis. Sejam

$$\dot{x}_m = f(x_m, w, u),$$

e

$$z = g(x_m, w, u).$$

Logo, pode-se expressar um pequeno incremento destas funções em torno do ponto de equilíbrio como:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_m = df = \left. \frac{\partial f}{\partial x_m} \right|_{D,W} \tilde{x}_m + \left. \frac{\partial f}{\partial w} \right|_{X,D} \tilde{w} + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{X,W} \tilde{u}, \\ \tilde{z} = dg = \left. \frac{\partial g}{\partial x_m} \right|_{D,W} \tilde{x}_m + \left. \frac{\partial g}{\partial w} \right|_{X,D} \tilde{w} + \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{X,W} \tilde{u}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Desenvolvendo-se os diferenciais a partir das equações (3.8), (3.11) e (3.12), obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_m(t) = \mathbf{A}_l \tilde{x}_m(t) + \mathbf{B}_{lu} \tilde{u}(t) + \mathbf{B}_{lw} \tilde{w}(t), \\ \tilde{z}(t) = \mathbf{C}_l \tilde{x}_m(t) + \mathbf{D}_{lu} \tilde{u}(t) + \mathbf{D}_{lw} \tilde{w}(t), \end{cases} \quad (3.16)$$

onde

$$\mathbf{A}_l = \begin{bmatrix} -\frac{R_L R + R_L R_C + D' R_C R}{(R+R_C)L} & \frac{-D' R}{(R+R_C)L} \\ \frac{D' R}{(R+R_C)C} & \frac{-1}{(R+R_C)C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{lu} = \begin{bmatrix} \frac{(R_C + D' R)V_C}{(R+R_C)D' L} \\ \frac{-V_C}{(R+R_C)D' C} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{lw} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{D' R_C R}{(R+R_C)L} \\ 0 & \frac{-R}{(R+R_C)C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_l = \begin{bmatrix} \frac{D' R_C R}{R+R_C} & \frac{R}{R+R_C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{lu} = \begin{bmatrix} \frac{-R_C V_C}{D' (R+R_C)} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\mathbf{D}_{lw} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-R_C R}{R+R_C} \end{bmatrix}.$$

### 3.4 Modelo aumentado do conversor elevador

Como o objetivo é implementar um controlador linear por realimentação de estado, para garantir o seguimento de uma referência  $V_{ref}$  em malha fechada, adiciona-se ao modelo linearizado o estado  $x_{int}$ , definido por:

$$x_{int}(t) = \int (v_o(t) - V_{ref}) dt. \quad (3.17)$$

Nota-se que, como o novo estado corresponde à integral do erro entre a tensão de saída e a referência, o controlador estabilizante em malha fechada irá forçar erro nulo em regime permanente. Assim, o propósito de regular a tensão de saída é garantido pelo sistema de controle. Estratégia semelhante foi adotada em [24, 12]. O novo vetor de estados é definido por

$$x = \begin{bmatrix} \tilde{i}_L \\ \tilde{v}_C \\ x_{int} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Logo, a partir das equações (3.16) e (3.18), o modelo do conversor *Boost* pode

ser reescrito como:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}_u\tilde{u}(t) + \mathbf{B}_w\tilde{w}(t), \\ \tilde{z}(t) = \mathbf{C}_zx(t) + \mathbf{D}_u\tilde{u}(t) + \mathbf{D}_w\tilde{w}(t), \end{cases} \quad (3.19)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R_L R + R_L R_C + D' R_C R}{(R + R_C)L} & \frac{-D' R}{(R + R_C)L} & 0 \\ \frac{D' R}{(R + R_C)C} & \frac{-1}{(R + R_C)C} & 0 \\ \frac{D' R_C R}{R + R_C} & \frac{R}{R + R_C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \frac{(R_C + D' R)V_C}{(R + R_C)D' L} \\ \frac{-V_C}{(R + R_C)D' C} \\ \frac{-R_C V_C}{D'(R + R_C)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{D' R_C R}{(R + R_C)L} \\ 0 & \frac{-R}{(R + R_C)C} \\ 0 & \frac{-R_C R}{R + R_C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_z = \begin{bmatrix} \frac{D' R_C R}{R + R_C} & \frac{R}{R + R_C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_u = \begin{bmatrix} \frac{-R_C V_C}{D'(R + R_C)} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\mathbf{D}_w = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-R_C R}{R + R_C} \end{bmatrix}.$$

É importante ressaltar que, para fins de controle, o estado interno  $v_C$  será estimado a partir de um sistema de identificação, a ser detalhado no Capítulo 4. Pode-se imaginar que um modelo no qual  $v_o$  é estado no lugar de  $v_C$  seja mais simples de controlar, uma vez que a tensão de saída é facilmente mensurável. Porém, neste caso o equacionamento iria levar à derivação da corrente que passa pelo diodo, que é descontínua na comutação do chaveamento [15]. Assim, os autores acreditam que não seja possível desenvolver um modelo em tempo contínuo para o conversor elevador definindo  $v_o$  como estado.

### 3.5 Modelo incerto do conversor elevador

Nesta formulação, os parâmetros  $D'$ ,  $R$ ,  $R_C$  e  $C$  são considerados incertos ou lentamente variantes no tempo em relação à dinâmica do conversor. Em geral, parâmetros incertos e independentes entre si podem ser agrupados em um vetor de incerteza  $p = [p_1, \dots, p_{n_p}]'$ , sendo  $n_p$  o número de parâmetros incertos. Supõe-se que cada parâmetro  $p_i$  pertence a um intervalo, ou seja,  $p_i \in [\underline{p}_i, \overline{p}_i]$ . Isto define uma região politópica convexa no  $\mathbb{R}^{n_p}$  com vértices  $g_i \in \mathbb{R}^{n_p}$  dados pelas diferentes combinações

dos limites  $\underline{p}_i$  e  $\overline{p}_i$ . Desta forma,  $p$  pertence ao politopo convexo  $\Omega$  definido por

$$\Omega = C_o(\{g_1, g_2, \dots, g_{N_v}\}), \quad (3.20)$$

e  $C_o$  representa o envelope convexo dos vértices  $g_i$ , ou seja,

$$p \in \left\{ \sum_{i=1}^{N_v} \sigma_i g_i, \sigma_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N_v} \sigma_i = 1 \right\},$$

com  $N_v = 2^{n_p}$ .

Logo, se as matrizes do modelo (3.19) dependem linearmente dos parâmetros  $p_i$  em  $p$ , então existe um politopo convexo  $\Omega_S = C_o(\{\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{N_v}\})$  que contém todas as possíveis representações do sistema incerto (mais informações em [31, 32]). Este resultado pode ser expresso como

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}(p), \mathbf{B}_w(p), \dots, \mathbf{D}_u(p)] &\in \Omega_S = C_o(\{\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{N_v}\}), \\ \Omega_S &= \left\{ \sum_{i=1}^{N_v} \sigma_i \mathcal{G}_i, \sigma_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N_v} \sigma_i = 1 \right\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Entretanto, como pode ser observado em (3.19), a dependência entre os parâmetros incertos e os elementos das matrizes do modelo não é linear. Neste caso, descrever o modelo incerto utilizando-se do politopo convexo definido em (3.21). Para tornar isto possível, os seguintes parâmetros auxiliares são definidos:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{R_C + R}, \quad \mu = \frac{R}{R_C + R}, \quad \eta = \frac{D'R}{R_C + R}, \\ \delta &= \frac{V_C R}{(R_C + R)D'V_g} = \frac{R^2}{R_L R + R_L R_C + D' R_C R + D'^2 R^2}, \\ \epsilon &= \frac{(R_C + D'R)V_C}{(R_C + R)D'V_g} = \frac{D'R^2 + R_C R}{R_L R + R_L R_C + D' R_C R + D'^2 R^2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Utilizando-se os parâmetros auxiliares, as matrizes do sistema podem ser reescritas

como:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{(R_L + R_C\eta)}{L} & -\frac{\eta}{L} & 0 \\ \frac{\eta}{C} & -\frac{\beta}{C} & 0 \\ R_C\eta & \mu & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{R_C\eta}{L} \\ 0 & -\frac{\mu}{C} \\ 0 & -R_C\mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \frac{V_g\epsilon}{L} \\ -\frac{V_g\delta}{R_C} \\ -\frac{R_C V_g\delta}{R} \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$$\mathbf{C}_z = \begin{bmatrix} R_C\eta & \mu & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_w = \begin{bmatrix} 0 & -R_C\mu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_u = \begin{bmatrix} -\frac{R_C V_g\delta}{R} \end{bmatrix}.$$

Em (3.23), ainda existem não linearidades em vários elementos das matrizes envolvendo os parâmetros incertos,  $R$ ,  $R_C$  e  $C$  e os parâmetros auxiliares. Entretanto, a maior contribuição dessa abordagem é isolar  $\eta$ ,  $\epsilon$  e  $\delta$ , pois são parâmetros que são mais sensíveis à variação de  $D'$  do que à variação de outros parâmetros. Isto ocorre porque, mesmo considerando os efeitos de envelhecimento e mudança de temperatura, as resistências parasitas  $R_C$  e  $R_L$  tendem a ser muito menores que a carga  $R$ . Desta forma, os parâmetros auxiliares  $\eta$ ,  $\epsilon$  e  $\delta$  podem ser aproximados em (3.22) para  $\eta \approx D'$ ,  $\epsilon \approx \frac{1}{D'}$  e  $\delta \approx \frac{1}{D'^2}$ . Embora estas aproximações não sejam usadas diretamente na modelagem, elas são importantes para a determinação de um politopo convexo menos conservador. Uma estratégia semelhante é empregada em [12], na qual uma cobertura politópica é deduzida para envolver uma linha tridimensional que representa as incertezas em  $D'$ . O problema aqui, entretanto, não desconsidera a presença de  $R_L$  e  $R_C$  na modelagem. Desta forma, a seguinte função de incerteza é proposta:

$$f(D'; R_C; R) = \left\{ (\eta; \epsilon; \delta) : \begin{aligned} D' &\in [\underline{D}'; \overline{D}'], \\ R_C &\in [\underline{R}_C; \overline{R}_C], \quad R \in [\underline{R}; \overline{R}] \end{aligned} \right\}. \quad (3.24)$$

A representação gráfica da imagem da função de incerteza  $f(D'; R_C; R)$  em (3.24) é um conjunto de curvas parametrizadas no  $\mathbb{R}^3$  que podem ser vistas na Figura 3.5, considerando-se os parâmetros  $D' \in [0, 3; 1, 0]$ ,  $R_C \in [0, 2; 0, 6]\Omega$ ,  $R \in [20; 50]\Omega$  e  $R_L = 0, 4\Omega$ . Um possível politopo convexo que contém a região de incerteza é ilustrado na Figura 3.5 e consiste de um hiper-retângulo cujos 8 vértices correspondem

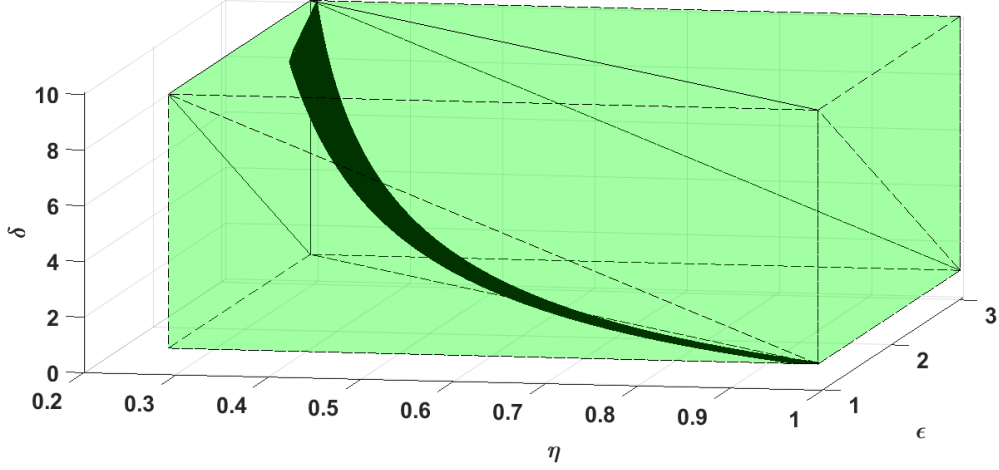


Figura 3.5: Função de incerteza (preto) e politopo convexo conservador (verde).

às 8 combinações possíveis entre os valores extremos de cada parâmetro. Embora esteja tecnicamente correta, essa abordagem é muito conservadora devido ao grande volume do politopo em relação ao da imagem de  $f(D'; R_C; R)$ . Assim, o modelo incerto contemplaria um elevado número de representações irrealizáveis, podendo resultar em uma solução do problema de síntese do controlador muito distante da ótima ou até mesmo tornar o algoritmo de síntese infactível. Uma estratégia menos conservadora é proposta a seguir.

### 3.5.1 Politopo convexo e as projeções da região de incerteza

Neste caso, encontrar uma cobertura politópica basicamente consiste em determinar os vértices que definem um politopo convexo que contém toda a região de incerteza. Para isto, é necessário estudar a estrutura geométrica da região e estabelecer elementos geométricos de referência. Para o caso estudado, as referências serão as 4 curvas parametrizadas  $f(D'; 0, 2; 50)$ ,  $f(D'; 0, 6; 50)$ ,  $f(D'; 0, 2; 20)$  e  $f(D'; 0, 6; 20)$ . Elas são importantes porque constituem as bordas da imagem da função de incerteza  $f(D'; R_C; R)$  e seus pontos extremos coincidem com os pontos extremos da imagem. A curva  $f(D'; 0, 2; 50)$  corresponde ao caso mais próximo de um conversor *boost* ideal sem a presença de  $R_C$  e  $R_L$ , pois quanto maior for a carga  $R$  em relação às resistências parasitas, mais precisas são as aproximações de  $\eta$ ,  $\epsilon$  e  $\delta$  como funções de uma única variável  $D'$ . Analogamente, a curva  $f(D'; 0, 6; 20)$  corresponde ao caso

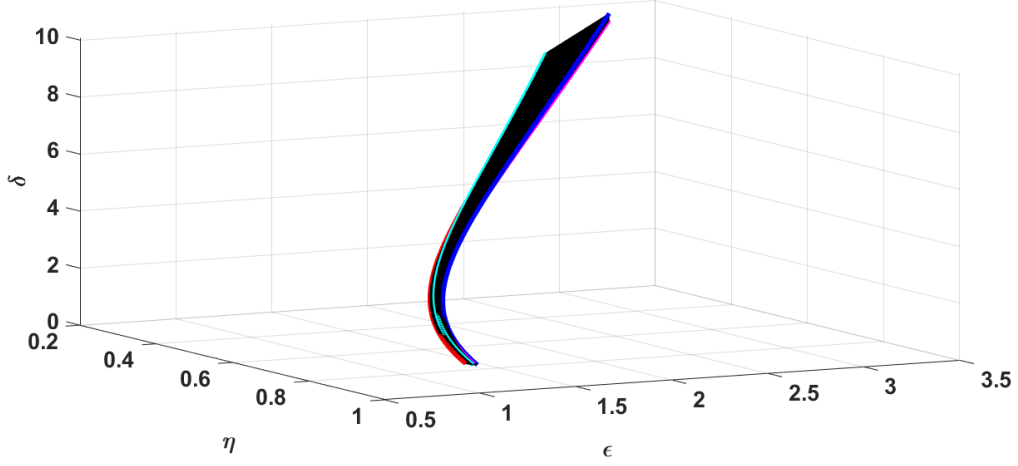


Figura 3.6: Vista 1 da região de incerteza com curvas destacadas.

mais distante do ideal. A Tabela 3.1 apresenta os pontos extremos e a cor atribuída a cada curva para representação gráfica. As Figuras 3.6 a 3.8 retratam vistas da região de incerteza com as curvas destacadas.

Tabela 3.1: Pontos extremos das curvas de referência.

| Curva             | Cor atribuída | Extremo superior                  | Extremo inferior                 |
|-------------------|---------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| $f(D'; 0, 2; 50)$ | Azul          | $v_1 = (0, 299; 3, 064; 10, 077)$ | $v_2 = (0, 996; 0, 992; 0, 988)$ |
| $f(D'; 0, 6; 50)$ | Magenta       | $v_3 = (0, 296; 3, 068; 9, 833)$  | $v_4 = (0, 988; 0, 992; 0, 980)$ |
| $f(D'; 0, 2; 20)$ | Ciano         | $v_5 = (0, 297; 2, 739; 8, 834)$  | $v_6 = (0, 990; 0, 980; 0, 971)$ |
| $f(D'; 0, 6; 20)$ | Vermelho      | $v_7 = (0, 291; 2, 759; 8, 361)$  | $v_8 = (0, 971; 0, 980; 0, 952)$ |

Para facilitar a determinação do politopo convexo, os pontos extremos das curvas de referência são tomados como vértices do politopo. Assim, 8 vértices ( $v_1$  a  $v_8$ ) já ficam fixados e bastam mais dois para construir um politopo convexo envolvendo completamente a região de incerteza. A determinação dos pontos restantes  $v_9$  e  $v_{10}$  é feita a partir da cobertura individual de cada projeção da região de incerteza nos planos do  $\mathbb{R}^3$ . Utilizando-se das aproximações de  $\eta$ ,  $\epsilon$  e  $\delta$  como funções de uma única variável  $D'$ , pode-se concluir que  $\delta \approx \frac{1}{\eta^2}$ ,  $\delta \approx \epsilon^2$  e  $\epsilon \approx \frac{1}{\eta}$ . Como a projeção no plano  $\eta - \delta$  apresenta a curva mais acentuada ( $\delta \approx \frac{1}{\eta^2}$ ), então esta projeção é utilizada como referência para calcular as coordenadas  $\eta$  e  $\delta$  dos vértices  $v_9$  e  $v_{10}$ . A Figura

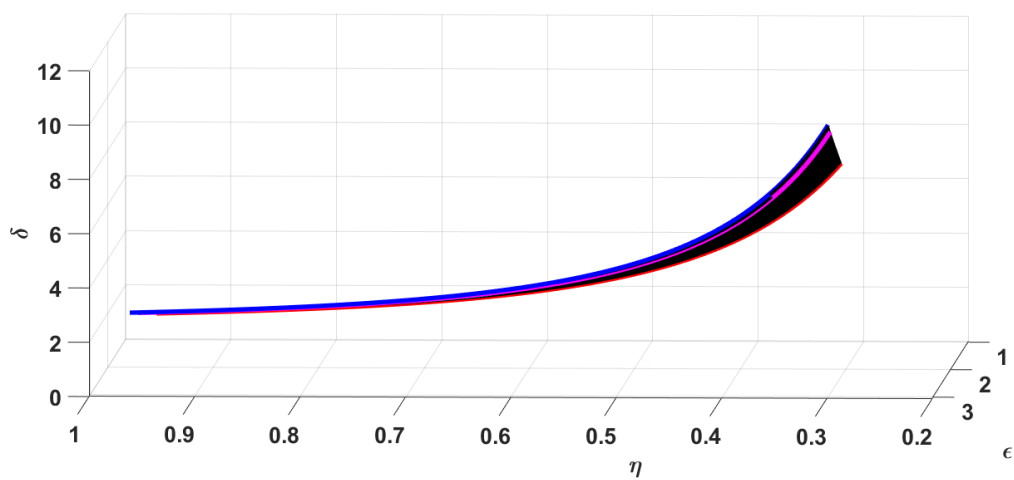


Figura 3.7: Vista 2 da região de incerteza com curvas destacadas.

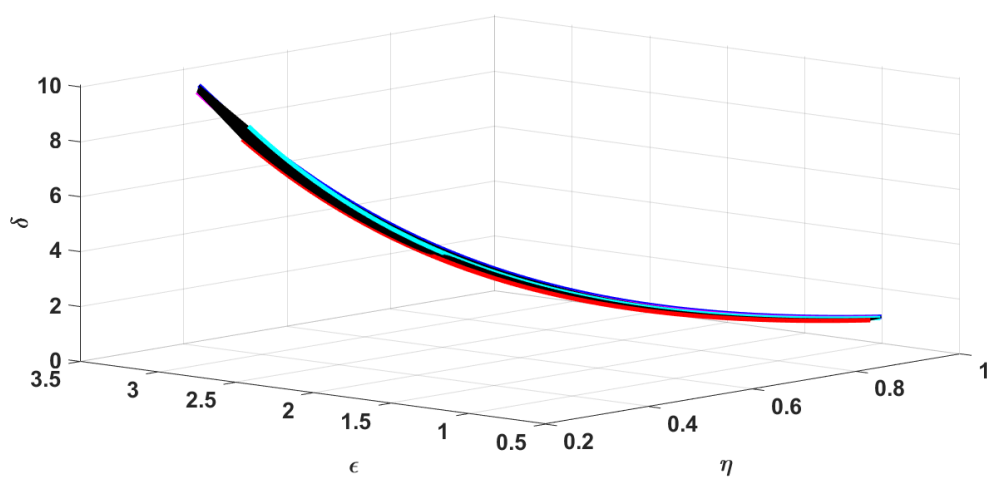


Figura 3.8: Vista 3 da região de incerteza com curvas destacadas.

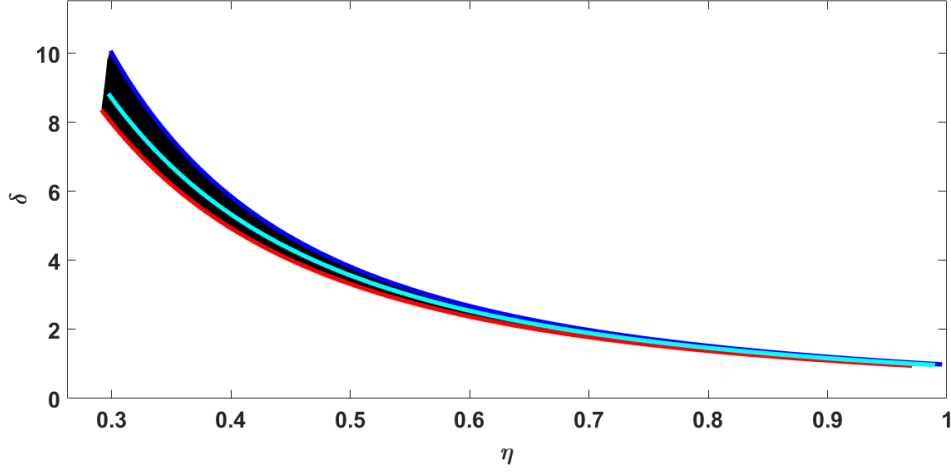


Figura 3.9: Projeção da região de incerteza no plano  $\eta - \delta$ .

[3.9](#) ilustra a projeção com os vértices destacados em verde. Nota-se que os vértices das curvas em azul e ciano já estão alinhados de modo a não excluir nenhuma parte da região de incerteza na formação do politopo. Entretanto isto não ocorre com os vértices da curva em vermelho, por isto é necessário pelo menos mais um vértice abaixo dessa curva para ligar  $v_7$  e  $v_8$  sem transpassar a região de incerteza. Para garantir que o politopo convexo seja o menos conservador possível, as coordenadas desses vértices são definidas pela interseção das retas tangentes à curva vermelha em  $v_7$  e  $v_8$ . Assim, as coordenadas podem ser calculadas pelas expressões

$$\eta_{ot} = \frac{\delta_7 - \eta_7 \frac{d\delta}{d\eta}|_{v_7} - (\delta_8 - \eta_8 \frac{d\delta}{d\eta}|_{v_8})}{\frac{d\delta}{d\eta}|_{v_8} - \frac{d\delta}{d\eta}|_{v_7}}, \quad (3.25)$$

$$\delta_{ot} = \frac{\frac{d\delta}{d\eta}|_{v_8}(\delta_7 - \eta_7 \frac{d\delta}{d\eta}|_{v_7}) - \frac{d\delta}{d\eta}|_{v_7}(\delta_8 - \eta_8 \frac{d\delta}{d\eta}|_{v_8})}{\frac{d\delta}{d\eta}|_{v_8} - \frac{d\delta}{d\eta}|_{v_7}}.$$

Desta forma, são encontrados  $\eta_{ot} = 0,436$  e  $\delta_{ot} = 1,976$ . Estas serão as coordenadas dos vértices  $v_9$  e  $v_{10}$ , restando apenas a determinação dos respectivos  $\epsilon$ . A Figura [3.10](#) apresenta o traçado do politopo convexo que contém a projeção em  $\eta - \delta$  da região de incerteza, incluindo  $v_9$  e  $v_{10}$ , obtidos a partir da interseção das retas tangentes à curva em vermelho.

A coordenada  $\epsilon$  de  $v_9$  é determinada a partir do politopo convexo que contém a projeção da região de incerteza no plano  $\epsilon - \delta$ , que pode ser visualizada na Figura

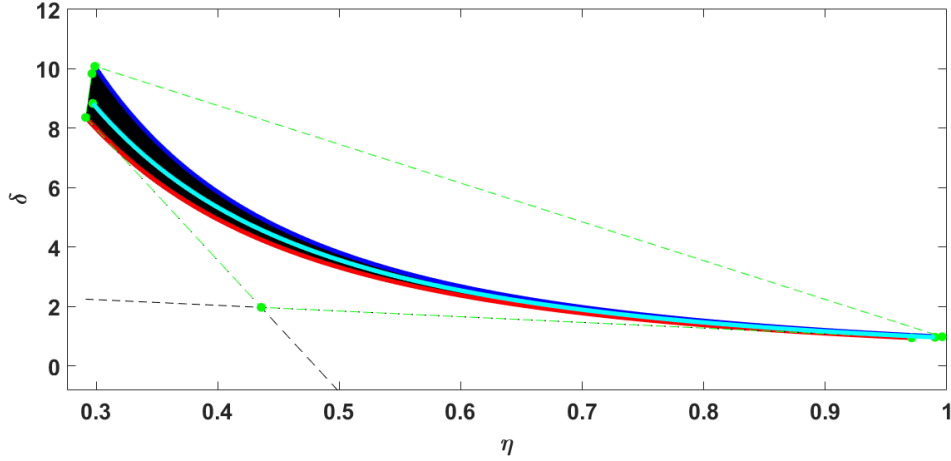


Figura 3.10: Politopo convexo no plano  $\eta - \delta$ .

**3.11.** Nota-se que, neste caso, são os extremos da curva em magenta que necessitam de mais um vértice para não transpassar a região de incerteza. Como a coordenada  $\delta$  já é conhecida, o valor de  $\epsilon$  menos conservador é calculado a partir do cruzamento de  $\delta = \delta_{ot}$  com a reta tangente a uma das extremidades da curva em magenta. Esse problema pode ser resolvido com o algoritmo:

1. calcular  $\delta_{aux} = \frac{\frac{d\delta}{d\epsilon}|_{v_4}(\delta_3 - \epsilon_3 \frac{d\delta}{d\epsilon}|_{v_3}) - \frac{d\delta}{d\epsilon}|_{v_3}(\delta_4 - \epsilon_4 \frac{d\delta}{d\epsilon}|_{v_4})}{\frac{d\delta}{d\epsilon}|_{v_4} - \frac{d\delta}{d\epsilon}|_{v_3}}$ ;
2.  $\epsilon_9 = \begin{cases} \epsilon_3 + \frac{(\delta_{ot} - \delta_3)}{\frac{d\delta}{d\epsilon}|_{v_3}} & \text{se } \delta_{aux} \geq \delta_{ot}; \\ \epsilon_4 + \frac{(\delta_{ot} - \delta_4)}{\frac{d\delta}{d\epsilon}|_{v_4}} & \text{se } \delta_{aux} < \delta_{ot}. \end{cases}$

No caso em estudo,  $\delta_{aux} = 3,141 > \delta_{ot}$ , implicando que o vértice  $v_9$  é definido pelo cruzamento com a reta tangente à curva em magenta em  $v_4$ . Portanto,  $\epsilon_9 = 1,907$  e  $v_9$  está completamente determinado por  $(\eta_{ot}; \epsilon_9; \delta_{ot})$ . A representação gráfica do politopo convexo que contém a projeção da região de incerteza em  $\epsilon - \delta$  está representada na Figura **3.12**.

Por fim, a coordenada  $\epsilon$  de  $v_{10}$  é encontrada mediante o politopo que contém a projeção no plano  $\eta - \epsilon$ . Como ilustrado na Figura **3.13**, a curva determinante para a construção do politopo nesta projeção é a curva em vermelho. Desta vez, a coordenada  $\eta$  é fixada em  $\eta_{ot}$ , de modo que  $\epsilon_{10}$  será determinado pelo cruzamento com a reta tangente à curva vermelha em  $v_7$  ou  $v_8$ . O procedimento para calcular  $\epsilon_{10}$  é semelhante ao anterior:

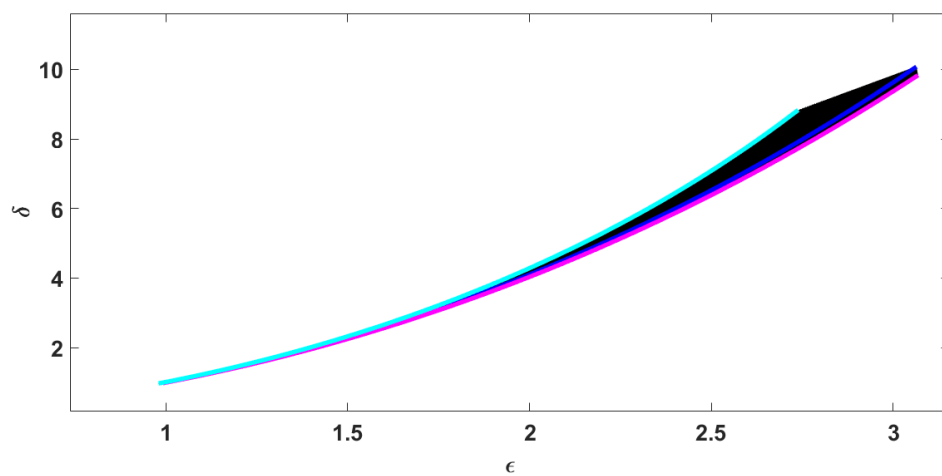


Figura 3.11: Projeção da região de incerteza no plano  $\epsilon - \delta$ .

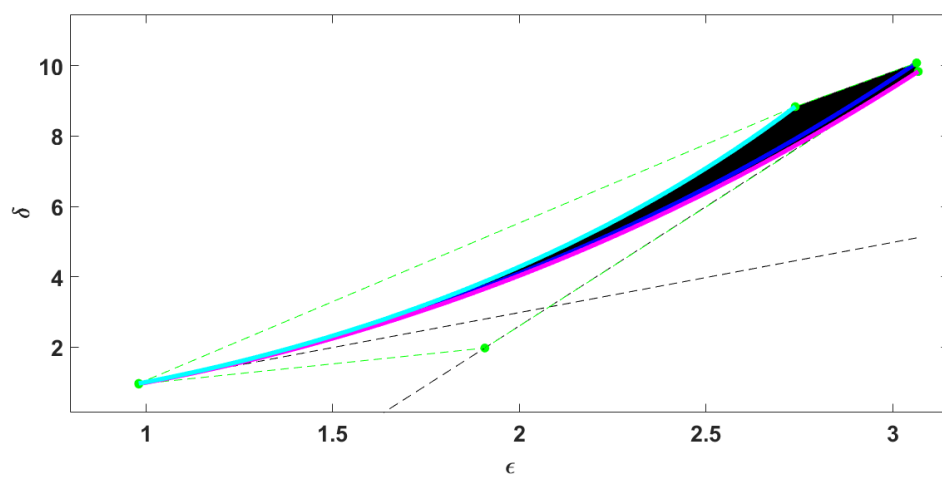


Figura 3.12: Politopo convexo no plano  $\epsilon - \delta$ .

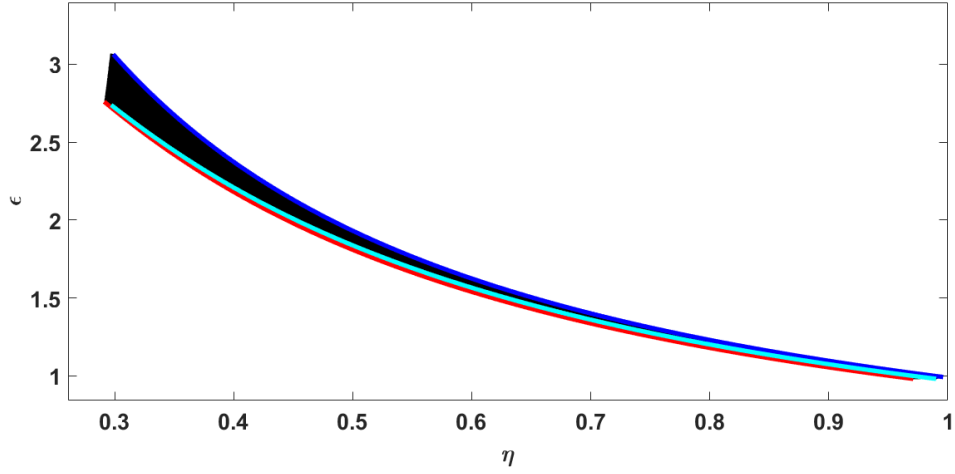


Figura 3.13: Projeção da região de incerteza no plano  $\eta - \epsilon$ .

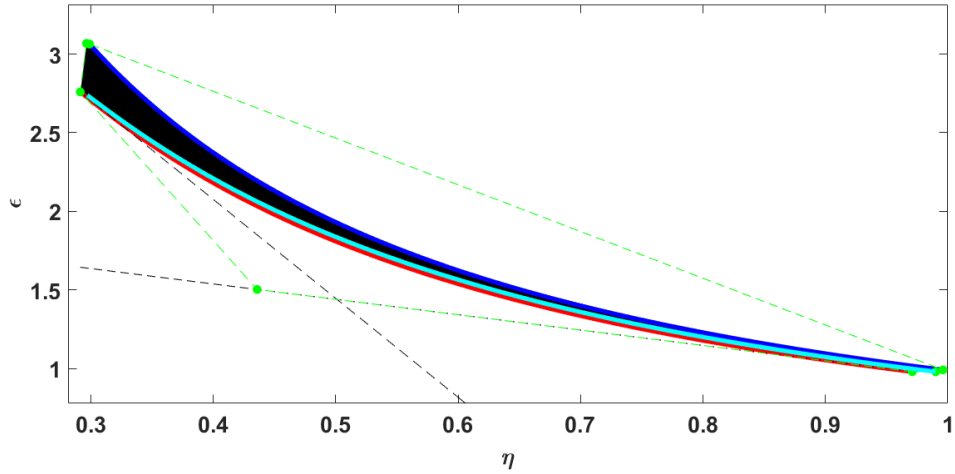


Figura 3.14: Politopo convexo no plano  $\eta - \epsilon$ .

$$1. \text{ calcular } \eta_{aux} = \frac{(\epsilon_7 - \eta_7 \frac{d\epsilon}{d\eta}|_{v_7}) - (\epsilon_8 - \eta_8 \frac{d\epsilon}{d\eta}|_{v_8})}{\frac{d\epsilon}{d\eta}|_{v_8} - \frac{d\epsilon}{d\eta}|_{v_7}};$$

$$2. \epsilon_{10} = \begin{cases} \epsilon_8 + (\eta_{ot} - \eta_8) \frac{d\epsilon}{d\eta}|_{v_8} & \text{se } \eta_{aux} \geq \eta_{ot}; \\ \epsilon_7 + (\eta_{ot} - \eta_7) \frac{d\epsilon}{d\eta}|_{v_7} & \text{se } \eta_{aux} < \eta_{ot}. \end{cases}$$

Assim,  $\eta_{aux} = 0,501 > \eta_{ot}$ . Por conseguinte,  $\epsilon_{10}$  é definido pela interseção de  $\eta = \eta_{ot}$  com a tangente à curva magenta em  $v_8$ , o que resulta em  $\epsilon_{10} = 1,503$  e  $v_{10}$  completamente determinado por  $(\eta_{ot}; \epsilon_{10}; \delta_{ot})$ . A Figura [3.14](#) representa graficamente o politopo convexo que contém a projeção em  $\eta - \epsilon$  com a indicação de  $v_{10}$ .

### 3.5.2 Polítopo convexo e a região de incerteza

Em resumo, as coordenadas dos 10 vértices do polítopo convexo no  $\mathbb{R}^3$  estão expressas na Tabela 3.2. Embora o novo polítopo, ilustrado na Figura 3.15, tenha mais vértices do que o polítopo da Figura 3.5, seu volume é muito menor (0,436 contra 13,426). Esta abordagem se traduz em uma redução do conservadorismo na modelagem do conversor, o que potencialmente resulta em um processo de síntese robusta mais eficiente.

Tabela 3.2: Vértices do polítopo convexo final.

| $\eta$      | Valor | $\epsilon$      | Valor | $\delta$      | Valor  |
|-------------|-------|-----------------|-------|---------------|--------|
| $\eta_1$    | 0,299 | $\epsilon_1$    | 3,064 | $\delta_1$    | 10,077 |
| $\eta_2$    | 0,996 | $\epsilon_2$    | 0,992 | $\delta_2$    | 0,988  |
| $\eta_3$    | 0,296 | $\epsilon_3$    | 3,068 | $\delta_3$    | 9,833  |
| $\eta_4$    | 0,988 | $\epsilon_4$    | 0,992 | $\delta_4$    | 0,980  |
| $\eta_5$    | 0,297 | $\epsilon_5$    | 2,793 | $\delta_5$    | 8,834  |
| $\eta_6$    | 0,990 | $\epsilon_6$    | 0,980 | $\delta_6$    | 0,971  |
| $\eta_7$    | 0,291 | $\epsilon_7$    | 2,759 | $\delta_7$    | 8,361  |
| $\eta_8$    | 0,971 | $\epsilon_8$    | 0,980 | $\delta_8$    | 0,952  |
| $\eta_9$    | 0,436 | $\epsilon_9$    | 1,907 | $\delta_9$    | 1,976  |
| $\eta_{10}$ | 0.436 | $\epsilon_{10}$ | 1.503 | $\delta_{10}$ | 1.976  |

Como mencionado anteriormente, muito embora  $f(D'; R_C; R)$  seja uma função de três variáveis, a função de incerteza é mais sensível à variação de  $D'$  do que às de  $R_C$  e  $R$ . A ideia do polítopo convexo é isolar e tratar separadamente a incerteza em  $D'$ . Desta maneira,  $\eta$ ,  $\epsilon$  e  $\delta$  podem ser representados como um vetor de parâmetro  $v \in \mathbb{R}^3$  do polítopo no vetor de incertezas  $p$ , o que proporciona menor conservadorismo. O vetor de incerteza  $p$ , neste caso, é definido por  $v$  e os parâmetros incertos  $R_C$ ,  $R$  e  $C$ , ou seja,  $p = [v, R_C, R, C]'$ . Assume-se que, assim como as outras grandezas, a capacitância  $C$  pertence a um intervalo de incerteza  $C \in [\underline{C}, \overline{C}]$ . Portanto, as permutações possíveis entre os 10 vértices  $v$  e os extremos dos outros três parâmetros resulta no polítopo final  $\Omega_S$  com  $N_v = 80$  vértices. Finalmente, os vértices do

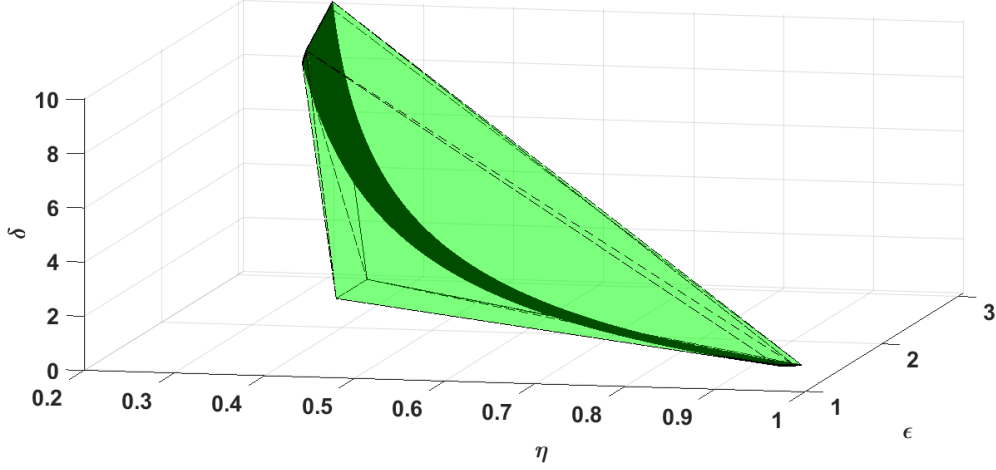


Figura 3.15: Politopo convexo menos conservador.

politopo  $\Omega_S$  em (3.21) podem ser expressos como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_1 &= [\mathbf{A}(p_1), \mathbf{B}_w(p_1), \dots, \mathbf{D}_u(p_1)], \quad p_1 = [\underline{R}_C, \underline{R}, \underline{C}, v_1]; \\
 &\vdots \\
 \mathcal{G}_{80} &= [\mathbf{A}(p_{80}), \mathbf{B}_w(p_{80}), \dots, \mathbf{D}_u(p_{80})], \quad p_{80} = [\overline{R}_C, \overline{R}, \overline{C}, v_{10}].
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

É importante esclarecer que as não linearidades presentes nos elementos das matrizes em (3.23) não invalidam o modelo politópico proposto. Isto se deve ao fato de que os parâmetros são todos estritamente crescentes, como  $\eta$  e  $R_C$ , ou estritamente decrescentes, como  $\frac{1}{R}$ ,  $\frac{1}{C}$ ,  $\epsilon$  e  $\delta$ . Desta forma, todos os possíveis resultados de produtos e divisões estão incluídos no politopo resultante formado pelos vértices  $\mathcal{G}_i$ .

## Capítulo 4

# Capacitores eletrolíticos e o sistema de identificação e controle

Para melhor contextualizar a presença de incertezas paramétricas nos capacitores eletrolíticos, é preciso ter compreensão acerca da estrutura física e do princípio de funcionamento desses dispositivos. Como pode ser visto na Figura 4.1, a composição básica de um capacitor eletrolítico de alumínio consiste em dois eletrodos de alumínio, em forma de folhas, separados por um papel separador embebido com uma solução eletrolítica (comumente baseada em etilenoglicol ou ácido bórico). A camada de óxido  $\text{Al}_2\text{O}_3$  formada no eletrodo anódico serve como material dielétrico para o capacitor. Também é formada uma camada de óxido no eletrodo catódico, entretanto sua espessura é muito menor que a camada no anodo e por isso é normalmente desconsiderada. Os eletrodos são enrolados juntamente com o papel separador numa estrutura compacta cilíndrica que, devido à fina camada dielétrica e ampla área superficial efetiva, proporciona elevada relação de capacitância por volume ao componente [3]. Devido a este arranjo físico, o capacitor eletrolítico pode ser modelado como uma associação em série entre um componente resistivo  $R_{ESR}$ , uma capacitância pura  $C$  e uma indutância pura  $L_{ESL}$  (Figura 4.2 a). O ESR é resultante das contribuições em perdas ôhmicas do eletrólito, do papel separador, camadas de óxido, folhas de alumínio, soldas e conectores, embora a parcela associada ao eletrólito seja predominante [2]. A capacitância total  $C$  é proveniente da associação em série das capacitâncias relativas às camadas de óxido no anodo e catodo, sendo a segunda muito maior que a primeira por conta da menor espes-

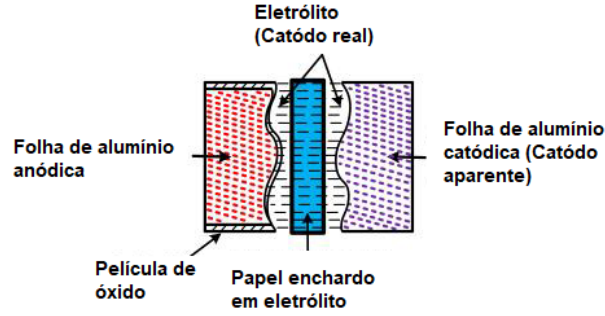


Figura 4.1: Estrutura física de um capacitor eletrolítico [1].

sura. Logo,  $C$  é basicamente determinada pela capacitância anódica [3]. Por fim, o enrolamento das folhas de alumínio do capacitor provoca o surgimento de uma componente indutiva ESL, entretanto seu efeito é comumente desconsiderado na faixa de frequência habitual para conversores de potência.

A Figura 4.2 b representa a impedância característica do capacitor eletrolítico em função da frequência. Na região de baixa frequência ( $\omega < \omega_1 = \frac{1}{R_{ESR}C}$ ), predomina o caráter capacitivo do componente, com queda de -20 dB/dec. A constante de tempo  $R_{ESR}C$  não costuma variar muito, independentemente do tamanho do capacitor, ficando na faixa de 50 – 150  $\mu s$ . Isto ocorre porque a capacitância  $C$  é diretamente proporcional à área das folhas do capacitor, enquanto a resistência das perdas  $R_{ESR}$  é inversamente proporcional [2]. Logo, para frequências acima da faixa  $f_1 \approx 1 - 3$  kHz, o comportamento resistivo passa a dominar a dinâmica do capacitor eletrolítico. Efeitos indutivos começam a aparecer apenas em frequências acima da faixa  $f_2 = 100 - 500$  kHz, que é a faixa de frequência de corte superior habitual para capacitores utilizados em aplicações de potência [2]. Para o estudo de caso apresentado nesta dissertação, a frequência de chaveamento escolhida foi de 100 kHz, por isso optou-se por desconsiderar o ESL do capacitor na modelagem do conversor.

A deterioração de capacitores eletrolíticos é decorrente da combinação de vários fatores, como estresse mecânico, térmico, elétrico ou ambiental, que podem acarretar falhas no funcionamento do componente. A principal forma de degradação daqueles

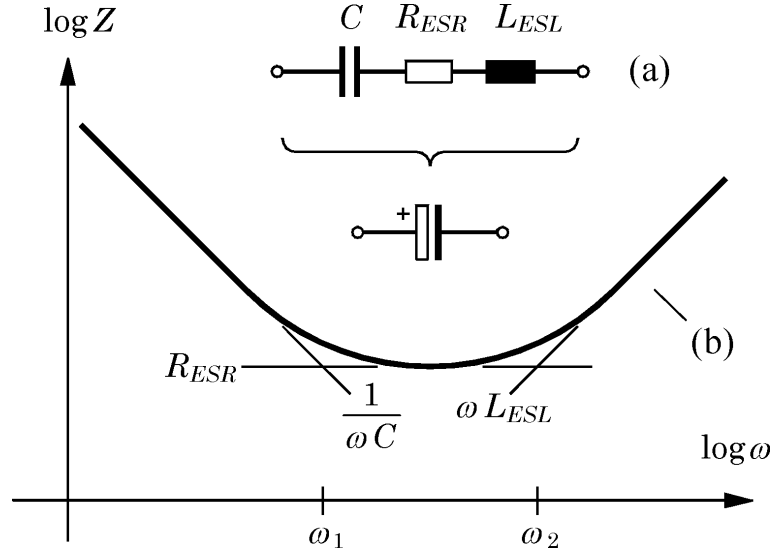


Figura 4.2: Circuito equivalente (a) e impedância característica de um capacitor eletrolítico (b) [2].

dispositivos é a evaporação do eletrólito, que ocorre naturalmente com o envelhecimento do capacitor e pode ser acelerada pelas condições de operação como aumento de temperatura, tensão excessiva aplicada e corrente de *ripple* [3]. A evaporação do eletrólito interfere diretamente nos valores da capacitância e ESR do capacitor, pois ocorre uma diminuição da área efetiva de contato entre os eletrodos, resultando em diminuição de  $C$  e aumento de  $R_{ESR}$ . Além disto, estes parâmetros também são afetados pela temperatura e frequência de operação. Essas relações de dependência são as fontes de incerteza que estimularam os estudos apresentados no capítulo anterior, e devido à sua importância, são detalhadas com dados experimentais nas seções a seguir.

## 4.1 Incertezas associadas ao ESR

De acordo com [33], o aumento da perda ôhmica ESR com a evaporação do eletrólito pode ser relacionado diretamente com a redução do volume de eletrólito contido no capacitor. Seja  $\nu = \frac{V}{V_o}$  a razão entre os volumes final e inicial do eletrólito. A partir de dados experimentais, chegou-se a

$$R_{ESR} = \frac{R_{ESR,o}}{\nu^2}, \quad (4.1)$$

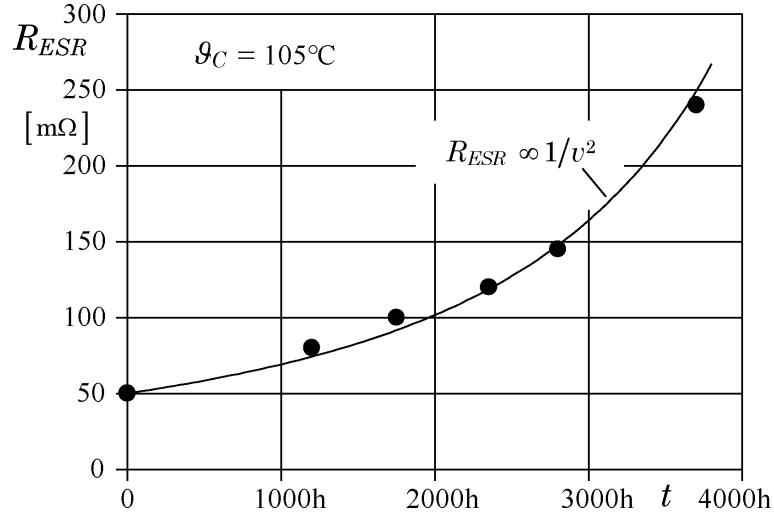


Figura 4.3: Resultados experimentais do aumento do ESR conforme o tempo de uso [2].

sendo  $R_{ESR,o}$  o valor inicial da resistência quando o capacitor está novo. Fabricantes, em geral, determinam que um capacitor eletrolítico chega ao final da sua vida útil quando perde cerca de 30 a 40% do volume de eletrólito. Por isto, estabeleceu-se a regra de que um aumento de duas a três vezes no valor de  $R_{ESR}$  do capacitor indica que o componente deve ser repostado. A Figura 4.3 mostra resultados experimentais obtidos em [34] para uma amostra de capacitores de  $2200\mu F$ , 10 V, submetidos a uma temperatura de operação de  $105^\circ\text{C}$ . Neste caso, o valor do ESR dobra depois de 2000 horas de uso. É importante ressaltar que a implementação de um sistema de monitoramento da saúde do capacitor deve necessariamente contar com a medição da temperatura do dispositivo.

Além da dependência com a perda de eletrólito, a resistência de perda  $R_{ESR}$  também varia diretamente com a temperatura. Isto ocorre porque a subida da temperatura aumenta a mobilidade dos íons do eletrólito, contribuindo, portanto, para um decréscimo de  $R_{ESR}$  [2, 3]. Além disto, também há aumento da superfície de contato entre os eletrodos devido à expansão térmica do eletrólito e do alumínio, reforçando a redução de  $R_{ESR}$ . De acordo com [34], esta relação pode ser modelada como

$$R_{ESR,\theta_C} = R_{ESR} \left[ O + M \exp \left( - \frac{\theta_C}{N} \right) \right], \quad (4.2)$$

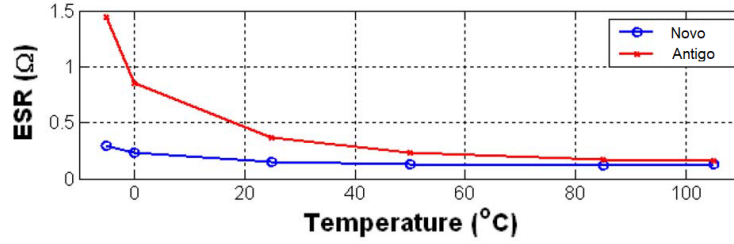


Figura 4.4: Medidas do ESR em função da temperatura para o capacitor novo e o antigo [3].

na qual  $O$ ,  $M$  e  $N$  são parâmetros experimentais que dependem do tipo do capacitor e  $\theta_C$  é a temperatura em Celsius. A Figura 4.4 apresenta dados experimentais obtidos em [3] para dois capacitores de  $680\mu F$ , 200 V, sendo um envelhecido e o outro novo, ambos submetidos a uma frequência de 360 Hz. Nota-se que a variação de resistência com a temperatura é muito mais significativa para o capacitor antigo do que para o novo, chegando ter as curvas bem próximas em temperaturas elevadas. Desta forma, a avaliação das condições de operação do capacitor mediante a identificação de  $R_{ESR}$  deve, na prática, ser ponderada pela medição da temperatura. Portanto, o valor de referência do ESR para aferir o estado de envelhecimento do dispositivo deve levar em consideração a temperatura.

Por fim, a resistência  $R_{ESR}$  também é função da frequência da tensão aplicada ao capacitor, pois o aumento da frequência induz mais perdas devido à polarização do dielétrico, o que implica numa redução do  $R_{ESR}$  do modelo. Entretanto, essa dependência não é muito relevante para sistemas de monitoramento, pois, como mostra a Figura 4.5, a variação de  $R_{ESR}$  com a frequência não é muito significativa e as curvas dos capacitores novo e antigo não se aproximam. Esses resultados experimentais foram obtidos em [3] com a temperatura de operação de  $26^\circ C$ .

## 4.2 Incertezas associadas à capacitância

Como mencionado anteriormente, a capacitância  $C$  é reduzida com a evaporação do eletrólito devido à diminuição da área efetiva de contato entre os eletrodos. Entretanto, o aumento da temperatura provoca o efeito inverso, pois a dilatação térmica aumenta a seção de contato e consequentemente a capacitância. Os resultados ex-

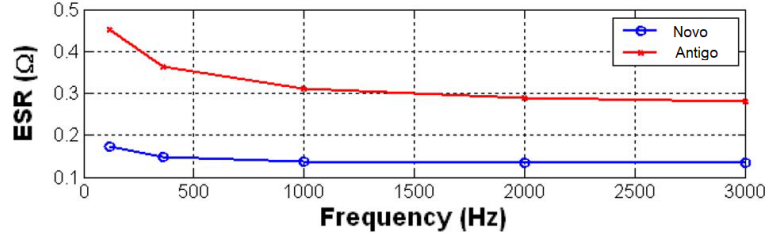


Figura 4.5: Medidas do ESR em função da frequência para o capacitor novo e o antigo [3].

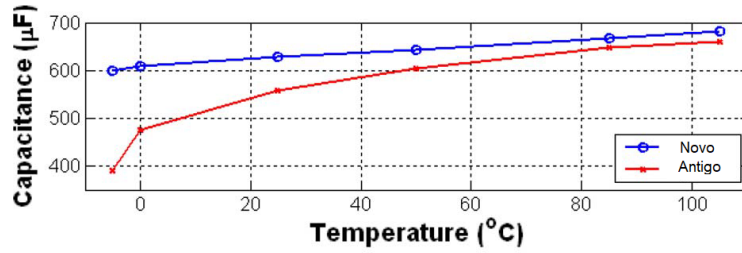


Figura 4.6: Medidas de  $C$  em função da temperatura para o capacitor novo e o antigo [3].

perimentais em [3] comprovam essas relações de dependência (Figura 4.6), nas quais também foram utilizados capacitores de 680, 200 V, na frequência de 360 Hz.

Assim como  $R_{ESR}$ , a capacitância também depende da frequência. Como esta variável interfere no alinhamento dos dipolos do dielétrico, há alteração da constante dielétrica da camada de óxido e, portanto, mudança da capacitância [3]. Entretanto esta variação não é significativa na faixa de frequência usual para conversores de potência.

### 4.3 Sistema de controle proposto

A Figura 4.7 ilustra o sistema de controle proposto. O principal objetivo é projetar um controlador robusto por realimentação de estado para regular a tensão de saída do conversor elevador, que deve seguir a referência  $V_{ref}$ . Nota-se que, como o projeto é feito com o modelo linearizado no ponto de equilíbrio, as medições dos estados do conversor são subtraídas dos respectivos valores de equilíbrio nominais  $V_C$  e  $I_L$ . Como  $V_o$  é igual a  $V_C$  em regime permanente, assume-se  $V_C = V_{ref}$ . Desta forma,

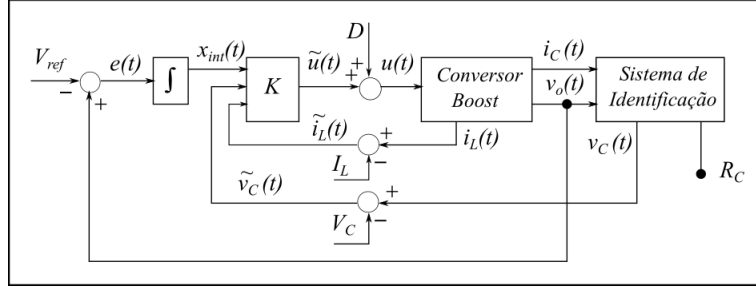


Figura 4.7: Diagrama do sistema de controle proposto.

$D$  pode ser calculado por  $D'$ , ou seja,  $D = 1 - D'$ , a partir da equação de segundo grau deduzida da equação (3.10):

$$R^2 V_C D'^2 - [R(R + R_C)V_g - R_C R V_C] D' + V_C R_L (R + R_C) = 0. \quad (4.3)$$

Isto resulta em:

$$D' = \frac{R(R + R_C)V_g - R_C R V_C + \sqrt{[R(R + R_C)V_g - R_C R V_C]^2 - 4R^2 V_C^2 R_L (R + R_C)}}{2R^2 V_C}.$$

Obtidos  $V_C$  e  $D'$ ,  $I_L$  é determinado diretamente da equação (3.10). Como mencionado anteriormente, o estado  $v_C$  é um estado interno ao capacitor e não pode ser mensurado diretamente. Sua estimação é feita com base no modelo adotado para o capacitor eletrolítico, pois  $v_C = v_o - R_C i_C$ . Entretanto, como o problema considera um capacitor afetado por condições de envelhecimento, as medições de  $v_o$  e  $i_C$  e o valor nominal de  $R_C$  não são suficientes para estimar  $v_C$  com precisão. Para isto, é necessário um sistema auxiliar para identificar o valor de  $R_C$  a medida que o desgaste do dispositivo provoque alterações paramétricas.

### 4.3.1 Sistema auxiliar de identificação e estimação

O princípio da identificação de  $R_C$  consiste em calcular a perda média de potência do capacitor, que é causada inteiramente pelo elemento resistivo [2, 14]. Além disto, sabe-se também que a corrente do capacitor não possui componente CC, por isto a contribuição de potência é apenas das componentes CA  $i_{C,CA}$ . Pela definição de potência média, tem-se

$$P_C = \frac{1}{T_s} \int p_C dt = \frac{1}{T_s} \int v_{o,CA} i_{C,CA} dt. \quad (4.4)$$

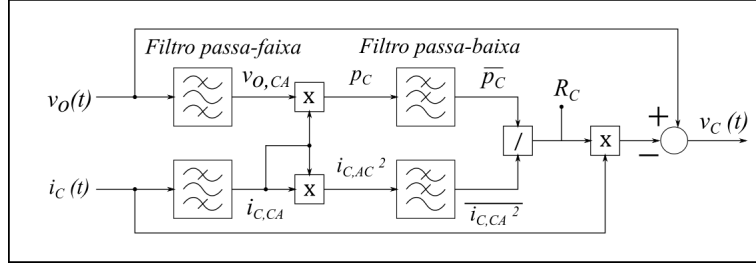


Figura 4.8: Diagrama do sistema auxiliar de identificação e estimação.

Entretanto, a perda média também pode ser expressa como função de  $R_C$  e da corrente RMS do capacitor na forma de  $P_C = R_C I_{C,rms}^2$ . Assim, é possível determinar  $R_C$  a partir das medições de  $v_o$  e  $i_C$  pela relação

$$R_C = \frac{P_C}{I_{C,rms}^2} = \frac{\frac{1}{T_s} \int v_{o,CA} i_{C,CA} dt}{\frac{1}{T_s} \int i_{C,CA}^2 dt}. \quad (4.5)$$

O diagrama do sistema de identificação está representado na Figura 4.8. Primeiramente, as medições de  $v_o$  e  $i_C$  são processadas em filtros passa-faixa idênticos para extrair as componentes CA na frequência de comutação do conversor. As harmônicas não são necessárias para o cálculo de  $R_C$ , por isso a largura de banda dos filtros não precisa ser muito elevada. Dependendo da conveniência para o projeto dos filtros, podem ser utilizados filtros passa-alta no lugar dos filtros passa-faixa, contanto que a atenuação seja suficientemente alta nas baixas frequências. O cálculo dos valores médios é feito com os filtros passa-baixa, sendo suficiente que a frequência de corte esteja bem abaixo da frequência de comutação. Além da simplicidade do projeto dos filtros, esse sistema tem a vantagem de requerer poucos cálculos por ciclo, sendo de fácil implementação tanto por meios digitais quanto analógicos [2].

Observa-se que, a rigor, o valor ESR obtido corresponde ao valor na frequência de comutação. Entretanto, como visto na seção anterior, a variação de  $R_C$  com a frequência pode ser desconsiderada para esse tipo de aplicação. Determinado  $R_C$ , a estimação de  $v_C$  é direta e usa apenas as medições já utilizadas no processo de identificação de  $R_C$ .

# Capítulo 5

## Controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ : abordagem via LMI

Definido o método de controle a ser empregado, resta desenvolver o algoritmo de síntese do controlador por realimentação de estado. Para isto, serão utilizadas as LMIs, ferramentas matemáticas muito úteis para a resolução de problemas de otimização convexa. Neste Capítulo, a definição e algumas propriedades das LMIs são apresentadas para demonstrar que é possível descrever requisitos de projeto, como alocação de polos e rejeição de perturbação, na forma de restrições do tipo LMI. Além disso, estas restrições podem ser estendidas para sistemas incertos, contanto que o modelo do sistema seja feito por meio de um politopo convexo. Por fim, as desigualdades matriciais podem ser empregadas tanto para síntese ótima robusta quanto para análise robusta de sistemas.

### 5.1 Definição e propriedades das LMIs

Uma desigualdade matricial linear (sigla LMI, em inglês) é definida pela seguinte expressão [31]:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i \succ 0, \quad (5.1)$$

na qual  $x \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de variáveis de decisão e  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , são matrizes simétricas dadas. Isto indica que  $F(x)$  é uma matriz definida positiva, ou seja,  $v^T F(x) v \succ 0$  para todo  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ . De maneira equivalente, a LMI (5.1)

representa um conjunto de  $n$  inequações polinomiais em  $x$ . Uma propriedade muito importante associada a (5.1) é que essa LMI representa uma restrição convexa em  $x$ , ou seja, o conjunto  $\{x \in \mathbb{R}^m | F(x) \succ 0\}$  é convexo. Isso permite que as LMIs sejam utilizadas para descrever diferentes problemas de otimização convexa ou quase-convexa, que por sua vez podem ser resolvidos numericamente de maneira eficiente por algoritmos de programação linear baseados no método dos pontos interiores [31].

Embora o termo LMI só tenha sido adotado mais recentemente, a noção de desigualdade matricial e sua aplicação na teoria de controle foi sugerida pela primeira vez em 1890, quando Lyapunov apresentou seu famoso estudo sobre a estabilidade de sistemas dinâmicos. Foi demonstrado que o sistema linear e invariante no tempo

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n \quad (5.2)$$

é assintoticamente estável se e somente se existe uma matriz simétrica  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que

$$A^T P + PA \prec 0, \quad P \succ 0. \quad (5.3)$$

Neste caso, têm-se duas LMIs em que a variável é uma matriz. As desigualdades (5.3) podem ser facilmente escritas na forma (5.1). Usualmente, a representação das LMIs é feita de forma similar à desigualdade de Lyapunov, mantendo implícita a variável  $x$ . Assim, para a estabilidade assintótica, a variável explícita é a matrix  $P$ , e esta deve satisfazer as restrições (5.3). Ambas as restrições podem ser expressas em uma única LMI

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & 0 \\ 0 & -P \end{bmatrix} \prec 0. \quad (5.4)$$

De forma geral, múltiplas LMIs  $F^{(1)}(x) \succ 0, \dots, F^{(p)}(x) \succ 0$  podem ser escritas de forma equivalente como uma única LMI  $\text{diag}(F^{(1)}(x), \dots, F^{(p)}(x)) \succ 0$ .

### 5.1.1 Complemento de Schur

Algumas desigualdades não lineares convexas podem ser convertidas em LMIs utilizando-se os complementos de Schur. Assim, a LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5.5)$$

com  $R(x)$ ,  $S(x)$  e  $Q(x)$  funções afins de  $x$ , e  $R(x)$  e  $Q(x)$  simétricos, é equivalente a

$$Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T \succ 0, \quad R(x) \succ 0. \quad (5.6)$$

Assim, a desigualdade não linear em (5.6) pode ser escrita como a LMI (5.5). Um caso trivial são as restrições de normas de matrizes. Seja, por exemplo,  $\|Z(x)\|_2 < \zeta$ , com  $Z(x) \in \mathbb{R}^{p \times q}$ . Esta desigualdade pode ser expressa como

$$\zeta^2 I - Z(x)^T Z(x) \succ 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \zeta^2 I & Z(x)^T \\ Z(x) & I \end{bmatrix} \succ 0. \quad (5.7)$$

Aplicado a problemas de controle, o complemento de Schur possibilita, por exemplo, reescrever restrições das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema como LMIs.

### 5.1.2 O procedimento S

Em problemas de controle, é comum encontrar restrições quadráticas negativas (ou positivas) sujeitas a outras restrições quadráticas também negativas (ou positivas). O procedimento S permite descrever este conjunto de restrições como uma LMI, seja de forma equivalente ou ampliando o conservadorismo das restrições. O procedimento para funções quadráticas e desigualdades não estritas é ilustrado a seguir. Sejam  $f_0, \dots, f_p$  funções quadráticas da variável  $x \in \mathbb{R}^n$  do tipo

$$f_i(x) = x^T T_i x + 2g_i^T x + v_i, \quad i = 0, 1, \dots, p, \quad (5.8)$$

com  $T_i = T_i' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $g_i \in \mathbb{R}^n$  e  $v_i$  é um escalar. Considera-se a condição

$$f_0(x) \geq 0 \text{ para todo } x \text{ tal que } f_1(x) \geq 0, 1, \dots, f_p(x) \geq 0, \quad i = 0, \dots, p. \quad (5.9)$$

Se existem escalares  $\kappa_1 \geq 0, \dots, \kappa_p \geq 0$  tais que, para todo  $x$ ,

$$f_0(x) - \sum_{i=1}^p \kappa_i f_i(x) > 0, \quad (5.10)$$

então a condição (5.9) é satisfeita. Se  $p = 1$ , vale a reciprocidade, ou seja, a condição (5.9) implica que a (5.10) é verdadeira. A desigualdade (5.10) pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} T_0 & g_0 \\ g_0^T & v_0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^p \kappa_i \begin{bmatrix} T_i & g_i \\ g_i^T & v_i \end{bmatrix} \succ 0. \quad (5.11)$$

## 5.2 Realimentação de estado

Seja o sistema linear em tempo contínuo, invariante no tempo (LTI):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (5.12)$$

em que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  são os estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Segundo Lyapunov, a lei de controle por realimentação de estado  $u(t) = Kx(t)$ ,  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , estabiliza assintoticamente o sistema (5.12) se e somente se existe uma matriz simétrica  $P \succ 0$ ,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , tal que

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) \prec 0, \quad (5.13)$$

o que resulta em:

$$A^T P + PA + K^T B^T P + PBK \prec 0. \quad (5.14)$$

Para um problema de síntese, no qual o ganho  $K$  do controlador é desconhecido, a desigualdade (5.14) é bilinear em  $P$  e  $K$ , pois há produtos entre estas duas variáveis. Entretanto, esta não linearidade pode ser contornada por uma mudança de variável, transformando a desigualdade em uma LMI. Para isto, multiplica-se a desigualdade (5.14) à direita e à esquerda pela inversa de  $P$ , o que conserva o sinal da desigualdade, ou seja:

$$AP^{-1} + P^{-1}A^T + P^{-1}K^T B^T + BKP^{-1} \prec 0, \quad P^{-1} \succ 0.$$

A vantagem dessa abordagem é colocar o controlador  $K$  e a matriz de Lyapunov  $P^{-1}$  juntas, isolando a matriz  $B$ , que não possui inversa. Utilizando-se as mudanças

de variável  $P^{-1} = W$  e  $Y = KW$ , obtém-se a seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} WA^T + AW + Y^T B^T + BY & 0 \\ 0 & -W \end{bmatrix} \prec 0. \quad (5.15)$$

A LMI (5.15) tem como variáveis  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e pode ser utilizada para problemas de síntese, e o ganho  $K$  do controlador por realimentação de estado é obtido diretamente de  $W$  e  $Y$  com  $K = YW^{-1}$ .

### 5.3 Estabilidade quadrática

Considera-se o sistema (5.12) no qual as matrizes  $A$  e  $B$  são incertas e pertencem aos conjuntos convexos  $C_o(A_1, \dots, A_N)$  e  $C_o(B_1, \dots, B_M)$ , respectivamente. As matrizes  $A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , e  $B_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ , são os vértices destes politopos. É possível demonstrar que o sistema incerto é estabilizável pela lei de controle  $u(t) = Kx(t)$  se existe uma matriz  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $W \succ 0$ , tal que as LMIs [32]

$$A_i W + W A_i^T + Y^T B_j^T + B_j Y \prec 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, N, \quad \forall j = 1, 2, \dots, M, \quad (5.16)$$

sejam factíveis. Assim, é suficiente que a estabilidade seja assegurada nos vértices para garantir que o sistema incerto é estável para qualquer representação considerando-se os politopos de incerteza. A utilização de uma única matrix de Lyapunov  $W$  em (5.16) para todo o conjunto de incerteza estabelece o conceito de estabilidade quadrática. A mesma ideia pode ser estendida para outras restrições do tipo LMI. A modelagem politópica apresentada no Capítulo 3 foi proposta por conta da facilidade em tratar incertezas via LMIs no processo de síntese.

### 5.4 Controle $\mathcal{H}_\infty$ com alocação de polos

Além da garantia de estabilidade, que é crucial, um sistema de controle tem como objetivo fazer com que a planta satisfaça determinados critérios de desempenho. Um destes critérios é a rejeição de perturbação, que é particularmente preocupante no problema de regulação dos conversores CC-CC, no qual a tensão de entrada e a corrente de carga eventualmente variam e provocam distúrbios na saída. Uma

medida de desempenho adequada para analisar o efeito das perturbações na saída é a norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Seja  $H(s)$  a matriz de transferência do sistema (3.19), entre o vetor de perturbação  $\tilde{w}$  e a saída controlada  $\tilde{z}$ . A norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $H(s)$  é definida como

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{\tilde{w}(t) \neq 0} \frac{\|\tilde{z}(t)\|_{\mathcal{L}_2}}{\|\tilde{w}(t)\|_{\mathcal{L}_2}}, \quad (5.17)$$

em que  $\|p(t)\|_{\mathcal{L}_2} = (\int_0^\infty p(t)^T p(t) dt)^{\frac{1}{2}}$ . Um sinal é dito  $\mathcal{L}_2$  estável se sua norma  $\mathcal{L}_2$  é finita, e um sistema é dito  $\mathcal{L}_2$  estável se qualquer entrada  $\mathcal{L}_2$  estável gera uma saída  $\mathcal{L}_2$  estável. Desta forma, a existência da norma  $\mathcal{H}_\infty$  garante a estabilidade  $\mathcal{L}_2$  do sistema. Além disto, se a realização do sistema no espaço de estados é mínima, a estabilidade  $\mathcal{L}_2$  necessariamente coincide com a estabilidade interna.

Observa-se que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  estabelece um ganho máximo que quantifica o efeito das perturbações sobre a saída, no domínio do tempo. Existe interpretação semelhante no domínio da frequência, pois é possível demonstrar [35] que

$$\|H(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}_{max}[H(j\omega)], \quad (5.18)$$

em que  $\bar{\sigma}_{max}$  é o maior valor singular da matriz de transferência  $H(j\omega)$ . Para um sistema SISO, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  corresponde ao pico máximo no gráfico de magnitude do diagrama de Bode da função de transferência do sistema (Figura 5.1). Desta forma, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  se mostra muito conveniente como medida de desempenho, pois sua própria definição a estabelece como um custo garantido para a rejeição de perturbação do sistema. O problema de controle ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  é determinar um controlador que minimiza a norma de uma determinada matrix de transferência de malha fechada, de modo a minimizar a influência das perturbações.

Baseando-se em [36], é possível demonstrar que o sistema incerto definido pelas equações (3.19), (3.21) e (3.26) é quadraticamente estabilizável pela lei de controle por realimentação de estado  $\tilde{u}(t) = Kx(t)$ ; com  $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ ,  $H(s)$  a matriz de transferência entre  $w$  e  $z$ , se existe uma matriz definida positiva  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  e uma

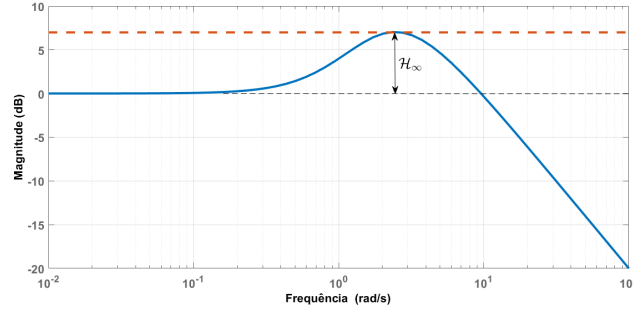


Figura 5.1: Gráfico de magnitude do diagrama de Bode de um sistema SISO.

matriz  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$  tais que as seguintes LMIs são factíveis

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A}_i' + \mathbf{B}_{u_i} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}' \mathbf{B}_{u_i}' & \mathbf{B}_{w_i} & \mathbf{W} \mathbf{C}_{z_i}' + \mathbf{Y}' \mathbf{D}_{u_i}' \\ \mathbf{B}_{w_i}' & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}_{w_i}' \\ \mathbf{C}_{z_i} \mathbf{W} + \mathbf{D}_{u_i} \mathbf{Y} & \mathbf{D}_{w_i} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0, \quad i = 1, 2, \dots, L, \quad (5.19)$$

e o ganho do controlador é dado por  $K = \mathbf{Y} \mathbf{W}^{-1}$ . Nota-se que a notação  $\mathbf{A}_i$  é equivalente a  $\mathbf{A}(p_i)$  em (3.26) e a mesma representação simplificada foi adotada para as outras matrizes do sistema. Assim, se a LMI é factível em todos vértices do politopo convexo (3.26), então  $\gamma$  é o custo  $\mathcal{H}_\infty$  garantido de rejeição de perturbação em malha fechada para qualquer representação do sistema dentro da região de incerteza. Observa-se também que a condição para a estabilidade quadrática (5.16) é assegurada com a factibilidade de (5.19).

#### 5.4.1 Alocação dos polos

Além da rejeição de perturbação, especificações de resposta transitória para o sistema em malha fechada, como sobressinal e tempo de acomodação, podem ser incorporadas ao projeto do controlador robusto  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de estado. Como a localização dos polos está diretamente associada às características de resposta transitória, pode-se restringir a alocação de polos de malha fechada do sistema incerto a uma região desejada do plano  $s$  para atender as especificações de projeto relacionadas com os transientes da resposta temporal. Uma região limitada com características de resposta transitória satisfatórias é aquela contida no semiplano

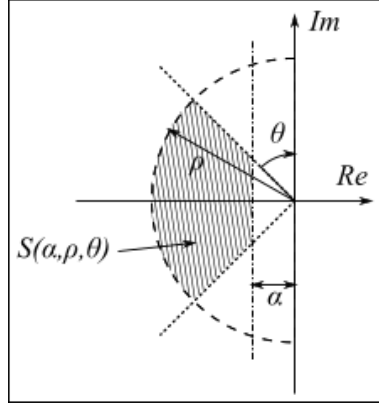


Figura 5.2: Região  $S(\alpha, \theta, \rho)$  no plano  $s$ .

esquerdo do plano  $s$ ,  $S(\alpha, \theta, \rho)$ , definida pela interseção entre a região à esquerda da reta vertical em  $\alpha$ ,  $a < -\alpha < 0$ , e o setor cônico definido por  $b < a \cot \theta$  e  $|a \pm jb| < \rho$ , sendo  $a$  e  $b$  as partes real e imaginária do número complexo, como pode ser visto na Figura 6.5.

Assim, para polos complexos conjugados  $-\xi\omega_n \pm j\omega_d$  dentro dessa região,  $\alpha$  estabelece uma taxa mínima de decaimento  $\xi\omega_n > \alpha$ ,  $\theta$  determina um limite inferior da taxa de amortecimento  $\xi > \sin \theta$  e  $\rho$  fixa um máximo para a frequência amortecida  $\omega_d < \rho \cos \theta$ , sendo  $\omega_d = \sqrt{1 - \xi^2}\omega_n$ . O primeiro parâmetro está diretamente ligado ao tempo de acomodação  $t_s$ , pois  $t_s = \frac{4}{\xi\omega_n}$  no critério de 2% para sistemas de segunda ordem [37]. O segundo parâmetro determina o máximo sobressinal  $M_p$ , sendo  $M_p = \exp(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}})$  para sistemas de segunda ordem. E o terceiro parâmetro determina a frequência associada a cada par de polos, e deve ser limitado pois, conforme visto no Capítulo 3, o modelo médio só tem validade se os estados do sistema variam muito lentamente em relação ao período de chaveamento do conversor. Dessa forma, a frequência  $\rho$  deve ser muito menor que a frequência de comutação.

Baseando-se em [38], é possível demonstrar que o sistema incerto definido pelas equações (3.19), (3.21) e (3.26) é quadraticamente estabilizável pela lei de controle por realimentação de estado  $\tilde{u}(t) = Kx(t)$  com todos os polos de malha fechada contidos na região  $S(\alpha, \theta, \rho)$  se existe uma matriz definida positiva  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  e uma matriz  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$  tais que as seguintes LMIs são factíveis

$$\mathbf{A}_i \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A}_i' + \mathbf{B}_{u_i} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}' \mathbf{B}_{u_i}' + 2\alpha \mathbf{W} \prec 0, \quad (5.20)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho \mathbf{W} & \mathbf{W} \mathbf{A}'_i + \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_{u_i} \\ \mathbf{A}_i \mathbf{W} + \mathbf{B}_{u_i} \mathbf{Y} & -\rho \mathbf{W} \end{bmatrix} \prec 0, \quad (5.21)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \theta (\mathbf{A}_i \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_{u_i} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_{u_i}) & \sin \theta (\mathbf{A}_i \mathbf{W} - \mathbf{W} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_{u_i} \mathbf{Y} - \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_{u_i}) \\ \sin \theta (-\mathbf{A}_i \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A}'_i - \mathbf{B}_{u_i} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_{u_i}) & \cos \theta (\mathbf{A}_i \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A}'_i + \mathbf{B}_{u_i} \mathbf{Y} + \mathbf{Y}' \mathbf{B}'_{u_i}) \end{bmatrix} \prec 0, \quad (5.22)$$

$i = 1, 2, \dots, L,$

e o ganho do controlador é dado por  $K = \mathbf{Y} \mathbf{W}^{-1}$ . Assim, é possível escrever as especificações de alocação de polos como restrições na forma de LMIs e estas podem ser combinadas com outras no procedimento de síntese. Além disto, assim como no caso anterior, a factibilidade das LMIs para toda a região de incerteza é garantida pela factibilidade nos vértices do politopo.

#### 5.4.2 A síntese do controlador robusto $\mathcal{H}_\infty$

Finalmente, o controlador por realimentação de estado com alocação de polos em  $S(\alpha, \theta, \rho)$  pode ser determinado pela solução do seguinte problema de otimização convexa

$$\min_{\mathbf{W} \succ 0, \mathbf{Y}} \gamma \quad \text{sujeito a } \boxed{(5.19)}, \boxed{(5.20)}, \boxed{(5.21)}, \text{ and } \boxed{(5.22)}, \quad (5.23)$$

e o ganho do controlador é dado por  $K = \mathbf{Y} \mathbf{W}^{-1}$ .

### 5.5 Análise do controlador robusto $\mathcal{H}_\infty$ via Lema de Finsler

Embora o procedimento calcule a norma  $\mathcal{H}_\infty$  associada ao sistema incerto em malha fechada, é conveniente realizar um teste para avaliar melhor o controlador robusto projetado quanto ao custo garantido da norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Isto ocorre porque é possível criar um algoritmo de análise utilizando LMIs menos conservadoras do que as LMIs de síntese robusta. Desta forma, pode-se obter um valor de  $\gamma$  ainda menor do que aquele obtido no procedimento de síntese do controlador robusto.

Uma maneira de deduzir LMIs de análise menos restritivas é utilizando o Lema de Finsler. Embora novas variáveis sejam introduzidas no problema, a aplicação deste Lema permite trabalhar com uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros, tornando-se a análise robusta menos conservadora [39].

### 5.5.1 O Lema de Finsler

Sejam  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  com  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^T$ ,  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que  $\text{rank}(\mathcal{B}) = r < n$  e  $\mathcal{B}^\perp \in \mathbb{R}^{n \times r}$  uma base do espaço nulo de  $\mathcal{B}$ . As seguintes afirmações são equivalentes:

- i.  $x^T \mathcal{Q} x < 0$ ,  $\forall \mathcal{B}x = 0$ ,  $x \neq 0$ ;
- ii.  $\mathcal{B}^{\perp T} \mathcal{Q} \mathcal{B}^\perp \prec 0$ ;
- iii.  $\exists \mu \in \mathbb{R} : \mathcal{Q} - \mu \mathcal{B}^T \mathcal{B} \prec 0$ ;
- iv.  $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m} : \mathcal{Q} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T \prec 0$ .

A demonstração do Lema de Finsler pode ser encontrada em [39]. O item i é uma restrição quadrática na qual o vetor  $x$  está confinado no espaço nulo de  $\mathcal{B}$ . Como será visto, esse lema pode ser aplicado para expressar tanto a condição de estabilidade de Lyapunov quanto a restrição de norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Assim, é possível explorar diferentes formas alternativas de tratar problemas de controle.

### 5.5.2 Aplicação em sistemas autônomos: estabilidade

É bem conhecido que o sistema (5.2) é assintoticamente estável caso exista uma função  $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ , com  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  definida positiva, tal que  $\dot{V}(x(t)) < 0$ ,  $\forall x(t) \neq 0$ . Esta última condição pode ser desenvolvida como

$$\dot{V}(x(t)) = x^T(t)P\dot{x}(t) + \dot{x}(t)^T Px(t) < 0, \quad \dot{x}(t) = Ax(t), \quad \forall x(t) \neq 0. \quad (5.24)$$

Ao invés de substituir a derivada  $\dot{x}(t)$  para encontrar a LMI clássica (5.3), é possível recriar as condições em (5.24) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} < 0, \\ \forall \begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} &= 0, \quad \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \neq 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Desta forma, o Lema de Finsler pode ser aplicado com a seguinte correspondência:

$$x = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}, \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 0 & P \\ P & 0 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \begin{bmatrix} A & -I \end{bmatrix}.$$

Por conseguinte,  $\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} I \\ A \end{bmatrix}$ . A partir do Lema de Finsler, conclui-se que as seguintes afirmações são equivalentes:

- i. O sistema linear e invariante no tempo (5.2) é assintoticamente estável;
- ii.  $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n}, P = P^T : P \succ 0, A^T P + P A \prec 0$ ;
- iii.  $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n}, P = P^T, \mu \in \mathbb{R} : P \succ 0, \begin{bmatrix} -\mu A^T A & \mu A^T + P \\ \mu A + P & -\mu I \end{bmatrix} \prec 0$ ;
- iv.  $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n}, P = P^T, F, G \in \mathbb{R}^{n \times n} : P \succ 0, \begin{bmatrix} A^T F + F A & A^T G^T - F + P \\ G A - F^T + P & -G - G^T \end{bmatrix} \prec 0$ .

Neste caso, tem-se  $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} F \\ G \end{bmatrix}$  no item iv. Nota-se que o item ii corresponde à LMI de Lyapunov (5.3). Os itens iii e iv são novas condições de estabilidade obtidas com a adição dos multiplicadores  $\mu, F$  e  $G$ . As variáveis  $F$  e  $G$  fornecem novos graus de liberdade que podem ser explorados em problemas de análise robusta de sistemas incertos. De fato, se a matriz  $A$  pertence ao politopo convexo  $C_o(A_1, \dots, A_N)$ , é possível demonstrar que o sistema incerto é assintoticamente estável se pelo menos uma das seguintes condições é atendida:

- i.  $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n}, P = P^T : P \succ 0, A_i^T P + P A_i \prec 0, \forall i = 1, 2, \dots, N$ ;
- ii.  $\exists P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, P_i = P_i^T, F, G \in \mathbb{R}^{n \times n} : P_i \succ 0, \begin{bmatrix} A_i^T F + F A_i & A_i^T G^T - F + P_i \\ G A_i - F^T + P_i & -G - G^T \end{bmatrix} \prec 0, \forall i = 1, 2, \dots, N$ .

Observa-se que a condição i, deduzida da LMI clássica de Lyapunov, estabelece uma matriz  $P$  única para todos os vértices do politopo convexo. Por outro lado, a condição ii, proveniente do item iv do Lema de Finsler, permite que a matriz de Lyapunov seja diferente para cada vértice do politopo convexo. Assim, cada

representação do sistema incerto terá sua própria matriz de Lyapunov  $P$  formada por uma combinação convexa das matrizes  $P_i$ . Dessa forma, tem-se uma redução do conservadorismo na análise robusta do sistema.

### 5.5.3 Aplicação em sistemas com entradas e saídas: norma $\mathcal{H}_\infty$

Considera-se o sistema linear e invariante no tempo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), & x(0) = x_0, \\ z(t) = Cx(t) + Dw(t), \end{cases} \quad (5.26)$$

com  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $w(t) \in \mathbb{R}^m$  e  $z(t) \in \mathbb{R}^p$ . A norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência  $H(s)$  entre a perturbação  $w(t)$  e a saída controlada  $z(t)$  é dada por:

$$\|H(s)\|_\infty = \gamma_\infty = \sup_{w(t) \neq 0} \frac{\|z(t)\|_{\mathcal{L}_2}}{\|w(t)\|_{\mathcal{L}_2}}.$$

Para a função de Lyapunov  $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ , é possível definir uma condição de estabilidade alternativa, de modo a contemplar a relação entre a entrada  $w(t)$  e a saída  $z(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) &< 0, \quad \gamma^2 w(t)^T w(t) \leq z(t)^T z(t), \\ \forall(x(t), \dot{x}(t), z(t), w(t)) &\text{ satisfazendo } (5.26), (x(t), \dot{x}(t), z(t), w(t)) \neq 0, \end{aligned} \quad (5.27)$$

sendo  $\gamma > 0$ . Pode-se aplicar o procedimento S em (5.27) para encontrar a seguinte condição equivalente:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t), \dot{x}(t)) &< \gamma^2 w(t)^T w(t) - z(t)^T z(t), \\ \forall(x(t), \dot{x}(t), z(t), w(t)) &\text{ satisfazendo } (5.26), (x(t), \dot{x}(t), z(t), w(t)) \neq 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Desta forma, é possível concluir que

$$\int_0^t [\gamma^2 w(\tau)^T w(\tau) - z(\tau)^T z(\tau)] d\tau > \int_0^t \dot{V}(x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau = V(x(t)) > 0. \quad (5.29)$$

Fazendo  $t \rightarrow \infty$ , tem-se  $\|z(t)\|_{\mathcal{L}_2}^2 < \gamma^2 \|w(t)\|_{\mathcal{L}_2}$ . Assim, se (5.28) é factível, então  $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ , ou seja,  $\gamma_\infty < \gamma$ . Além disto, a estabilidade assintótica interna também é garantida, pois (5.28) impõe que a derivada  $\dot{V}(x(t), \dot{x}(t))$  seja sempre negativa.

Seja  $\psi(t)^T = \begin{bmatrix} x(t)^T & \dot{x}(t)^T & w(t)^T & z(t)^T \end{bmatrix}$ . A condição (5.28) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\psi(t)^T \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 \\ P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \psi(t) < 0, \quad \forall \begin{bmatrix} A & -I & 0 & B \\ C & 0 & -I & D \end{bmatrix} \psi(t) = 0, \quad \psi(t) \neq 0. \quad (5.30)$$

Desta forma, utilizando-se o Lema de Finsler, pode-se provar que as seguintes afirmações são equivalentes:

- i. A condição (5.28) com  $P \succ 0$  é factível;
- ii. O sistema (5.26) é assintoticamente estável com  $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ ;
- iii.  $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n}, P = P^T : P \succ 0, \begin{bmatrix} A^T P + P A + C^T C & P B + C^T D \\ B^T P^T + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0$ ;
- iv.  $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n}, P = P^T, \mu \in \mathbb{R} : P \succ 0, \begin{bmatrix} -\mu(A^T A + C^T C) & \mu A^T + P & \mu C^T & -\mu(A^T B + C^T D) \\ \mu A + P & -\mu I & 0 & \mu B \\ \mu C & 0 & (1 - \mu)I & \mu D \\ -\mu(B^T A + D^T C) & \mu B^T & \mu D^T & -\gamma^2 I - \mu(B^T B + D^T D) \end{bmatrix} \prec 0$ ;
- v.  $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n}, P = P^T, F_1, G_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, F_2, G_2 \in \mathbb{R}^{n \times p}, H_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}, J_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}, H_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}, J_2 \in \mathbb{R}^{m \times p} : P \succ 0, \mathcal{H} + \mathcal{H}^T \prec 0$ , com
$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} F_1 A + F_2 C & -F_1 & -F_2 & F_1 B + F_2 D \\ G_1 A + G_2 C + P & -G_1 & -G_2 & G_1 B + G_2 D \\ H_1 A + H_2 C & -H_1 & 0,5I - H_2 & H_1 B + H_2 D \\ J_1 A + J_2 C & -J_1 & -J_2 & -0,5\gamma^2 I + J_1 B + J_2 D \end{bmatrix}.$$

Nota-se que a matriz  $\mathcal{H}$  é obtida para  $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ G_1 & G_2 \\ H_1 & H_2 \\ J_1 & J_2 \end{bmatrix}$  no item v.

Similiarmente ao caso da subseção anterior, é possível demonstrar que um sistema incerto definido por  $C_o([A_1, B_1, C_1, D_1], \dots, [A_N, B_N, C_N, D_N])$  é assintoticamente estável com  $\|H(s)\|_\infty < \gamma$  se pelo menos uma das seguintes condições é satisfeita:

i.  $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n}, P = P^T : P \succ 0, \begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i + C_i^T C_i & P B_i + C_i^T D_i \\ B_i^T P + D_i^T C_i & D_i^T D_i - \gamma^2 I \end{bmatrix} \prec 0, \forall i = 1, 2, \dots, N;$

ii.  $\exists P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, P_i = P_i^T, F_1, G_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}, F_2, G_2 \in \mathbb{R}^{n \times p}, H_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}, J_1 \in \mathbb{R}^{m \times n}, H_2 \in \mathbb{R}^{p \times p}, J_2 \in \mathbb{R}^{m \times p} : P_i \succ 0, \mathcal{H}_i + \mathcal{H}_i^T \prec 0, \forall i = 1, 2, \dots, N,$  com

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} F_1 A_i + F_2 C_i & -F_1 & -F_2 & F_1 B_i + F_2 D_i \\ G_1 A_i + G_2 C_i + P_i & -G_1 & -G_2 & G_1 B_i + G_2 D_i \\ H_1 A_i + H_2 C_i & -H_1 & 0,5I - H_2 & H_1 B_i + H_2 D_i \\ J_1 A_i + J_2 C_i & -J_1 & -J_2 & -0,5\gamma^2 I + J_1 B_i + J_2 D_i \end{bmatrix}.$$

A segunda condição é particularmente útil para a análise robusta do controlador  $\mathcal{H}_\infty$ , pois seu espaço aumentado permite a utilização de uma matriz de Lyapunov dependente de parâmetros.

#### 5.5.4 A análise do controlador robusto $H_\infty$

Todo controlador por realimentação de estado  $K$  robusto obtido a partir da solução do problema (5.23), para o sistema incerto definido por (3.19), (3.21) e (3.26), pode ter sua norma  $\mathcal{H}_\infty$  reavaliada resolvendo-se o seguinte problema convexo de otimização, por se tratar de uma abordagem menos conservadora:

$$\min_{P_i \succ 0, F_1, \dots, H_2} \gamma \quad \text{sujeito a } \mathcal{H}_i + \mathcal{H}_i^T \prec 0, \forall i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.31)$$

no qual  $A_i = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_{u_i} K$ ,  $B_i = \mathbf{B}_{w_i}$ ,  $C_i = \mathbf{C}_{z_i} + \mathbf{D}_{u_i} K$  e  $D_i = \mathbf{D}_{w_i}$ . Se o problema (5.31) é factível, o sistema incerto é assintoticamente estável com  $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ . Nota-se que, devido às LMIs menos restritivas, o valor de  $\gamma$  obtido pela solução de (5.31) pode ser menor do que aquele calculado em (5.23).

# Capítulo 6

## Resultado das Simulações

Para validar a abordagem proposta, o circuito em malha fechada é simulado no programa PSIM com o controlador  $\mathcal{H}_\infty$  projetado. O esquemático do circuito de controle pode ser visualizado na Figura 6.1, enquanto os blocos do conversor elevador e do circuito de identificação são discriminados nas Figuras 6.2 e 6.3, respectivamente. Os parâmetros do conversor utilizados no projeto e nas simulações são aqueles da Tabela 6.1. Os pontos de equilíbrio de referência para a linearização são determinados para a condição nominal ( $R = 50\Omega$ ,  $R_C = 0,2\Omega$  e  $C = 120\mu F$ ). Assim, para  $V_C = 24V$ , as equações 4.3 e 3.10 levam a  $D = 0,519$  e  $I_L = 0,997A$ .

Tabela 6.1: Parâmetros do conversor *boost*.

| Parâmetro      | Valor                |
|----------------|----------------------|
| $R$            | $[20, 50]\Omega$     |
| $D'$           | $[0, 3, 1, 0]$       |
| $R_C$          | $[0, 2, 0, 6]\Omega$ |
| $C$            | $[96, 120]\mu F$     |
| $R_L$          | $0,4\Omega$          |
| $L$            | $240\mu H$           |
| $V_g$          | $12V$                |
| $V_o, V_{ref}$ | $24V$                |
| $f_s$          | $100kHz$             |

O objetivo principal das simulações é verificar o desempenho do sistema controlado quanto à rejeição de perturbações, em especial na análise da regulação da

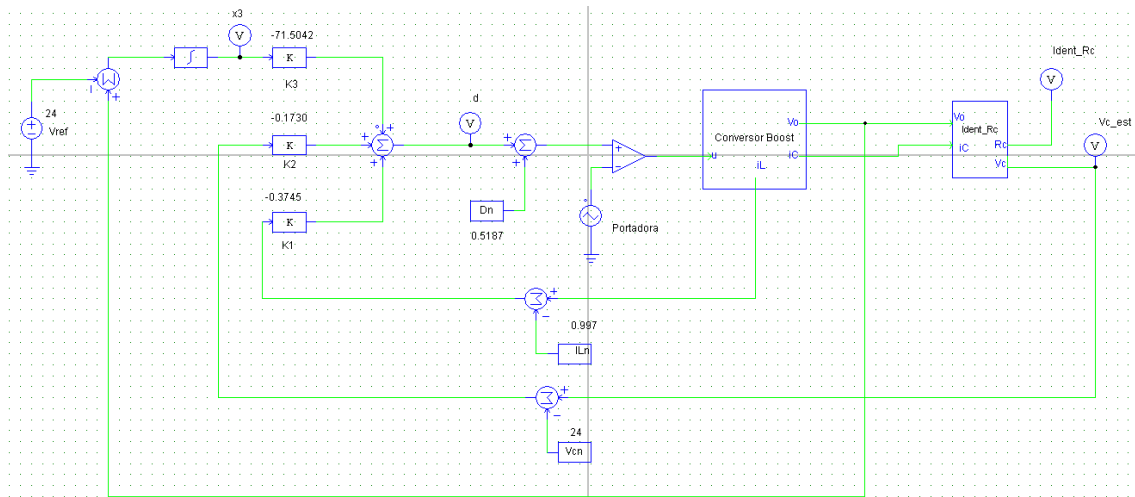


Figura 6.1: Esquemático do circuito de controle na interface do PSIM.

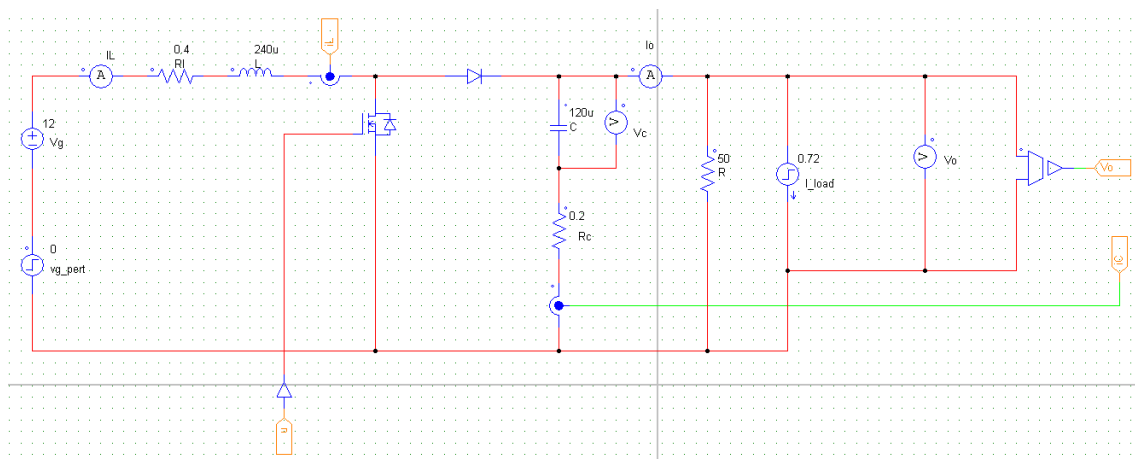


Figura 6.2: Esquemático do circuito do conversor elevador.

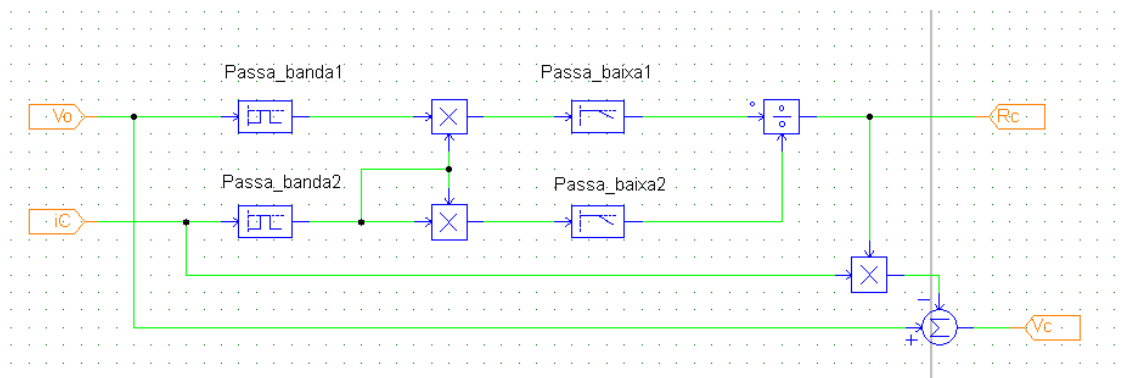


Figura 6.3: Esquemático do subsistema de identificação.

tensão de saída. As simulações são aplicadas tanto para o circuito com o capacitor no início da sua vida útil (chamado “novo”), definido por  $R_C = 0,2\Omega$  e  $C = 120\mu F$ , quanto para aquele com o capacitor no fim da sua vida útil (chamado “envelhecido”), definido por  $R_C = 0,6\Omega$  e  $C = 96\mu F$ . Como existem duas fontes de perturbação,  $v_g$  e  $i_{load}$ , os testes são divididos em quatro grupos: aplicação de perturbação  $i_{load}$  com capacitor novo,  $i_{load}$  com capacitor envelhecido, perturbação em  $v_g$  com capacitor novo e  $v_g$  com capacitor envelhecido. Além do comportamento da tensão da saída e corrente de indutor, também são examinados o sinal de controle e a identificação de  $R_C$ . Por fim, a função *AC Sweep* do PSIM é aplicada para encontrar o diagrama de Bode da saída do conversor em relação à perturbação.

## 6.1 Controle $\mathcal{H}_\infty$ robusto do conversor *boost*

Considerando-se os parâmetros definidos na Tabela 6.1, para o conversor *boost* descrito em (3.19), (3.21) e (3.26), a solução do problema 5.23 é obtida utilizando o programa LMI *toolbox* do MATLAB com os parâmetros  $\alpha = 130$ ,  $\rho = \frac{2\pi f_s}{10}$  e  $\theta = 25^\circ$  para a região de alocação de polos  $S(\alpha, \theta, \rho)$ . O controlador projetado é dado por

$$K = [-0,37 \quad -0,17 \quad -71,50], \quad (6.1)$$

com o custo garantido  $\gamma = 12,85$  (22,18 dB). Entretanto, a análise robusta do sistema incerto em malha fechada com o controlador projetado (6.1), baseada no Lema de Finsler, fornece o custo garantido  $\gamma = 6,31$  (16 dB) para a norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Este resultado é obtido a partir da solução do problema convexo (5.31). Como mencionado na seção anterior, este resultado é mais preciso devido ao emprego de matrizes de folga nas LMIs de análise em (5.31), o que torna a análise menos conservadora do que a síntese. A fim de comprovar a eficácia do algoritmo, um grupo de  $10^5$  representações do sistema incerto foi selecionado para inspeção em malha fechada. As Figuras 6.4 e 6.5 demonstram que, a despeito de incertezas paramétricas, as normas  $\mathcal{H}_\infty$  e o posicionamento dos polos estão em perfeita concordância com o custo garantido e as especificações de alocação, respectivamente. Além disso, conforme as relações apresentadas na subseção 5.4.1, os valores definidos para os parâmetros  $\alpha$  e  $\theta$  garantem taxa de amortecimento  $\xi > 0,42$  e taxa de decaimento

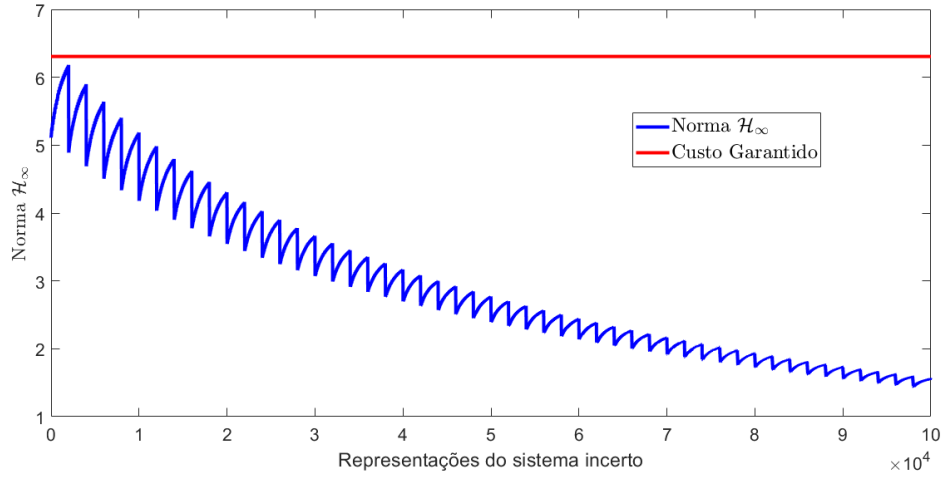


Figura 6.4: Comparação entre o custo garantido e as normas  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema incerto.

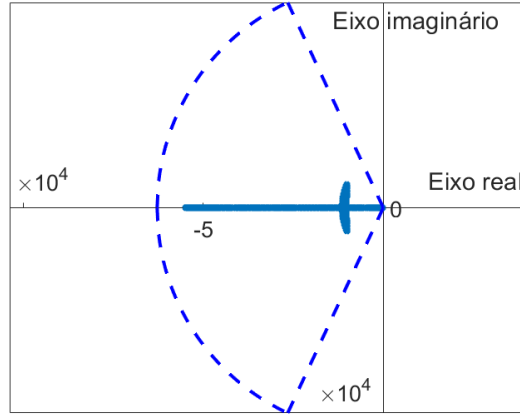


Figura 6.5: Posicionamento dos polos de malha fechada para o sistema incerto.

$\xi\omega_n > 130$ , resultando em sobressinal máximo  $M_p \approx 23,1\%$  e tempo de acomodação máximo  $t_s \approx 30,8ms$  em malha fechada.

Além disso, ressalta-se que houve a tentativa de aplicar este procedimento de síntese ao modelo mais conservador ilustrado na Figura 3.5. Neste caso, constatou-se que o problema de otimização é infactível, resultado este que se mantém mesmo se as restrições referentes à alocação dos polos forem removidas. Dessa forma, a abordagem proposta de politopo reduzido se mostra importante para a resolução do problema de síntese robusta via LMIs.

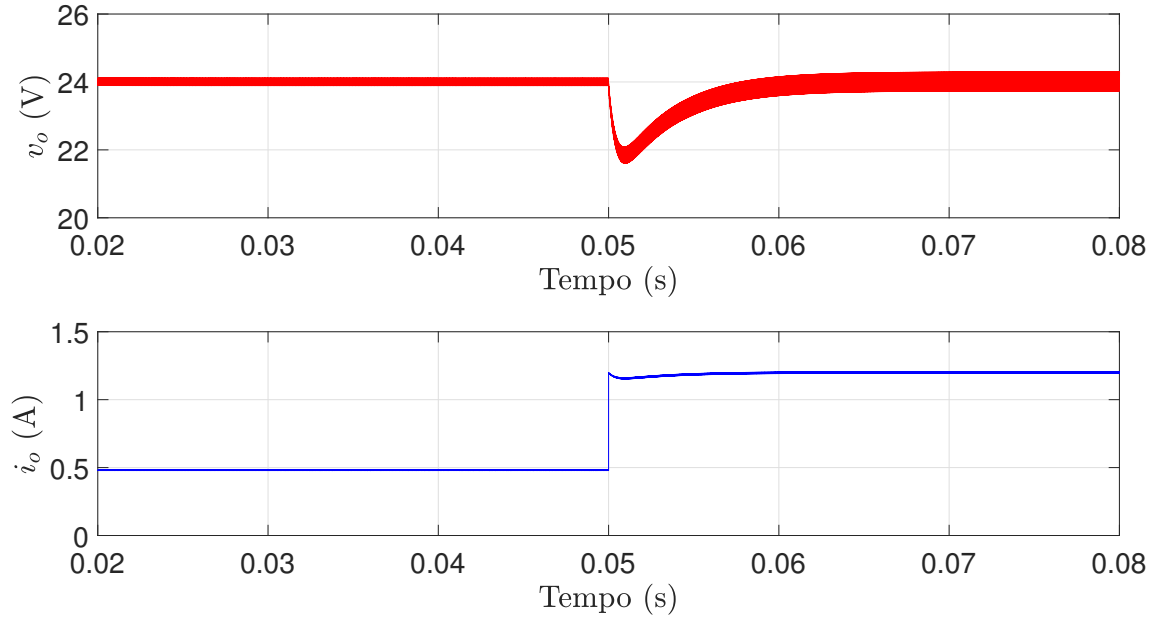


Figura 6.6: Efeito da perturbação na corrente de carga sobre a tensão de saída  $v_o$  (capacitor novo).

## 6.2 Perturbação de carga com capacitor novo ( $R_C = 0,2\Omega$ e $C = 120\mu F$ )

A perturbação na corrente de carga é simulada pela mudança de carga de  $50\Omega$  para  $20\Omega$ , que corresponde à condição de máxima potência entregue. Para isto, um sinal degrau de  $0,72A$  é adicionado à corrente  $i_{load}$  no instante  $0,05s$ . As curvas da tensão de saída e corrente de carga são representadas na Figura 6.6. Nota-se um subssinal de  $8,9\%$  e um tempo de acomodação de aproximadamente  $6,18ms$  (critério de  $2\%$ ), valores inferiores ao limites máximos provenientes da alocação dos polos, mostrando que o sistema de controle atua de forma eficaz na rejeição da perturbação. Outra curva de interesse é a da corrente de indutor, ilustrada na Figura 6.7. Percebe-se que o valor médio da corrente se ajusta de aproximadamente  $1A$  para  $2,67A$ , de modo a permitir um maior fluxo de potência para a carga.

Conforme a Figura 6.8, o valor médio do sinal de controle (razão cíclica) varia de  $0,519$  para  $0,551$  para compensar a perturbação. Além disto, a identificação do valor de  $R_C$  foi bastante eficiente, como mostra a Figura 6.9. Houve um erro de identificação de  $-0,33\%$  e  $0,7\%$  antes e depois da perturbação, respectivamente, o

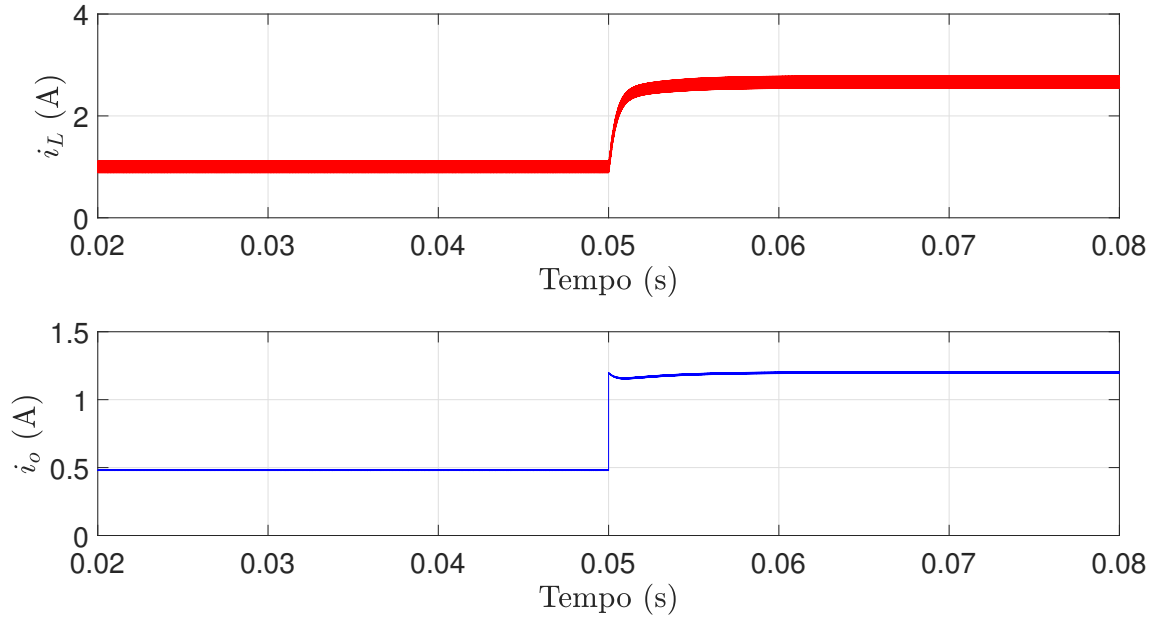


Figura 6.7: Efeito da perturbação na corrente de carga sobre a corrente de indutor  $i_L$  (capacitor novo).

que demonstra que o processo de identificação não é afetado de forma significativa pela perturbação. A boa precisão da identificação sugere que a estimação do estado  $v_C$  também é eficaz, o que é comprovado na Figura 6.10. Os erros de estimação de  $v_C$  variam em módulo de 0,008% a 0,03% e podem ser considerados desprezíveis. Nota-se que essa verificação depende da medição direta no elemento capacitivo do capacitor real, o que não é possível na prática e foi feito aqui apenas para avaliar a precisão da estimação de  $v_C$ .

Por fim, a partir do esquema no PSIM ilustrado na Figura 6.11, é feita uma varredura em frequência para traçar o diagrama de Bode da impedância de saída  $\frac{V_o(s)}{I_{load}(s)}$ . Na Figura 6.12, percebe-se um pico de magnitude de 11,48 dB na frequência de 158 Hz. Este valor, como esperado, está abaixo do custo garantido de 16 dB obtido pela análise robusta do sistema em malha fechada. Embora o custo garantido se refira à norma  $\mathcal{H}_\infty$  da matriz de transferência, que também envolve a perturbação em  $v_g$ , será visto nas próximas seções que a perturbação  $i_{load}$  é predominante.

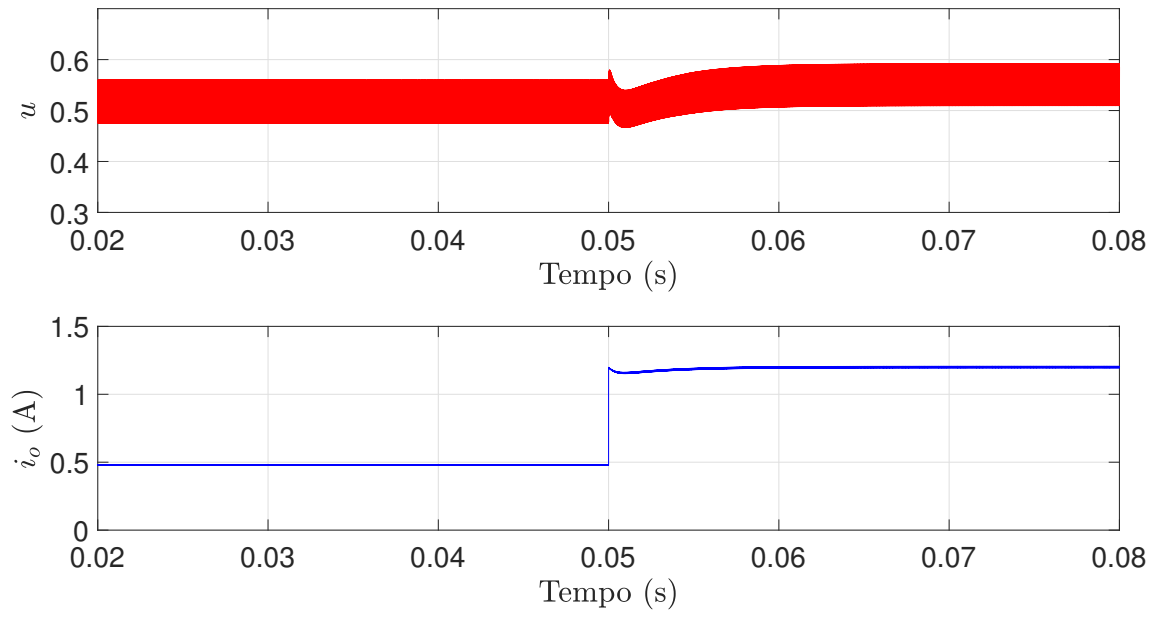


Figura 6.8: Comportamento do sinal de controle  $u$  mediante perturbação de carga (capacitor novo).

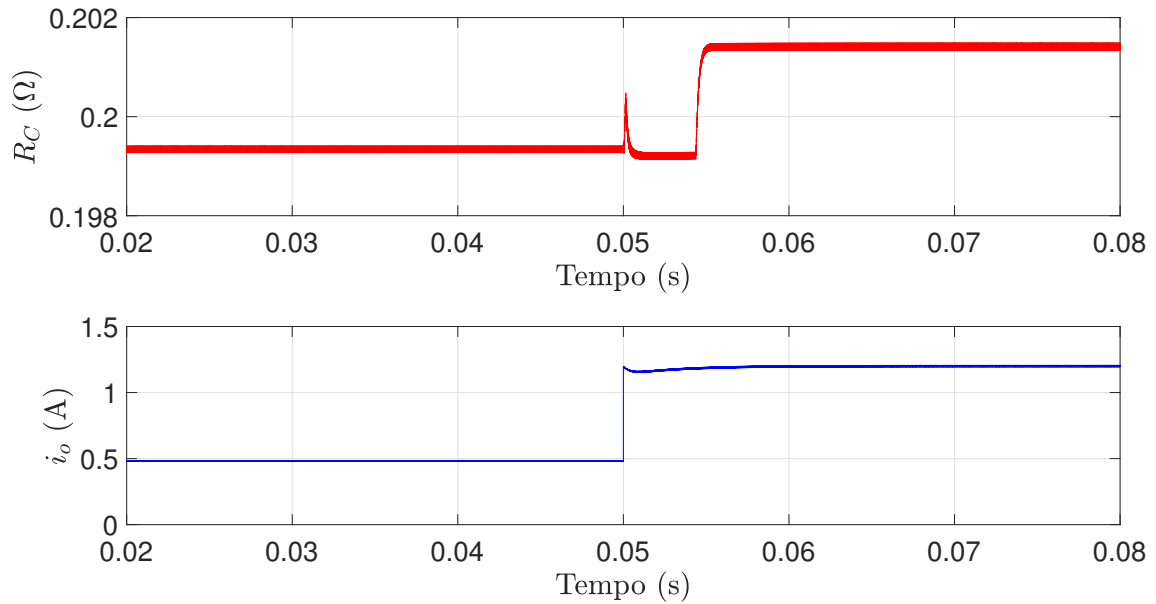


Figura 6.9: Identificação *online* de  $R_C$  mediante perturbação de carga (capacitor novo).

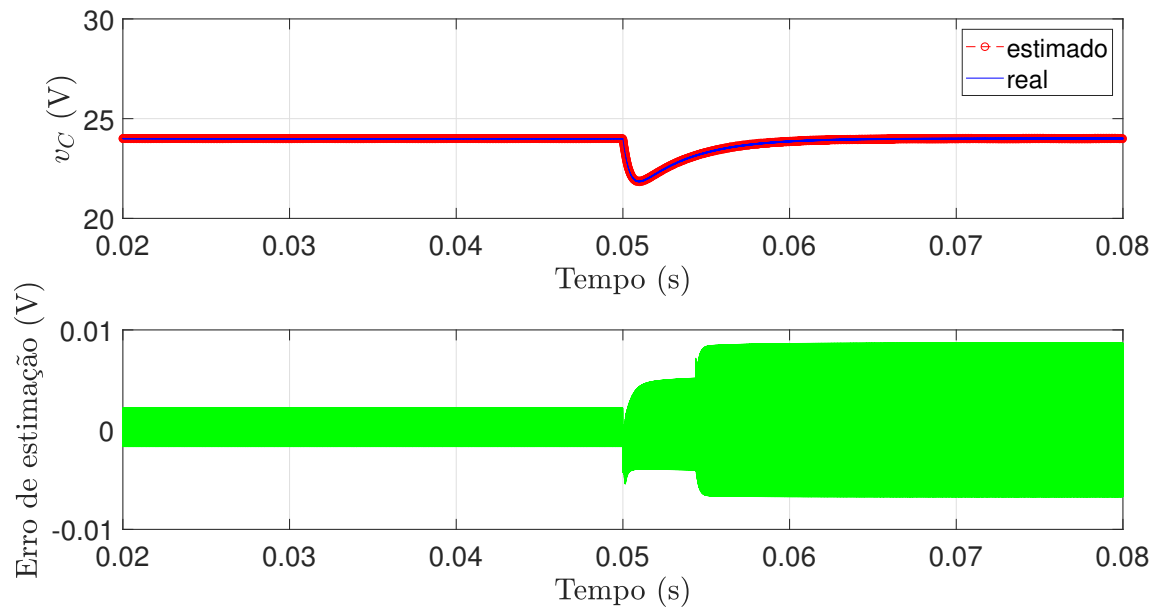


Figura 6.10: Sinais de  $v_C$  estimado e real e o erro de estimação (capacitor novo).

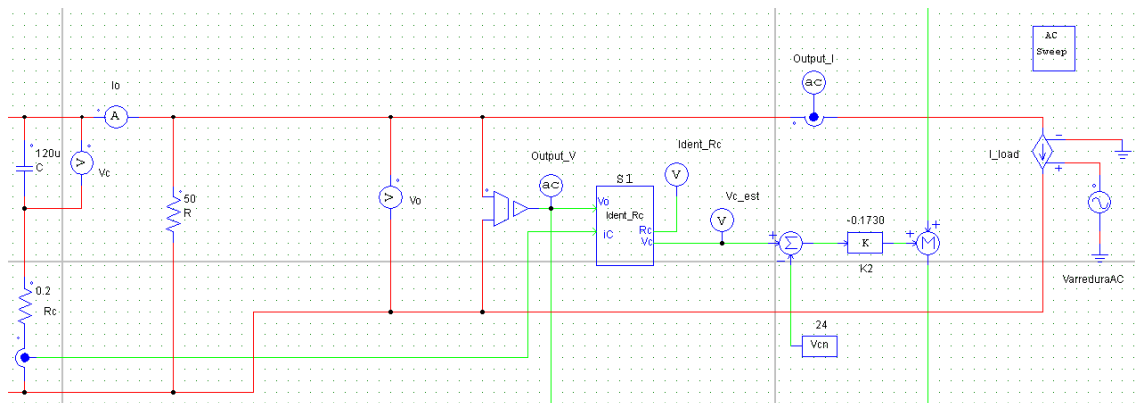


Figura 6.11: Esquemático do circuito para varredura em frequência da impedância de saída no PSIM.

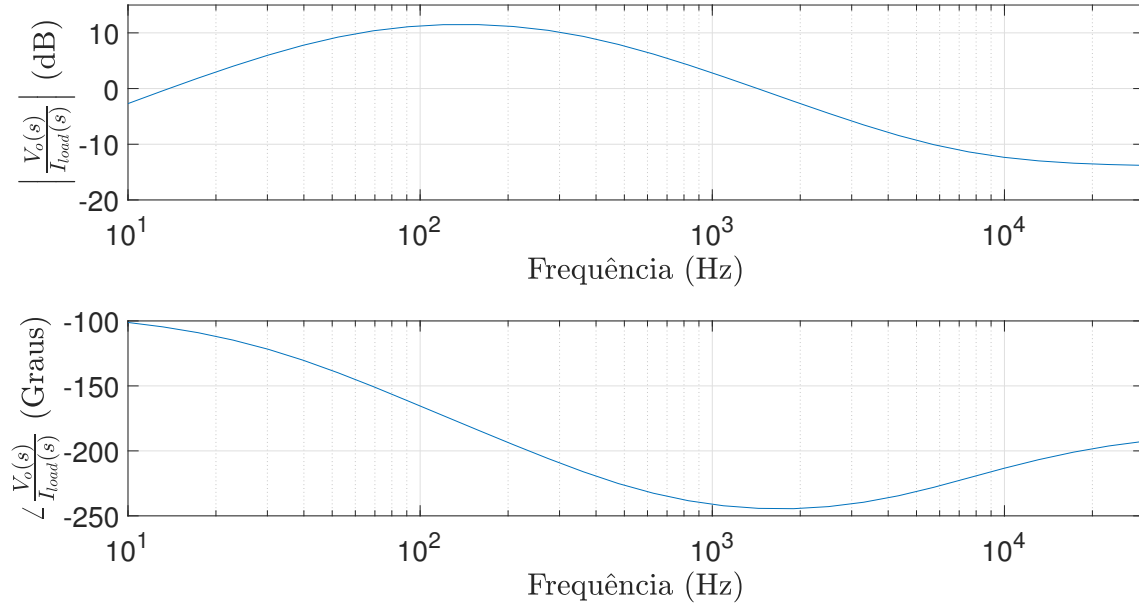


Figura 6.12: Diagrama de Bode da impedância de saída do conversor elevador (capacitor novo).

### 6.3 Perturbação de carga com capacitor envelhecido ( $R_C = 0,6\Omega$ e $C = 96\mu F$ )

O mesmo teste é repetido para o conversor com o capacitor no fim da sua vida útil. Conforme a Figura 6.13, nota-se que a tensão de saída tem um comportamento similar ao apresentado na seção anterior, exceto pelo subsinal e tempo de acomodação ligeiramente maiores, de cerca de 9,3% e 6,26ms, respectivamente. Ainda assim, estes valores estão abaixo dos limites esperados para essas especificações de desempenho. Além disto, a ondulação do sinal também aumenta, o que é esperado pois esta é aproximadamente diretamente proporcional ao ESR do capacitor [16]. Após o transitório da perturbação, a corrente no indutor atinge o valor médio de 2,74A, valor semelhante ao caso anterior, como pode ser visto na Figura 6.14. Concomitantemente, o valor médio da razão cíclica passa de 0,523 para 0,563 (ver Figura 6.15).

Na Figura 6.16, é possível constatar que a identificação de  $R_C$  é ainda mais precisa que no caso anterior, com erros percentuais de -0,14% antes da perturbação e 0,28%, após o transitório. Este resultado sugere que o sistema de identificação é capaz de calcular corretamente o valor do ESR ao longo da vida útil do capacitor.

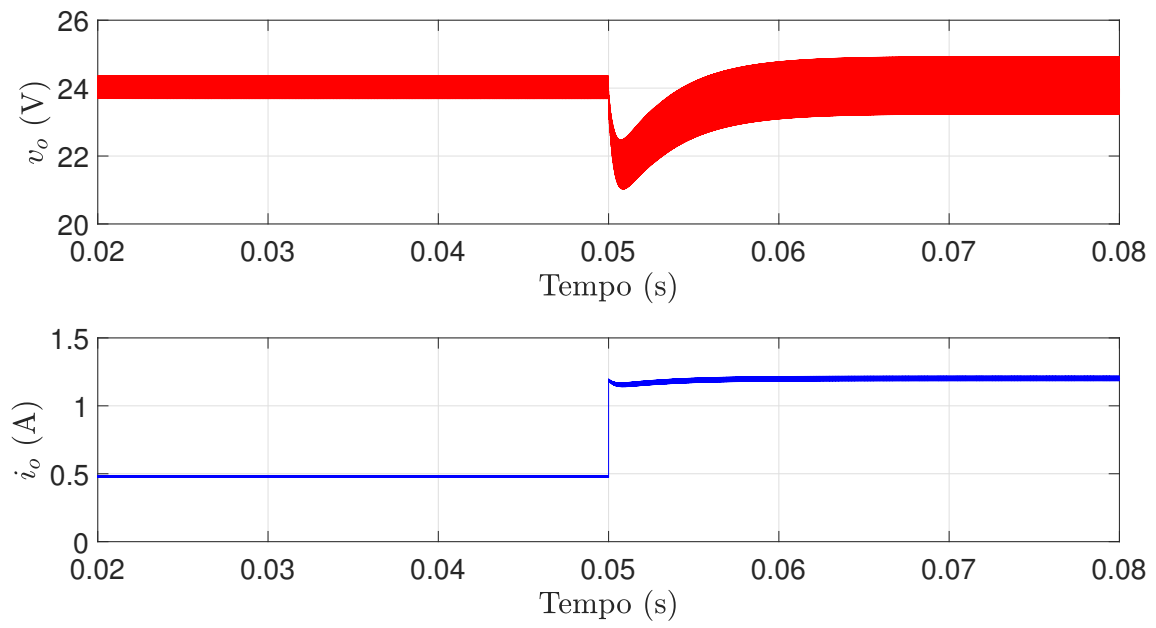


Figura 6.13: Efeito da perturbação na corrente de carga sobre a tensão de saída  $v_o$  (capacitor envelhecido).

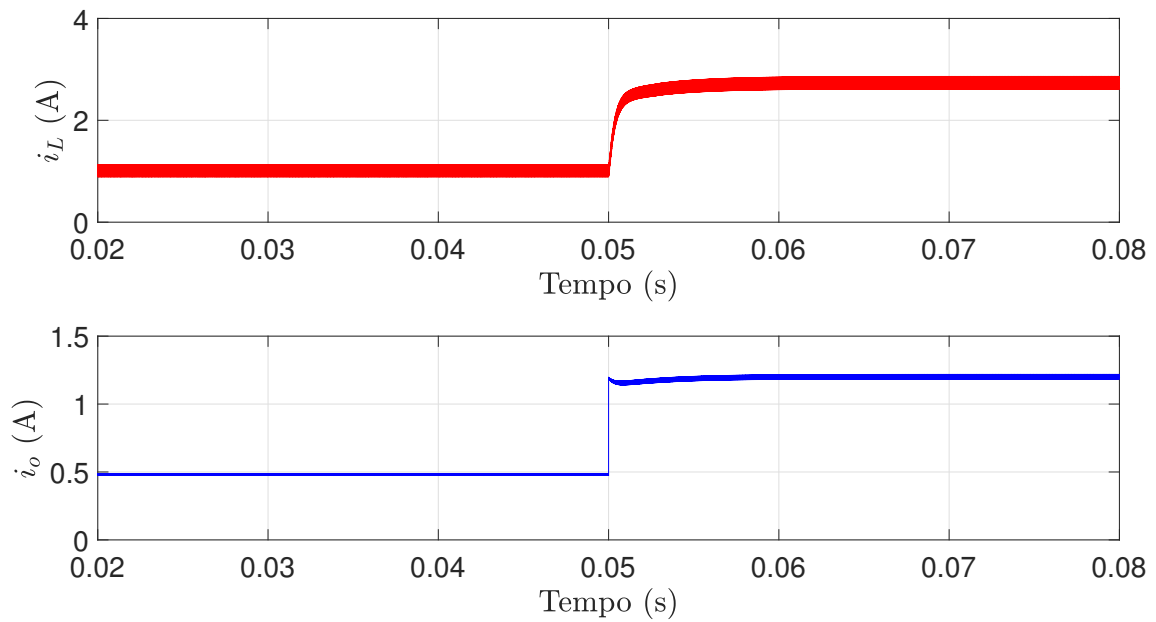


Figura 6.14: Efeito da perturbação na corrente de carga sobre a corrente de indutor  $i_L$  (capacitor envelhecido).

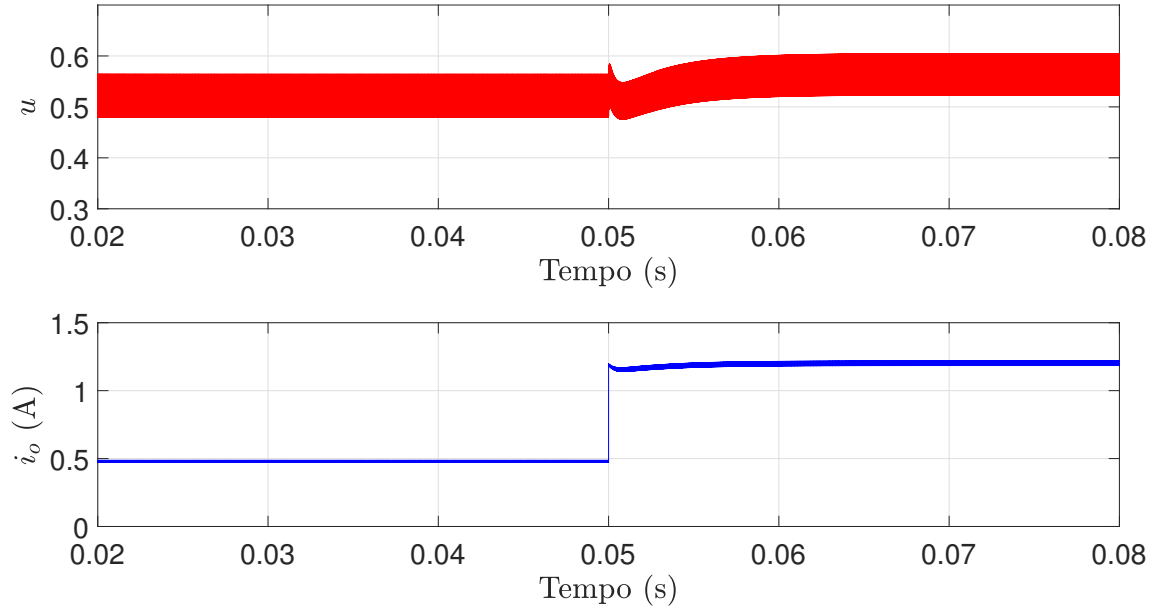


Figura 6.15: Comportamento do sinal de controle  $u$  mediante perturbação de carga (capacitor envelhecido).

Além disto, o diagrama de Bode da Figura [6.17](#) é similar ao da seção anterior, indicando que a variação nos parâmetros do capacitor pouco altera a dinâmica média do conversor controlado. Há apenas um ligeiro aumento do pico de magnitude para 11,63 dB, ainda abaixo do custo garantido. A frequência do pico não se altera, mantendo-se em 158 Hz.

## 6.4 Perturbação de entrada com capacitor novo

$$(R_C = 0, 2\Omega \text{ e } C = 120\mu F)$$

Neste caso, a simulação é feita com uma perturbação na tensão de entrada  $v_g$  (ou tensão de entrada) do conversor, de maneira que a razão cíclica  $D$  mude do valor nominal para 0,7. Este valor resulta em  $D' = 0,3$ , o limite inferior de incerteza na complementar da razão cíclica. Para isto, é utilizada uma fonte degrau de -4V em série com a fonte de tensão CC  $V_g$  de 12V. Assim como nas seções anteriores, o degrau de perturbação é acionado na metade do intervalo de simulação. Pela Figura [6.18](#), a tensão de saída apresenta um subsinal de 5,23% e tempo de acomodação de cerca de 4,7ms (critério de 2%), valores dentro dos limites de projeto. Assim,

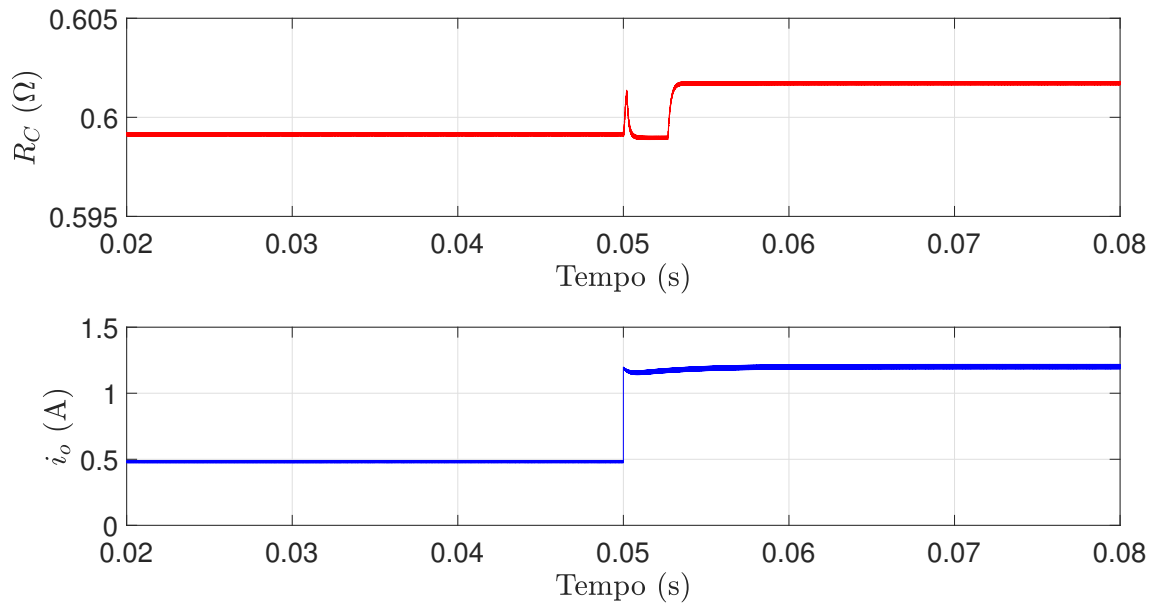


Figura 6.16: Identificação *online* de  $R_C$  mediante perturbação de carga (capacitor envelhecido).

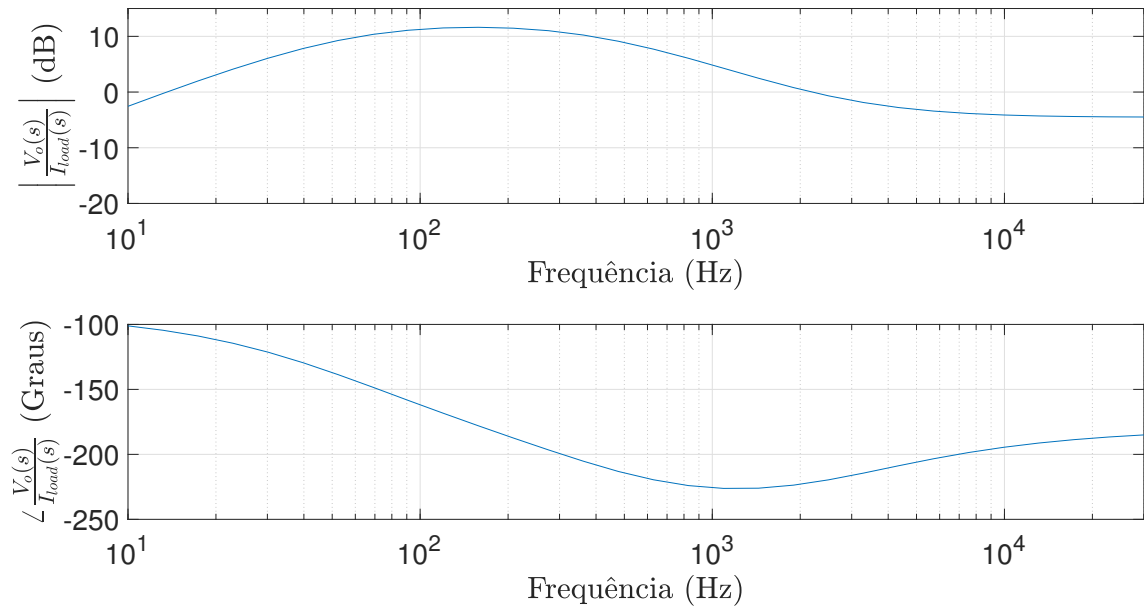


Figura 6.17: Diagrama de Bode da impedância de saída do conversor elevador (capacitor envelhecido).

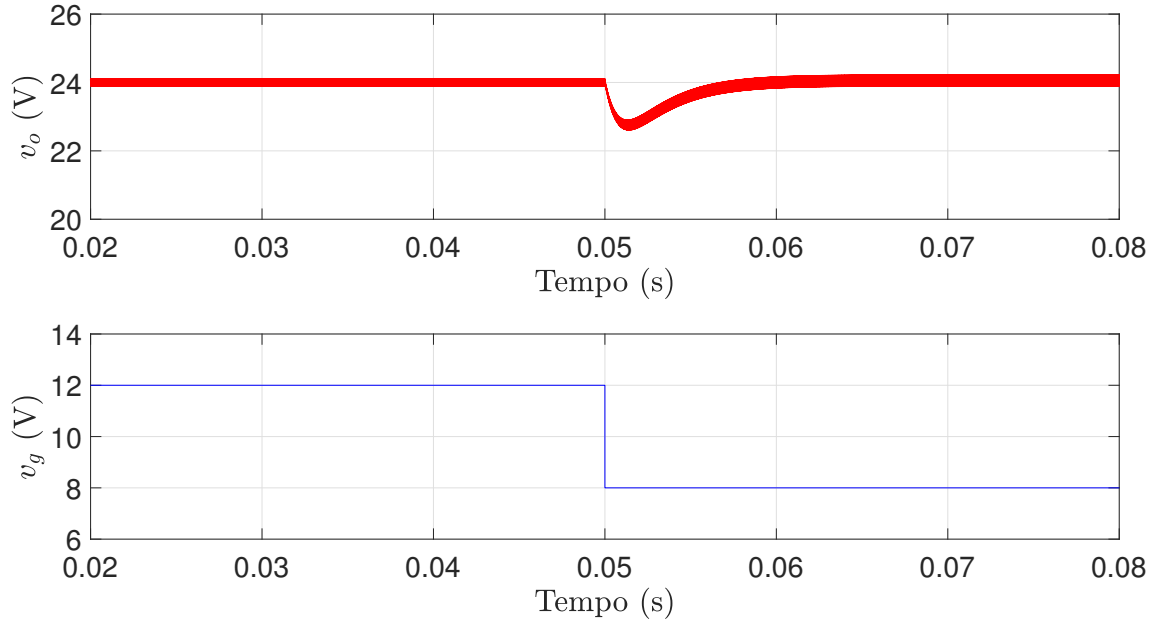


Figura 6.18: Efeito da perturbação na tensão de entrada sobre a tensão de saída  $v_o$  (capacitor novo).

percebe-se que a perturbação na tensão de entrada é menos impactante na saída do que aquela da corrente de carga. A corrente de indutor, apresentada na Figura 6.19, também apresenta menor variação do que nos casos de perturbação de carga, com seu valor médio mudando do 1A para 1,56A.

De acordo com a Figura 6.20, o sinal de controle passa do valor médio 0,519 para cerca de 0,695, aproximadamente o limiar 0,7 esperado. Além disto, a Figura 6.21 demonstra que a identificação de  $R_C$  é eficaz mesmo com a presença da perturbação na tensão de entrada, tendo uma variação do erro de estimação de -0,33% para -0,44% após o transitório. Finalmente, é importante averiguar o comportamento em frequência do sistema, que desta vez é representado pela função de transferência do ganho direto de tensão  $\frac{V_o(s)}{V_g(s)}$ . A varredura em frequência é feita a partir do esquema no PSIM ilustrado na Figura 6.22. O diagrama de Bode é traçado na Figura 6.23, onde percebe-se um pico de magnitude de -9,52 dB na frequência de 158 Hz. Este resultado endossa a evidência anterior de que a perturbação em  $v_g$  afeta a saída de forma mais amena do que uma perturbação na corrente de carga.

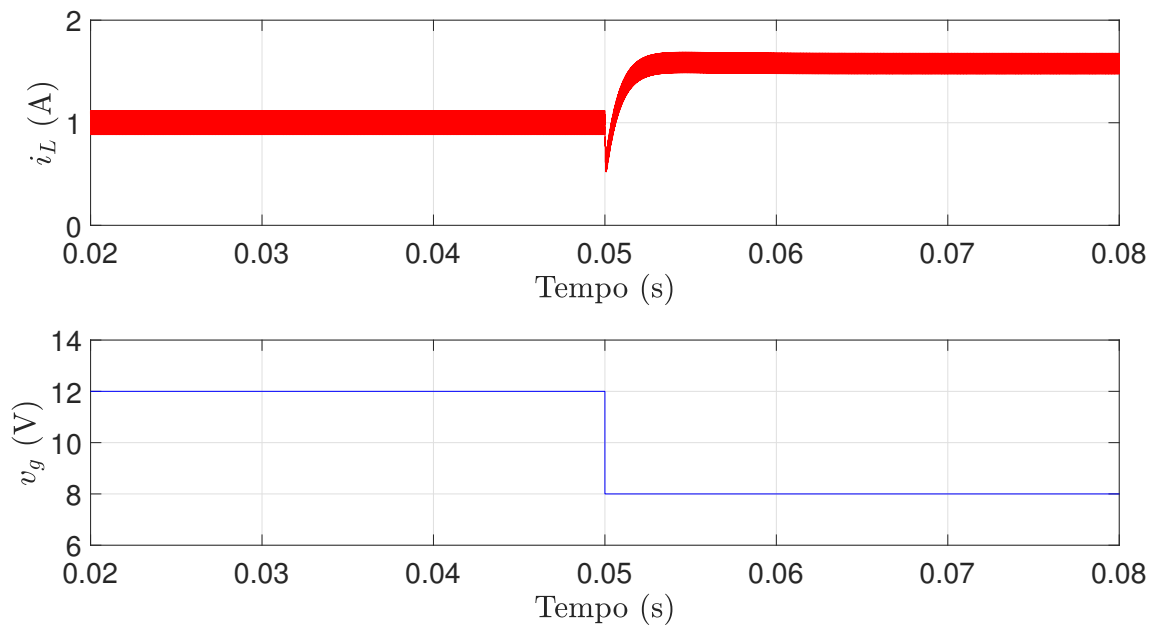


Figura 6.19: Efeito da perturbação na tensão de entrada sobre a corrente de indutor  $i_L$  (capacitor novo).

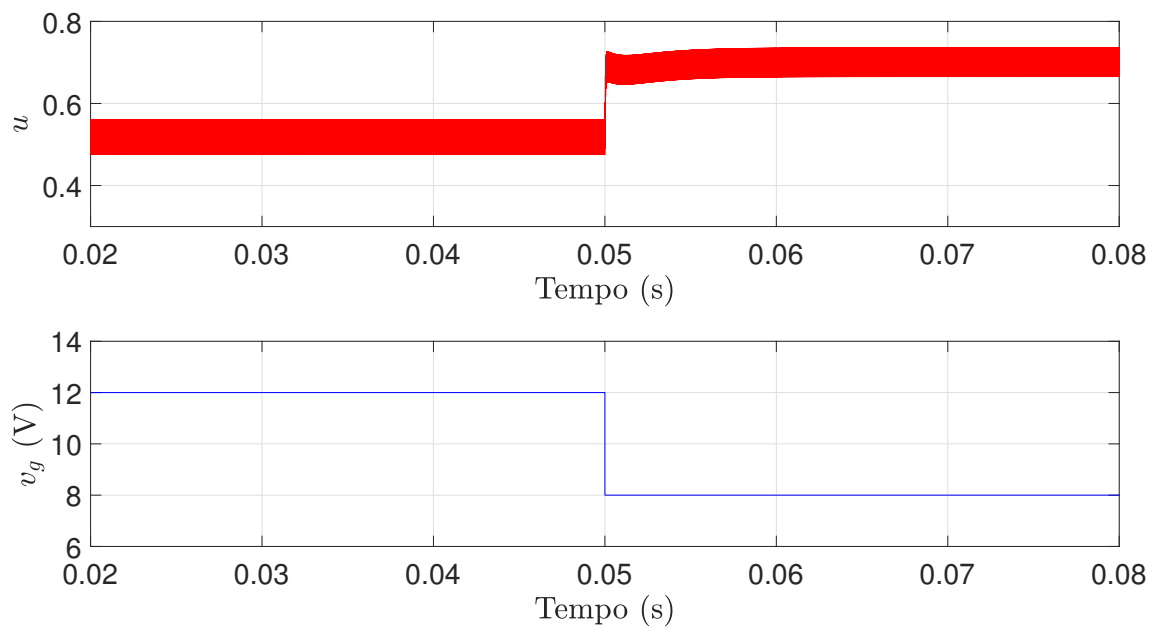


Figura 6.20: Comportamento do sinal de controle  $u$  mediante perturbação de entrada (capacitor novo).

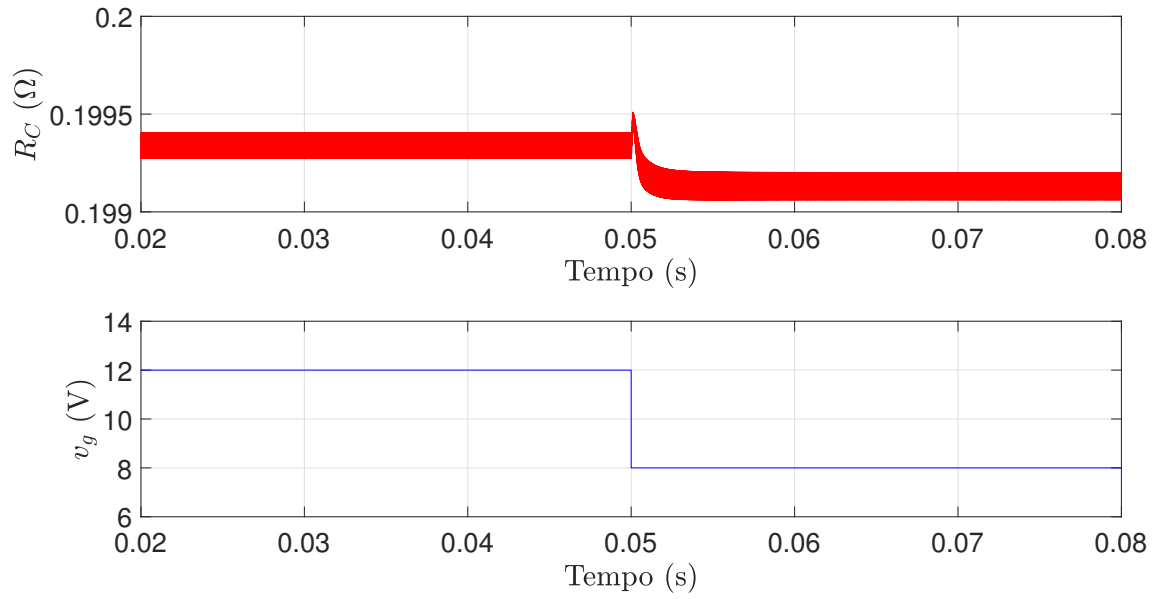


Figura 6.21: Identificação *online* de  $R_C$  mediante perturbação de entrada (capacitor novo).

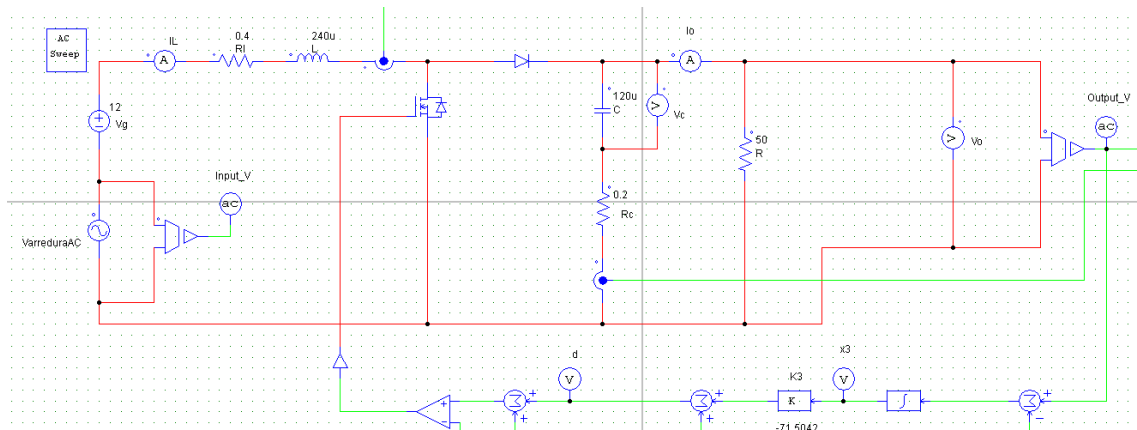


Figura 6.22: Esquemático do circuito para varredura em frequência do ganho direto no PSIM.

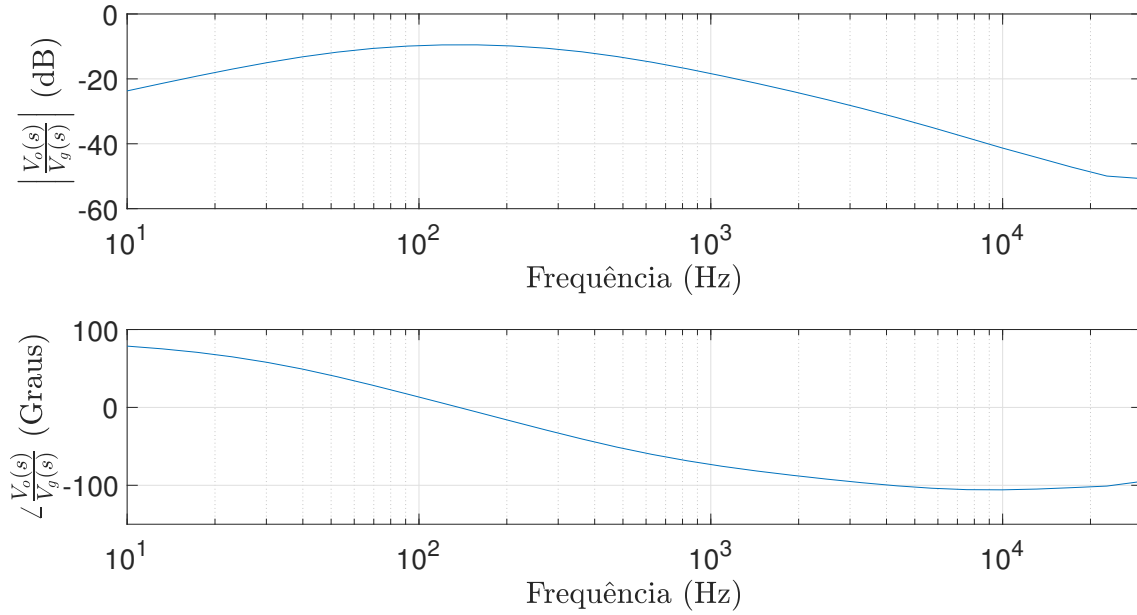


Figura 6.23: Diagrama de Bode do ganho direto do conversor elevador (capacitor novo).

## 6.5 Perturbação de entrada com capacitor envelhecido ( $R_C = 0,6\Omega$ e $C = 96\mu F$ )

O mesmo teste de perturbação na tensão de entrada da seção anterior é aplicado ao conversor com capacitor envelhecido. O comportamento da tensão de saída, ilustrado na Figura 6.24, não apresenta grande mudança em relação ao da seção anterior, com subsinal de aproximadamente 5,50% e tempo de acomodação de 4,6ms. Conforme a Figura 6.25, a corrente de indutor passa do valor médio de 1A para cerca de 1,59A. Além disto, de acordo com a Figura 6.26, a razão cíclica varia de 0,523 para 0,7 após a rejeição da perturbação, como era o desejado neste teste.

Conforme a Figura 6.27, a precisão da identificação é tão boa quanto nas simulações anteriores, com um erro de -0,14% antes do transitório e -0,18% posteriormente. Desta forma, é esperado que o sistema de identificação seja eficaz ao longo da vida útil do capacitor mesmo com a ocorrência de perturbações, tanto de carga quanto na tensão de entrada. Por fim, o diagrama de Bode da função de transferência do ganho direto está expresso na Figura 6.28. Os resultados são semelhantes aos da seção anterior, com um pico de magnitude ligeiramente inferior de -9,86 dB. Na Tabela 6.2, os dados dos quatro testes são apresentados para comparação.

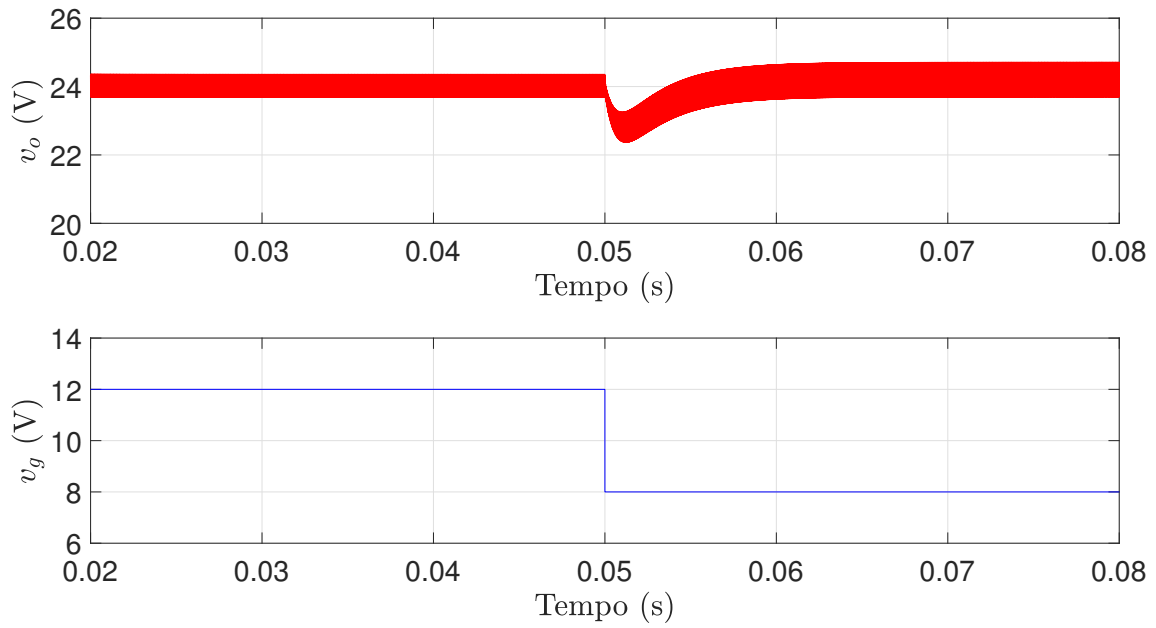


Figura 6.24: Efeito da perturbação na tensão de entrada sobre a tensão de saída  $v_o$  (capacitor envelhecido).

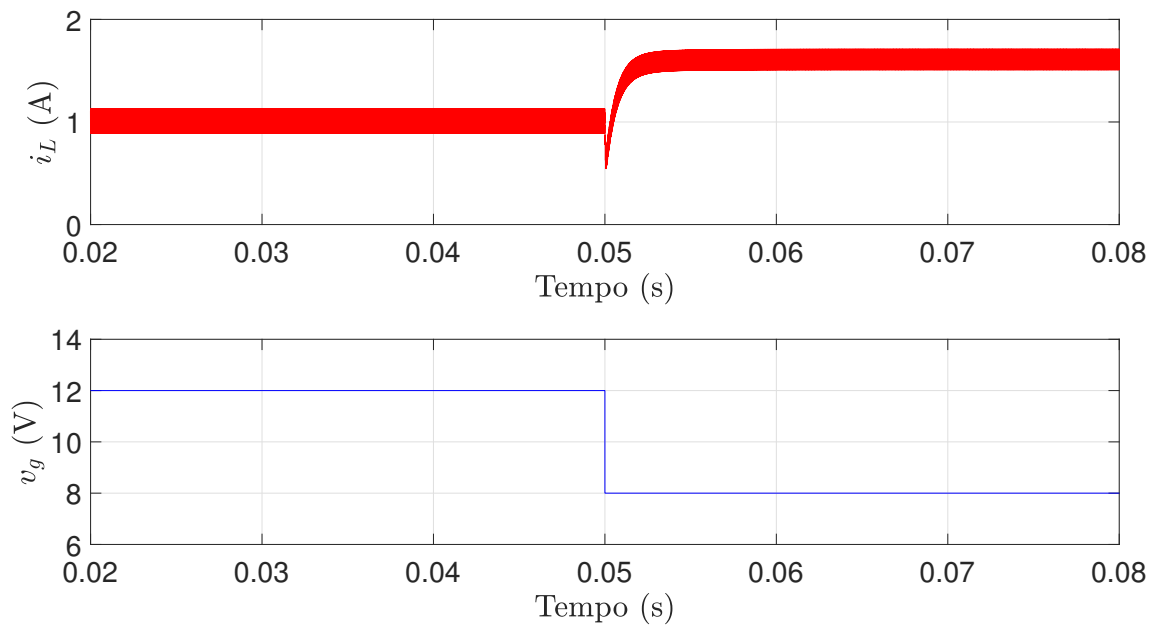


Figura 6.25: Efeito da perturbação na tensão de entrada sobre a corrente de indutor  $i_L$  (capacitor envelhecido).

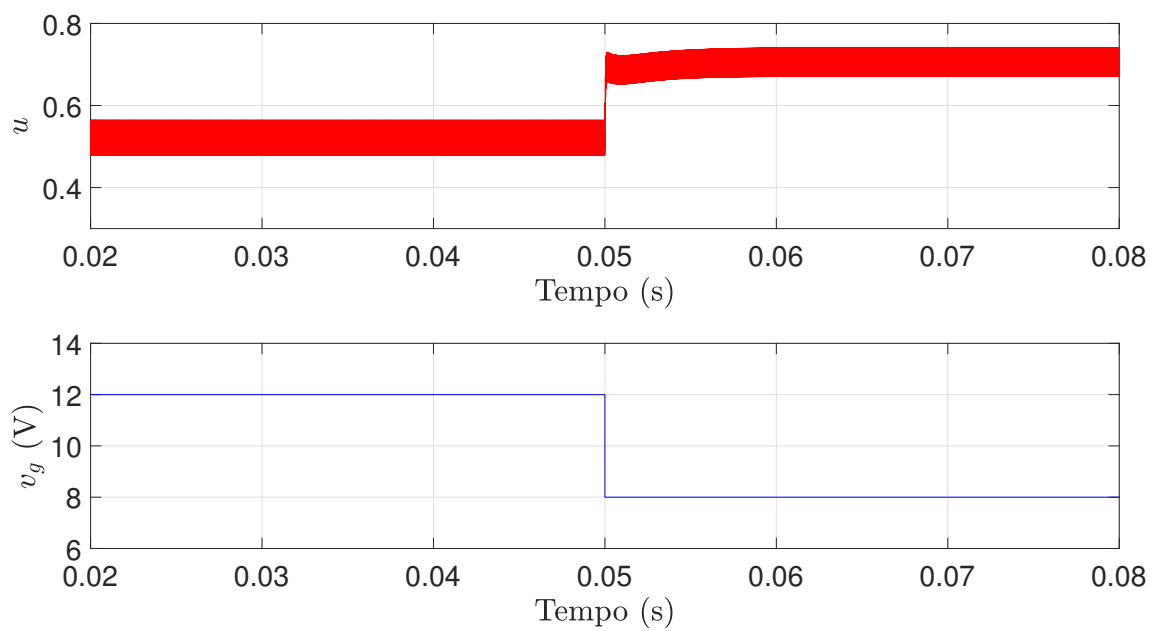


Figura 6.26: Comportamento do sinal de controle  $u$  mediante perturbação de entrada (capacitor envelhecido).

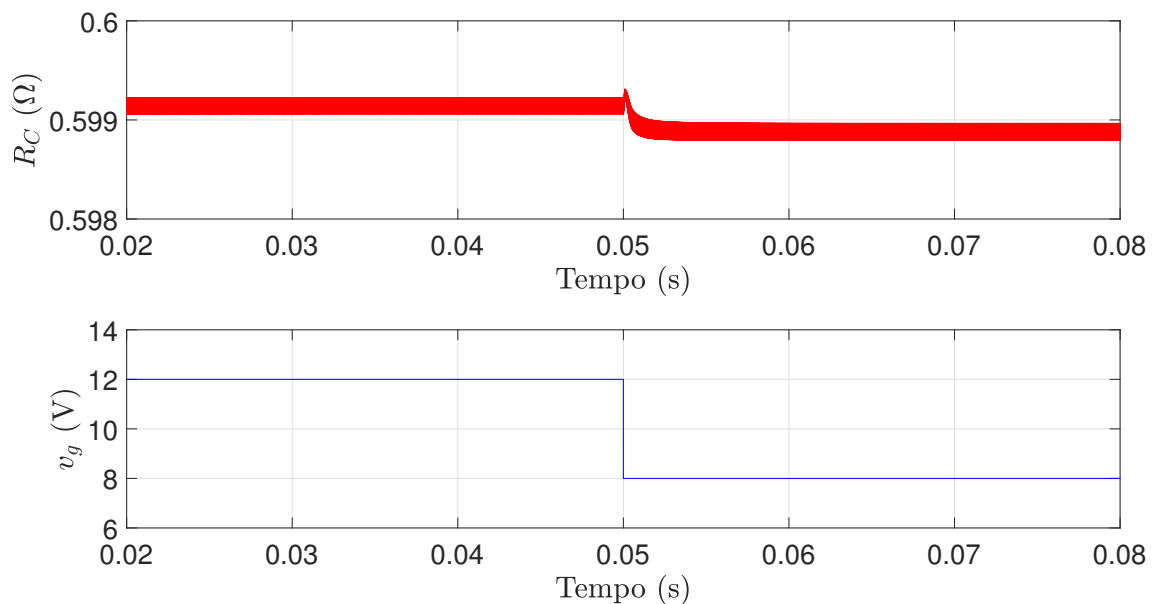


Figura 6.27: Identificação *online* de  $R_C$  mediante perturbação de entrada (capacitor envelhecido).

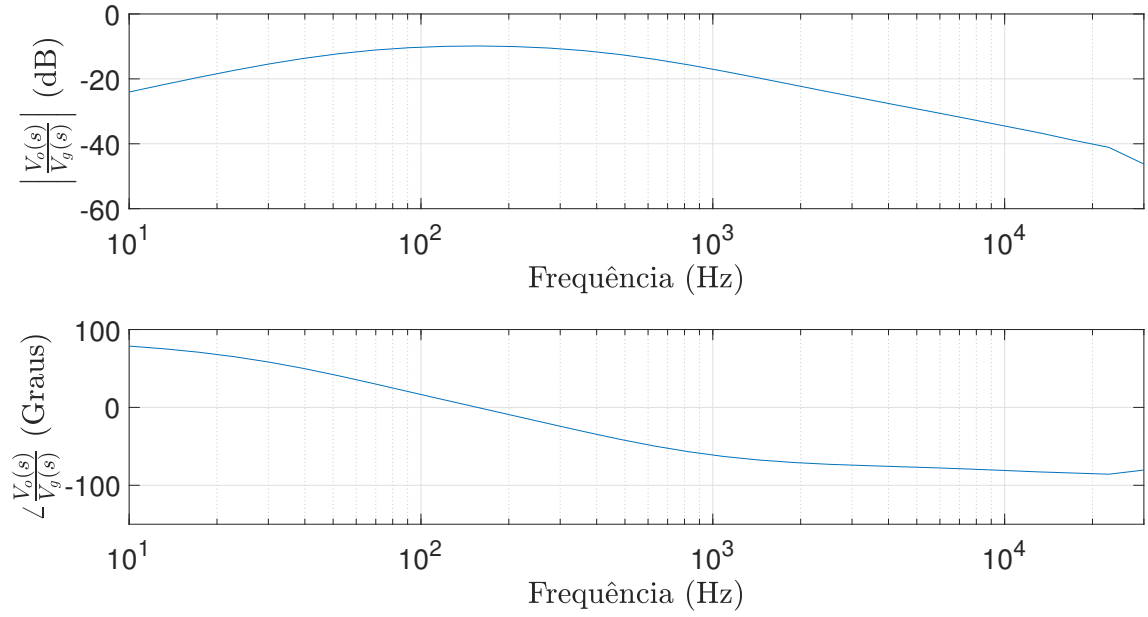


Figura 6.28: Diagrama de Bode do ganho direto do conversor elevador (capacitor envelhecido).

## 6.6 Simulação com ESL no capacitor

Como visto no Capítulo 4, um capacitor real pode ser modelado como uma associação de resistores ôhmicos, capacitores e indutores ideais. Embora a componente indutiva não tenha sido usada na modelagem do conversor *Boost*, é conveniente verificar o desempenho dos sistemas de controle e de identificação quando o capacitor possui uma ESL, de modo a obter resultados mais próximos daqueles experimentais. Assim, o teste de perturbação de carga foi repetido para os casos de capacitor novo e

Tabela 6.2: Dados das simulações.

| Parâmetro                      | $i_{load}/C_{novo}$ | $i_{load}/C_{env}$ | $v_g/C_{novo}$ | $v_g/C_{env}$ |
|--------------------------------|---------------------|--------------------|----------------|---------------|
| $v_o$ subsinal (%)             | 8,9                 | 9,3                | 5,23           | 5,50          |
| $v_o$ tempo de acomodação (ms) | 6,18                | 6,26               | 4,7            | 4,6           |
| $I_L$ após perturbação (A)     | 2,67                | 2,74               | 1,56           | 1,59          |
| $D$ antes/depois               | 0,519/0,551         | 0,523/0,563        | 0,519/0,695    | 0,523/0,701   |
| $\Delta R_C$ antes/depois (%)  | -0,33/+0,7          | -0,14/+0,28        | -0,33/-0,44    | -0,14/-0,18   |
| Pico de magnitude (dB)         | 11,48               | 11,63              | -9,52          | -9,86         |

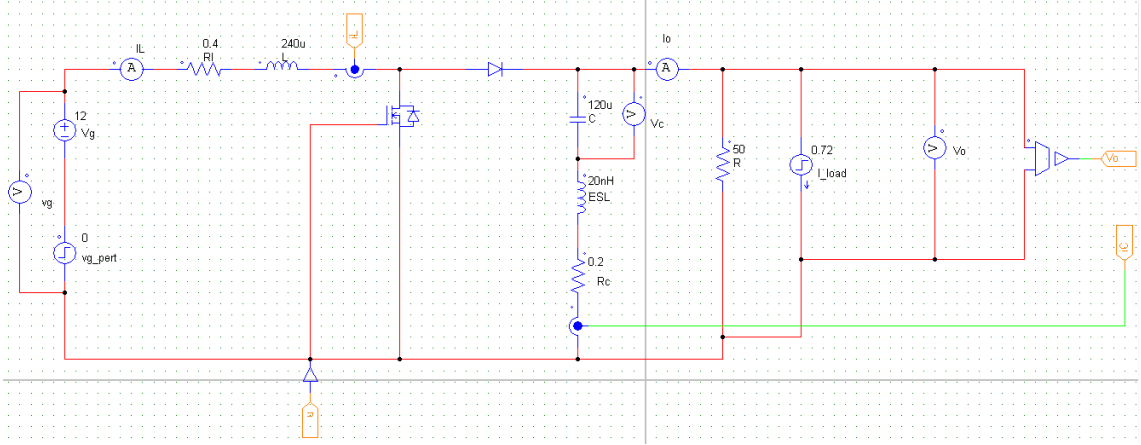


Figura 6.29: Esquemático do circuito do conversor elevador incluindo ESL no modelo do capacitor.

envelhecido com um ESL de 20 nH, conforme a Figura 6.29. Não foram consideradas alterações da componente indutiva com o envelhecimento do capacitor.

### 6.6.1 Simulação com capacitor novo

O comportamento da tensão de saída pode ser visto na Figura 6.30, onde se percebe um subsinal de 8,9% e tempo de acomodação da ordem de 6,2ms, valores semelhantes aos encontrados anteriormente. A identificação de  $R_C$ , ilustrada na Figura 6.31, apresenta erros de cerca 3% antes da perturbação e 1,25% após o transitório. Estes valores, embora maiores do que nas simulações sem ESL no capacitor, ainda são baixos o suficiente para não inviabilizar o sistema de controle e nem a própria identificação do ESR. De fato, conforme a Figura 6.32, os erros de estimação do estado  $v_c$  são de no máximo 1,67%, para mais ou para menos. Estes erros maiores são esperados, pois o cálculo  $v_C = v_o - R_C i_C$  desconsidera a presença de uma componente indutiva em série no capacitor. Entretanto, a regulação da tensão de saída não é comprometida.

### 6.6.2 Simulação com capacitor envelhecido

Pela Figura 6.33, a tensão de saída pouco altera seu comportamento, exceto pelo ligeiro aumento de subsinal para 9,3%. Esta alteração é semelhante à que ocorreu da simulação da seção 6.2 para a da seção 6.3, nas quais não havia ESL no capacitor.

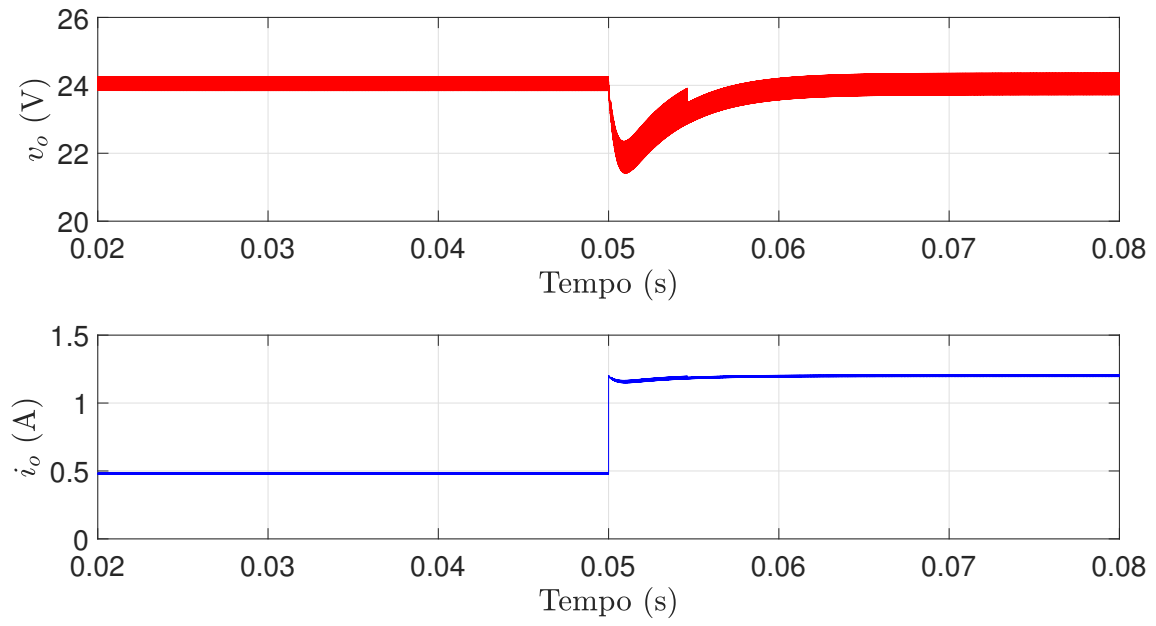


Figura 6.30: Efeito da perturbação de carga sobre a tensão de saída  $v_o$  (capacitor novo com ESL).

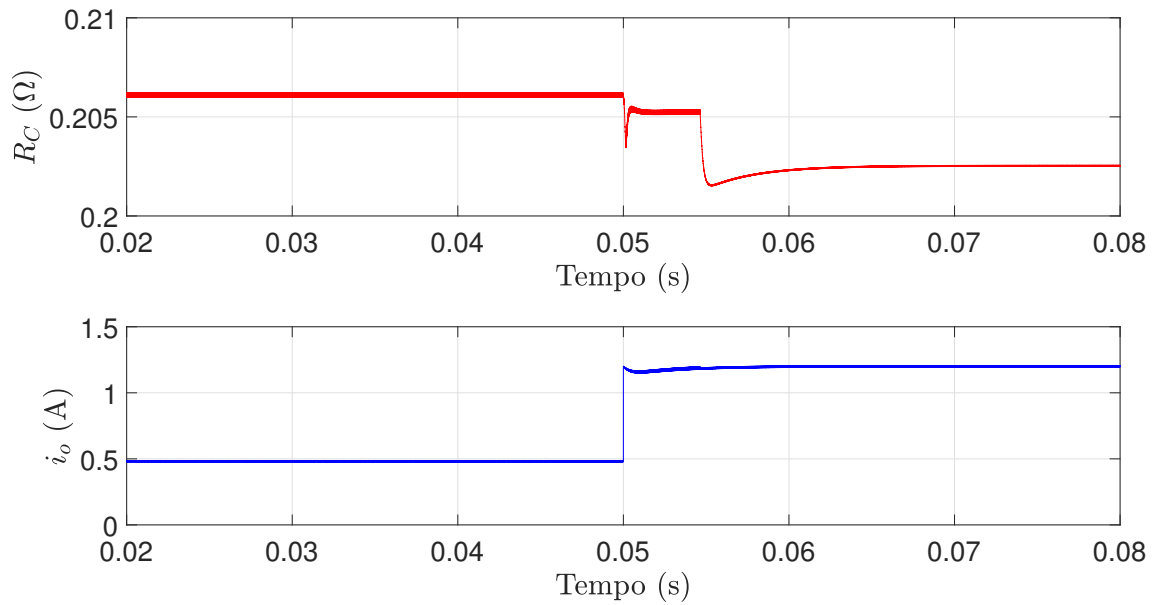


Figura 6.31: Identificação online de  $R_C$  mediante perturbação de entrada (capacitor novo com ESL).

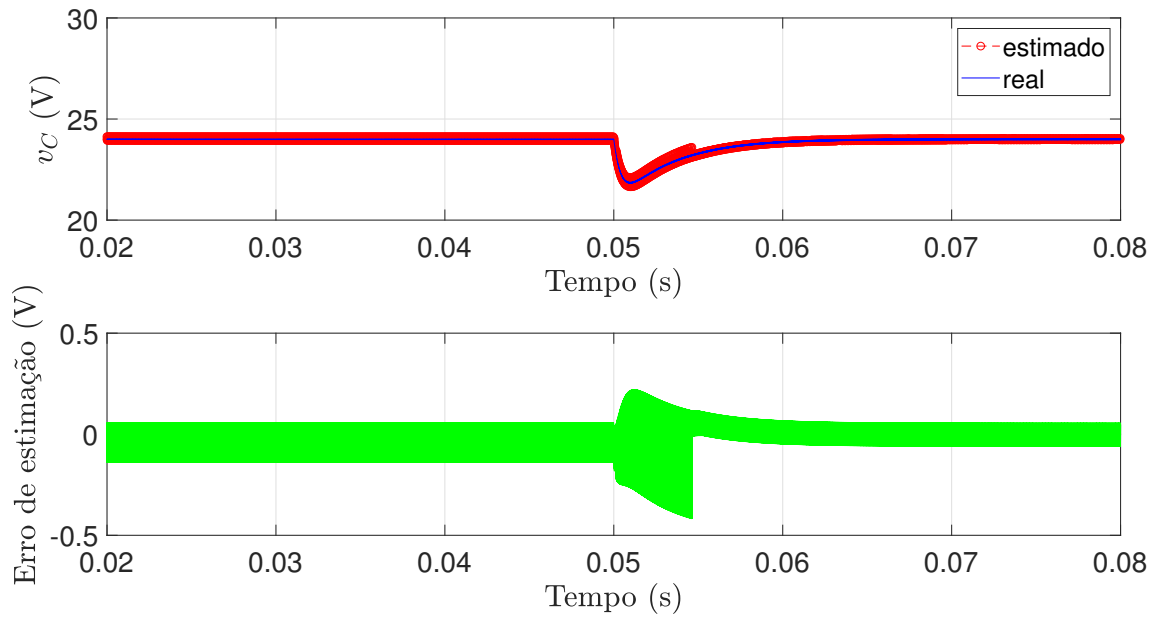


Figura 6.32: Sinais  $v_C$  estimado e real e o erro da estimação (capacitor novo com ESL).

Da mesma forma, os erros na identificação do ESR também diminuem para 1% antes da perturbação e 0,63% após o transitório, conforme pode ser verificado na Figura 6.34. Além disto, os desvios na estimação do estado  $v_c$  continuam em patamar abaixo dos 2%, como mostra a Figura 6.35. Novamente, os sistemas de controle e de identificação se mostram eficientes mesmo na presença da componente indutiva no capacitor.

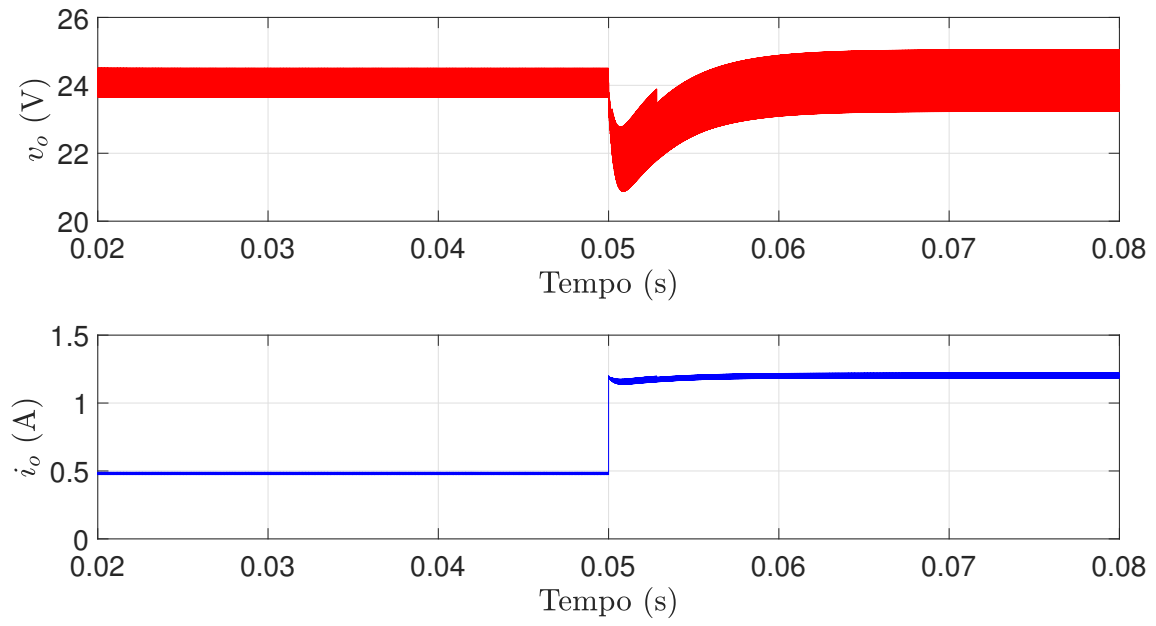


Figura 6.33: Efeito da perturbação de carga sobre a tensão de saída  $v_o$  (capacitor envelhecido com ESL).

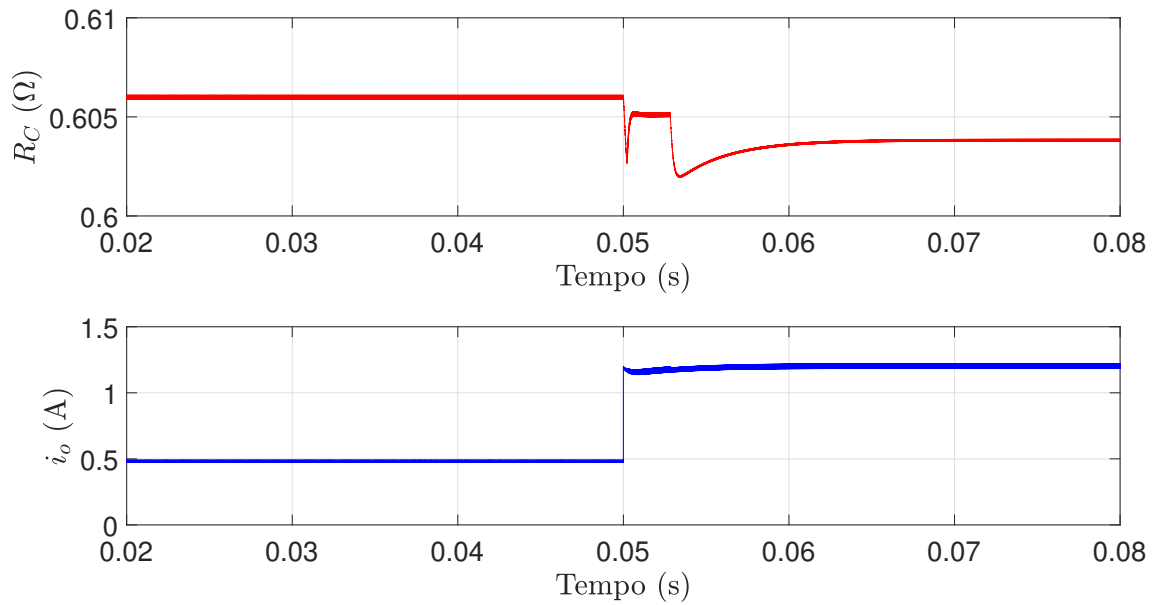


Figura 6.34: Identificação *online* de  $R_C$  mediante perturbação de entrada (capacitor envelhecido com ESL).

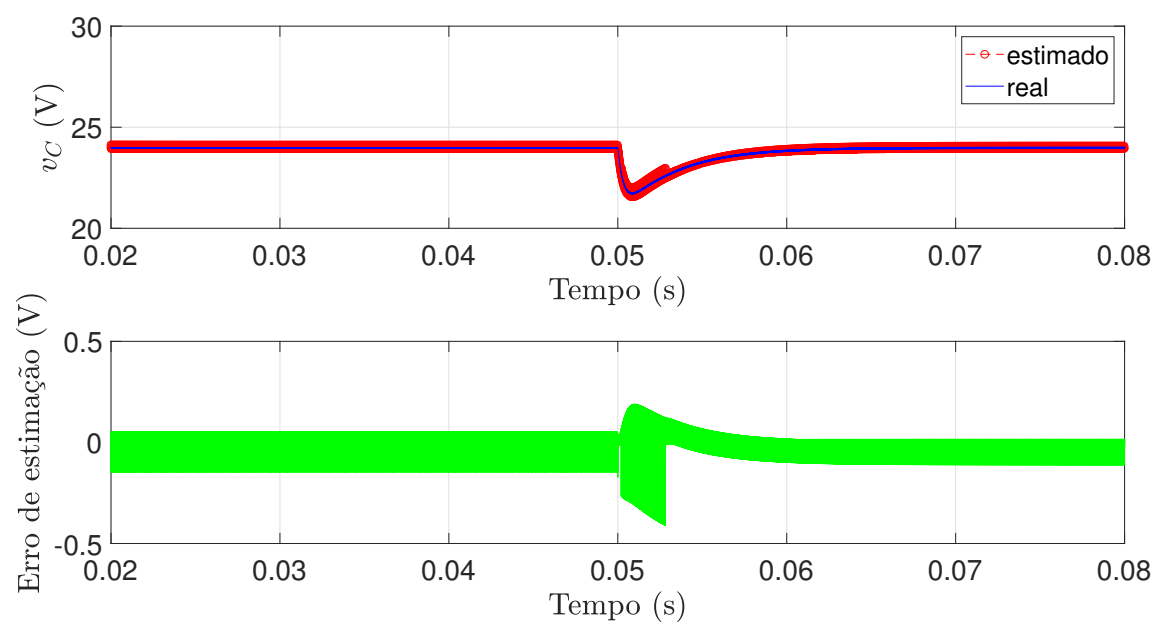


Figura 6.35: Sinais  $v_C$  estimado e real e o erro da estimação (capacitor envelhecido com ESL).

# Capítulo 7

## Conclusões

Esta dissertação tem como objetivo apresentar uma solução para o problema de controle ótimo robusto em conversores CC-CC da topologia *Boost*. A contribuição mais importante deste trabalho está no desenvolvimento de um modelo considerando-se as incertezas paramétricas existentes no capacitor, uma vez que usualmente estas incertezas estão restritas à carga e a razão cíclica do chaveamento. O conceito de politopo convexo foi utilizado para criar um modelo incerto mais abrangente para o conversor elevador, porém menos conservador, permitindo encontrar uma solução mais robusta do ponto de vista da norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Ademais, o método de síntese proposto permite a inclusão no projeto de especificações de resposta transitória através da alocação robusta de polos em regiões LMI.

Os resultados das simulações sugerem que a estratégia proposta é eficaz em rejeitar perturbações na corrente de carga e na tensão de entrada, de modo a manter a regulação da tensão de saída do conversor. Além disto, o sistema de identificação do ESR do capacitor foi capaz de calcular com precisão os valores de  $R_C$  mesmo sob efeito das perturbações. Com isto, o sistema de automação proposto pode ser utilizado não apenas para fins de regulação da saída, como também para monitoramento das condições de funcionamento do conversor.

Outro ponto a ser observado é que, embora a modelagem politópica seja relativamente complexa, o problema de síntese gera um controlador por realimentação estática de estado, cuja implementação prática é simples e bem conhecida na área de eletrônica de potência. Embora o sistema de identificação introduza custo e complexidade adicionais, especialmente devido ao sensor de corrente do capacitor, os ganhos

possibilitados pelo monitoramento do ESR do capacitor compensam estas desvantagens. Como visto, os AECs, extensamente empregados na indústria de eletrônica de potência, são muito afetados pelo envelhecimento e correspondem a uma parcela substancial das causas de falha em conversores. Desta forma, a identificação de parâmetros do capacitor é uma ferramenta valiosa para o acompanhamento da saúde do equipamento e pode ser empregada em rotinas de manutenção preditiva.

Como sugestão para trabalhos futuros, os princípios de modelagem politópica apresentados poderiam ser aplicados a outras topologias de conversores CC-CC. Acredita-se que, mediante uma escolha adequada de parâmetros auxiliares, é possível chegar a resultados semelhantes ao desta dissertação. Outra possibilidade de estudo seria a inclusão de incertezas associadas ao indutor, notadamente ESR e indutância, na modelagem politópica. Além disso, poderia ser explorada a determinação do politopo convexo a partir de um arranjo de hiperplanos [40], de modo a tornar o processo mais direto e garantir a otimalidade da cobertura politópica. Por fim, instiga-se a implementação do circuito do conversor *Boost* utilizando o sistema de automação proposto, de modo a colher evidência experimental da validade do método.

O tema desta dissertação também foi explorado no artigo *Robust  $\mathcal{H}_\infty$  Control for PWM Boost Converters Subject to Aging Capacitor Conditions*, de autoria do autor desta dissertação, Caio dos Santos Magalhães, e dos seus orientadores, Bernardo Ordoñez e Humberto Xavier de Araújo. O artigo foi publicado no 21º Congresso Mundial da IFAC (*International Federation of Automatic Control*), que ocorreu de forma virtual entre 13 e 17 de julho de 2020.

# Referências Bibliográficas

- [1] MIAO, W., LIU, X., LAM, K., et al., “Condition Monitoring of Electrolytic Capacitors in Boost Converters by Magnetic Sensors”, *IEEE Sensor Journal*, v. 19, pp. 10393–10402, 2019.
- [2] VOGELSBERGER, M., WIESINGER, T., ERTL, H., “Life-Cycle Monitoring and Voltage-Managing Unit for DC-link Electrolytic Capacitors in PWM Converters”, *IEEE Transactions on Power Electronics*, v. 26, pp. 493–503, 2011.
- [3] LEE, K., KIM, M., YOON, J., et al., “Condition Monitoring of DC-Link Electrolytic Capacitors in Adjustable-Speed Drives”, *IEEE Transactions on Industry Applications*, v. 44, pp. 1606–1613, 2008.
- [4] ERIKSON, W., MAKSIMOVIC, D., *Fundamentals of Power Electronics*. Kluwer Academic Publishers: Massachusetts, 1999.
- [5] HART, D., *Power Electronics*. McGraw Hill: New York, 2011.
- [6] FADIL, H. E., GIRI, F., “Robust nonlinear adaptive control of multiphase synchronous buck power converters”, *Control Engineering Practice*, v. 17, pp. 1245–1254, 2009.
- [7] MATTOS, E., ANDRADE, A., HOLLWEG, G., et al., “A Review of Boost Converter Analysis and Design in Aerospace Applications”, *IEEE Latin America Transactions*, v. 16, pp. 305–313, 2018.
- [8] HEGAZY, O., MIERLO, J., LATAIRE, P., “Analysis, Modeling and Implementation of a Multidevice Interleaved DC/DC Converter for Fuel Cell Hybrid

- Electric Vehicles”, *IEEE Transactions Power Electronics*, v. 27, pp. 4445–4458, 2012.
- [9] DAHMANE, M., BOSCHE, J., EL-HAJJAJI, A., “Robust control approach for photovoltaic conversion system”. In: *Proceedings of 2013 International Renewable and Sustainable Energy Conference*, pp. 123–129, IEEE, março 2013.
- [10] CUCUZZELLA, M., LAZZARI, R., TRIP, S., et al., “Sliding Mode Voltage Control of Boost Converters in DC Microgrids”, *Control Engineering Practice*, v. 73, pp. 161–170, 2018.
- [11] CUCUZZELLA, M., LAZZARI, R., KAWANO, Y., et al., “Robust Passivity-Based Control of Boost Converters in DC Microgrids”. In: *Proceedings of the 58th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 8435–8440, IEEE, dec 2019.
- [12] OLLALA, C., LEYVA, R., AROUDI, A. E., et al., “Robust optimal control of bilinear DC-DC converters”, *Control Engineering Practice*, v. 19, pp. 688–699, 2011.
- [13] YANG, S., XIANG, D., BRYANT, A., et al., “An Industry-Based Survey of Reliability in Power Electronic Converters”, *IEEE Transactions on Industrial Applications*, v. 47, pp. 1441–1451, 2011.
- [14] AELOIZA, E., KIM, J., RUMINOT, P., et al., “A real time method to estimate electrolytic capacitor condition in PWM ajustable speed drives and uninterruptable power supplies”. In: *Proceedings of 36th Power Electronics Specialists Conference*, pp. 2867–2872, IEEE, Jun 2005.
- [15] REN, L., GONG, C., “Modified hybrid model of boost converters for parameter identification of passive components”, *IET Power Electronics*, v. 11, pp. 764–771, 2018.
- [16] REN, L., GONG, C., ZHAO, Y., “An Online ESR Estimation Method for Output Capacitor of Boost Converter”, *IEEE Transactions on Power Electronics*, v. 34, pp. 10153–10165, 2019.

- [17] WANG, H., BLAABJERG, F., “Reliability of capacitors for dc-link applications in power electronics converters - an overview”, *IEEE Transactions on Industrial Applications*, v. 50, pp. 3569–3578, 2014.
- [18] BACHA, S., MUNTEANU, I., BRACTU, A., *Power Electronics Converters Models and Control*. Springer: London, 2014.
- [19] LIPING, G., HUNG, J., NELMS, R., “Evaluation of DSP-based PID and fuzzy controllers for DC-DC converters”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 56, pp. 2237–2248, 2009.
- [20] BECCUTI, A., MARIETHOZ, S., CLIQUENNOIS, S., et al., “Explicit model predictive control of DC-DC switched-mode power supplies with extended Kalman filtering”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 56, pp. 1864–1874, 2009.
- [21] AL-RABADI, A., ALSMADI, O., “Supervised neural computing and LMI optimization for order model reduction-based control of the buck switching-mode power supply”, *International Journal of Systems Science*, v. 42, pp. 91–106, 2011.
- [22] VIDAL-IDIARTE, E., MARTINEZ-SALAMERO, L., CALVENTE, J., et al., “An  $\mathcal{H}_\infty$  control strategy for switching converters in sliding-mode current control”, *IEEE Transactions on Power Electronics*, v. 21, pp. 553–556, 2006.
- [23] OLLALA, C., LEYVA, R., AROUDI, A. E., et al., “Robust LQR control for PWM converters: An LMI approach”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 56, pp. 2548–2558, 2009.
- [24] OLLALA, C., LEYVA, R., AROUDI, A. E., et al., “LMI robust control design for boost PWM converters”, *IET Power Electronics*, v. 3, pp. 75–85, 2010.
- [25] JR., L. M., MONTAGNER, V., PINHEIRO, R., et al., “Robust  $\mathcal{H}_2$  control applied to boost converters: design, experimental validation and performance analysis”, *IET Control Theory and Applications*, v. 6, pp. 1881–1888, 2012.

- [26] OLLALA, C., LEYVA, R., QUIENNEC, I., et al., “Robust Gain-Scheduled Control of Switched-Mode DC-DC Converters”, *IEEE Trans on Power Electronics*, v. 27, pp. 3006–3019, 2012.
- [27] KIM, S., KIM, J., PARK, C., et al., “Output-feedback model predictive controller for voltage regulation of a DC/DC converter”, *IET Control Theory and Applications*, v. 7, pp. 1959–1968, 2013.
- [28] KIM, S., PARK, C., KIM, J., et al., “A Stabilizing Model Predictive Controller for Voltage Regulation of a DC/DC Boost Converter”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 22, pp. 2016–2023, 2014.
- [29] CHEN, C., LI, L., ZHANG, Q., et al., “Online Inductor Parameters Identification by Small Signal Injection for Sensorless Predictive Current Controlled Boost Converter”, *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, v. 13, pp. 1554–1564, 2017.
- [30] MIDDLEBROOK, R., CUK, S., “A general unified approach to modelling switching-converters power stages”. In: *Proceedings of 1976 Power Electronics Specialists Conference*, pp. 18–34, IEEE, Jun 1976.
- [31] BOYD, S., GHAOUI, L. E., FERON, E., et al., *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, Studies in Applied and Numerical Mathematics*. SIAM: Philadelphia, 1994.
- [32] BERNUSSOU, J., PERES, P., GEROMEL, J., “A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems”, *Systems and Control Letters*, v. 13, pp. 65–72, 1989.
- [33] GASPERI, M., “Life prediction model for aluminum electrolytic capacitors”. In: *Conference Record of the IEEE Industry Applications Society Annual Meeting*, pp. 1347–1351, IEEE, Oct 1996.
- [34] VENET, K., PERISSE, F., EL-HUSSEINI, M., et al., “Realization of a smart electrolytic capacitor circuit”, *IEEE Industry Applications Magazine*, v. 8, pp. 16–20, 2002.

- [35] ZHOU, K., DOYLE, J., *Essentials of robust control*. Prentice Hall: New Jersey, 1999.
- [36] GAHINET, P., APKARIAN, P., “A linear matrix inequality approach  $\mathcal{H}_\infty$  control”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 4, pp. 421–448, 1994.
- [37] OGATA, K., *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson: São Paulo, 2010.
- [38] CHILIALI, M., GAHINET, P., “ $\mathcal{H}_\infty$  design with pole placement constraints: An LMI approach”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, pp. 358–367, 1996.
- [39] OLIVEIRA, M., SKELTON, R., “Stability Tests for Constrained Linear Systems”, In: MOHEIMANI, S. (ed), *Perspectives in Robust Control*, v. 268, pp. 241–257, Springer: London, 2001.
- [40] PRODAN, I., STOICAN, F., OLARU, S., et al., “Enhancements on the Hyperplanes Arrangements in Mixed-Integer Programming Techniques”, *Journal of Optimization Theory Applications*, v. 154, pp. 549–572, 2012.