



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

CONTROLE DE TRAJETÓRIA DE ROBÔS MÓVEIS
OMNI-DIRECIONAIS: UMA ABORDAGEM
MULTIVARIÁVEL

Autor: Tiago Pereira do Nascimento
Orientadora: Prof^ª. Dra. Cristiane Corrêa Paim
Co-orientador: Prof. Dr. Augusto César Pinto Loureiro da Costa

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Bahia,
para preenchimento dos requisitos parciais à obtenção do
Título de

MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Salvador
2009

Resumo

O projeto, aqui apresentado, de controle de trajetória de robôs móveis omni-direcionais tem por objetivo o estudo das técnicas de controle multivariáveis de trajetória. Este trabalho apresenta uma abordagem em espaço de estados para a modelagem multivariável dinâmica e cinemática do robô móvel omni-direcional AxeBot e a implementação de uma lei de controle multivariável para seu controle de trajetória, conservando o acoplamento das velocidade das rodas. Este controlador multivariável é dito linearizante, pois controla um sistema não-linear por considerá-lo linear em malha fechada através de um controlador linear multivariável. O controlador é implementado em *Matlab Simulink* e validado quanto à trajetória realizada, a faixa de tensão de operação e a análise do lugar das raízes.

Abstract

The project of a path control for omnidirectional mobile robots presented here has as main objective the research about the techniques of multivariable path control. This work presents a dynamic and kinematic multivariable model on the canonic form and the implementation of a multivariable control law for the path control for the omnidirectional mobile robot AxeBot, considering the coupling between the wheel's velocities. This multivariable controller is said to be linearizing for it controls a non-linear system by considering it linear in a closed mesh through a multivariable linear controller. This controller is implemented in Matlab Simulink environment and validated with its trajectory following, its range of tension and the analysis of its root locus.

Agradecimentos

- Em primeiro lugar a Jeová, o único e verdadeiro Deus que me tem iluminado nos momentos mais difíceis durante minha vida e durante essa jornada de dois anos de mestrado;
- À minha filha Beatriz, razão da minha vida, por ter me dado força durante todas as dificuldades com apenas um sorriso;
- Aos meus pais que me apoiaram, especialmente na definição da carreira acadêmica;
- À Profa. Dra. Cristiane Correa Paim, por ter aceitado minha proposta de trabalho, e pela orientação ao longo deste trabalho;
- Ao Prof. Dr. Augusto César Pinto Loureiro da Costa, pela sugestão da proposta de trabalho e pela co-orientação deste trabalho;
- Aos colegas Adriane da Cruz, Andréa Bittencourt, Aline Sales, Márcio Garcia e Acbal Achy que de algum modo, me ajudaram neste trabalho com contribuições teóricas;
- Aos amigos Gildeberto Cardoso, Antônio Carlos Pimenta, Julian Quezada e Breno Gramacho que definitivamente foram de fundamental importância no aprendizado das teorias que tive que aprender ao longo destes dois anos;
- À Antônio e Antônia Barreto de Carvalho, Renata Caroline Barreto de Carvalho e à Marcus Vinícius Barreto de Carvalho, no apoio ao cuidar de minha filha na minha ausência;
- E não menos importante, à todos os ausentes, presentes, colegas, amigos que direta ou indiretamente me ajudaram ou influenciaram nos caminhos a serem tomados nessa jornada.

"Os sábios não dizem o que sabem,
os tolos não sabem o que dizem."

Ditado Chinês

Sumário

Capítulo 1	4
1. Introdução	4
1.1. Contribuições e Propostas	6
1.2. Estrutura do Texto	7
Capítulo 2	8
2. Robótica Móvel	8
2.1. Introdução	8
2.2. O Problema	9
2.3. Objeto de Estudo	9
2.3.1. Robôs Móveis com Rodas	10
2.3.1.1. Estabilidade	11
2.3.1.2. Manobrabilidade	12
2.3.1.3. Mobilidade	12
2.3.2. O Robô AxeBot	12
2.4. Conclusão	17
Capítulo 3	18
3. Preliminares Teóricos	18
3.1. Introdução	18
3.2. Modelagem em Espaço de Estados	19
3.3. Tipos de Sistemas	21
3.3.1. Sistemas SISO	22
3.3.2. Sistemas MIMO	22
3.4. Teoria de Controle Multivariável	23
3.4.1. O Método do Lugar das Raízes	26
3.5. O Sistema de Controle de Trajetória em Cascata	27
3.6. Linearização Entrada-Saída	28
3.7. Linearização Entrada-Estado	29
3.8. Linearização por Série de Taylor	29
Capítulo 4	30

4. Modelagem do Robô AxeBot.....	30
4.1. Introdução	30
4.2. Modelo Cinemático	31
4.2.1. Modelo Cinemático Inverso.....	34
4.3. Modelo Dinâmico	35
4.3.1. Modelo Dinâmico em Espaço de Estados	41
4.3.2. Modelo Dinâmico Inverso	42
4.4. Controladores de Velocidade.....	43
4.5. Modelo Cinemático Linearizado.....	46
4.6. Matriz de Funções de Transferência	48
4.7. Conclusão.....	48
Capítulo 5.....	49
5. Controlador de Trajetória Multivariável	49
5.1. Introdução	49
5.2. Controle em Cascata	50
5.3. Controlador Multivariável Proposto.....	51
5.4. Sintonia dos Parâmetros do Controlador	55
5.5. Testes e Análise de Desempenho do Controlador Multivariável Estudado	59
5.6. Conclusão.....	70
Capítulo 6.....	71
6. Conclusão e Trabalhos Futuros	71
6.1. O Propósito da Dissertação	71
6.2. Conclusões	72
6.3. Contribuições	72
6.4. Trabalhos Futuros	73
Referências	74

Índice de Figuras

Figura 01 – Roda omni-direcional.....	11
Figura 02 – Projeto do robô em CAD (esquerda) e foto do robô real montado (direita)	13
Figura 03 – Visão Explodida do Robô	14
Figura 04 – BrainStem.....	15
Figura 05 – Representação Gráfica do Fluxo de Dados Através do Barramento IIC	16
Figura 06 – Representação Gráfica da Malha do Fluxo de Dados.	16
Figura 07 – Sistema SISO	22
Figura 08 – Sistema MIMO.....	23
Figura 09 – Esquema de Controle	25
Figura 10 – Análise Geométrica da Disposição das Velocidades Angulares.....	31
Figura 11 – Roda omni-direcional.....	32
Figura 12 – Análise Geométrica da Disposição das Forças.	35
Figura 13 – Malha de controle interna.....	43
Figura 14 – Malha de controle proposta.	50
Figura 15 – Malha de controle detalhada.	51
Figura 16 – Mapa de Pólos e Zeros	53
Figura 17 – Traçado do lugar das raízes no plano “s” para o sistema representado na equação (5.22)	58
Figura 18 – Trajetória retilínea.....	60
Figura 19 – Trajetória elipsoidal para distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,5 m	60
Figura 20 – Trajetória em oito.....	61
Figura 21 – Trajetória livre.....	61
Figura 22 – Tensões na trajetória retilínea	63
Figura 23 – Tensões na trajetória elipsoidal para distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,5 m	63
Figura 24 – Tensões na trajetória em oito	64
Figura 25 – Tensões na trajetória livre	64
Figura 26 – Velocidades em X e Y para trajetória retilínea	65
Figura 27 – Velocidades em X e Y para trajetória elipsoidal com distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,5 m	65
Figura 28– Velocidades em X e Y para trajetória em oito	66
Figura 29 – Trajetória elipsoidal para distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,32 m	66

Figura 30 – Tensões na trajetória elipsoidal para distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,32 m	67
Figura 31 – Velocidades em X e Y para trajetória elipsoidal com distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,32 m	67
Figura 32 – Trajetória elipsoidal para distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,68 m	68
Figura 33 – Velocidade em X e em Y para trajetória elipsoidal para distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,68 m.....	68
Figura 34 – Velocidade em X e em Y para trajetória elipsoidal para distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,68 m.....	69

Índice de Tabelas

Tabela 4.1 – Resultados da Simulação para $K_p=40$ e $T_i=0,07$ [8].....	46
Tabela 5.1 – Valores dos parâmetros do AxeBot	59
Tabela 5.2 – Resultados da Simulação das Trajetórias	62
Tabela 5.3 – Resultados da Simulação das Trajetórias Elipsoidais.....	69

Capítulo 1

1. Introdução

A automação está sendo implantada em todos os setores econômicos; tais como indústrias de transformação, comércio, serviços de segurança, serviços domésticos, entre outros. Dessa forma, pode-se citar casos de implantação de robôs móveis tais como veículos AGV (Veículos Autonomamente Guiados) em indústrias com plantas autônomas de fabricação, veículos móveis autônomos em serviços domésticos (domótica), entre outros setores.

Pela definição, robótica móvel é a área da robótica que agrupa os robôs que não possuem base fixa, ou seja, que podem se locomover dentro de um espaço limitado ou não. É por meio dessa locomoção que o robô deve se reconhecer como objeto móvel, armazenar sua posição dentro desse espaço, compreender os limites físicos deste espaço e se adaptar prevendo caminhos e objetos fixos, ou móveis, que podem ser obstáculos a serem desviados.

O estudo de caso deste projeto está dentro do universo compreendido pelos robôs móveis terrestres com rodas (existem outros tipos de locomoção terrestre que dispensam o uso de rodas, mas isso não é o escopo deste projeto). Dentro do grupo de robôs móveis com rodas surgiram os robôs omni-direcionais. Um robô omni-direcional é um robô capaz de movimentar-se em qualquer direção no plano horizontal, sem a necessidade de uma reorientação por meio da rotação em torno do próprio eixo. Tal mobilidade não acontece nos robôs mais comuns, com duas rodas, em que para se locomover em uma dada direção é necessário que o robô esteja na orientação apropriada. Diversos estudos se tornaram freqüentes neste modelo de robô devido à agilidade na locomoção destes veículos proporcionando um vasto estudo de casos para a área da robótica móvel [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Robôs deste tipo são bastante utilizados na robótica móvel por serem rápidos e de fácil manobra e com uma mecânica de complexidade relativamente baixa, porém, com difícil

adaptação em certos terrenos. As rodas deste robô são especiais, chamadas de rodas Suecas [7]. Estas possibilitam o movimento tanto tangencial quanto perpendicular, entretanto, são relativamente inaplicáveis a terrenos com desníveis. O AxeBot, robô omni-direcional estudado neste trabalho, é dotado de habilidades para executar tarefas autônomas, tendo como laboratório de testes o futebol de robôs, categoria F180 da Federação da Robocup.

O futebol de robôs vem sendo utilizado como laboratório para pesquisas desenvolvidas nas áreas de Robótica Móvel e Inteligência Artificial no Brasil desde 1996 [7]. Ele exige, dentre outras coisas, que o robô se desloque de um ponto a outro de forma rápida e precisa. Dessa forma, para a locomoção, é necessário que o mesmo possua um sistema computacional embarcado responsável por controlar todas as suas funções. Este sistema computacional deve enviar e receber informações para que o robô possa desempenhar suas funções. Sendo assim, este é chamado de sistema de controle. Este sistema pode ser dividido em módulos de controle. O módulo de controle de mais baixo nível é o controle de velocidade dos motores. Este foi o tema de estudo de [8] para o projeto AxeBot. O módulo de controle, que em cascata, se localiza no nível posterior é o módulo de controle de trajetória, responsável pela execução da trajetória que o robô deverá percorrer [9], [10].

O estudo feito por [11] mostrou que o robô AxeBot é um sistema fortemente acoplado cuja influência da rotação de uma roda influencia diretamente na velocidade das outras duas rodas, bem como na velocidade resultante do centro de massa do robô. O sistema de controle de trajetória para os robôs móveis omni-direcionais em questão, deve considerar essa influência, controlando a trajetória do centro de massa do mesmo. Para tal sistema acoplado, não-linear e MIMO (*Multiple Inputs Multiple Outputs* / Múltiplas Entradas – Múltiplas Saídas) foi desenvolvido um controle multivariável.

O controle multivariável de robôs omni-direcionais possibilita estudos de controle de trajetória não somente em veículos terrestres, mas também em outros meios de transporte. A implementação deste tipo de controle tem como maior exemplo de estudo de caso os sistemas robóticos para realização de manobras de contingências em ambientes inóspitos, tais como plantas petroquímicas; utilização de robôs móveis aéreos para monitoramento de oleodutos; linhas de transmissão de energia elétrica; monitoramento ambiental, etc.

Uma das maiores dificuldades no projeto de um robô móvel é o projeto do controlador para rastreamento de trajetória. O controle de trajetória pode ser realizado por meio de inúmeras técnicas de controle. Ao considerar-se uma trajetória que represente fielmente a desejada, faz-se necessária uma abordagem que englobe uma alimentação de dados referente à localização real do robô móvel. É importante, neste caso, um estudo de controle

multivariável, pois a solução para o controle não se torna mais trivial quando se tratam de robôs omni-direcionais. Nesta perspectiva é de fundamental importância a execução de um controle que garanta o deslocamento do robô numa trajetória desejada. Outra justificativa para este modelo de controlador é a possibilidade de extrair-se uma lei de controle que considere a influência do acoplamento entre as rodas do robô como visto anteriormente. Por fim, é justificável a realização deste projeto por este capacitar docentes no estudo de controle multivariável de trajetória de robôs omni-direcionais.

O objetivo principal deste trabalho é desenvolvimento de um controlador multivariável para mapeamento de trajetória de robôs omni-direcionais utilizando um modelo em espaço de estados.

A linha de pesquisa focada no presente projeto é desenvolvida na Universidade Federal da Bahia, por meio do Projeto AxeBot que envolve estudos nas áreas de veículos autônomos e robótica cooperativa. Este trabalho contribuirá de forma significativa para a construção e aperfeiçoamento do robô omni-direcional, que futuramente participará da competição de futebol de robôs proposto pela Federação da Robocup.

1.1. Contribuições e Propostas

As contribuições e propostas deste trabalho são:

- A concepção, pouco abordada na literatura, de um controle de trajetória linearizante multivariável para robôs móveis omni-direcionais com três rodas, mostrando a influência do comportamento de trajetórias suaves no desempenho do controlador;
- A concepção de um modelo simplificado não linear com não linearidades de entrada em espaço de estados;
- A concepção de um modelo linearizado por série de Taylor e Entrada-Estado;
- Aplicação do controlador linearizante multivariável num robô real.

1.2. Estrutura do Texto

No capítulo 2 são apresentadas a delineação e contextualização do problema, os objetos de estudo e as soluções propostas neste trabalho. O capítulo 3 apresenta uma abordagem teórica que norteará todo o escopo dessa dissertação tais como os tipos de controladores, a modelagem em espaço de estados, as linearizações aplicadas a essa forma, o controle multivariável e algumas técnicas de sintonização desse controle. O capítulo 4 mostra o desenvolvimento do modelo cinemático e dinâmico do Axebot, tanto fenomenológico quanto em espaço de estados. Este capítulo também apresenta a linearização do modelo cinemático por série de Taylor e a obtenção da matriz de funções de transferência. O capítulo 5 aborda o controlador proposto, utilizando a linearização entrada-estado, como parte do controle linearizante de velocidade e sintonizando o controlador de trajetória MIMO pelo método do lugar das raízes e da perturbação singular, comumente conhecida como o princípio da separação da escala de tempo. No capítulo 6 é abordado a implementação e simulação em ambiente MatLab/Simulink e os testes realizados com o robô AxeBot, e seus resultados, mostrando a importância da contribuição desta dissertação.

Por fim, são apresentadas as conclusões e propostas de trabalhos futuros, no capítulo 7.

Capítulo 2

2. Robótica Móvel

Este Capítulo apresenta a contextualização da robótica móvel. Primeiramente, são apresentados uma introdução e o problema que norteia este trabalho. Posteriormente, é abordado o objeto de estudo do mesmo, delineando o tema e apresentando critérios para um bom desempenho de controle. Logo após é apresentado o caso real detalhando o funcionamento do robô AxeBot. Por fim, é apresentada a proposta desta Dissertação e suas expectativas como resultados a serem alcançados no final deste trabalho.

2.1. Introdução

Os estudos sobre robôs móveis é uma das mais crescentes e difundidas linhas de pesquisa na robótica [13]. Sua aplicação pode ser feita em inúmeras áreas tais como serviços industriais, médicos e domésticos. Os robôs móveis estão cada vez mais presentes substituindo trabalhos que exigem destreza, segurança e precisão.

A linha de pesquisa focada no presente projeto é desenvolvida na Universidade Federal da Bahia, através do Projeto AxeBot que envolve estudos nas áreas de veículos autônomos e robótica cooperativa. Este trabalho contribuirá de forma significativa para a construção e aperfeiçoamento do robô omni-direcional, que futuramente participará da competição de futebol de robôs proposto pela Federação da Robocup.

2.2. O Problema

O problema abordado neste trabalho é a necessidade de extrair-se uma lei de controle multivariável que considere o acoplamento entre as rodas do robô para a execução da real trajetória do mesmo evitando, ou melhor, compensando ruídos do acoplamento (interferência na velocidade que as rodas geram umas nas outras). Por este motivo, é apresentado o modelo cinemático e dinâmico em espaço de estados mostrando a influência da velocidade de uma roda nas outras duas. Dessa forma, a relação das velocidades de cada roda pode ser dada em função das velocidades, acelerações e tensões de todas as três rodas.

É dentro deste universo de controle de trajetória que se pode citar o ponto principal deste projeto, que é o controle multivariável de trajetória. Este tipo de controle não somente utiliza o planejamento para a execução da trajetória, mas também considera toda a informação provinda dos mais diversos sensores presentes no robô móvel, isto é executado considerando o acoplamento entre as rodas e condensando todo o controle numa equação, o que facilita o processamento final. O controle multivariável é utilizado em diversas áreas da robótica móvel [12].

Outro fator de extrema importância, que introduz modificações no projeto do controlador multivariável, é a arquitetura eletrônica do robô AxeBot. Este robô possui um sistema eletrônico no qual são embarcados controladores PID (Proporcional Integral Derivativo) para o controle de velocidade SISO (*Single Input – Single Output* / Única Entrada – Única Saída) de cada motor do robô. Este fator implica em um estudo mais profundo quando se necessita aplicar controladores PID (Proporcional – Integral – Derivativo) em sistemas multivariáveis não-lineares. Dessa forma, apesar da limitação eletrônica forçar o controlador de velocidade ser SISO [8], deve-se observar que a mesma arquitetura eletrônica permite que se utilize um controle de trajetória MIMO facilitando, assim, o tema desta dissertação.

2.3. Objeto de Estudo

Um robô móvel deve ser capaz de se deslocar pelo ambiente, evitando colisões contra eventuais obstáculos, estáticos ou dinâmicos, de forma a concretizar seus objetivos. Os robôs podem ser aquáticos, aéreos e terrestres. Os veículos autônomos móveis (robôs móveis)

terrestres podem possuir uma gama variada de elementos de locomoção. Dentre estes, são incluídas as esteiras, as pernas, as bolas de rolagem e as rodas.

Como plataforma móvel com rodas, estuda-se como estudo de caso a classe utilizada no futebol de robôs, categoria F180. Nesta seção são apresentados alguns aspectos relacionados ao robô móvel AxeBot, plataforma móvel em questão [1]. Algumas considerações foram feitas, destacando-se as seguintes:

- O robô é constituído de material rígido e não é considerado nenhum tipo de deformação do mesmo;
- Existe apenas um ponto de contato de cada roda com a superfície e, quando a base está em movimento, as velocidades relativas nestes pontos não são nulas, ou seja, há deslizamento das rodas sobre o solo;
- Pode haver rolamento lateral do robô, assim como rolamentos frontal e retrógrado.

Os modelos utilizados neste estudo seguem formulação semelhante àquelas propostas em [11] e [14].

2.3.1. Robôs Móveis com Rodas

Em robôs móveis com rodas, apresentam-se duas restrições para cada tipo de roda: a primeira restrição aborda contato-rolamento, onde a roda deve rolar quando o movimento ocorre no sentido apropriado. A segunda restrição reforça o conceito da existência de deslizamento lateral em que a roda deve deslizar ortogonalmente ao seu plano. Esta segunda restrição se aplica somente às rodas omni-direcionais.

Existem diversos modelos de rodas classificados em cinco categorias segundo [15]: rodas padrão fixa, rodas padrão manobráveis, rodas castor, rodas esféricas e rodas omnidirecionais. Cada um destes modelos possui diferentes graus de liberdade. As rodas omnidirecionais são as rodas utilizadas em robôs que competem na categoria de futebol de robôs F180, a qual é o estudo de caso deste trabalho. A arquitetura mecânica do robô é desenhada para conter três motores cada um conectado a uma roda omni-direcional numa base móvel equidistantes 120° graus formando um cilindro que deve ter diâmetro menor que 180 mm. Estas rodas possuem rolamentos sobre a sua superfície de contato. São estes rolamentos que diminuem o atrito de deslizamento lateral da roda, fazendo com que passe a ter um grau

de liberdade a mais, permitindo ao robô a capacidade de deslocar-se em qualquer direção, sem necessitar de uma reorientação.



Figura 01 – Roda omni-direcional.

Um termo bastante utilizado para um robô móvel quando a configuração mecânica utiliza essas rodas omni-direcionais equidistantes 120° graus uma da outra é chamá-lo de robô móvel holonômico. O robô é chamado de holonômico quando a relação entre os Graus Diferenciáveis de Liberdade (*Differentiable Degrees Of Freedom* – DDOF – Graus de Liberdade Diferenciáveis) de um robô e os Graus de Liberdade (*Degrees Of Freedom* – DOF – Graus de Liberdade) de seu espaço de trabalho se igualam [15]. Contudo, as habilidades holonômicas, para se desviar dos obstáculos sem afetar a orientação do móvel e poder traçar um caminho completo, são aspectos importantes. No robô AxeBot, com três rodas omni-direcionais, o $DDOF = DOF = 3$. Sendo assim, é importante notar que o robô omni-direcional AxeBot é holonômico e que seus três graus de liberdade são: rotação no próprio eixo, movimento cartesiano frontal e movimento cartesiano lateral.

A geometria, quantidade e disposição das rodas sobre o chassi do robô são responsáveis pela sua estabilidade, pela sua capacidade de manobra (manobrabilidade) e pelo seu grau de mobilidade.

2.3.1.1. Estabilidade

São necessárias, pelo menos, duas rodas para garantir a estabilidade de um robô. Entretanto, robôs diferenciais (que possuem duas rodas padrão fixa), têm sua estabilidade garantida somente se o seu centro de massa estiver abaixo do eixo das rodas. Já em robôs com três rodas, a garantia da estabilidade é satisfeita quando o centro de massa do robô está localizado dentro do triângulo formado por elas. Robôs com mais de três rodas necessitam de mecanismos de suspensão de modo a garantir que todas as rodas permaneçam em contato com

o solo. Caso contrário, a diferença de altura da(s) roda(s) excedente(s) (quarta roda em diante), causada por possíveis irregularidades do terreno ou de deformações de algumas das partes do robô, causará a instabilidade do robô móvel. Este problema não acontece com três rodas, visto que, três é o número mínimo de pontos necessário para que se defina um plano.

2.3.1.2. Manobrabilidade

A manobrabilidade é a capacidade do veículo de mudar sua orientação durante o seu movimento. Esta capacidade depende do seu grau de liberdade das rodas e da disposição das mesmas sob o chassi do robô. Alguns robôs possuem a habilidade para mover em qualquer direção (x, y, z). Outros, dentro do universo dos robôs móveis terrestres possuem a habilidade para mover-se em qualquer direção sobre um plano (x, y) sem a necessidade de mudar a sua orientação (direção) em relação ao eixo vertical ao plano (z). É devido aos três graus de liberdade do robô móvel omni-direcional que este possui um alto grau de manobrabilidade. O mesmo pode mover-se sem alterar sua orientação em qualquer direção do plano ou pode mudar a sua orientação sem ao menos deslocar-se ao longo desse mesmo plano.

2.3.1.3. Mobilidade

A mobilidade cinemática do chassi da base de um robô móvel é sua habilidade de mover-se diretamente no ambiente. Existem basicamente duas restrições impostas pelas rodas. A primeira aborda contato-rolamento, a roda deve rolar quando o movimento ocorre no sentido apropriado. A segunda reforça o conceito da não existência de deslizamento lateral, onde a roda não deve deslizar-se ortogonal ao seu plano [16]. Essa segunda restrição não se aplica a robôs omni-direcionais, visto que é a ausência dessa restrição que os permite mover-se lateralmente. Uma análise mais detalhada pode ser vista em [17] e [18].

2.3.2. O Robô AxeBot

O robô móvel AxeBot construído para estudo de caso desta dissertação é aqui apresentado. A Figura 02(a) ilustra o projeto modelado no Solid Edge do robô móvel AxeBot, robô omni-direcional, dotado de três rodas omni-direcionais dispostas a 120° graus umas das outras, enquanto a 02(b) mostra uma foto do robô construído.

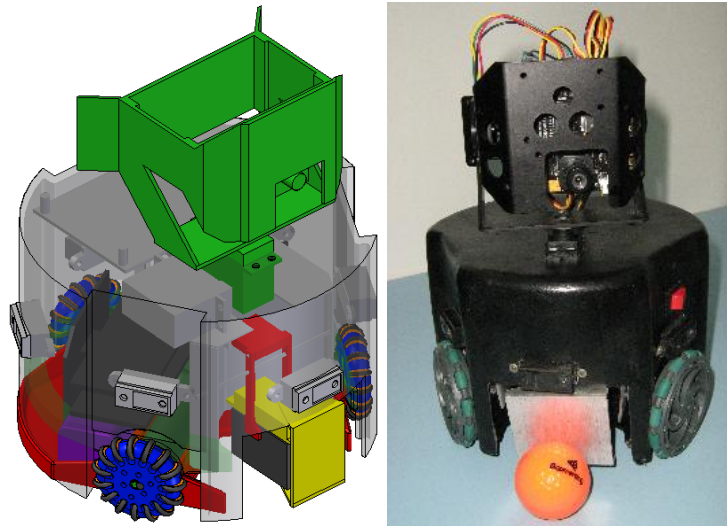


Figura 02 – Projeto do robô em CAD (esquerda) e foto do robô real montado (direita)

O AxeBot foi desenvolvido para ser um robô leve e ágil. Para tanto, utilizou-se uma carenagem e um par de chassis (superior e inferior) feitos de um compósito que contém fibra natural de tecido e resina polimérica. Os motores ficam encaixados entre os chassis, inferior e superior, e dentro do robô se localizam também toda a estrutura eletrônica e baterias. A Figura 03 mostra uma visão explodida da montagem do robô, que por sua vez, é permitida através de parafusos embuchados.

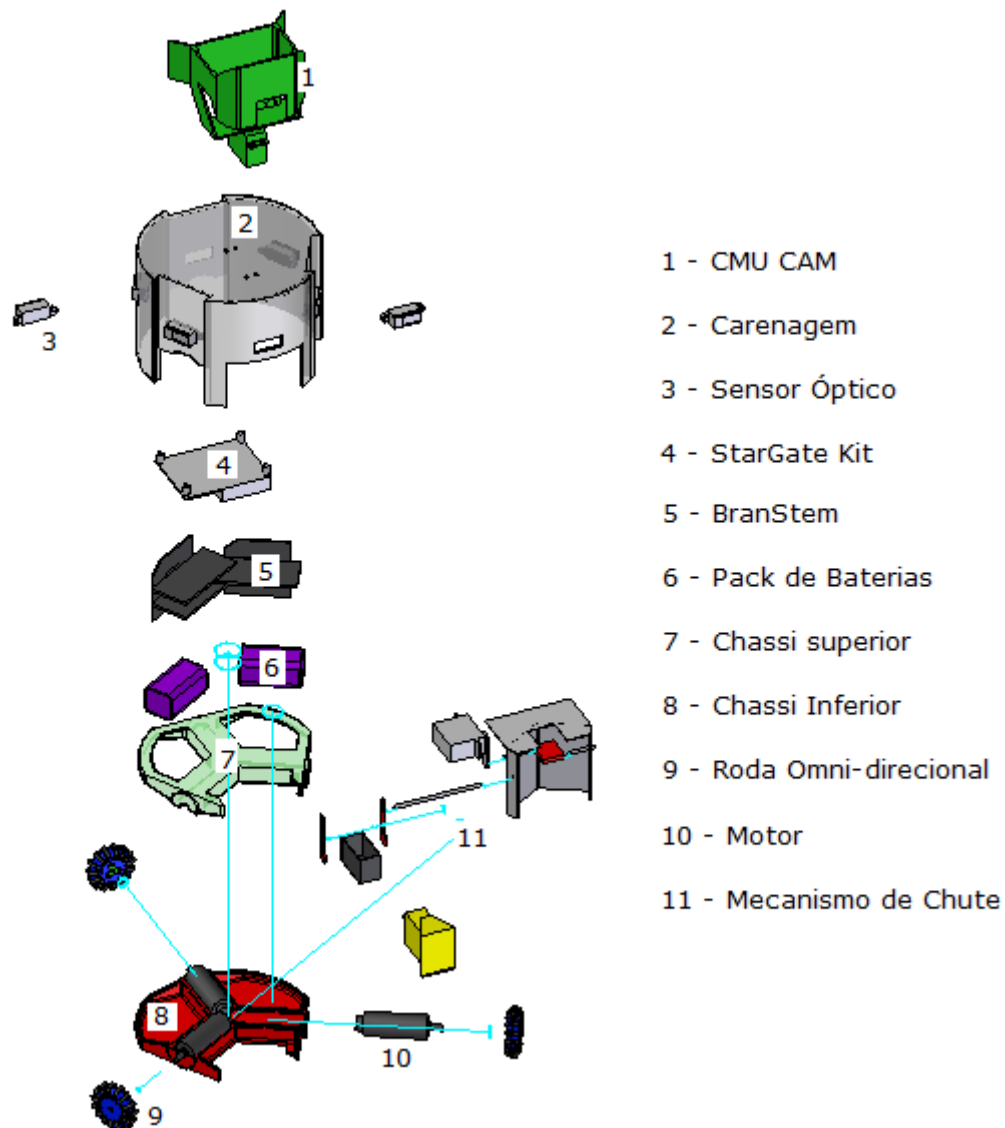


Figura 03 – Visão Explodida do Robô

As rodas utilizadas neste tipo de robô, são as chamadas Rodas Suecas ou Rodas Omnidirecionais vistas previamente.

O sistema eletrônico do robô AxeBot é composto por três motores de corrente contínua sem escova da marca Maxon, modelo AMax-22 (número de ordem 110117) e por duas placas BrainStem para controle de velocidade dos motores, como pode ser visto na Figura 04. O BrainStem possui um microcontrolador PIC (Circuito Integrado Periférico) embarcado que possibilita o controle dos motores através de um controlador PID SISO embarcado para cada motor. O valor de referência do PID é inserido como velocidade angular do motor. Outra consideração importante é que cada BrainStem pode controlar no máximo dois motores.

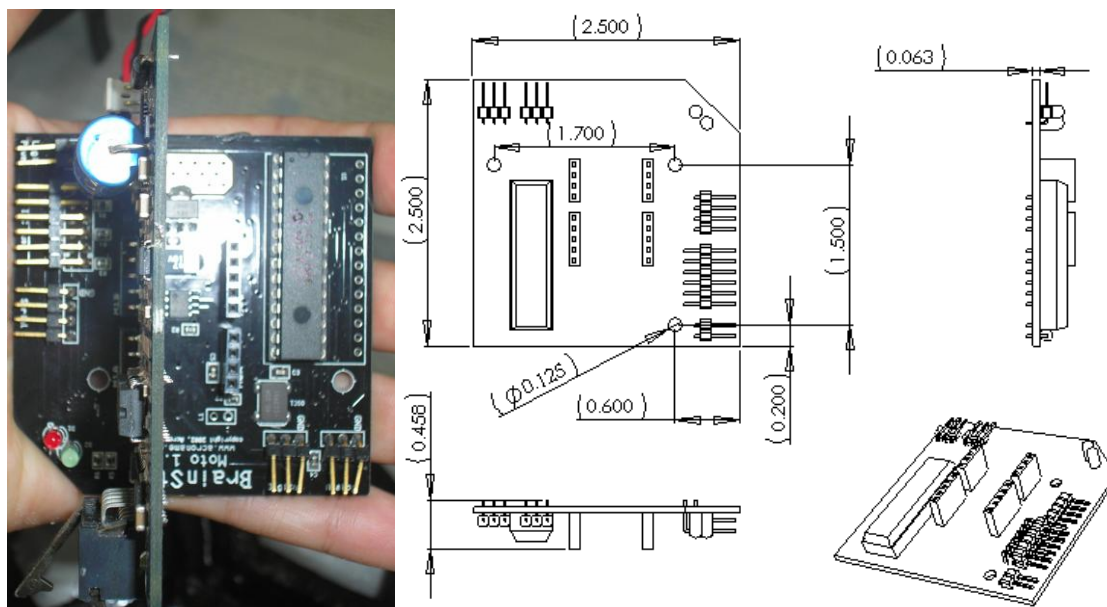


Figura 04 – BrainStem.

Essas placas de controle de velocidade possuem comunicação Serial e IIC (Circuito Inter-Integrado). A comunicação serial é de fundamental importância, pois possibilita o controle de até 6 servos, por placa ou o recebimento de dados de até 6 sensores ópticos, tais como os que são utilizados pelo robô.

O sistema computacional fica localizado na placa eletrônica principal, o Stargate Kit. Este módulo possui um microprocessador StrongArm com 32 Mb de memória e 400 MHz de processamento. Esta placa de principal possui comunicação serial e IIC as quais são usadas para aquisição de dados através dos sensores e da CMU CAM (Câmera embarcada fabricada pela Carnegie Mellon University), bem como o envio de dados para os atuadores.

A CMU CAM é uma placa eletrônica que possui uma câmera de vídeo embarcada e um módulo de controle de até 6 servo-motores. Dessa forma, esta placa faz o controle dos dois servos do mecanismo de chute, bem como dos dois servos que possibilitam a mudança da orientação da própria câmera.

A comunicação entre o Stargate Kit e todos os componentes eletrônicos do robô é feito através do barramento IIC, os quais se interligam fisicamente conforme ilustra a Figura 05.

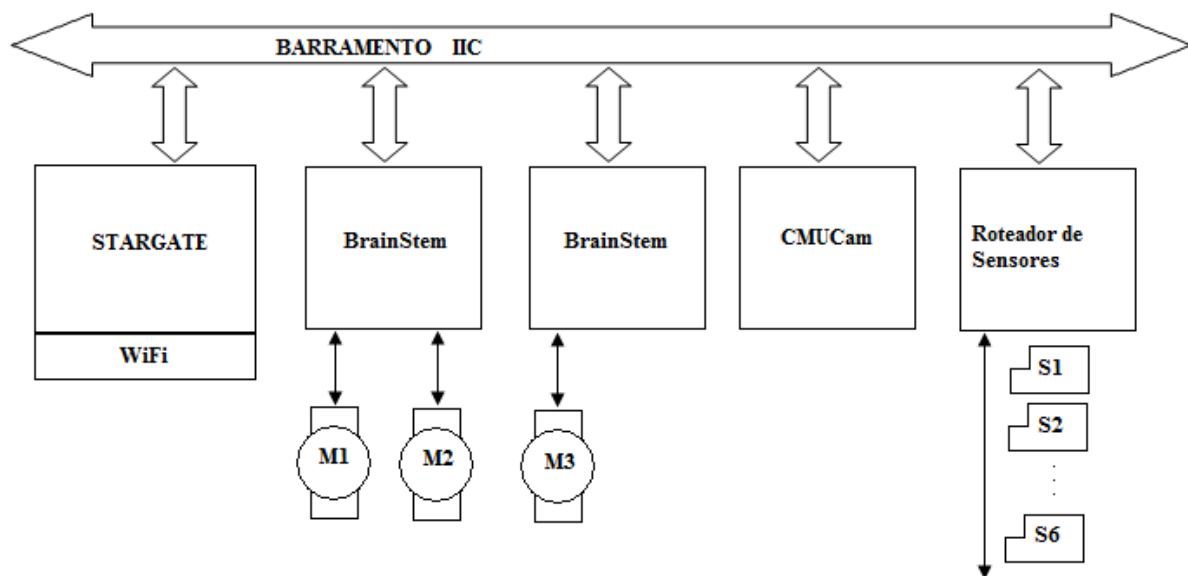


Figura 05 – Representação Gráfica do Fluxo de Dados Através do Barramento IIC

A arquitetura computacional do robô pode ser vista na Figura 06, onde está descrita a malha de fluxo de dados dentro do esquema eletrônico do AxeBot.

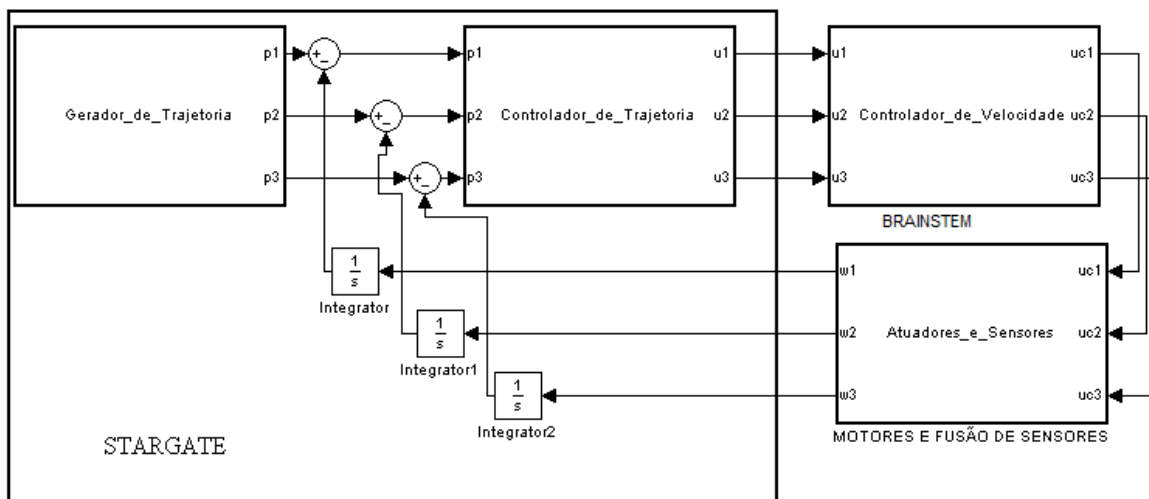


Figura 06 – Representação Gráfica da Malha do Fluxo de Dados.

O Stargate Kit possui um sistema operacional RT Linux que comporta todo o sistema de navegação, geração de trajetória e controle de trajetória. Esta mesma placa possui comunicação *wireless* (sem fio) através de um cartão ethernet da PCMCIA (Associação Internacional dos fabricantes de Cartão de Memória de Computadores Pessoais). Esta comunicação é feita com um computador para a formalização de estratégias de controle, além de permitir que o robô se comunique com os outros robôs móveis próximos. O módulo de controle de velocidade dos motores, os controladores SISO ficam alojados no

microprocessador PIC do BrainStem. Já o controlador de trajetória multivariável ficará alojada dentro do Stargate.

2.4. Conclusão

Este capítulo apresentou, de forma geral, o problema, os objetos de estudo e a solução proposta para o controle de rastreamento de trajetória que serão mostrados ao longo deste trabalho. Alguns conceitos relevantes para o restante do texto foram introduzidos e o robô AxeBot, estudo de caso deste trabalho, foi apresentado. Foi justificada a escolha do modelo de robô adotado com base no desafio proposto, como laboratório de testes, dentro do projeto AxeBot.

Capítulo 3

3. Preliminares Teóricos

Este capítulo apresenta a base teórica necessária para o entendimento do problema de modelagem e controle do robô em estudo. Primeiramente, são abordados conceitos sobre a modelagem em espaço de estados. Posteriormente, são apresentados definições e tipos de sistemas e alguns casos em que são aplicados e sobre os três tipos de linearizações abordadas por esse trabalho. Por fim, é abordada a teoria de controle multivariável bem como método de sintonia do controle do lugar das raízes que será utilizado nos capítulos posteriores desta Dissertação.

3.1. Introdução

O estudo da teoria de controle de sistemas não-lineares vem crescendo nos últimos anos, tanto pela sua importância técnica bem como pelos impactos de suas aplicações. Áreas como a da indústria aeroespacial, eletrônica, química e petroquímica, bioengenharia e robótica, a cada dia evoluem criando novos casos de aplicações práticas desta ferramenta.

Os sistemas são ditos não lineares quando não satisfazem o princípio da superposição, ou princípio da proporcionalidade entrada-saída. Dessa forma, os métodos clássicos utilizados no estudo dos sistemas lineares (lugar das raízes, diagramas de Bode e Nyquist) não são aplicáveis aos sistemas não lineares. Há assim necessidade de recorrer a outros métodos para proceder ao estudo destes sistemas, em particular da sua estabilidade, sendo, dentre outros, importante destacar os métodos de Lyapunov [19].

Entende-se por controle não linear uma lei de controle que seja constituída por termos não lineares na forma de realimentação. Como acontece no caso linear, o controle não linear utiliza a realimentação, quer da saída quer do estado, para gerar um sinal de controle que vai atuar sobre o processo. Por vezes a cadeia de realimentação é não linear em projeto, seja para compensar as não linearidades do sistema a ser controlado, seja para melhorar certos aspectos de controle [20].

Quando se pretende controlar sistemas não lineares utilizando os métodos de controle linear, estes de um modo geral apenas permitem um bom desempenho dentro de uma pequena faixa de operação do sistema. Fora dela, o desempenho será insatisfatório ou mesmo instável. Nestes casos torna-se necessário considerar o sistema linearizado em torno de determinados pontos de funcionamento (pontos de equilíbrio) usando parâmetros de controle específicos para cada ponto (“*gain scheduling*”) ou ajustar os parâmetros automaticamente (controle adaptativo), ou então utilizar uma realimentação negativa que faça com que o sistema em malha fechada se comporte como linear (linearização por realimentação).

Nem sempre é possível linearizar o sistema em torno de um ponto de equilíbrio, por exemplo quando o sistema contém atritos de Coulomb, folgas, zonas mortas, saturações, etc., não linearidades muito correntes em processos e sistemas reais. Para este tipo de não linearidades, chamadas não linearidades descontínuas, é necessário usar técnicas de controle específicas. Normalmente, o projeto de sistemas não lineares, obriga a um contato mais estreito com a natureza dos sistemas que irão ser controlados, de modo a permitir uma melhor compreensão dos fenômenos que estão ocorrendo.

Dentre possíveis técnicas para tratar o problema de controle, o presente trabalho consiste no estudo de controle de sistemas não lineares, detalhando o modelo não linear do robô AxeBot e suas linearizações. Serão tratadas como exemplo as técnicas de: linearização entrada-saída, linearização entrada-estado e linearização entorno de um ponto (por série de Taylor).

3.2. Modelagem em Espaço de Estados

Alguns sistemas não lineares podem ser escritos em espaço de estados. O sistema se encontra na forma de espaço de estados se sua dinâmica é representada como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \text{ para } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \neq 0 \quad (3.1)$$

em que f e g são funções escalares não lineares, x^n é a saída escalar, u é a entrada de controle escalar e $\mathbf{x}$ representa o vetor de estado que é dado por:

$$\mathbf{x} = [x, \dot{x}, \dots, x^{n-1}]^T \quad (3.2)$$

Pode-se representar o vetor de estado através do sistema abaixo:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \\ &\dots \\ x_n &= x^{n-1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pelo sistema (3.3) tem-se a equação de estado (3.1) descrita por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dots \\ x_n \\ f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Assumindo $g(\mathbf{x}) \neq 0$, para sistemas que podem ser escritos em espaço de estados, a entrada u pode ser escrita na forma:

$$u(t) = \frac{1}{g(\mathbf{x})} [v - f(\mathbf{x})] \quad (3.5)$$

Cancelando as não-linearidades e obtendo uma representação de estados (integrador múltiplo), conhecida como forma de Brunovski,

$$x^n = v \quad (3.6)$$

A lei de controle pode ser dada por:

$$v = -k_1 x - k_2 \dot{x} - \dots - k_{n-1} x^{n-1} \quad (3.7)$$

De (3.6) e (3.7) tem-se que:

$$x^n + k_{n-1} x^{n-1} + k_{n-2} x^{n-2} + \dots + k_1 x = 0 \quad (3.8)$$

e portanto, $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ podem ser escolhidos tal que a solução $x(t)$ seja estável, ou

equivalentemente, a equação característica $\lambda^n + k_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + k_1 = 0$, tenha todas as raízes com parte real negativa. [21]

Para o rastreamento de uma referência r a lei de controle será escrita por

$$v = r^n - k_1 e - k_2 \dot{e} - \dots - k_{n-1} e^{n-1} \quad (3.9)$$

Onde,

$$e(t) = x(t) - r(t) \quad (3.10)$$

Que conduz a um sistema estável se as raízes do polinômio característico tiverem a parte real negativa.

A lei de controle (3.8) pode ser, também, escrita na forma matricial

$$v = r^n - \mathbf{k}^T \mathbf{e} \quad (3.11)$$

Onde,

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} x - r \\ \dot{x} - \dot{r} \\ \dots \\ x^{n-1} - r^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

De forma análoga ao problema anterior, os ganhos $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ podem ser escolhidos para assegurar que o sistema seja estável ou, equivalentemente, que $e(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$.

3.3. Tipos de Sistemas

Atualmente existe um grande número de publicações no controle realimentado clássico aplicado a sistemas de única entrada única saída (Single-Input Single-Output – SISO) [22],[23],[24],[25],[26], sendo os dois últimos dedicados a sistemas SISO não lineares. Uma qualidade em comum de toda publicação em sistemas SISO é uma abordagem conceitual uniforme ao introduzir a teoria de controle clássico, bem como claramente indicar as falhas desta teoria. Por outro lado, existem muitas publicações de excelência em controle realimentado multivariável (Multiple-Input Multiple-Output – MIMO), não sendo, entretanto, completas. Historicamente o desenvolvimento da teoria de controle multivariável foi conduzido de diferentes maneiras. Além do mais, os estágios iniciais da formação do

controle multivariável coincidiram essencialmente com o advento dos métodos e abordagens no espaço de estados, e com o rápido desenvolvimento da teoria do controle ótimo, aplicado de forma igual aos sistemas SISO e MIMO. Na mesma época a teoria de controle robusto aplicada a sistemas SISO e MIMO emergiu. Não obstante, nota-se que outros métodos implementados de forma distinta são predominantes na literatura técnica e científica, e avanços nesses métodos excedem consideravelmente as falhas do controle multivariável ‘clássico’. Ao mesmo tempo, deve ser notado que faz pouco tempo que a teoria de controle moderno MIMO superou muitos problemas importantes da teoria clássica existindo agora um espaço evidente entre os tópicos abordados no controle SISO e nos do controle MIMO [27].

3.3.1. Sistemas SISO

Por definição, um sistema de única entrada e única saída (*Single Input / Single Output* – SISO) é tal que sua função de transferência possui somente uma variável manipulada e uma variável de processo (variável de saída). Este sistema pode ser representado por uma função de transferência tal que:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (3.13)$$

Em que $U(s)$ e $Y(s)$ são as variáveis do sistema. Graficamente, pode-se representar o sistema SISO como sendo:

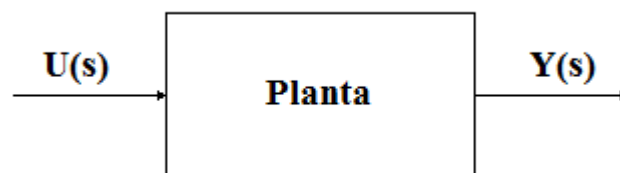


Figura 07 – Sistema SISO

3.3.2. Sistemas MIMO

Por definição, um sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas (*Multiple Inputs / Multiple Outputs* – MIMO) é tal que sua matriz de transferência possui um vetor de variáveis manipuladas e um vetor de variáveis de processo (variáveis de saída). Este sistema pode ser representado por uma matriz de transferência tal como na equação (3.12). Entretanto, $U(s)$ e

$Y(s)$ são os vetores de variáveis do sistema. Graficamente, pode-se representar o sistema MIMO como sendo:

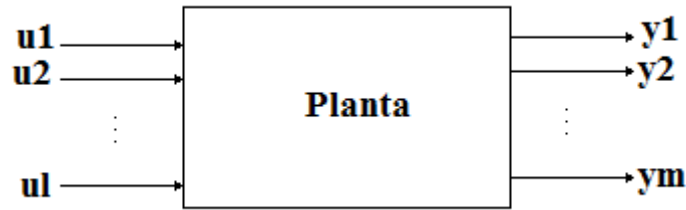


Figura 08 – Sistema MIMO

Em que,

$$Y(S) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = G(s) \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_l \end{bmatrix} \Rightarrow Y(S) = G(S)U(S) \quad (3.14)$$

3.4. Teoria de Controle Multivariável

Técnicas clássicas para um projeto de controle realimentado de um sistema linear SISO são baseadas num modelo matemático da dinâmica do processo expressada em termos de uma função de transferência (FT) ou de equações diferenciais associadas ou equações de diferença no caso discreto. A FT do sistema pode então ser usada no projeto sistemático de compensadores utilizando a teoria de Nyquist e a teoria do lugar das raízes. Vários dos resultados são obtidos para sistemas de 1ª e 2ª ordem e para sistemas de ordem elevadas. Dessa forma, faz-se o projeto considerando que a dinâmica dominante pode ser reduzida a tais casos.

No caso dos sistemas MIMO, é perceptível que quase todas as metodologias clássicas se estendem de alguma forma para o projeto MIMO. Entretanto, não inesperadamente, diversos e novos fatores aparecem para desafiar a engenharia de controle. A causa principal para o surgimento dessas novas complicações é a presença, em geral, de interações entre os ciclos de controle separados no processo. Para um sistema de m entradas e m saídas existem $m(m-1)$ interações. [28]

Tomando como exemplo um sistema dinâmico MIMO qualquer a ser controlado, deve-se assumir que este seja descrito, para efeito de simplificação, por um modelo em espaço de estados representando o sistema de l entradas e m saídas representado na Figura 08 vista anteriormente. Um sistema MIMO linear em espaço de estados pode ser representado pela equação abaixo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (3.15)$$

Aqui A , B , C , D são matrizes constantes $n \times n$, $n \times l$, $m \times n$ e $m \times l$ respectivamente, e $x(t)$, $u(t)$ e $y(t)$ são os vetores de estados, de entrada e de saída respectivamente. Aplicando a transformada de Laplace na equação (3.13) temos que:

$$\begin{cases} sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \quad (3.16)$$

Supondo as condições iniciais nulas, tem-se que o sistema se reduz à:

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (3.17)$$

Ou ainda que, no caso MIMO,

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3.18)$$

Em que $G(s)$ é a matriz de funções de transferências do sistema linear MIMO. Seja ainda $r_k(t)$, com $1 \leq k \leq m$, o sinal de referência para a saída $y_k(t)$, com $1 \leq k \leq m$, expressa na forma matricial tal que:

$$r(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ \vdots \\ r_m(t) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Logo, o erro estimado para uma realimentação unitária $e_k = r_k - y_k$ pode ser escrito como:

$$E(s) = R(s) - Y(s) \quad (3.20)$$

Além disso, a entrada de controle $u(t)$ é gerada do elemento de controle com MFT (matriz de funções de transferência) $K(s)$, de dimensão $m \times m$,

$$U(s) = K(s).E(s) \quad (3.21)$$

Dessa forma, o controle em malha fechada pode ser esquematizado como mostra a figura 09:

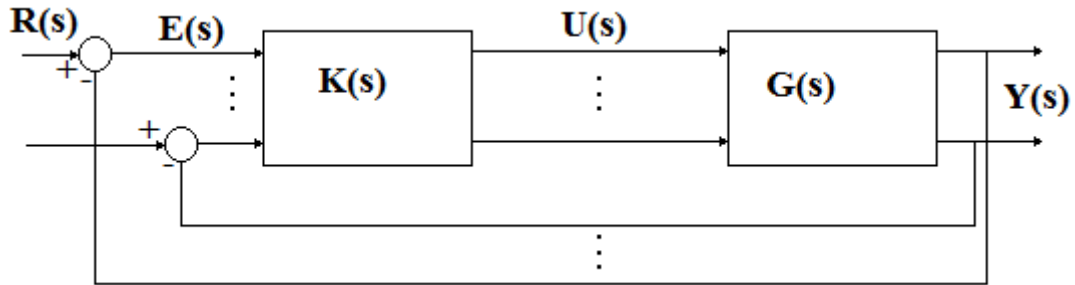


Figura 09 – Esquema de Controle

De (3.17), (3.20) e (3.21) tem-se

$$Y(s) = G(s)[K(s)R(s) - K(s)Y(s)] \quad (3.22)$$

Ou

$$[I + G(s)K(s)]Y(s) = G(s)K(s)R(s) \quad (3.23)$$

Ou ainda que

$$Y(s) = [I + G(s)K(s)]^{-1}G(s)K(s)R(s) \quad (3.24)$$

Definindo-se

$$H(s) = (I + GK)^{-1}GK \quad (3.25)$$

Tem-se a matriz de transferência em malha fechada.

Dessa forma, o problema de controle é escolher $K(s)$ tal que produza propriedades aceitáveis em malha fechada tal que $K(s)$ seja:

$$K(s) = \begin{bmatrix} k_{11}(s) & \cdots & k_{1m}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{l1}(s) & \cdots & k_{lm}(s) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

3.4.1. O Método do Lugar das Raízes

O método do lugar das raízes é bem estabelecido na teoria clássica de projeto de controle SISO e tem sido generalizada, a princípio, para o caso MIMO. A teoria MIMO é tecnicamente complexa. Entretanto, um aspecto que merece atenção é a utilização do método do lugar das raízes com a teoria da aproximação e controle robusto com modelagem do erro estável, inversa e aditiva. Para ilustrar as possibilidades, considera-se aqui um sistema estritamente próprio $G(s)$ com um modelo em espaço de estados (A, B, C) cujas propriedades, segundo [28], são:

- $C.B$ é quadrada e inversível;
- O sistema é de fase mínima, ou seja, todos os pólos e zeros encontram-se do lado esquerdo do semi-plano complexo.

Sob estas circunstâncias, segundo [28], é correto dizer que o modelo apropriado G com a MFT inversa,

$$G(s)^{-1} = sA_a + A_b \quad (3.27)$$

Com $A_a = (C.B)^{-1}$ e A_b arbitrário, pode ser controlado, sob realimentação unitária, por um controlador PI (proporcional-integral) multivariável tal que:

$$K = A_a \text{diag} \{k_j + c_j + s^{-1}k_j c_j\} - A_b \quad (3.28)$$

Com c_j como a componente j da matriz C e $1 \leq j \leq 3$.

Este controlador deve ser tal que produza um sistema em malha fechada de forma que:

1. Seja Estável se $k_j > 0$ e $c_j \geq 0$ para qualquer j ;
2. Produza k_j^{-1} constantes de tempo de ciclo e c_j^{-1} vezes início de ciclo, no ciclo j ;
3. Produza arbitrariamente pequenos efeitos de acoplamento se $K = \max_j k_j$ for suficientemente alto.

3.5. O Sistema de Controle de Trajetória em Cascata

O controle em cascata, mais especificamente o controle de trajetória em cascata para robôs móveis se baseia em uma malha de controle externa, baseada na cinemática da base móvel, gerando as velocidades angulares de referência para os motores em função do erro de postura, e uma malha interna baseada na dinâmica da base móvel.

Apesar do robô móvel em questão ser um sistema MIMO e fortemente acoplado, pode-se mesmo assim estudar a dinâmica interna do sistema de duas formas. A primeira é de forma a considerar a influência do acoplamento por meio da junção de todos os conjuntos motor-roda e como a velocidade de um conjunto afeta na velocidade do outro. A segunda forma é considerar o sistema desacoplado, em que cada conjunto motor-roda seja estudado separadamente, deixando a responsabilidade da correção do erro de acoplamento para a malha de controle externa. A diferença de uma forma para a outra está no controlador que será utilizado. Para um sistema considerado acoplado, em outras palavras MIMO, deve-se utilizar um controlador multivariável. Para um sistema desacoplado, deve-se utilizar n controladores SISO, sendo n o número de entradas do sistema. Dessa forma ter-se-á um controlador para cada entrada, ou para cada conjunto motor-roda. O controlador da malha interna foi estudado por [8] e se refere ao controle de velocidade dos motores do robô AxeBot. O controle da malha externa, por sua vez, é o controle de trajetória, o qual é tema dessa dissertação sendo o mesmo um controlador multivariável.

Para o controle em cascata, porém, é necessário observar que o mesmo estará, neste caso, aplicado a um sistema não-linear com não-linearidades de entrada. Entretanto, tanto o modelo de controle para a malha interna estudado por [8] quanto o modelo de controle abordado neste trabalho utilizam o conceito de controle linearizante. O controle linearizante parte do princípio que um controlador linear, em malha fechada, deve ser tal que controle o sistema não linear sem a necessidade de se obter um outro sistema linear equivalente. Dessa forma, ao realizar a linearização do sistema pode-se utilizar ferramentas de linearização diferentes para cada malha. Neste caso específico, o controle linearizante da malha interna foi baseado na linearização entrada-estado, o qual permite, por meio da inversão da dinâmica do sistema, uma lei de controle desacoplada e linear para um sistema não-linear, acoplado e multivariável.

Para este trabalho, o controlador de trajetória foi obtido por meio da linearização por série de Taylor, ou linearização em torno do ponto de equilíbrio. Esta linearização não

desacopla o sistema e permite que, um controlador multivariável linear possa controlar, em malha fechada, um sistema altamente não-linear.

As linearizações mais comumente utilizadas são:

- Linearização Entrada-Saída;
- Linearização Entrada-Estado;
- Linearização por Série de Taylor.

3.6. Linearização Entrada-Saída

Quando se pretende controlar sistemas não lineares utilizando as técnicas de controle linear, os resultados de um modo geral permitem um bom desempenho dentro de uma pequena faixa de operação do sistema. Fora desta faixa, o desempenho possivelmente não será adequado. Nestes casos, existem diversas técnicas de controle não linear que comprovadamente podem obter resultados mais satisfatórios.

Na linearização exata por realimentação entrada-saída a aproximação é realizada por meio de uma transformação de estados e da variável de controle para obtenção de um sistema linear equivalente através de uma realimentação. O principal objetivo deste método é utilizar a transformação de estados e da variável de controle para alterar a dinâmica não linear para uma forma aproximadamente linear, tal que os termos não lineares remanescentes possam ser cancelados pela realimentação [29]. Ao realizar a linearização entrada-saída, a teoria de controle linear pode ser utilizada para a realização do controle.

Num sistema não linear cuja forma canônica é tal que:

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)} = f(x) + G(x)u \\ y^{(r)} = x^{(n)} \end{cases} \quad (3.29)$$

O número de r diferenciações requeridas para a entrada u aparecer é chamada de grau relativo do sistema, uma extensão da definição usual de grau relativo de sistemas lineares. É notado então que o sistema deve possuir $r < n$ (com n igual à ordem do sistema) para que se possa linearizar com realimentação entrada-saída. Se $r = n$, a linearização entrada-saída é na realidade uma linearização entrada-estado [21].

3.7. Linearização Entrada-Estado

Na linearização exata por realimentação entrada-estado a técnica consiste em achar uma transformação de estados e uma transformação na entrada tal que a dinâmica não linear do sistema seja transformada em uma dinâmica linear equivalente. Ao realizar esta linearização pode-se utilizar qualquer técnica linear para realização do controle do sistema. [30]

3.8. Linearização por Série de Taylor

O sistema não linear é linearizado em torno de um ponto de equilíbrio, e um controlador pode ser projetado utilizando as técnicas de controle linear. Esse sistema linear é considerado como equivalente ao sistema não-linear quando operado dentro de uma faixa de operação. Um processo de linearização bastante utilizado é o que tem por base a representação da função não-linear como uma série de Taylor, expandida em torno do ponto de operação, e truncada em primeira ordem.

Capítulo 4

4. Modelagem do Robô AxeBot

Este capítulo apresenta a modelagem dinâmica e cinemática do robô AxeBot. Primeiramente é apresentado o modelo cinemático direto e inverso do robô AxeBot. Posteriormente é apresentado o modelo dinâmico direto e inverso além do modelo em espaço de estados. Posteriormente é visto o controlador desacoplado SISO do modelo dinâmico. Logo após é visto o modelo cinemático linearizado em torno do ponto de equilíbrio. Por fim, é obtida a matriz de funções de transferência do modelo cinemático linearizado.

4.1. Introdução

Aspectos de caráter mecânico e elétrico e a disposição física das partes que compõem um robô são características de extrema importância na escolha e implementação de seus controladores. A capacidade de um robô de se movimentar e as equações que regem o mesmo são influenciadas pela sua geometria e dinâmica.

Os modelos cinemáticos descrevem a equação do movimento do robô em função das velocidades das rodas sem considerar as forças que atuam sobre o mesmo. Existem dois tipos de modelos: modelo cinemático de postura e o modelo cinemático de configuração. Segundo [31], os modelos de postura consideram como estado apenas a posição e a orientação do robô, enquanto que os modelos de configuração consideram, além da postura, outras variáveis internas, como por exemplo o deslocamento angular das rodas. O modelo de configuração, no entanto, não se mostra necessário do ponto de vista do controle da posição e orientação do robô.

Os modelos dinâmicos descrevem as relações dinâmicas entre as coordenadas de postura e orientação do robô e os torques desenvolvidos pelos seus atuadores. O modelo dinâmico pode ser formulado segundo o formalismo Newton-Euler [32] ou o formalismo Euler-Lagrange [33].

4.2. Modelo Cinemático

O estudo da modelagem cinemática do robô móvel AxeBot pode ser visto em [11] e [14]. Por outro lado, uma abordagem matemática mais simples é introduzida por [34]. As não linearidades de entrada tipo zona morta e saturação dos atuadores são considerados aqui e estudados em [11]. Entretanto, para efeito de simplificação, utiliza-se aqui a tensão u , por exemplo, como a tensão da armadura já com o saturador. Aqui é apresentada uma abordagem mais completa que apresenta o modelo não linear do robô AxeBot com a introdução das não linearidades de entrada em espaço de estados. Analisando graficamente o robô AxeBot, teremos que:

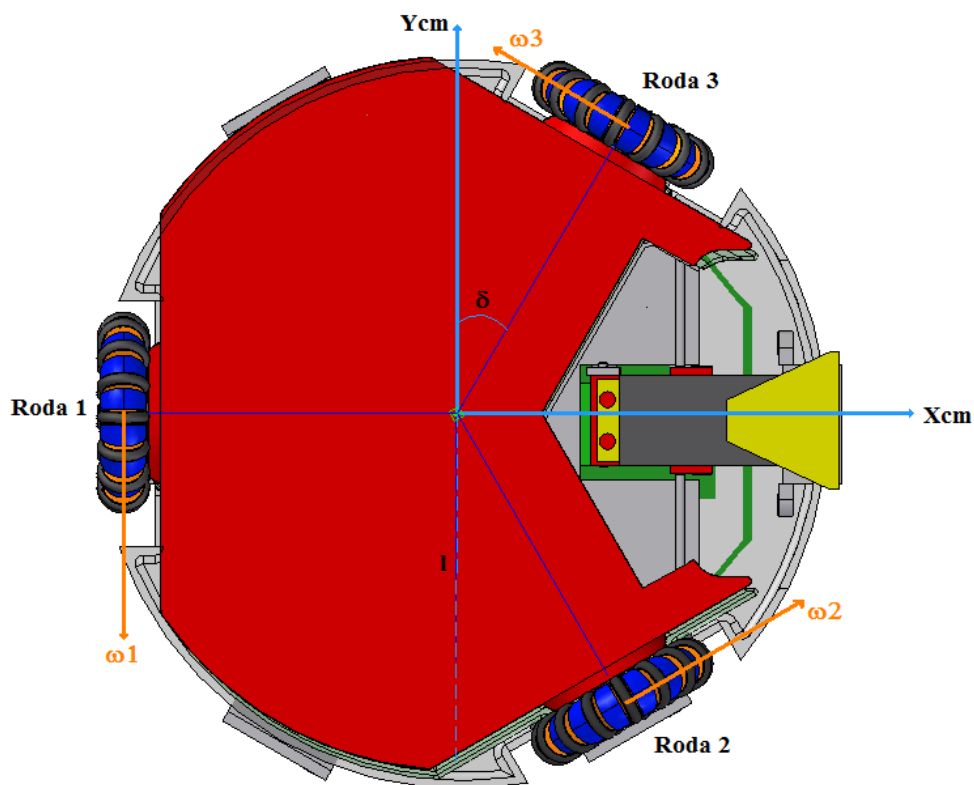


Figura 10 – Análise Geométrica da Disposição das Velocidades Angulares.

Sendo δ o ângulo entre o eixo Y do centro de massa do robô e o eixo da roda 3.

Sabe-se também que existe uma rotação entre o sistema de coordenadas do centro de massa e o sistema de coordenadas do referencial inercial:

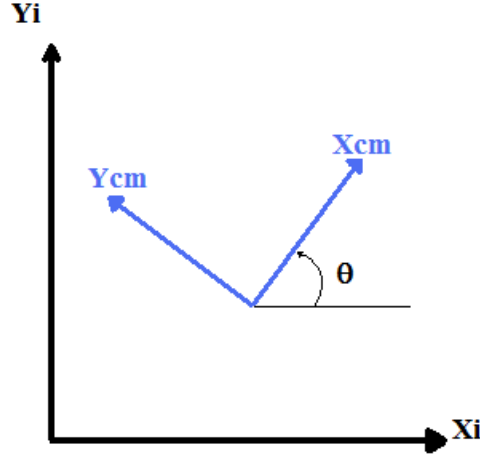


Figura 11 – Roda omni-direcional.

Através da análise geométrica da Figura 11 mostra uma relação de rotação simples em torno do centro de massa do robô, na qual a matriz de rotação é:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Dessa forma, a transformação homogênea das coordenadas do centro de massa do robô (V_{CM}) e as coordenadas do referencial inercial (V_I) são dadas por

$$\begin{bmatrix} V_{Ix} \\ V_{Iy} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{CMx} \\ v_{CMy} \\ \omega_{CM} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Outra análise pode ser tirada da Figura 10. Esta análise mostra o sistema de equações que dão origem às velocidades angulares de cada roda. Esse sistema pode ser vista na equação abaixo:

$$\begin{cases} \omega_{R1} = -v_{CMy} + \omega_{CM}l \\ \omega_{R2} = v_{CMx}\cos(\delta) + v_{CMy}\sin(\delta) + \omega_{CM}l \\ \omega_{R3} = -v_{CMx}\cos(\delta) + v_{CMy}\sin(\delta) + \omega_{CM}l \end{cases} \quad (4.3)$$

Sendo ω_{Ri} , com $i=1,2,3$, é a velocidade angular em cada roda.

É observável que $\delta=30^\circ$, pois as rodas encontram-se dispostas a um ângulo de 120° graus entre elas. Dessa forma, matricialmente tem-se que:

$$\begin{bmatrix} \omega_{R1} \\ \omega_{R2} \\ \omega_{R3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & l \\ \cos(\delta) & \sin(\delta) & l \\ -\cos(\delta) & \sin(\delta) & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{CMx} \\ v_{CMy} \\ \omega_{CM} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Ou ainda que

$$\vec{\omega} = B^T \cdot V_{CM} \quad (4.5)$$

com

$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_{R1} \\ \omega_{R2} \\ \omega_{R3} \end{bmatrix},$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & l \\ \cos(\delta) & \sin(\delta) & l \\ -\cos(\delta) & \sin(\delta) & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & l \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & l \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & l \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

$$V_{CM} = \begin{bmatrix} v_{CMx} \\ v_{CMy} \\ \omega_{CM} \end{bmatrix}$$

sendo o raio da base móvel dado por l .

Existe uma relação entre a velocidade do motor e a velocidade da roda que é dada pela equação abaixo:

$$\omega_{Ri} = \frac{r_\omega}{\eta N} \cdot \omega_{mi} \quad (4.7)$$

para $i=1,2,3$. Em que r_ω é o raio da roda, N é o fator de acoplamento e η é a eficiência do acoplamento motor roda. Substituindo a equação (4.7) na equação (4.4) e re-arrumando a equação, temos então que:

$$\frac{r_\omega}{\eta N} \begin{bmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \\ \omega_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & l \\ \cos(\delta) & \sin(\delta) & l \\ -\cos(\delta) & \sin(\delta) & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{CMx} \\ v_{CMy} \\ \omega_{CM} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Ou ainda que:

$$\begin{bmatrix} v_{CMx} \\ v_{CMy} \\ \omega_{CM} \end{bmatrix} = (B^T)^{-1} \frac{r_\omega}{\eta N} \begin{bmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \\ \omega_{m3} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Substituindo agora a equação (4.9) na equação (4.2) obtém-se o modelo cinemático direto do robô móvel AxeBot:

$$\begin{bmatrix} V_{Ix} \\ V_{Iy} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (B^T)^{-1} \frac{r_\omega}{\eta N} \begin{bmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \\ \omega_{m3} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

4.2.1. Modelo Cinemático Inverso

Invertendo a equação (4.8) temos que:

$$\begin{bmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \\ \omega_{m3} \end{bmatrix} = \frac{\eta N}{r_\omega} B^T \begin{bmatrix} v_{CMx} \\ v_{CMy} \\ \omega_{CM} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

Continuando, temos por fim o modelo cinemático inverso do robô móvel AxeBot abaixo:

$$\begin{bmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \\ \omega_{m3} \end{bmatrix} = \frac{\eta N}{r_\omega} B^T \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{Ix} \\ V_{Iy} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Para um controlador multivariável de trajetória, entretanto, necessitar-se-á da linearização do sistema de posicionamento do centro de massa que será visto mais adiante.

4.3. Modelo Dinâmico

O modelo dinâmico do robô AxeBot é um modelo não-linear com não linearidades de entrada, e é apresentado aqui em espaço de estados. Para tanto, deve-se analisar a Figura 12:

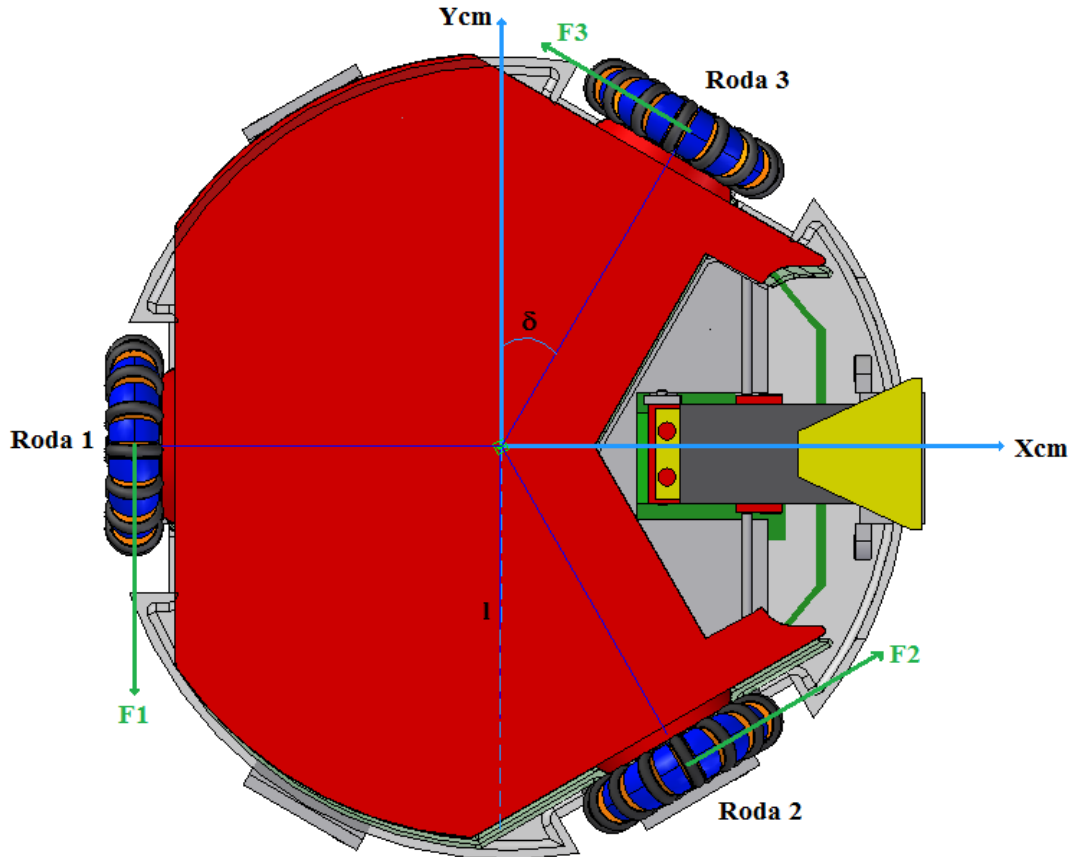


Figura 12 – Análise Geométrica da Disposição das Forças.

Sabe-se que $\Sigma F = m.a$, logo, da Figura temos que:

$$\begin{bmatrix} F_{CMx} \\ F_{CMy} \\ Mo_{CM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x1} + F_{x2} + F_{x3} \\ F_{y1} + F_{y2} + F_{y3} \\ F_{\omega1} + F_{\omega2} + F_{\omega3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + F_{a2} \cos(\delta) - F_{a3} \cos(\delta) \\ -F_{a1} + F_{a2} \sin(\delta) + F_{a3} \sin(\delta) \\ F_{a1}l + F_{a2}l + F_{a3}l \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Sendo:

- m a massa do robô;
- a a aceleração do corpo;
- F_{CMx} a força no do centro de massa no eixo X;
- F_{CMy} a força no do centro de massa no eixo Y;

- Mo_{CM} o momentum no do centro de massa;
- F_{x1} a componente x da força gerada pela roda 1;
- F_{x2} a componente x da força gerada pela roda 2;
- F_{x3} a componente x da força gerada pela roda 3;
- F_{y1} a componente y da força gerada pela roda 1;
- F_{y2} a componente y da força gerada pela roda 2;
- F_{y3} a componente y da força gerada pela roda 3;
- $F_{\omega1}$ a componente de rotação da força gerada pela roda 1;
- $F_{\omega2}$ a componente de rotação da força gerada pela roda 2;
- $F_{\omega3}$ a componente de rotação da força gerada pela roda 3;
- F_{a1} a Força aparente na roda 1;
- F_{a2} a Força aparente na roda 2;
- F_{a3} a Força aparente na roda 3;

A partir de (4.13) temos:

$$\begin{bmatrix} F_{CMx} \\ F_{CMy} \\ Mo_{CM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos(\delta) & -\cos(\delta) \\ -1 & \sin(\delta) & \sin(\delta) \\ l & l & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{a1} \\ F_{a2} \\ F_{a3} \end{bmatrix} = B.F_a \quad (4.14)$$

Entretanto, sabemos também que:

$$a_I = R(\theta)a_{CM} + \dot{R}(\theta)v_{CM} \quad (4.15)$$

com a_I sendo a aceleração com relação ao referencial inercial, a_{CM} é a aceleração com relação ao centro de massa, v_{CM} é a velocidade do centro de massa e $R(\dot{\theta})$ sendo o Jacobiano de $R(\theta)$. Assim:

$$\begin{bmatrix} a_{Ix} \\ a_{Iy} \\ \ddot{\theta}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{CMx} \\ a_{CMy} \\ \dot{\omega}_{CM} \end{bmatrix} + \dot{\theta} \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_{CMx} \\ v_{CMy} \\ \omega_{CM} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Como se pretende a princípio manter a orientação do robô durante o seu deslocamento ao longo da trajetória para efeito de simplificação, temos que para $\theta=0^\circ$, $\dot{\theta}$ é igual a zero, e dessa forma temos que:

$$\begin{cases} a_{Ix} = a_{CMx} \\ a_{Iy} = a_{CMy} \\ \ddot{\theta}_I = \dot{\omega}_{CM} \end{cases} \quad (4.17)$$

Assim, sabendo que $\Sigma F_I = m.a_I$ e que $\Sigma Mo_I = J.\dot{\omega}_I$, com J sendo o momento de inércia da base móvel, temos que:

$$\begin{bmatrix} F_{Ix} \\ F_{Iy} \\ Mo_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{Ix} \\ a_{Iy} \\ \dot{\omega}_I \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Substituindo o sistema da equação (4.17) na equação (4.18) temos:

$$\begin{bmatrix} F_{Ix} \\ F_{Iy} \\ Mo_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{CMx} \\ a_{CMy} \\ \dot{\omega}_{CM} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Sabe-se também que $F_I = F_{CM}$, pois para $\theta = 0^\circ$, assim temos que $F_I = R(\theta)F_{CM}$. Logo:

$$\begin{bmatrix} F_{CMx} \\ F_{CMy} \\ Mo_{CM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{CMx} \\ a_{CMy} \\ \dot{\omega}_{CM} \end{bmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} a_{CMx} \\ a_{CMy} \\ \dot{\omega}_{CM} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\text{com } H = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

Dessa forma, substituindo a equação (4.14) na equação (4.20) temos que:

$$BF_a = H^{-1} \begin{bmatrix} a_{CMx} \\ a_{CMy} \\ \dot{\omega}_{CM} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

ou ainda que,

$$HBF_a = \begin{bmatrix} a_{CMx} \\ a_{CMy} \\ \dot{\omega}_{CM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{Ix} \\ a_{Iy} \\ \dot{\omega}_I \end{bmatrix} = a_I \quad (4.22)$$

Logo:

$$\begin{bmatrix} a_{Ix} \\ a_{Iy} \\ \dot{\omega}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{CMx} \\ a_{CMy} \\ \dot{\omega}_{CM} \end{bmatrix} = HB \begin{bmatrix} F_{a1} \\ F_{a2} \\ F_{a3} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Sabe-se ainda que:

$$F_a = F_{\omega} - F_{at} \quad (4.24)$$

Onde F_{at} é o vetor das forças de atrito nas rodas e F_{ω} é a força nas rodas gerada pela rotação das mesmas. Sendo assim temos:

$$\begin{bmatrix} F_{a1} \\ F_{a2} \\ F_{a3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\omega1} \\ F_{\omega2} \\ F_{\omega3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{at1} \\ F_{at2} \\ F_{at3} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Substituindo a equação (4.25) na equação (4.23) temos:

$$\begin{bmatrix} a_{CMx} \\ a_{CMy} \\ \dot{\omega}_{CM} \end{bmatrix} = HB \left(\begin{bmatrix} F_{\omega1} \\ F_{\omega2} \\ F_{\omega3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{at1} \\ F_{at2} \\ F_{at3} \end{bmatrix} \right) = HBF_{\omega} - HBF_{at} \quad (4.26)$$

Isolando a força na roda temos que:

$$F_{\omega} = B^{-1}H^{-1}(a_I + HBF_{at}) \quad (4.27)$$

Lembrando mais uma vez que $a_I = \begin{bmatrix} a_{Ix} \\ a_{Iy} \\ \ddot{\theta}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{CMx} \\ a_{CMy} \\ \dot{\omega}_{CM} \end{bmatrix}$

Nota-se que a equação (4.27) é o modelo dinâmico do robô proveniente da análise puramente geométrica do mesmo, mesmo considerando a força de atrito nas rodas como uma

não linearidade de entrada. Entretanto, essa análise não satisfaz a real dinâmica do robô móvel AxeBot para fins de controle.

Dessa forma, complementando o modelo sabe-se que num conjunto motor-roda, temos:

$$\begin{cases} L \frac{di_{\omega}}{dt} + Ri_{\omega} + k_{em}\omega_m = u_{\omega} \\ J_m \dot{\omega}_m + b_0\omega_m + \frac{F_{\omega}r_{\omega}}{\eta N} = k_t i_{\omega} \end{cases} \quad (4.28)$$

sendo conforme [11]:

- L a indutância da armadura do motor;
- i_{ω} a corrente da armadura;
- u_{ω} a tensão da armadura;
- R a resistência da armadura;
- k_t a constante de torque do motor;
- k_{em} a constante de força contra-eletromotriz de rotação;
- J_m o momento de inércia de cada rotor (ou seja, a soma dos momentos de inércia do eixo do motor e do sistema redutor, respectivamente);
- b_0 a constante de amortecimento do acoplamento;
- F_{ω} a força em cada roda;

Pode-se provar que $b_0\omega_m = \frac{J_{\omega}\dot{\omega}_m}{\eta N^2}$, sendo J_{ω} o momento de inércia da roda.

Prova:

Como $\dot{\omega}_{\omega} = \frac{\dot{\omega}_m}{N}$, e assumindo que $b_0\omega_m = \frac{J_{\omega}\dot{\omega}_m}{\eta N^2}$, temos re-arrumando a equação que:

$$-\frac{J_{\omega}\dot{\omega}_m}{\eta N^2} + b_0\omega_m = 0, \text{ ou ainda:}$$

$$\dot{\omega}_m - \frac{b_0\eta N^2}{J_{\omega}}\omega_m = 0, \text{ com } A = -\frac{b_0\eta N^2}{J_{\omega}} \text{ temos então que:}$$

$$\frac{d\omega_m}{dt} + A\omega_m = 0$$

Note que a equação acima é uma equação diferencial homogênea, o que demonstra o cancelamento dos termos iguais e a existência do atrito estático no sistema, ou seja, o atrito de amortecimento.■

No sistema da equação (4.28) sabe-se que $L \frac{di_\omega}{dt} = 0$, visto que a constante de tempo elétrica do motor é muito pequena se comparada com a constante de tempo mecânica. Dessa forma, $i_\omega = \frac{1}{R}(u_\omega - k_{em}\omega_m)$, o que implica que:

$$J_m \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{m1} \\ \dot{\omega}_{m2} \\ \dot{\omega}_{m3} \end{bmatrix} + b_0 \begin{bmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \\ \omega_{m3} \end{bmatrix} + \frac{r_\omega}{\eta N} \begin{bmatrix} F_{\omega 1} \\ F_{\omega 2} \\ F_{\omega 3} \end{bmatrix} = \frac{k_t}{R} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \frac{k_t k_{em}}{R} \begin{bmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \\ \omega_{m3} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Substituindo agora a equação (4.27) na equação (4.29) percebe-se que:

$$J_m \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{m1} \\ \dot{\omega}_{m2} \\ \dot{\omega}_{m3} \end{bmatrix} + b_0 \begin{bmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \\ \omega_{m3} \end{bmatrix} + \frac{r_\omega}{\eta N} (B^{-1} H^{-1} (a_I + H B F_{at})) = \frac{k_t}{R} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \frac{k_t k_{em}}{R} \begin{bmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \\ \omega_{m3} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Por fim, re-arrumando a equação (4.30) de forma a isolar a_I temos:

$$a_I = H B \frac{\eta N}{r_\omega} \left(\frac{k_t}{R} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \frac{k_t k_{em}}{R} \begin{bmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \\ \omega_{m3} \end{bmatrix} - J_m \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{m1} \\ \dot{\omega}_{m2} \\ \dot{\omega}_{m3} \end{bmatrix} - b_0 \begin{bmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \\ \omega_{m3} \end{bmatrix} \right) - H B F_{at} \quad (4.31)$$

De posse da equação (4.11) e sua derivada podemos substituí-las na equação (4.31) e obter:

$$\begin{bmatrix} a_{Ix} \\ a_{Iy} \\ \dot{\omega}_I \end{bmatrix} = H B \frac{\eta N}{r_\omega} \left(\frac{k_t}{R} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - \frac{k_t k_{em}}{R} \cdot \frac{\eta N}{r_\omega} B^T \begin{bmatrix} v_{CMx} \\ v_{CMy} \\ \omega_{CM} \end{bmatrix} - J_m \frac{\eta N}{r_\omega} B^T \begin{bmatrix} a_{CMx} \\ a_{CMy} \\ \dot{\omega}_{CM} \end{bmatrix} - b_0 \cdot \frac{\eta N}{r_\omega} B^T \begin{bmatrix} v_{CMx} \\ v_{CMy} \\ \omega_{CM} \end{bmatrix} \right) - H B F_{at} \quad (4.32)$$

Re-arrumando a equação (4.32) sabendo da igualdade da equação (4.17) temos finalmente o modelo dinâmico do robô móvel AxeBot.

$$\begin{bmatrix} a_{Ix} \\ a_{Iy} \\ \dot{\omega}_I \end{bmatrix} = - \left(Q^{-1} H B B^T \left(\frac{k_t k_{em}}{R} + b_0 \right) \times \frac{(\eta N)^2}{r_\omega^2} \begin{bmatrix} v_{CMx} \\ v_{CMy} \\ \omega_{CM} \end{bmatrix} \right) + Q^{-1} H B \frac{k_t \eta N}{r_\omega R} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - Q^{-1} H B \begin{bmatrix} F_{at1} \\ F_{at2} \\ F_{at3} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\text{Com } Q = \left(I + H B B^T \left(\frac{J_m (\eta N)^2}{r_\omega^2} \right) \right)$$

4.3.1. Modelo Dinâmico em Espaço de Estados

Para colocar a equação (4.33) em espaço de estados, temos que considerar agora a equação (4.9) e sua derivada conforme a equação abaixo:

$$\begin{bmatrix} a_{CMx} \\ a_{CMy} \\ \dot{\omega}_{CM} \end{bmatrix} = \left(B^T \right)^{-1} \frac{r_\omega}{\eta N} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{m1} \\ \dot{\omega}_{m2} \\ \dot{\omega}_{m3} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Consideremos também a relação de igualdade entre a_I e a_{CM} observada na equação (4.17). Substituindo agora a equação (4.9) e a equação (4.34) com $a_I = a_{CM}$, na equação (4.33) teremos que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{m1} \\ \dot{\omega}_{m2} \\ \dot{\omega}_{m3} \end{bmatrix} &= - \left(P^{-1} Q^{-1} H B \left(\frac{k_t k_{em}}{R} + b_0 \right) \times \frac{\eta N}{r_\omega} \begin{bmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \\ \omega_{m3} \end{bmatrix} \right) + \\ &+ P^{-1} Q^{-1} H B \frac{k_t \eta N}{r_\omega R} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} - P^{-1} Q^{-1} H B \begin{bmatrix} F_{at1} \\ F_{at2} \\ F_{at3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\text{Com } P^{-1} = \left(\frac{\eta N}{r_\omega} \right) B^T$$

É observável que o vetor F_{at} é função de ω_m , logo a equação (4.35) pode ser vista como:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\omega}_{m1} \\ \dot{\omega}_{m2} \\ \dot{\omega}_{m3} \end{bmatrix} = & - \left(P^{-1} Q^{-1} H B \left(\frac{k_t k_{em}}{R} + b_0 \right) \times \frac{\eta N}{r_\omega} \begin{bmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \\ \omega_{m3} \end{bmatrix} + P^{-1} Q^{-1} H B \begin{bmatrix} F_{at1} \\ F_{at2} \\ F_{at3} \end{bmatrix} \right) + \\
& + P^{-1} Q^{-1} H B \frac{k_t \eta N}{r_\omega R} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Dessa forma, pode-se visualizar o modelo dinâmico em espaço de estados de um sistema não linear. Um sistema não linear é dito estar em espaço de estados se a sua dinâmica é representada por:

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)} = f(x) + G(x)u \\ y = x^{(n)} \end{cases} \tag{4.37}$$

Dessa forma, é fácil notar que a equação (4.36) já se encontra em espaço de estados visto que temos:

$$\begin{aligned}
x^{(n)} &= \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{m1} \\ \dot{\omega}_{m2} \\ \dot{\omega}_{m3} \end{bmatrix} \\
f(x) &= -P^{-1} Q^{-1} H B \left(\frac{k_t k_{em}}{R} + b_0 \right) \times \frac{\eta N}{r_\omega} \begin{bmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \\ \omega_{m3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{at1} \\ F_{at2} \\ F_{at3} \end{bmatrix} \\
G(x) &= P^{-1} Q^{-1} H B \frac{k_t \eta N}{r_\omega R} \\
u &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

4.3.2. Modelo Dinâmico Inverso

Para inverter a equação (4.36) de forma a construir o modelo dinâmico inverso, far-se-á necessário isolar o vetor u . Dessa forma, de acordo com a forma canônica e re-arrumando a equação temos que:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = G(x)^{-1} \left(P^{-1}Q^{-1}HB \begin{bmatrix} F_{at1} \\ F_{at2} \\ F_{at3} \end{bmatrix} + P^{-1}Q^{-1}HB \left(\frac{k_t k_{em}}{R} + b_0 \right) \times \frac{\eta N}{r_\omega} \begin{bmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \\ \omega_{m3} \end{bmatrix} \right) + G(x)^{-1} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{m1} \\ \dot{\omega}_{m2} \\ \dot{\omega}_{m3} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

4.4. Controladores de Velocidade

De acordo com o capítulo anterior, o controle de rastreamento de trajetória de um robô móvel deve, antes de tudo, receber como entrada as componentes X, Y e o ângulo θ do centro de massa do robô, bem como suas derivadas. Este, por sua vez, deve passar como referência, conjuntamente com a cinemática inversa do robô, a velocidade que cada conjunto motor-roda deve possuir, ou velocidade de referência. De acordo com a Figura 13, pode-se visualizar que, o controlador de velocidade escolhido para este projeto é o PID. Nesta mesma Figura, é possível observar que o sistema é não linear, com não linearidades de estado, sendo, porém, linearizado por realimentação entrada-estado, o que em outras palavras, implica que o controle é dito linearizante e o modelo é não linear. Entretanto, o sistema como um todo é linear em malha fechada.

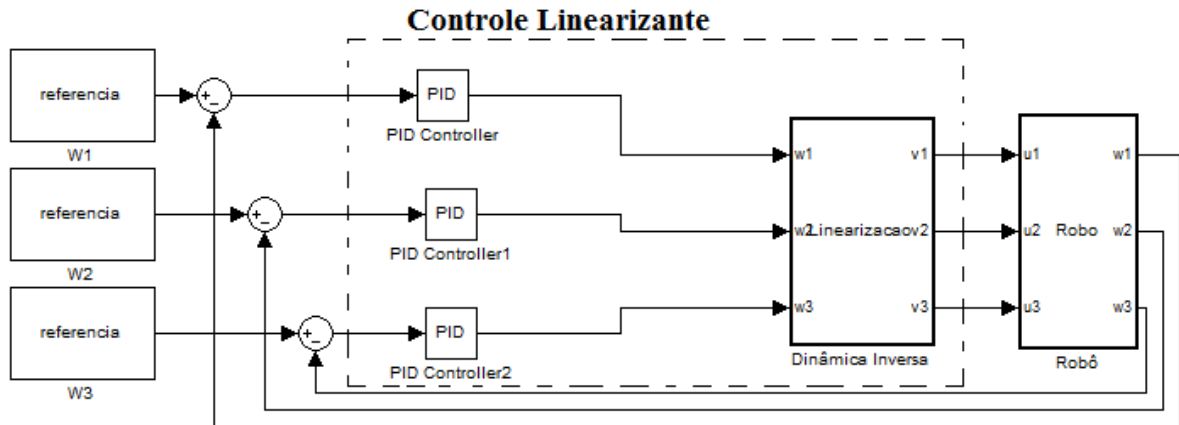


Figura 13 – Malha de controle interna

Nota-se também que o sistema possui três controladores PID, caracterizando esse sistema como SISO. Dessa forma, o modelo é acoplado, mas a lei de controle para o mesmo não é. Segundo [30] a realimentação entrada-estado permite que o sistema em malha fechada seja controlado não somente pelo método de alocação de pólos [23] como também por qualquer outro controlador linear, como no caso um controlador PID. O projeto do

controlador PID foi tema estudado por [8]. Neste trabalho, os controladores projetados são três controladores PID. Esta escolha é devido à arquitetura eletrônica do robô vista no capítulo dois, que possui como sistema embarcado controladores PID, deixando a critério do projetista apenas a sintonização do mesmo. O estudo realizado por [8] também caracterizou que o melhor controlador para esse sistema é um controlador PI (proporcional-integral) ao invés de um PID.

Para que se possa controlar de forma eficaz um sistema não linear através de um controlador PI, é necessária então a realização da etapa de linearização do sistema. Esta linearização é feita pela linearização entrada-saída para o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)} = f(x) + G(x)u \\ y^{(r)} = x^{(n)} \end{cases} \quad (4.40)$$

O número de r diferenciações requeridas para a entrada u aparecer é denominado de grau relativo do sistema, uma extensão da definição usual de grau relativo de sistemas lineares. É notado então que o sistema deve possuir $r < n$ (com n igual à ordem do sistema) para que se possa linearizar com realimentação entrada-saída. Se $r = n$, a linearização entrada-saída é na realidade uma linearização entrada-estado [21].

Dessa forma, o sistema não linear que contempla o modelo do robô AxeBot possuirá um controlador PI que, conjuntamente com a dinâmica inversa do sistema, será, em malha fechada, um controlador linearizante linearizando o sistema através da linearização entrada-estado em malha fechada, conforme pôde ser visto na Figura 09.

Após a linearização entrada-estado que desacopla o sistema através da dinâmica inversa do mesmo, parte-se para a sintonização de cada um dos controladores interno. Segundo [8], a melhor configuração de controle é um controlador Proporcional-Integral (PI) ao invés de um PID. Além disso, o projeto dos controladores de velocidade das rodas deve ser regido pelas seguintes especificações no que diz respeito à resposta da saída do sistema em malha fechada:

- Resposta criticamente amortecida;
- Tempo de acomodação de aproximadamente 200 ms;
- Erro nulo em regime permanente.

Este controlador SISO é dado por:

$$C(s) = K_p \left(\frac{s + \frac{1}{T_I}}{s} \right) \quad (4.41)$$

Este controlador foi implementado considerando apenas o conjunto motor-roda dado pela equação abaixo:

$$\frac{\omega(s)}{U(s)} = \frac{\eta k_t}{sRJ_e + RF_e + k_{em}k_t} \quad (4.42)$$

Onde,

$$J_e = nN^2 J_m + J_\omega \quad (\text{momento de inércia equivalente}) \quad (4.43)$$

e

$$F_e = nN^2 F_m + F_\omega \quad (\text{atrito viscoso equivalente}) \quad (4.44)$$

E onde conforme [8]:

- F_m é a força em cada motor;
- J_m é o momento de inércia de cada motor;

Dessa forma, a função de transferência de malha fechada é dada por:

$$T(s) = \frac{\frac{sK_p T_I k_t + K_p k_t}{T_I J_e R}}{s^2 + s \left(\frac{RF_e + k_t k_{em} + K_p k_t}{J_e R} \right) + \frac{K_p k_t}{T_I J_e R}} \quad (4.45)$$

Em [8], o autor concluiu que através da equação (4.45) pôde-se perceber que a utilização de um controlador PI insere um pólo e um zero no sistema, dando origem a uma resposta em malha fechada representada por uma equação de 2ª ordem. Com:

$$2\xi\omega_n = \left(\frac{RF_e + k_t k_{em} + K_p k_t}{J_e R} \right) \quad (4.46)$$

e

$$\omega_n^2 = \frac{K_p k_t}{T_I J_e R} \quad (4.47)$$

Considerando como condições de contorno especificadas para este projeto, tem-se aqui uma resposta criticamente amortecida, no qual o coeficiente de amortecimento, ξ , deve ser igual a 1, um tempo de acomodação menor que 200 ms, e o valor da frequência natural não-amortecida, ω_n , maior que 20. Aplicando estas condições nas equações (4.46) e (4.47), obtém-se os valores limites de K_p e T_I , dados por:

$$K_p \geq 7,8 \text{ e } T_I \leq 0,1 \quad (4.48)$$

De posse dessas condições foi utilizado o método do lugar das raízes para determinação dos parâmetros mais apropriados para o controlador. Os resultados da simulação estão exibidos na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Resultados da Simulação para $K_p=40$ e $T_i=0,07$ [8]

Degrau = 10 rad/s	
Especificação	Valor
Sobre-Sinal	5 %
Tempo de Acomodação	200 ms
Erro em regime permanente	0%

Dessa forma, o controlador interno obteve seu melhor desempenho para $K_p = 40$ e $T_I = 0,07$.

4.5. Modelo Cinemático Linearizado

De acordo com o capítulo anterior, nota-se que este sistema de controle de trajetória é dito ser um controle em cascata. Este sistema possui então um a malha de controle interna, a qual é a malha responsável pelo controle de velocidade dos motores, e a malha de controle externa, a qual é a responsável pelo controle de trajetória.

Uma metodologia utilizada para projetar um controlador linear multivariável de trajetória é, antes de tudo, obter a linearização do sistema de posicionamento em malha fechada. Este controlador multivariável será um controlador linearizante, permanecendo

assim, o sistema não linear. Conforme pôde ser visto na Figura 09 do capítulo três, este controlador linearizante é acoplado à cinemática inversa do robô, cujo modelo é não linear.

O sistema de posicionamento é então conhecido como sendo a transformação homogênea de coordenadas representada pela equação (4.2). Esta equação pode ser vista também como sendo:

$$V_I = \dot{P}_I = f(P_I, V_{CM}) \quad (4.49)$$

$$\text{Com } P_I = \begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ \theta \end{bmatrix} \text{ e } V_{CM} = \begin{bmatrix} v_{CMx} \\ v_{CMy} \\ \omega_{CM} \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, pode-se dizer que, linearizando V_I com respeito à P_I e V_{CM} (linearização em torno dos pontos de equilíbrio) temos que:

$$\dot{P}_I = \frac{df(P_I, V_{CM})}{dP_I} + \frac{df(P_I, V_{CM})}{dV_{CM}} \quad (4.50)$$

Linearizando cada termo temos que:

$$\frac{df(P_I, V_{CM})}{dP_I} = A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -v_{CMx} \cdot \text{Sen}(\theta) - v_{CMy} \cdot \text{Cos}(\theta) \\ 0 & 0 & v_{CMx} \cdot \text{Cos}(\theta) - v_{CMy} \cdot \text{Sen}(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

E também que:

$$\frac{df(P_I, V_{CM})}{dV_{CM}} = B_1 = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\theta) & -\text{Sen}(\theta) & 0 \\ \text{Sen}(\theta) & \text{Cos}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Sendo assim, pode-se dizer que o sistema linearizado é tal que:

$$\begin{cases} \dot{P}_I = A_1 P_I + B_1 V_{CM} \\ y = C_1 P_I \end{cases} \quad (4.53)$$

$$\text{Com } C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.6. Matriz de Funções de Transferência

Em qualquer sistema linear em espaço de estados, a função de transferência para um sistema SISO é tal que:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (4.54)$$

A diferença da obtenção do $G(s)$ entre sistemas SISO e MIMO é que a resposta, que em sistemas SISO é uma função de transferência, será uma matriz polinomial chamada de matriz de funções de transferência que representará o sistema MIMO. Dessa forma, a matriz de funções de transferência para o sistema linearizado é tal que:

$$G(s) = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 \quad (4.55)$$

4.7. Conclusão

De posse do sistema de posicionamento linearizado e da matriz de funções de transferência poder-se-á projetar um controlador multivariável linear de trajetória. Este controlador será visto no capítulo seguinte.

É possível concluir então que um sistema para o controle de rastreamento de trajetória de uma plataforma móvel deve ser realizado em cascata de forma que o controle interno do sistema seja responsável pelo controle de velocidade do conjunto motor-roda, enquanto que o controle externo é responsável pelo controle de trajetória do centro de massa da plataforma móvel. Esta arquitetura de controle se faz necessária pela necessidade da correção, através de uma malha externa, do erro de posição do centro de massa existente em regime permanente que a malha interna não consegue corrigir, mesmo com a linearização do sistema em malha fechada.

Conclui-se também que o conjunto de modelos cinemático e dinâmico é não linear e que o modelo dinâmico contempla a não linearidade de entrada da zona morta.

Capítulo 5

5. Controlador de Trajetória Multivariável

Este Capítulo apresenta a malha de controle em cascata do robô AxeBot. Primeiramente é apresentado o controlador multivariável proposto. Posteriormente é realizada a sintonia dos parâmetros deste controlador. Logo após é feita a análise de desempenho do controlador multivariável proposto. Por fim, o capítulo é concluído com uma ponderação sobre o impacto do desempenho do controlador.

5.1. Introdução

O objetivo de um controlador de trajetória é fazer com que o robô consiga seguir uma determinada trajetória minimizando o erro entre a trajetória de referência e a trajetória na qual o robô se encontra. Neste caso, pode ser considerada uma situação de controle servo, ou seja, de variação da referência. Sendo assim, as estratégias de controle mais utilizadas são do tipo realimentados ou *feedback*.

Num robô com três graus de liberdade (3 DOF – *Degrees Of Freedom*), cujo modelo dinâmico não linear é apresentado neste trabalho, a estratégia de controle deve ser separada em duas partes. A primeira parte, ou malha do controlador interno, pode ser chamada de malha de controle de velocidade. Esse controlador é responsável por garantir que os motores permaneçam na velocidade desejada para que se possa, por sua vez, atingir a posição desejada ou realizar a trajetória desejada. Essa malha é baseada no modelo dinâmico do robô, cuja

linearização fornece uma lei de controle desacoplada para cada conjunto motor-roda. A segunda malha de controle, ou malha do controlador externo, é um controlador de trajetória e foco deste trabalho. Este controlador é multivariável e não linear composto de duas parcelas, uma responsável pela compensação de não linearidades por meio da linearização da cinemática do robô e a outra responsável pelo seguimento de trajetórias. Ambos os controladores linearizam o sistema por realimentação. Esta estratégia de controle, com uma divisão em malha interna e malha externa do sistema de controle, é de grande aplicação em sistemas robóticos e é chamada de controle em cascata.

5.2. Controle em Cascata

O controle em cascata permite que os erros em regime estacionário gerados pelos controladores de velocidade sejam corrigidos através do controlador de trajetória. Esta arquitetura é baseada na teoria da perturbação singular (*singular perturbation theory*), comumente conhecida como o princípio da separação da escala de tempo (*time-scale separation principle*), que assume que a malha interna é exponencialmente estável e a largura de banda da malha interna é muito maior que a dinâmica da malha externa, de forma que o controlador da malha externa pode ser projetado ignorando a dinâmica da malha interna [34], [35], [36] e [37]. Esta suposição é satisfeita pela escolha apropriada dos autovalores PD em malha fechada de ambos os controladores [38]. Esta teoria, aplicada como uma estratégia de controle, conhecida como controle em cascata, também pode ser chamada de controle por linearização da trajetória. A figura abaixo mostra a malha de controle proposta em diagrama de blocos:

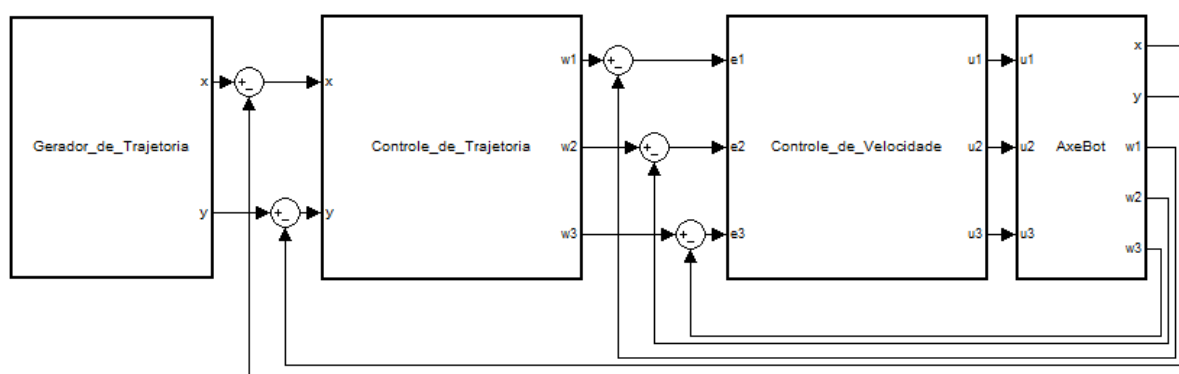


Figura 14 – Malha de controle proposta.

Já a Figura 15 mostra o diagrama de blocos detalhado.

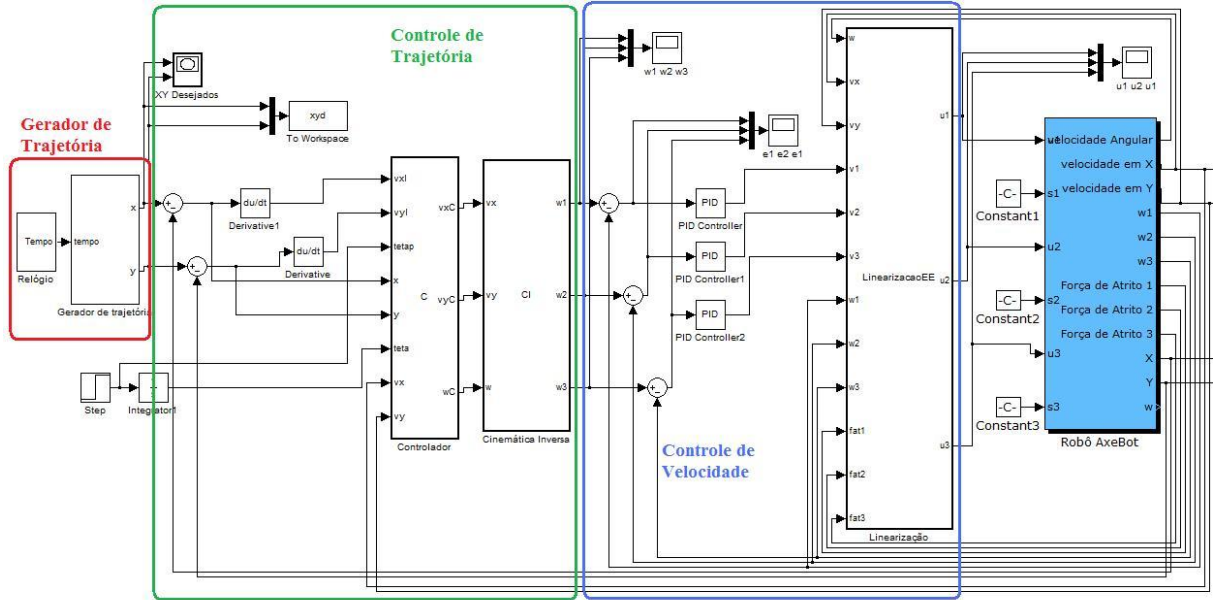


Figura 15 – Malha de controle detalhada.

5.3. Controlador Multivariável Proposto

Segundo [28], para que se possa definir um controlador multivariável de trajetória para o $G(s)$ da equação (4.54), o qual é um modelo em espaço de estados (A,B,C) , devem ser consideradas as propriedades de $G(s)$:

- C.B é quadrada e inversível;
- O sistema é de fase mínima, ou seja, todos os pólos encontram-se do lado esquerdo do semi-plano complexo.

Dessa forma, $G(s)$ será tal que:

$$G(s) = YU^{-1} = P\omega^{-1} = C_1(sI - A_1)^{-1}B_1 \quad (5.1)$$

Ou ainda que, substituindo valores de A_1 , B_1 e C_1 , temos que:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s \cdot \cos(\theta)} & -\frac{1}{s \cdot \sin(\theta)} & \frac{-(v_{CMx} \cdot \sin(\theta) + v_{CMy} \cdot \cos(\theta))}{s^2} \\ \frac{1}{s \cdot \sin(\theta)} & \frac{1}{s \cdot \cos(\theta)} & \frac{(v_{CMx} \cdot \sin(\theta) - v_{CMy} \cdot \cos(\theta))}{s^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Sabe-se que a matriz $G(s)$ é diagonal dominante para θ tendendo a zero. Sendo assim, temos que a matriz satisfaz a hipótese dos corolários 1 ou 2 abaixo:

Corolário 1: (Critério das linhas)

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad i = 1, n$$

Corolário 2: (Critério das colunas)

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \quad j = 1, n$$

A equação da diagonal principal da equação (5.2), que é a mesma para todos os canais, caracteriza um sistema de 1ª ordem, ou ainda, um integrador ideal, cujo mapa de pólos e zeros em malha aberta está exibido na Figura 16. Verifica-se, pelo mapa, que o único pólo de malha aberta está contido em zero, demonstrando que o sistema representado é estável e de fase mínima, condição exigida para o projeto de um controlador multivariável [22].

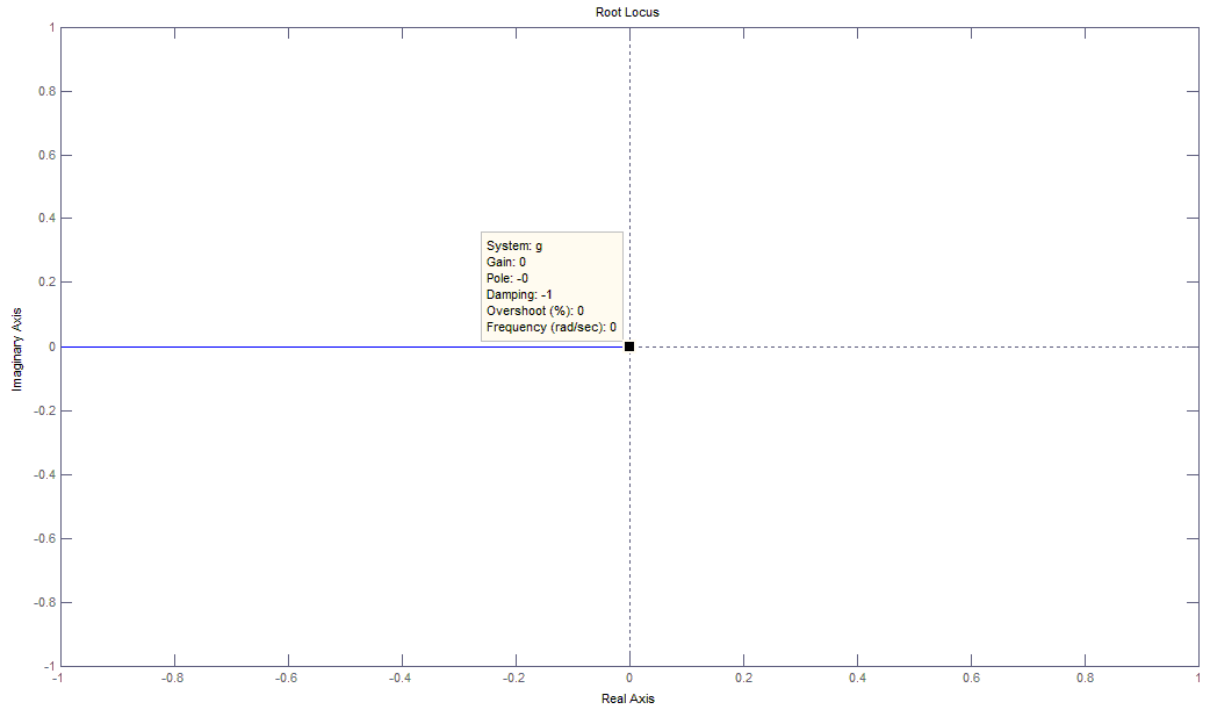


Figura 16 – Mapa de Pólos e Zeros

Entretanto, para que se possa inverter de uma maneira mais simplificada o $G(s)$ deve-se isolar a entrada da saída. Pode-se então representar $G(s)$ também como sendo:

$$P = C_1(sI - A_1)^{-1} B_1 \omega \quad (5.3)$$

Dessa forma, $G(s)^{-1}$ será:

$$B_1^{-1}(sI - A_1)C_1^{-1}P = \omega \quad (5.4)$$

Ou ainda que:

$$\omega = (B_1^{-1}s - B_1^{-1}A_1)C_1^{-1}P = (sB_1^{-1}C_1^{-1} - B_1^{-1}A_1C_1^{-1})P \quad (5.5)$$

Sendo assim, temos que:

$$G(s)^{-1} = UY^{-1} = \omega P^{-1} = (sB_1^{-1}C_1^{-1} - B_1^{-1}A_1C_1^{-1}) \quad (5.6)$$

Como $B_1^{-1}C_1^{-1} = (C_1B_1)^{-1}$ então teremos que:

$$G(s)^{-1} = s(C_1B_1)^{-1} + (-B_1^{-1}A_1C_1^{-1}) \quad (5.7)$$

Segundo [28] pode-se, nestas circunstâncias, dizer que:

$$G(s)^{-1} = sA_a + A_b \quad (5.8)$$

Com $A_a = (C_1 B_1)^{-1}$ e, segundo [28], A_b arbitrário, temos que, nesse caso, $A_a = (C_1 B_1)^{-1}$ e $A_b = (-B_1^{-1} A_1 C_1^{-1})$. Logo, este $G(s)^{-1}$ pode ser controlado por um controlador PI (proporcional-integral) multivariável tal que:

$$K = A_a \text{diag} \{k_j + c_j + s^{-1} k_j c_j\} - A_b \quad (5.9)$$

Com $1 \leq j \leq 3$.

Este controlador deve ser tal que produza um sistema em malha fechada de forma que:

1. Seja Estável se $k_j > 0$ e $c_j \geq 0$ para qualquer j ;
2. Produza k_j^{-1} constantes de tempo de ciclo e c_j^{-1} vezes início de ciclo, no ciclo j ;
3. Produza arbitrariamente pequenos efeitos de acoplamento se $K = \max_j k_j$ for suficientemente alto.

Como neste caso $A_a = (C_1 B_1)^{-1} = B_1^{-1}$ e $A_b = (-B_1^{-1} A_1 C_1^{-1}) = (-B_1^{-1} A_1)$, então:

$$K = B_1^{-1} \text{diag} \{k_{pj} + s^{-1} k_{ij}\} + (B_1^{-1} A_1) \quad (5.10)$$

Com $1 \leq j \leq 3$ e $\begin{cases} k_{pj} = k_j + c_j \\ k_{ij} = k_j c_j \end{cases}$.

Como $\text{diag} \{k_{pj} + s^{-1} k_{ij}\} = \text{diag} \{k_{pj}\} + \text{diag} \{k_{ij}\} s^{-1}$, logo:

$$K = B_1^{-1} (\text{diag} \{k_{pj}\} + \text{diag} \{k_{ij}\} s^{-1}) + (B_1^{-1} A_1) \quad (5.11)$$

Re-arrumando a equação, pode-se colocá-la de forma que o controlador PI seja tal que:

$$K = B_1^{-1} (A_1 + \text{diag} \{k_{pj}\}) + B_1^{-1} \text{diag} \{k_{ij}\} s^{-1} \quad (5.12)$$

Dessa forma, pode-se afirmar que para o controlador multivariável, tem-se:

$$\begin{aligned}
K_P &= B_1^{-1} (A_1 + \text{diag}[k_{p1} \quad k_{p2} \quad k_{p3}]) \\
e \\
K_I &= B_1^{-1} \text{diag}[k_{I1} \quad k_{I2} \quad k_{I3}]
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Com $1 \leq j \leq 3$, $k_{pj} > 0$ e $k_{Ij} > 0$. Sendo assim, por $G(s)$ temos que $Y(s) = U(s) = e_p(s)$, ou ainda que $V_{CM} = K.e_p(s)$. É observável que j é o canal de controle, o que, como o sistema é fortemente acoplado, implica em valores iguais para qualquer que seja j . Logo,

$$V_{CM} = K_P.e_p(s) + K_I.e_p(s).s^{-1} \tag{5.14}$$

Por fim, tem-se a lei de controle multivariável projetada para estabilizar o erro de trajetória abaixo:

$$\dot{V}_{CM}(t) = K_P.\dot{e}_p(t) + K_I.e_p(t). \tag{5.15}$$

$$\text{Com } e_p(t) = \begin{bmatrix} X_I \\ Y_I \\ \theta \end{bmatrix} \text{ e } \dot{e}_p(t) = \begin{bmatrix} V_{Ix} \\ V_{Iy} \\ \dot{\theta}_I \end{bmatrix}.$$

5.4. Sintonia dos Parâmetros do Controlador

Seja $r_k(t)$, com $1 \leq k \leq 3$, o sinal de referência originado do gerador de trajetória para a saída $y_k(t)$, tal que $r_k(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{bmatrix}$.

Logo, os erros estimados para uma realimentação unitária $e_k = r_k - y_k$ pode ser escrito como:

$$E(s) = R(s) - Y(s). \tag{5.16}$$

Conforme pode ser visto na Figura 09 do capítulo 3 desta dissertação, se a entrada de controle $u(t)$ for gerada de um elemento de controle com MTF (Matriz de Funções de Transferência) de dimensão $m \times m$, neste caso 3×3 , $K(s)$:

$$U(s) = K(s).E(s) \quad (5.17)$$

Logo a matriz de funções de transferência em malha fechada é tal que:

$$H(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}.G(s)K(s) \quad (5.18)$$

Dessa forma, o problema de controle é escolher $K(s)$ tal que produza propriedades aceitáveis em malha fechada. Da equação (5.12) temos então que:

$$K(s) = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\theta).\lambda & \text{Sen}(\theta).\lambda & \text{Cos}(\theta)(-v_{CMx}.\text{Sen}(\theta) - v_{CMY}.\text{Cos}(\theta)) + \text{Sen}(\theta)(v_{CMx}.\text{Sen}(\theta) - v_{CMY}.\text{Cos}(\theta)) \\ -\text{Sen}(\theta).\lambda & \text{Cos}(\theta).\lambda & -\text{Sen}(\theta)(-v_{CMx}.\text{Sen}(\theta) - v_{CMY}.\text{Cos}(\theta)) + \text{Cos}(\theta)(v_{CMx}.\text{Sen}(\theta) - v_{CMY}.\text{Cos}(\theta)) \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

$$\text{Com } \lambda = k_p + \frac{k_I}{s}.$$

Logo, substituindo a equação (5.19) e a equação (5.2) na equação (5.18), temos que $H(s)$ será tal que:

$$H(s) = \begin{bmatrix} \frac{s.\lambda}{Den} & 0 & \frac{s.(-v_{CMx}.\text{Sen}(\theta) - v_{CMY}.\text{Cos}(\theta))}{Den} \\ 0 & \frac{s.\lambda}{Den} & \frac{s.(v_{CMx}.\text{Sen}(\theta) - v_{CMY}.\text{Cos}(\theta))}{Den} \\ 0 & 0 & \frac{s.\lambda}{Den} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

$$\text{Com } Den = s^2 + k_p.s + k_I.$$

Para a sintonização dos valores de k_p e k_I temos que para sistemas de 2ª ordem, a função de transferência SISO em malha fechada pode ser representada por:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (5.21)$$

Sabe-se que a matriz $H(s)$ de funções de transferência também é diagonal dominante para $\theta = 0$, conforme o corolário 1. Dessa forma, é possível admitir que a função de transferência em malha fechada de cada canal de controle de $H(s)$ é a mesma e pode ser expressa como segue:

$$h_{ii}(s) = \frac{s \left(k_p + \frac{k_I}{s} \right)}{s^2 + k_p s + k_I} \quad (5.22)$$

Comparando-se as equações (5.20) e (5.21) tem-se que:

$$\begin{cases} k_p = 2\xi\omega_n \\ k_I = \omega_n^2 \end{cases} \quad (5.23)$$

De acordo com [34] e [38], a razão entre a largura de banda da malha interna e da malha externa deve ser no mínimo 5:1, de forma a satisfazer os requerimentos da perturbação singular em robôs omnidirecionais dessa categoria. Dessa forma, com o ω_n da malha interna $\omega_{ni} = 20$ obtido por [8], ter-se-á um ω_n da malha externa tal que $\omega_{nE} \leq 4$. Considerando que o coeficiente de amortecimento ξ é o mesmo para todo o sistema, o que o caracteriza como um sistema criticamente amortecido, ou seja, $\xi = 1$, tem-se então os respectivos valores calculados de k_p e k_I dispostos abaixo.

$$\begin{cases} k_p \leq 8 \\ k_I \geq 16 \end{cases} \quad (5.24)$$

Ou ainda que:

$$\begin{cases} k_p \leq 8 \\ T_I \leq 0,5 \end{cases} \quad (5.25)$$

De posse dessas condições iniciais acima, foi utilizado o método do lugar das raízes para determinação dos parâmetros mais apropriados para o controlador. Considerando que o diagrama do lugar das raízes representa o conjunto de valores de s para os quais, no caso multivariável, $T = I + GK$ e arbitrando inicialmente um valor de k_I igual a 17, o seguinte diagrama foi obtido:

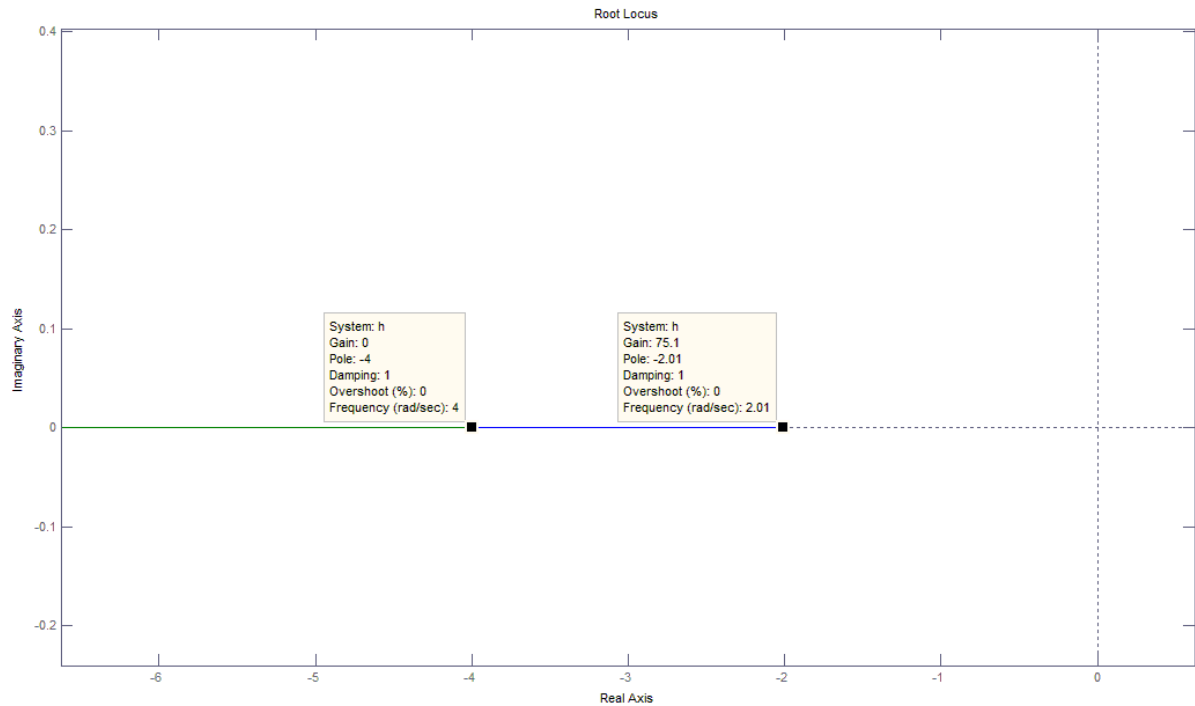


Figura 17 – Traçado do lugar das raízes no plano “s” para o sistema representado na equação (5.22)

Note que de acordo com o lugar das raízes exibido na Figura 16, para um $0 \leq k_p \leq 75.1$ os dois pólos em malha fechada ficam localizados sobre o eixo real, caracterizando um sistema com $\xi=1$, tendo também valor modular menor que 4, ou seja, razão menor que 5:1 da largura de banda (frequência natural) da malha interna. Entretanto, conforme parâmetros do controlador da malha externa, o ganho deve ser menor que 8, dessa forma, o k_p deverá ser tal que $0 \leq k_p \leq 8$. Outra especificação, é que o erro de posição seja menor que 0,01, ou seja, menor que 1 cm de posicionamento do centro de massa.

A análise do erro de controle feita por [8] também indica que o erro em regime permanente pode ser avaliado para outros sinais de referência. Em geral, o erro de regime permanente (também chamado, neste caso, de erro de velocidade) pode ser considerado constante e igual a $1/K$. Considerando qualquer tipo de sistema ou entrada, pode-se concluir que quanto maior for a relação K_p/T_I menor será o erro de velocidade, e por consequência no caso do controlador de trajetória, o erro de posição.

Após algumas tentativas, pôde-se encontrar o valor do ganho que melhor atendesse as especificações de comportamento supracitadas, obtendo para os testes:

$$\begin{cases} k_p = 0.8 \\ k_I = 16 \end{cases} \quad (5.26)$$

5.5. Testes e Análise de Desempenho do Controlador Multivariável Estudado

A análise e teste de um controlador de trajetória estão intrinsecamente ligados ao objetivo deste controlador. O objetivo do controlador multivariável de trajetória proposto é, dada uma trajetória, permitir que o robô realize esta mesma trajetória sem erro em regime estacionário ou, em outras palavras, sem erro de posicionamento do centro de massa ao longo da trajetória. A malha de controle vista na Figura 15 mostra a disposição do controle em cascata. Os valores dos parâmetros do AxeBot são mostrados na tabela abaixo.

Tabela 5.1 – Valores dos parâmetros do AxeBot

Parâmetro	Valor	Unidade
g	9,8	m/s^2
m	1,83	Kg
l	0,09	m
r_ω	0,072	m
k_t	0,0059	Nm/A
k_{em}	0,0059	Vs/rad
N	19	-
H	0,83	-
R	1,71	Ω
L	0,00011	H
J_m	$3,88 \times 10^{-7}$	kgm^2
J_ω	$8,1 \times 10^{-4}$	kgm^2
J	2,125	kgm^2
b_0	$2,4 \times 10^{-6}$	Nms/rad

Para este sistema de controle, cujo controlador de trajetória é o controlador multivariável proposto, foram realizados vinte simulações com quatro trajetórias diferentes,

(totalizando oitenta simulações): trajetória retilínea, elipsoidal, em oito e livre. A Figura 18 mostra o efeito dos controladores em cascata realizando a trajetória retilínea desejada.

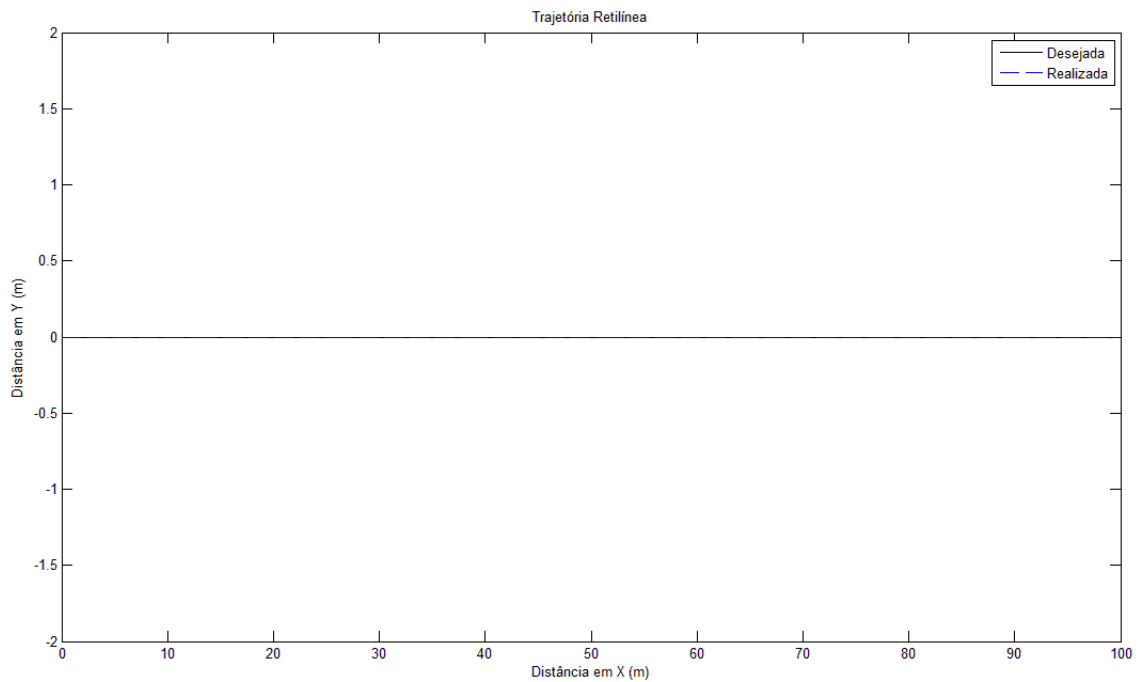


Figura 18 – Trajetória retilínea

Logo após a trajetória retilínea, uma trajetória elipsoidal com distância da origem até à extremidade medida sobre os dois eixos x e y igual a 0,5 m foi especificada para que o controlador a seguisse. A Figura 19 mostra a simulação realizada.

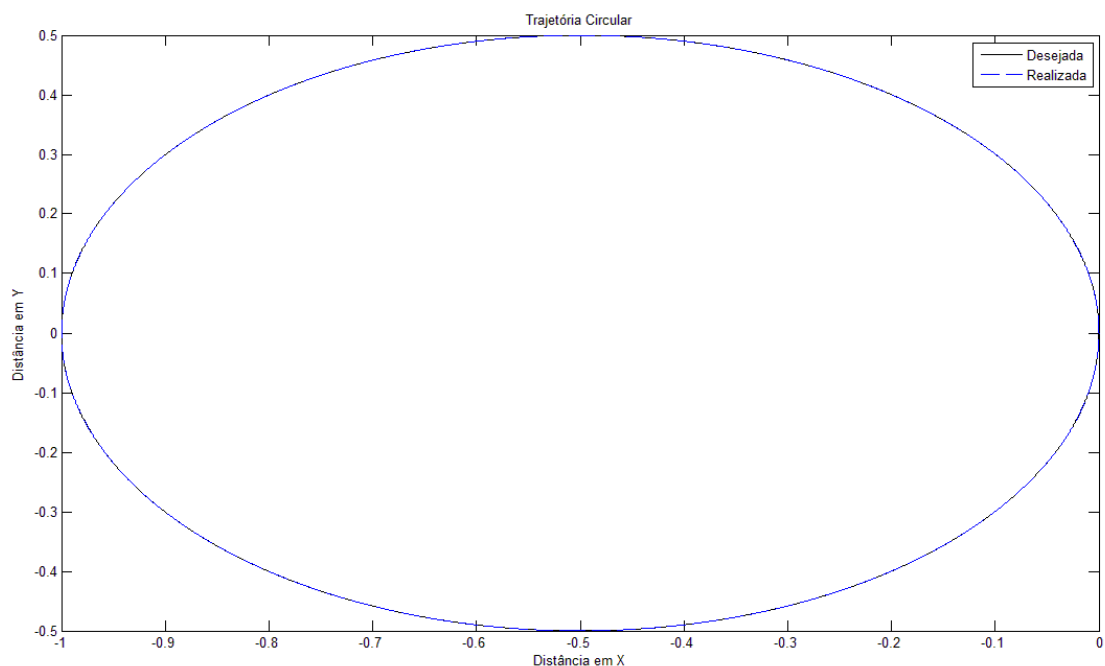


Figura 19 – Trajetória elipsoidal para distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,5 m

Como um terceiro teste, foi solicitado do controlador que seguisse uma trajetória em oito com 0,5 m de diâmetro de largura por 0,6 m de diâmetro em cada círculo. A Figura 20 mostra essa simulação.

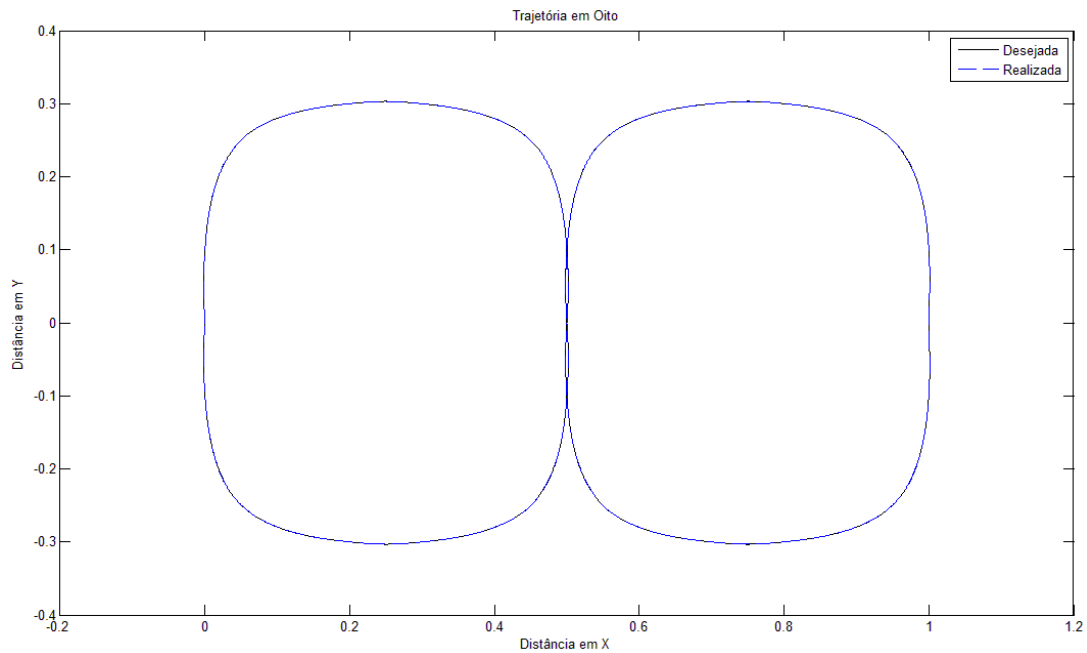


Figura 20 – Trajetória em oito

Finalmente, a Figura 21 mostra o efeito dos controladores em cascata realizando a trajetória livre desejada.

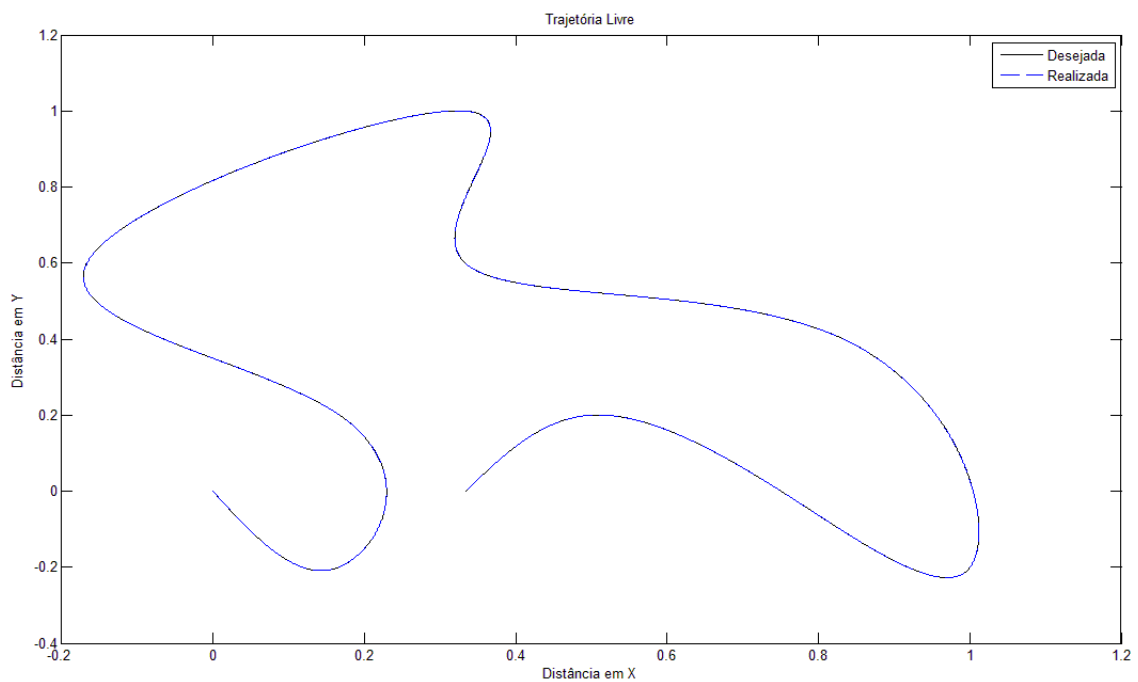


Figura 21 – Trajetória livre

Em cada um dos vinte experimentos o robô manteve a mesma trajetória. Entretanto, para que se pudesse seguir a trajetória desejada nos casos em que foi aumentado o valor do coeficiente de escorregamento das rodas, o controlador alterou o valor das tensões para um valor não realizável, ou seja, para valores acima do ponto de saturação da tensão do motor que é igual a 6 v. Note que o robô obteve aparentemente o mesmo desempenho em todas as trajetórias. Entretanto, utilizou-se outra medida de desempenho do controlador de trajetória multivariável, a utilização do somatório do quadrado do erro como parâmetro de medida. A equação abaixo representa o valor do índice utilizado como parâmetro de análise.

$$I = \sum_{k=0}^{k=N} (e_k)^2 = e^T e \quad (5.27)$$

Com k igual ao valor máximo do tempo de simulação, I o valor do índice e **e** o vetor erro.

Tabela 5.2 – Resultados da Simulação das Trajetórias

Índice (em x)	Índice (em y)	Período	Referência	Trajетória
0.0125	0.0000	100 s	Posição	Retilínea
0.0259	0.0482	100 s	Posição	Em Oito
0.0553	0.0553	100 s	Posição	Elipsoidal
0.1065	0.1528	100 s	Posição	Livre

Nota-se que por essa métrica, na trajetória retilínea, o controlador obteve obviamente melhor desempenho seguida da trajetória em oito. A diferença dos valores é exatamente devido ao fato de que nas trajetórias retilínea e em oito existem uma mudança de pontos de coordenadas X e Y uniformemente linear e um número maior de trajetórias retilíneas a serem seguidas, pois, em especial na trajetória em oito, esta é composta de dois elementos: curvas com três pontos que a definem, e reta, com dois pontos que a definem. Essa métrica prova o desempenho do controlador que pôde ser visto nas Figuras anteriores.

É observável também que uma última especificação do controlador de trajetória multivariável, é que, a dinâmica da malha externa, não influencie a dinâmica da malha interna de tal forma a solicitar dos motores, velocidades e tensões impossíveis de serem realizadas. O motor utilizado possui uma variação de tensão de -6v a +6v. Esta variação de tensão é obedecida nas trajetórias supracitadas. As Figuras 22 a 25 mostram a curva das tensões dos três motores para as quatro trajetórias.

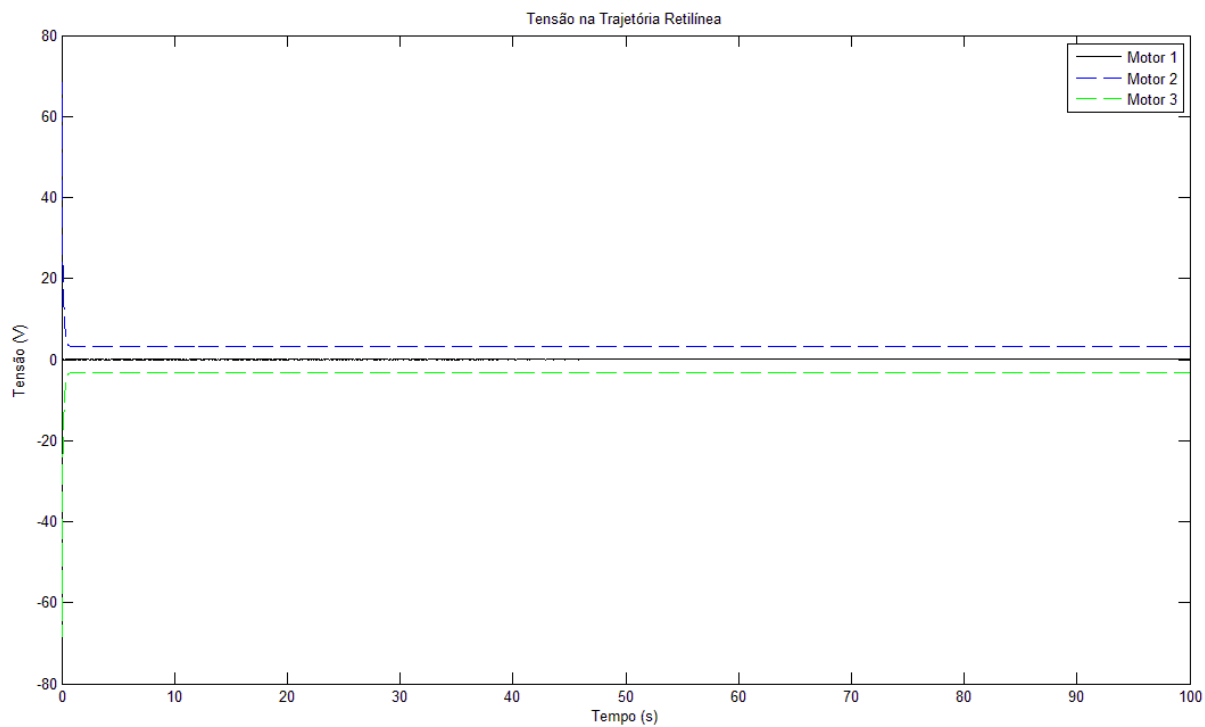


Figura 22 – Tensões na trajetória retilínea

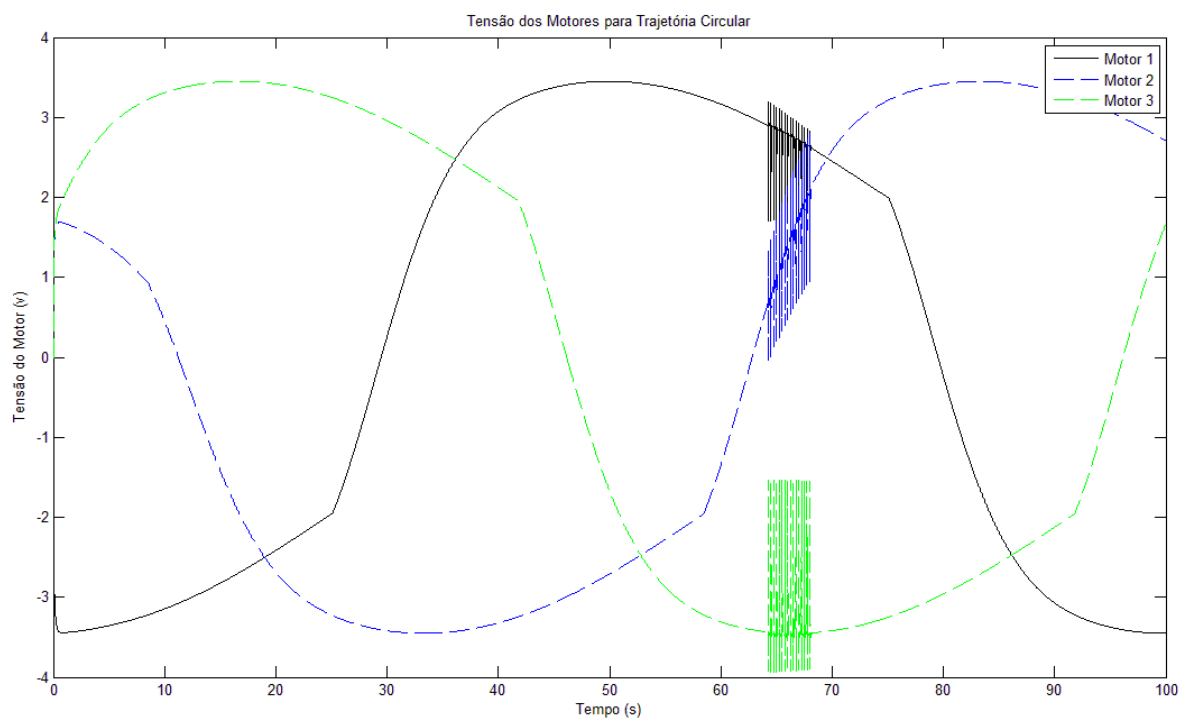


Figura 23 – Tensões na trajetória elipsoidal para distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,5 m

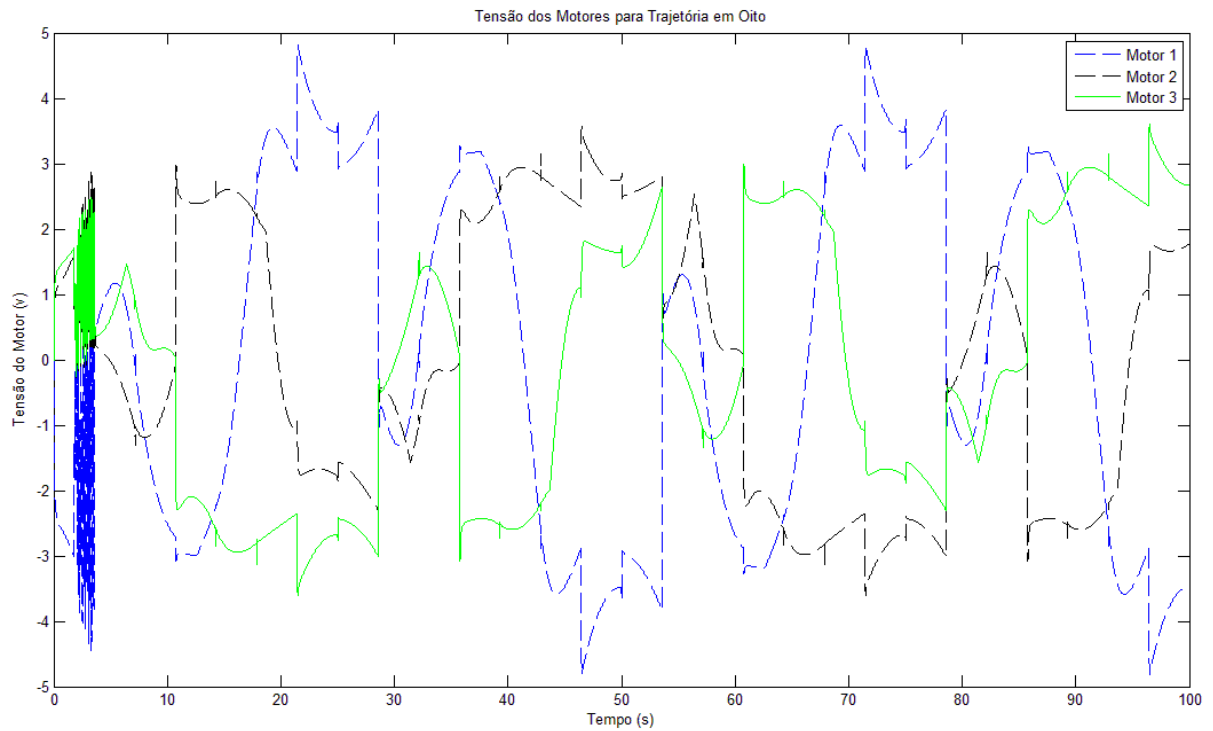


Figura 24 – Tensões na trajetória em oito

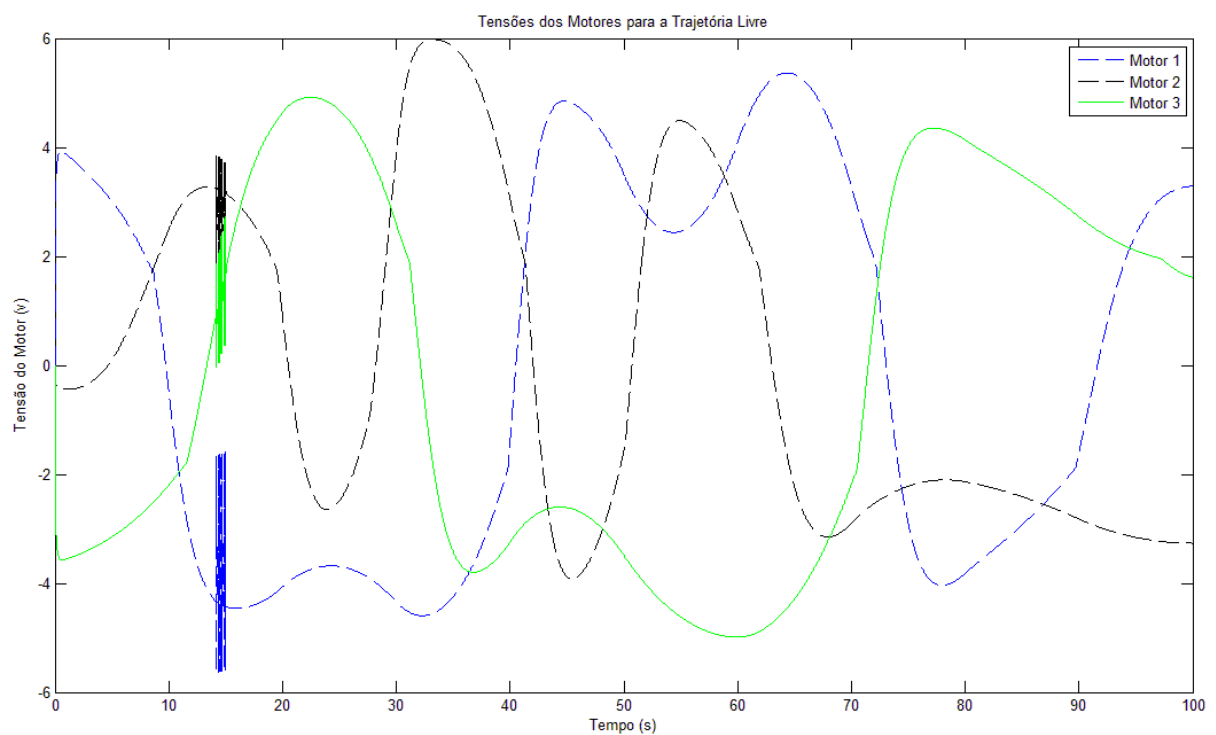


Figura 25 – Tensões na trajetória livre

Os picos de tensões perto dos 6 volts se devem às partes da trajetória em que o robô se encontra realizando curvas bem fechadas. Note que na trajetória retilínea houve um pico não

realizável de tensão de partida. Entretanto, mesmo que o controlador exija do robô tal tensão, essa saturará em 6v devido ao limite da bateria. As Figuras 26 a 28 mostram a variação na velocidade de cruzeiro V_x e V_y do centro de massa do robô.

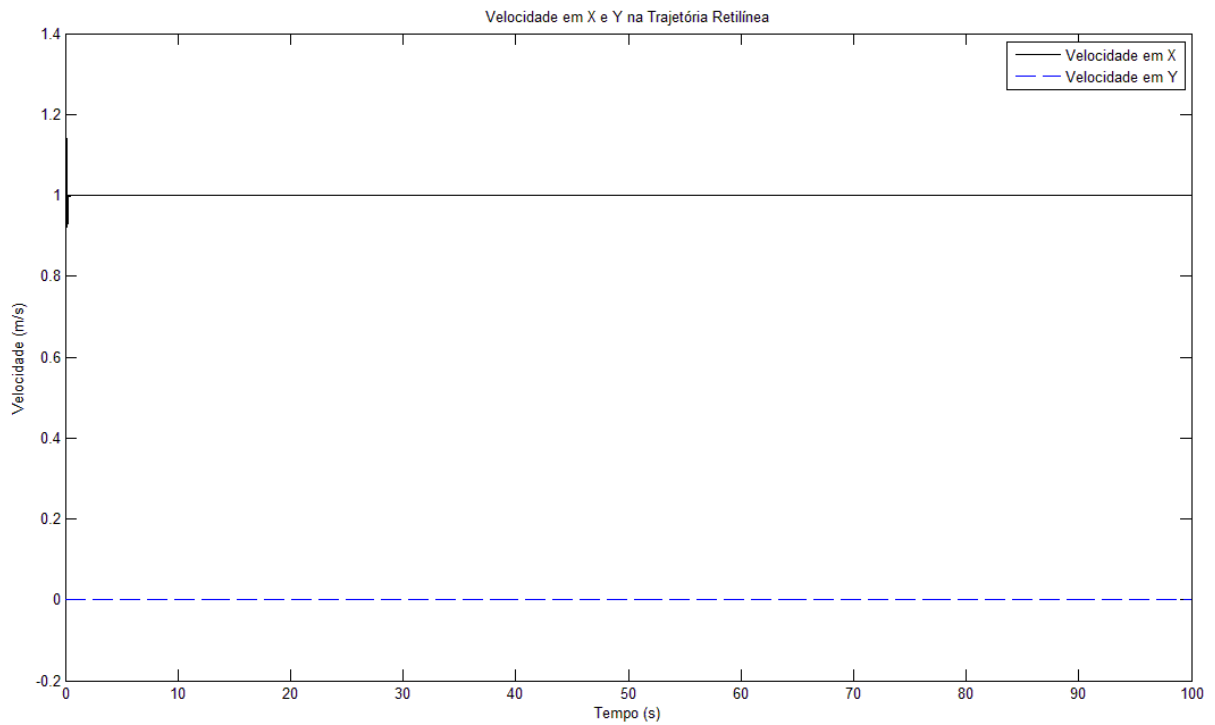


Figura 26 – Velocidades em X e Y para trajetória retilínea

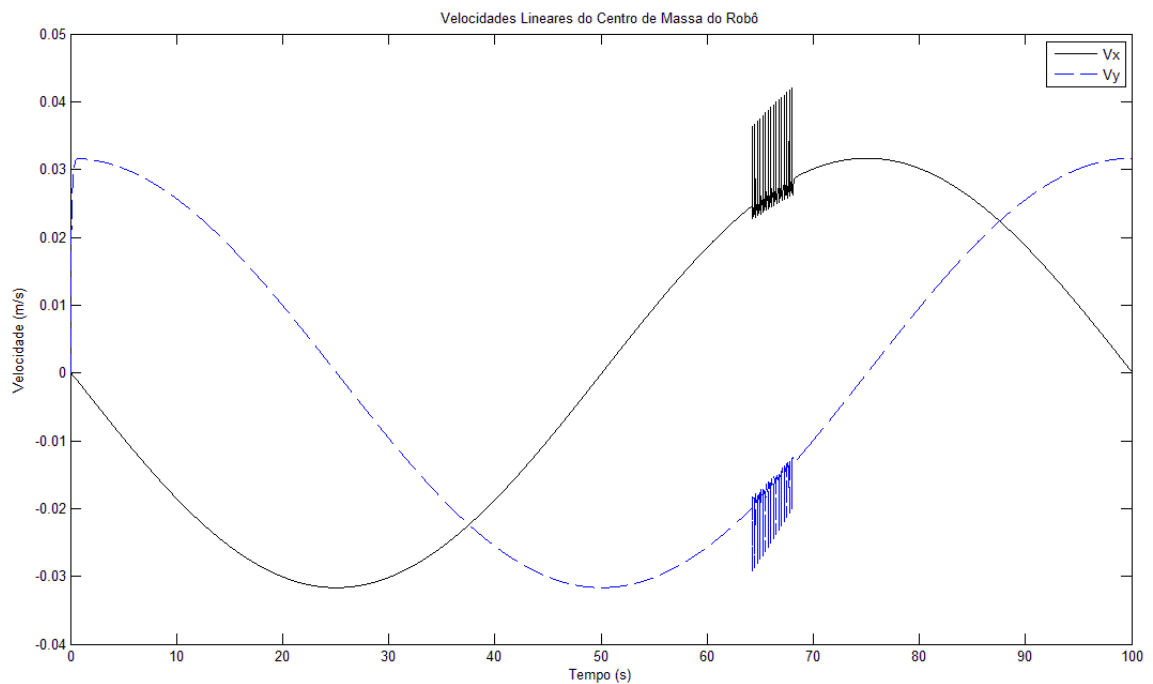


Figura 27 – Velocidades em X e Y para trajetória elipsoidal com distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,5 m

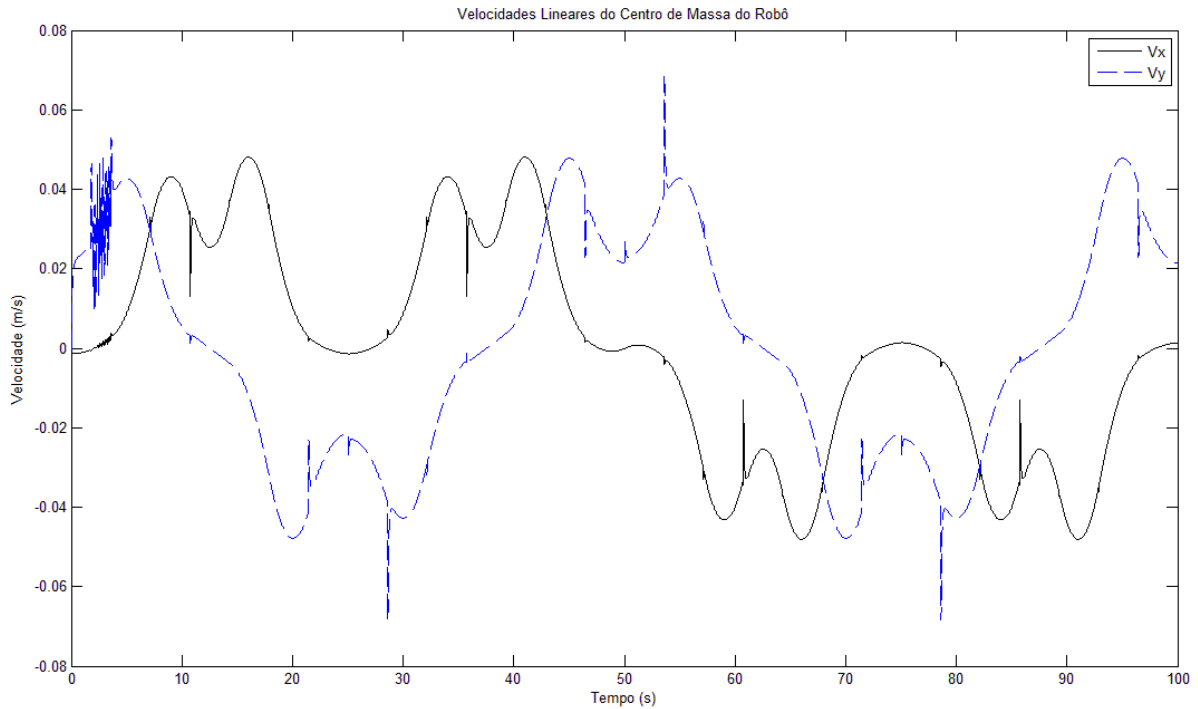


Figura 28– Velocidades em X e Y para trajetória em oito

Outros pontos de operação foram escolhidos para a trajetória elipsoidal, ou seja, foram escolhidas outras dimensões para a trajetória elipsoidal de referência. Num segundo teste foram realizados mais vinte experimentos para uma distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,32 m para trajetória elipsoidal. A Figura 29 mostra o teste realizado para esse segundo ponto de operação.

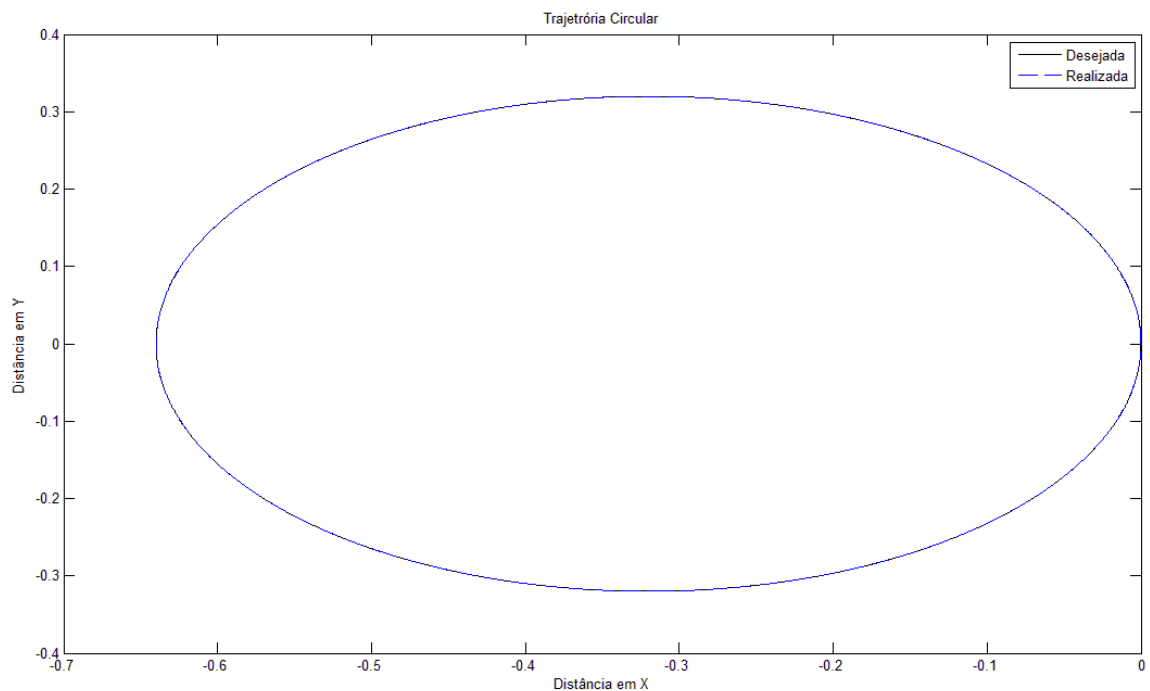


Figura 29 – Trajetória elipsoidal para distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,32 m

A Figura 30 mostra a curva das tensões dos três motores para esta trajetória.

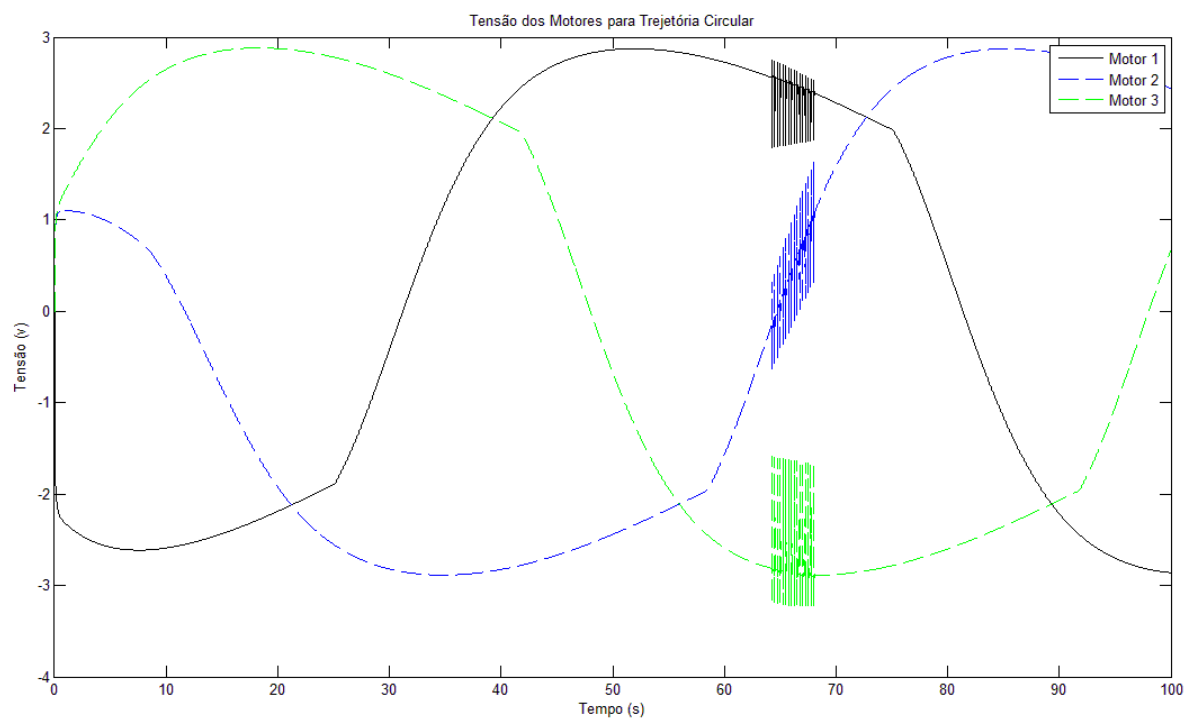


Figura 30 – Tensões na trajetória elipsoidal para distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,32 m

A Figura 31 mostra a variação na velocidade de cruzeiro V_x e V_y do centro de massa do robô.

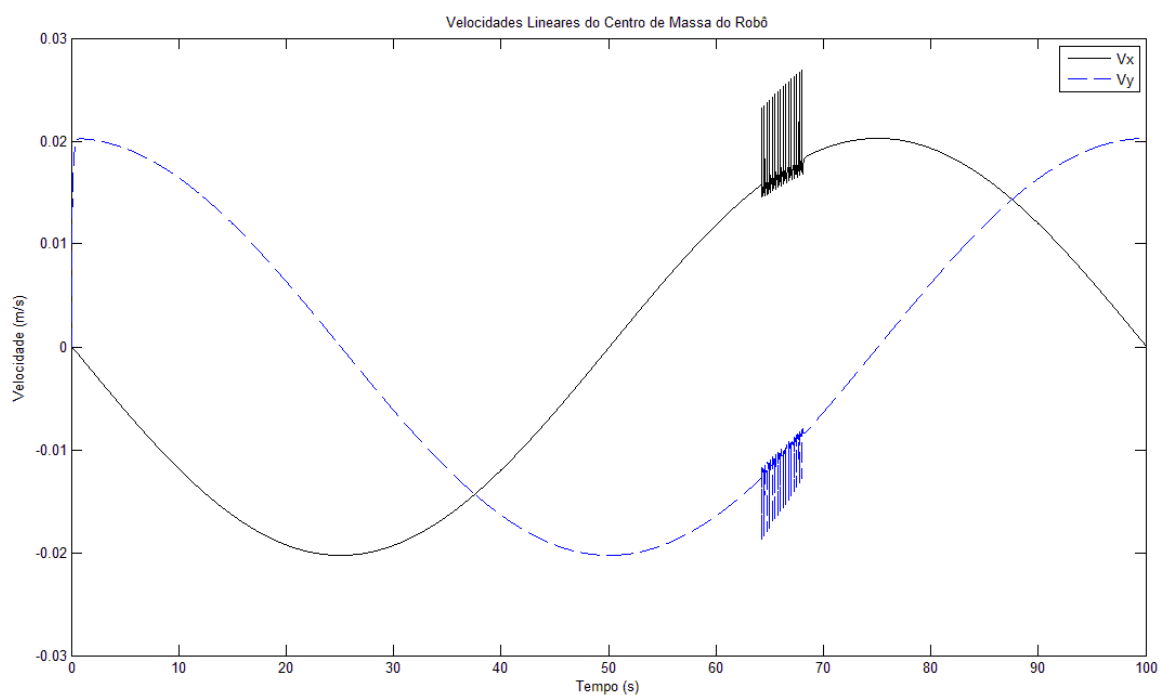


Figura 31 – Velocidades em X e Y para trajetória elipsoidal com distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,32 m

Um último conjunto de pontos de operação foi escolhido para a trajetória elipsoidal. Este teste com mais vinte simulações, foi parametrizado para uma distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,68 m para trajetória elipsoidal. A Figura 32 mostra o teste realizado para este último ponto de operação.

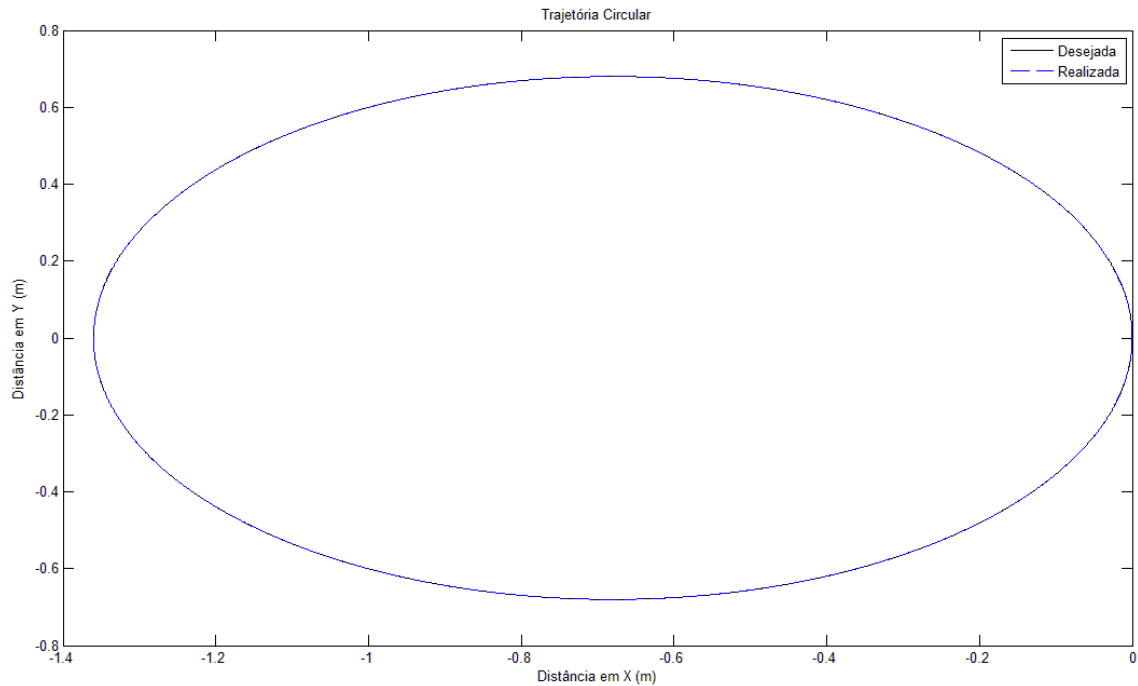


Figura 32 – Trajetória elipsoidal para distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,68 m

A Figura 33 mostra a curva das tensões dos três motores para essa trajetória.

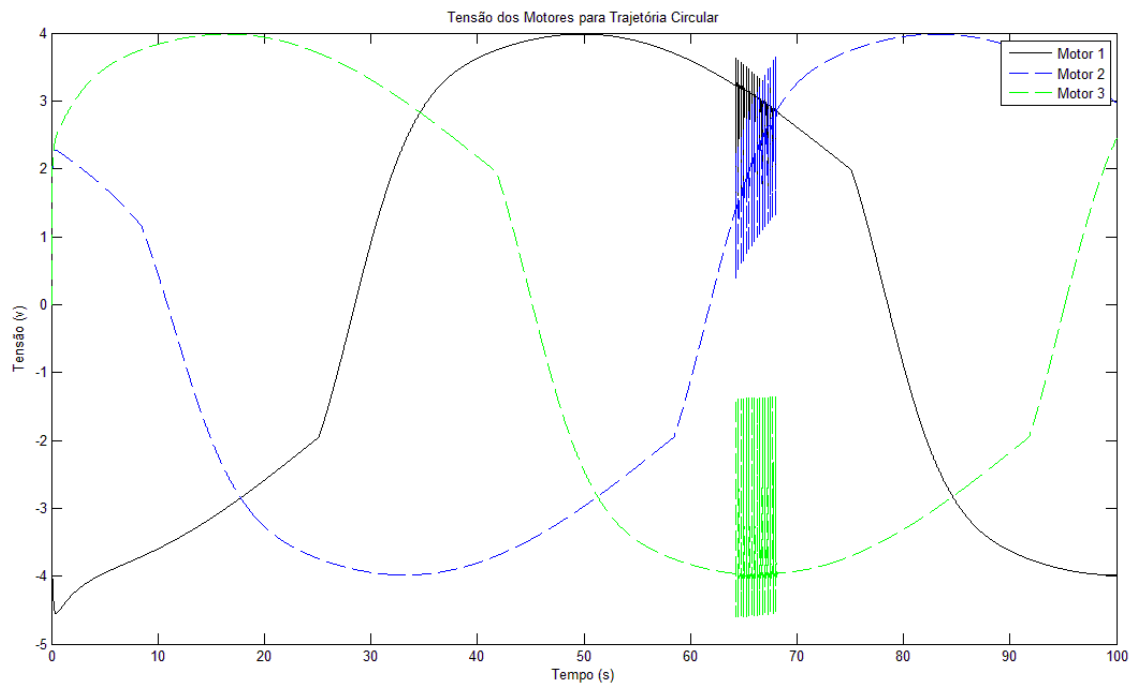


Figura 33 – Velocidade em X e em Y para trajetória elipsoidal para distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,68 m

A Figura 34 mostra a variação na velocidade de cruzeiro V_x e V_y do centro de massa do robô.

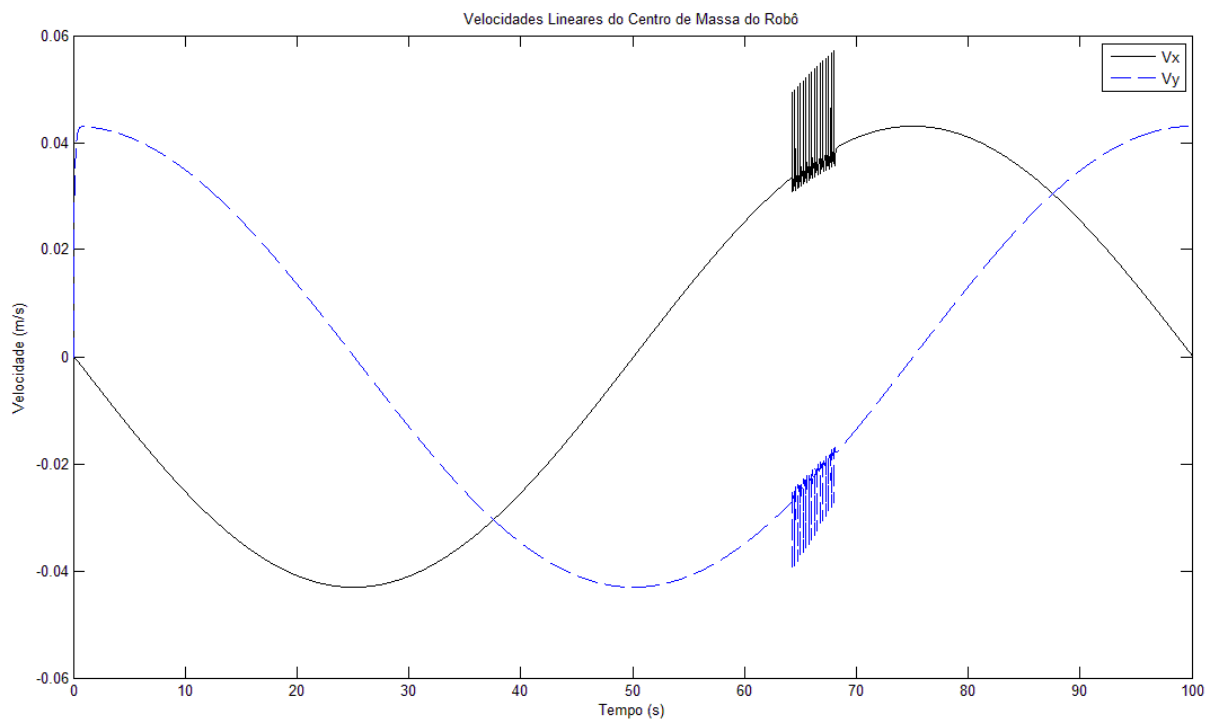


Figura 34 – Velocidade em X e em Y para trajetória elipsoidal para distância entre a origem e as extremidades nos eixos x e y igual a 0,68 m

Para poder ser comparado o desempenho do controlador para a mesma trajetória elipsoidal com raios diferentes, ou seja, em diferentes pontos de operação a tabela abaixo foi criada.

Tabela 5.3 – Resultados da Simulação das Trajetórias Elipsoidais

Índice (em x)	Índice (em y)	Período	Referência	Raio da Trajetória (m)
0,0227	0,0227	100 s	Posição	0,32
0,0553	0,0553	100 s	Posição	0,5
0,1023	0,1022	100 s	Posição	0,68

A tabela acima mostra claramente que, quanto menor a trajetória melhor é o desempenho do controlador. Isso pode ser verificado nos gráficos de tensão e de velocidades, pois ambas diminuem quando a trajetória diminui. Como a velocidade diminui, o controlador tem mais tempo para responder gerando assim menor erro em regime permanente.

Por fim, é observável a existência de distorções nos gráficos de tensões e velocidades das trajetórias em oito (entre 0 e 10 segundos), elipsoidal (entre 60 e 70 segundos) e livre (entre 10 e 20 segundos). Estas distorções são provenientes do gerador de trajetória, e os

intervalos de tempo das ocorrências destes efeitos são os mesmos tanto no gráfico de tensão quanto no gráfico de velocidade.

5.6. Conclusão

A estrutura única de controladores de linearização de trajetória, ou controladores linearizantes em cascata, provê um desempenho considerável ao longo de uma trajetória. A aplicação do controlador multivariável de trajetória do robô móvel AxeBot foi apresentado neste capítulo. Foi mostrado que controladores multivariáveis são baseados numa teoria complexa. Foi analisado o desempenho do controlador para sinais de posição e velocidade, utilizando o índice de desempenho baseado na integral do quadrado do erro e a análise gráfica da trajetória, das tensões nos motores e das velocidades de cruzeiro do centro de massa para cada trajetória. Esta análise mostrou a eficiência da utilização de um controle multivariável de trajetória em controladores em cascata.

Entretanto, é importante considerar que, para aplicações em futebol de robôs, como a dinâmica do sistema muda bruscamente, ou seja, como há uma mudança brusca na velocidade de cruzeiro, esta arquitetura possa ser substituída por controladores não lineares propriamente ditos. As constantes acelerações e frenagens aumentam o erro inerente a essas mudanças na velocidade de cruzeiro o que geram erros de posicionamento constantes mesmo com controladores em cascata.

Outra consideração importante é que este controlador não é tolerante ao deslizamento. O deslizamento aqui considerado é $s = 0,03$. Para deslizamentos superiores, o controlador exige dos atuadores tensões irrealizáveis para que possam seguir a trajetória desejada.

Capítulo 6

6. Conclusão e Trabalhos Futuros

6.1. O Propósito da Dissertação

Um controlador linearizante de trajetória multivariável para o robô omni-direcional AxeBot é apresentado nesta dissertação. A técnica de controle multivariável utiliza um controlador Proporcional-Integral para cada canal da matriz de transferência em malha fechada, sendo esta diagonal dominante. Esta técnica formaliza o controlador o qual é sintonizado utilizando a técnica do lugar das raízes para cada canal, visto que estes possuem funções de transferência iguais. O controlador proposto tem como objetivo atender às especificações de comportamento, possuindo uma dinâmica mais lenta do que a dinâmica da malha interna, utilizando somente a facha permitida de tensões nos motores, minimizando o erro em regime estacionário gerado pela malha interna no controle em cascata e seguindo a trajetória desejada.

O capítulo 2 apresenta a estrutura física do AxeBot, incluindo sua arquitetura mecânica, eletrônica e computacional. Neste capítulo também é apresentado o conceito formal sobre robótica móvel e a delimitação do tema desta dissertação. No capítulo 3 é feita uma revisão teórica que norteou toda a abordagem deste trabalho.

No capítulo 4 é apresentado o modelo cinemático e dinâmico e sua forma inversa. Neste capítulo também é visto a forma canônica de ambos os modelos e suas respectivas linearizações. Por fim, é encontrada a matriz de funções de transferência do sistema em malha fechada.

Por fim, no capítulo 5 o controlador multivariável é concebido. Sua sintonização é realizada, os testes são feitos e a discussão sobre os resultados gerais das simulações são realizadas.

6.2. Conclusões

Diversos estudos se tornaram freqüentes no modelo do robô AxeBot devido à agilidade na locomoção destes veículos proporcionando um vasto estudo de casos para a área da robótica móvel [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Robôs deste tipo são bastante utilizados na robótica móvel por serem rápidos e de fácil manobra e com uma mecânica de complexidade relativamente baixa, porém, com difícil adaptação em certos terrenos. As rodas deste robô são especiais, chamadas de rodas Suecas [7]. Possibilitam o movimento tanto tangencial quanto perpendicular, entretanto, são relativamente inaplicáveis a terrenos com desníveis. O AxeBot, robô omni-direcional estudado, é dotado de habilidades para executar tarefas autônomas, tendo como laboratório de testes o futebol de robôs, categoria F180 da *Robocup Federation*.

Conforme mencionado anteriormente, o objetivo deste trabalho é a formalização do sistema de controle de trajetória para os robôs móveis omni-direcionais em questão. Este deve considerar a influência do acoplamento entre as três rodas do robô na realização do controle de trajetória desse sistema multivariável. Para tal sistema acoplado, não-linear e MIMO (*Multiple-Inputs / Multiple-Outputs*) foi desenvolvido um controle multivariável, cuja sintonização foi feita pelo método do lugar das raízes.

6.3. Contribuições

As contribuições dessa dissertação são:

- Construção de duas estruturas físicas do AxeBot;
- Construção e interligação da estrutura eletrônica dos AxeBots;
- Apresentação da estrutura física detalhadamente, incluindo a arquitetura mecânica, eletrônica e computacional do AxeBot;
- Apresentação do modelo fenomenológico do robô AxeBot incluindo as não linearidades de entrada tais como zona morta e saturação;

- Apresentação do modelo dinâmico e cinemático do AxeBot em espaço de estados;
- Apresentação do modelo dinâmico linearizado por realimentação entrada-estado;
- Apresentação do modelo cinemático linearizado por realimentação exata em torno do ponto de equilíbrio;
- Construção de um controlador de trajetória multivariável para o controle em cascata do AxeBot.

6.4. Trabalhos Futuros

- Implementação de um sistema de navegação que possibilite a aplicação da mudança de orientação do sistema de controle em cascata;
- Implementação do controlador proposto no sistema embarcado do AxeBot;
- Projeto de um controlador de trajetória preditivo multivariável para fins de comparação com o controlador proposto;
- Projeto de um controlador de trajetória tolerante ao deslizamento nas rodas para fins de comparação com o controlador proposto;
- Implementação do controlador proposto incluindo a realimentação por fusão de sensores ao invés de realimentação unitária;
- Implementação do controlador proposto em sistemas multi-agentes.

Referências

- [1] WATANABE, K. Control of an Omnidirectional Mobile Robot. In: IEEE SECOND INTERNATIONAL CONFERENCE OF KNOWLEDGE BASED INTELLIGENT ELECTRONICS SYSTEMS, 1998, pg. 51-60.
- [2] KODAGODA, K. R. S., WIJESOMA, W. S., TEOH, E. K. Fuzzy Speed and Steering Control of an AGV. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, vol 10, No. 1, 2002.
- [3] LIU, Y. et al. **Omni-Directional Mobile Robot Controller Design by Trajectory Linearization**. School of Electrical Engineering and Computer Science, Ohio University. 2001.
- [4] CONCEIÇÃO, A. S., MOREIRA, A. P., COSTA, P. J. Architecture Control and Model Identification of a Omni-Directional Mobile Robot. In: 12TH PORTUGUESE CONFERENCE ON ARTIFICIAL INTELLIGENCE, 2005, Covilhã. EPIA 2005, 2005. p. 247-251.
- [5] HARO, F., TORRES, M. A Comparison of Path Planning Algorithms for Omni-Directional Robots in Dynamic Environments. **Proceedings of the Latin American Robot Symposium**, 2006.
- [6] LAI et al. Time-Optimal Control of an Omni-Directional Mobile Robot. **Proceedings of the ICIEA**, 2006.
- [7] UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA. Projeto Axebot: Agentes autônomos. Disponível em: <<http://www.axebot.ufba.br>>. Acessado em: 27 fevereiro 2008.
- [8] SALES, A. C. L. **Controle em cascata aplicado ao rastreamento de trajetória de robôs móveis omnidirecionais**. Salvador, 2008. Trabalho de Final de Curso (Engenharia Elétrica) – Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia.
- [9] BYOUNG-JU, L., SUNG-OH, L., GWI-TAE, P. Trajectory Generation and Motion Tracking Control for the Robot Soccer Game. **Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems**, 1999, pg. 1149-1154.

- [10] FARIA et al. Comparing Harmonic Functions and Potential Fields in the Trajectory Control of Mobile Robots. **Proceedings of the 2004 IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics**, Singapore, 2004.
- [11] DA CRUZ, A. P. B. **Modelagem Dinâmica de uma Estrutura de Base Holonômica para Robôs Móveis: Inclusão das Não-Linearidades de Entrada**. Salvador, 2007. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia.
- [12] MARCHIL, J. **Navegação de robôs móveis autônomos: Estudo e implementação de abordagens**. Florianópolis, 2001. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica), Universidade Federal de Santa Catarina;
- [13] CORRADINI, M. L. ORLANDO, G. A Discrete Adaptive Variable-Structure Controller for MIMO Systems, and Its Application to an Underwater ROV. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, VOL. 5, NO. 3. 1997.
- [14] FRANCO, A. C. **Geração e Controle de Trajetória de Robôs Móveis Omnidirecionais**. Salvador, 2006. Dissertação (Mestrado em Mecatrônica) – Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia.
- [15] SIEGWART, R. NOURBAKHSI, I. R. **Introduction to Autonomous Mobile Robots**. London, England: The MIT Press., 2004.
- [16] LAURA, T. L. **Modelagem dinâmica de uma base móvel incluindo as não-linearidades de entrada**. Salvador, 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia.
- [17] CAMPION, G., BASTIN, G., and D'ANDRÉA-NOVEL, B. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. **IEEE Transaction on Robotics and Automation**, vol. 12, no. 1, pp. 47–62, 1996.
- [18] VELOSO, M., STONE P., HAN K. **The CMUnited-97 Robotic Soccer Team: Perception and Multiagent Control**, Carnegie Mellon University, USA. 1997.
- [19] KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**, Prentice Hall 1996.
- [20] DA SILVA, G. M. **Controle Não Linear**, Escola Superior de Tecnologia de Setúbal, Portugal, 2003.

- [21] SLOTINE, J.-J.; LI, W. **Applied Nonlinear Control**. Prentice Hall, 1991.
- [22] DORF, R.C., BISHOP, R. H. **Sistemas de Controle Modernos**, LTC, 2001.
- [23] OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 4. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2003.
- [24] FRANKLIN, G. F., POWELL, J. D., EMAMI-NAEINI, A. A. **Feedback Control of Dynamic Systems**. Addison-Wesley Publ. Co., Reading, MA, Second Edition. 1991.
- [25] ATHERTON, D. P. **Nonlinear Control Engineering**, Van Nostrand Reinhold Co., London and New York. 1975.
- [26] POPOV, E. P. **Applied Theory of Control Processes in Nonlinear Systems (in Russian)**, Nauka, Moscow. 1973.
- [27] GASPARYAN, O. N. **Linear and Nonlinear Multivariable Feedback Control: A Classical Approach**. John Wiley & Sons, Ltd. ISBN: 978-0-470-06104-6, 2008.
- [28] O'REILLY, J. **Multivariable Control for Industrial Applications**. Peter Peregrinus Ltd., United Kingdom, 1987.
- [29] BEDROSSIAN, N. **Nonlinear Control Using Linearizing Transformations**. Cambridge, 1991. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) Massachusetts Institute of Technology.
- [30] CARDOSO, G. DE S. **Controle Não-Linear Baseado na Geometria Diferencial**. Salvador, 2008. Dissertação (Mestrado em Mecatrônica) – Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia.
- [31] LAGES, W. F. **Controle e Estimação de Posição e Orientação de Robôs Móveis**. São José dos Campos, 1998. Dissertação (Mestrado) - Instituto Tecnológico de Aeronáutica.
- [32] CAMPION, G.; BASTIN, G.; DANDREA-NOVEL, B. Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots. **IEEE Transactions on Robotics and Automation**, v. 12, p. 47-62. 1996.
- [33] ZEFRAAN, M.; BULLO, F. Lagrangian dynamics. In: KURFESS, T. R. (Ed.). **Robotics and Automation Handbook**. [S.l.: s.n.], 2004. cap. 5. ISBN 0849318041.

- [34] LIU, Y. et al. Omni-directional mobile robot controller based on trajectory linearization. **Robotics and Autonomous Systems**, 56, p461–479, 2008.
- [35] DOS SANTOS, C. M. P. **Generating Timed Trajectories for Autonomous Robotic Platforms: A Non-Linear Dynamical Systems Approach**, Open Access Database www.i-techonline.com, 2008.
- [36] PASCOAL, A., et al. MARIUS: an autonomous underwater vehicle for coastal oceanography. **IEEE Robotics and Automation Magazine, Special Issue on Robotics and Automation in Europe: Projects funded by the Commission of the European Union**, Vol. 4, No.4, pp. 46-59. 1997.
- [37] ROUSSEL, M. R. **Singular perturbation theory**, 2004.
- [38] LIU, Y., ZHU, J.J. Singular perturbation analysis for trajectory linearization control. In: **AMERICAN CONTROL CONFERENCE**, 2007, pp. 3047–3052.