Avaliação da Condição de Desgaste de Contatos Elétricos em OLTCs Utilizando a Análise Espectral de Prony do Sinal de Vibração Acústica

Robson da Silva Magalhães

Tese de mestrado submetida à Coordenação dos Cursos de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Bahia, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Ciências no domínio da Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Processamento Digital de Sinais

Luiz Alberto Luz de Almeida, Ph.D. Orientador

Salvador, Bahia, Brasil ©Robson da Silva Magalhães, Abril de 2005

Avaliação da Condição de Desgaste de Contatos Elétricos em OLTCs Utilizando a Análise Espectral de Prony do Sinal de Vibração Acústica

Robson da Silva Magalhães

Tese de Mestrado

Luiz Alberto Luz de Almeida, Ph.D. Orientador

> Rui Seara, Ph.D. Componente da Banca

Paula Frassinetti Cavalcante, Ph.D. Componente da Banca

Salvador, Bahia, Brasil, Abril de 2005

Dedicatória

Dedico os frutos dessa obra a Deus de quem temos recebido toda a sabedoria para vida em comum com nossos semelhantes.

Agradecimentos

A Deus por ter me concedido uma continua oportunidade de aprendizado, por me manter firme apesar dos meus desânimos, fortalecendo-me e fazendo-me sempre tentar dar o melhor de mim.

A esposa Luciene e aos filhos Karilena e Robson Jr, pelo incentivo, apoio e compreensão nas muitas horas que os privei da minha companhia e dedicação. Aos meus pais Walter e Geny pelo que me trouxeram à vida e pela formação moral e religiosa. Ao professor Luiz Alberto Luz de Almeida pela eficiente e eficaz orientação e dedicação na tarefa de tornar as minhas idéias mais claras e melhorar os meus manuscritos. Aos colegas e amigos Leandro Ferreira, Eduardo Filho e Sérvulo pelo entusiasmo contagiante, apoio e incentivo constantes durante o período de realização dos trabalhos, em especifico, ao Leandro e ao Eduardo pela participação e colaboração nas coletas de dados do sistema. Aos membros da banca, os professores Rui Seara e Paula Frassinetti Cavalcante, pelas críticas construtivas sobre esta investigação e pelo tempo dedicado na revisão deste manuscrito.

Aos funcionários da *UFBA*, em especial a José pelo seu zelo nos muitos momentos em que precisei de sua orientação acerca dos processos administrativos do curso.

À *UFBA* pela oportunidade de realização deste curso. Ao *SENAI* pela concessão de tempo para estudos. À empresa *TRACOL* pela disponibilidade dos recursos utilizados em sua oficina durante a coleta de dados. Aos professores e colegas da *UFBA* pelo apoio e incentivo, discussões técnicas e pelo companheirismo e convivência agradável.

Resumo

Nesse trabalho estuda-se a implementação de um sistema preditivo (não-intrusivo) capaz de avaliar a condição de desgaste dos contatos montados no sistema mecânico utilizado para controle dos *OLTC*s (On-Load Tap Changer).

A principal atribuição deste sistema preditivo é indicar o melhor momento para realização da manutenção (substituição desses contatos) e ou verificar se essa manutenção foi realizada corretamente.

O OLTC é responsável por manter constante na rede a tensão fornecida pelas subestações de energia elétrica. Utiliza-se um sistema mecânico, subconjunto do OLTC, para mudar as derivações de um transformador de potência (principal subconjunto do OLTC) que estabiliza a tensão da rede. Esse sistema mecânico é acionado através de um controlador. A presença de componentes mecânicos em um OLTC possibilita a ocorrência de desgaste ou de falhas de posicionamento no mecanismo.

Visando a análise da condição dinâmica dos componente mecânicos em um *OLTC*, foi desenvolvido um módulo de condicionamento de sinais, que acoplado ao *OLTC*, possibilita a análise do sinal de vibração emitido pelo acionamento do contato. O módulo é composto de uma entrada analógica para o sinal de vibração medido por um acelerômetro. Esse sinal passa por um conjunto de filtros analógicos e amplificadores que podem ser ajustados para eliminar ruídos e freqüências indesejáveis no estudo do sinal de vibração. A saída do módulo de condicionamento de sinais é conectada a um microcomputador através da placa de som. No microcomputador, é aplicada ao sinal coletado uma ferramenta de análise para diagnóstico.

A ferramenta matemática aqui utilizada para diagnóstico do estado do *OLTC* é baseada em técnicas paramétricas de estimação espectral, conforme o modelo escolhido na representação do sistema. Essa ferramenta baseia-se no Método de Prony.

Os resultados obtidos são considerados satisfatórios e possibilitam o diagnóstico do estado dos contatos em um *OLTC*. Portanto, é possível gerar um indicador que defina o melhor momento para interferir no sistema, realizando-se uma manutenção preventiva. Entretanto, o modelo desenvolvido reproduz apenas de forma aproximada o estado real dos contatos no *OLTC*. É possível que problemas pontuais, que não evoluam de forma linear, não sejam antecipadamente identificados pelo método aqui apresentado.

Abstract

On-load tap changers (OLTC) are electromechanical devices employed for voltage regulation in electrical distribution systems. The mechanism responsible for this control is a regulation system, composed by a set of electrical contacts and a mechanical positioning system which moves the contacts for the position determined by the electronic control unit.

The OLTC mechanism is immersed into insulator oil, and its maintenance is made by regular predictive inspections, in a period safe enough to avoid operational failures. However, these inspections are time consuming and require the device to be disconnected form the system and consequently out of operation. Depending on the contact aging condition, this period may be increased which results in a reduced average maintenance cost. To estimate the contact condition without disconnecting the OLTC, it is necessary a non-invasive on-line diagnostic method.

A method usually employed for non-invasive monitoring is the vibration testing. In the case of the OLTC mechanism, a transient vibration signal is emitted during the tap change, and this signal may be used to develop a method to estimate the aging of the corresponding electrical contact. There are many different approaches to analyze vibration signals. One is through the spectral analysis technique based on the Fast Fourier Transform (FFT). However, the application of the FFT has two major inherent limitations. First, the spectral features are affected by the signal windowing, which is necessary in the time domain. Second, to obtain a high spectral resolution the sampling frequency should be considerably high, or a long time window should be employed. These limitations lead to a lack of memory availability in the data acquisition system. Moreover, the FFT characterizes better a stationary signal, which is not this case. To overcome these limitations, it is proposed in this work the Prony spectral analysis as a methodology for condition assessment of on-load tap-changers using vibration signals.

A set of experimental vibration signals was acquired from OLTCs before and after maintenance. The Prony spectrum and a classification procedure were obtained for these signals, relating them to the observed aging condition of the electrical contacts. The results are considered satisfactory and the proposed technique is suitable for the diagnosis of the state of the contacts in an OLTC.

Conteúdo

1	1 Introdução		6
	1.1	Condições para o Monitoramento de Máquinas por Análise de Vibrações	7
	1.2	Manutenção Preditiva Através da Análise de Vibrações	8
	1.3	Resultados Previstos	10
	1.4	Objetivo do Trabalho	10
	1.5	Organização da Dissertação	11
2	Estimação Espectral Clássica		
	2.1	Introdução	13
	2.2	Técnicas de Processamento de Sinais	14
		2.2.1 Transformada de Fourier	14
		2.2.2 Sinais: Classificação e Tratamento Estatístico	16
3	Pro	cessos Auto Regressivos	19
	3.1	Introdução	19
	3.2	Modelos Paramétricos de Processos Estocásticos	19
		3.2.1 Modelos Auto Regressivos	19
		3.2.2 Estimação Espectral	22
4	\mathbf{Est}	imação Espectral Auto Regressiva - Método Numérico	24
	4.1	Introdução	24
	4.2	Método Estatístico de Estimação	24
	4.3	Equação Normal para os Mínimos Quadrados	28
	4.4	Métodos de Estimação Linear pela Covariância	30
5	Mé	todo de Prony	35
	5.1	Introdução	35
	5.2	Resumo	36
	5.3	Estimação Interativa - Parâmetros das Exponenciais	37
	5.4	Conceitos Básicos do Método de Prony	40

	5.5	Método dos Mínimos Quadrados Aplicado a Prony	42	
	5.6	Implementação do Algoritmo de Prony	45	
6	Plat	aforma Experimental	48	
	6.1	Introdução	48	
	6.2	O Regulador de Tensão (<i>OLTC</i>)-Equipamento Piloto	48	
		6.2.1 Montagem	53	
		6.2.2 Manutenção	53	
		6.2.3 Comutador ($Tap Changer$)	54	
	6.3	Operação do Comutador	56	
		6.3.1 Comutadores de Mola e de Acionamento Direto	56	
		$6.3.2 Motor \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots $	56	
		6.3.3 Chave de Reversão	56	
		6.3.4 Mecanismo de Acionamento por Mola	57	
		6.3.5 Contatos	57	
		6.3.6 Operação	59	
		6.3.7 O Modulo Comutador e a Mudança de TAP	60	
	6.4	Módulo de Condicionamento de Dados	62	
7	Coleta de Dados e Resultados 65			
	7.1	Introdução	65	
	7.2	Seleção da Ordem do Modelo		
	7.3	Análise dos Resultados	81	
		7.3.1 Prony Aplicado ao Sinal com Dizimação n=2 e ordem $p=17$	83	
		7.3.2 Prony Aplicado ao Sinal sem Dizimação Ordem $p=2$	84	
8	Con	clusões e Trabalhos Futuros	85	
A Processos Estocásticos		essos Estocásticos	87	
	A.1	Conceitos Importantes	87	
	A.2	Modelos Paramétricos de Processos Estocásticos	92	
		A.2.1 Resumo	92	
в	Rot	nas para aplicação dos algorítimos	94	
	B.1	Sub-rotina PRONY (MATLAB)	94	
	B.2	Sub-rotina EXPARAMS (MATLAB)	97	

Lista de Figuras

1.1	Fluxo de implantação da Manutenção Preditiva	9
1.2	Fluxo do sistema não-intrusivo de monitoramento proposto para $OLTC{\rm s.}$	11
3.1	Representação do modelo ARMA	21
3.2	Representação do modelo AR	21
3.3	Representação do modelo MA	21
5.1	Fluxograma da aplicação do modelo de estimação exponencial (Método de Prony) $$.	37
5.2	Exemplo de estimativa espectral por Prony	37
6.1	Plataforma Experimental.	49
6.2	Regulador de tensão - Equipamento Piloto.	50
6.3	Componentes externos do <i>OLTC</i>	51
6.4	OLTC aberto para manutenção	52
6.5	Comparação entre um contato usado e desgastado (esquerda) e um contato bom e não d	lesgastado(dir
6.6	Módulo Comutador.	54
6.7	Placa de contatos do módulo comutador	55
6.8	Posição relativa contato móvel: a) sobre 1 contato fixo, b) sobre 2 contatos fixos	56
6.9	Disposição das molas no comutador	57
6.10	Comutador acionado por molas.	58
6.11	Sobressalentes comutador.	59
6.12	Esquema do Módulo Comutador	60
6.13	Estágios de uma Mudança de Tap	61
6.14	Intervalos de Tempo do Sinal	61
6.15	Módulo de Condicionamento de Sinais	63
6.16	Acelerômetro tipo 4395 Bruel Kjaer (Alimentação $ICP^{\textcircled{B}}$)	63
6.17	Circuito de polarização do sensor (Fonte $ICP^{\textcircled{R}}$)	63
6.18	Circuito amplificador com filtro analógico. $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	64
6.19	Fonte CC	64
7.1	Fixação do sensor com base magnética.	65

7.2Definição da ordem pelo critério FPE para os sinais sem dizimação. a) Curvas dos números FI Definição da ordem pelo critério AIC para os sinais sem dizimação: a) Curvas dos números AI 7.37.4Definição da ordem pelo critério MDL para os sinais sem dizimação. a) Curvas dos números M Definição da ordem pelo critério CAT para os sinais sem dizimação. a) Curvas dos números C 7.5Definição da ordem pelo critério FPE para os sinais com dizimação (n=2). a) Curvas dos núm 7.67.7Definição da ordem pelo critério AIC para os sinais com dizimação (n=2). a) Curvas dos núme 7.8Definição da ordem pelo critério MDL para os sinais com dizimação (n=2). a) Curvas dos núm 7.9Definição da ordem pelo critério CAT para os sinais com dizimação (n=2). a) Curvas dos núm 7.10 Definição da ordem pelo critério FPE para os sinais com dizimação (n=3). a) Curvas dos núm 7.11 Definição da ordem pelo critério AIC para os sinais com dizimação (n=3). a) Curvas dos núme 7.12 Definição da ordem pelo critério MDL para os sinais com dizimação (n=3). a) Curvas dos núm 7.13 Definição da ordem pelo critério CAT para os sinais com dizimação (n=3). a) Curvas dos núm 7.14 Estimativa espectral pelo método de PRONY (ordem p=17) para sinais coletados a 44.100 Hz 7.15 Estimativa espectral pelo método de PRONY (ordem p=2) para sinais coletados a 44.100 Hz s

Lista de Tabelas

6.1	Ciclo negativo de um regulador de 32 posições	 60
6.2	Ciclo positivo de um regulador de 32 posições	 60

Lista de Símbolos e Abreviaturas

Símbolos

A_k	Amplitudes identificadas em um sinal amostrado
a	Vetor de parâmetros em um modelo AR
a[m]	Parâmetros de predição linear
A(q)	Polinômio formado pelos parâmetros de predição $a[m]$
b	Vetor de parâmetros em um modelo MA
b[m]	Parâmetros de predição linear
B(q)	Polinômio formado pelos parâmetros de predição $b[m]$
$c_{xx}[m]$	Função de auto covariância
$c_{xy}[m]$	Função de covariância cruzada
$c_{xx}[n_1, n_2]$	Auto covariância de um processo estocástico para um par de instantes n_1 e n_2
$c_{xy}[n_1, n_2]$	Covariância cruzada de dois diferentes processos estocásticos
c_k	Coeficientes das exponenciais complexas na série de Fourier
d	Número inteiro que expressa o atraso de resposta em um sistema
E	Erro quadrático de predição
e	Vetor erro de predição
\mathbf{e}^{H}	Operação Transposta Hermitian do vetor ${\bf e}$
e[n]	Erro da predição linear
f_k	Freqüências identificadas no sinal amostrado
$F(\alpha, n)$	Função distribuição de probabilidade
h	Vetor de parâmetros para calculo da amplitude e fase (PRONY)
h_k	Amplitude complexa independente do tempo
h[n]	Resposta ao impulso do sistema
H(z)	Função de transferência (transformada z da seqüência $h[n]$)
j	$\sqrt{-1}$
N	Número de amostras discretas de um processo estocástico
n	Tempo discreto em um processo estocástico discreto
p	Ordem do filtro que melhor representa um sistema através de um modelo

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

$p(\alpha, n)$	Função de Densidade de Probabilidade
Pr(E)	Probabilidade de ocorrência do evento (E)
$P_{xx}(f)$	Função Densidade espectral de potência
$r_{xx}\left[m ight]$	Função de auto correlação
$r_{xy}\left[m ight]$	Função de correlação cruzada
$r_{xx}\left[n_1,n_2\right]$	Auto correlação de um processo estocástico para um par de instantes n_1 e n_2
$r_{xy}\left[n_1,n_2\right]$	Correlação cruzada de dois diferentes processos estocásticos
$S_T(\Omega)$	Densidade de potência do sinal $x_T(t)$
t	Tempo (segundos)
T	Período de um sinal periódico
T_{p}	Matriz de amostras (não janelada). Matriz retangular tipo Toeplitz
u	Vetor do sinal de entrada (aleatório)
u[n]	Valor medido das variáveis (sinal de entrada) de um processo estocástico discreto
$\mathbf{x}[\mathbf{n};\mathbf{i}]$	Processo estocástico discreto
x	Vetor do sinal de saída (amostrado)
x[n]	Valor medido das variáveis (sinal de saída) de um processo estocástico discreto
$\bar{x}[n]$	Média ou valor esperado para as variáveis de um processo estocástico discreto
$\hat{\mathbf{x}}$	Vetor estimado para o vetor do sinal amostrado (modelo do sinal)
$\hat{x}[n]$	Valor estimado das variáveis de um processo estocástico discreto
$\tilde{\mathbf{x}}$	Vetor erro real de predição
X_k	DFT - Discrete Fourier Transform
\mathbf{X}_p	Matriz de amostras (matriz retangular Toeplitz)
x(t)	Sinal no domínio do tempo
$X(\omega)$	Sinal no domínio da freqüência
y[n]	Valor medido das variáveis de um processo estocástico discreto
W[n]	Função janela de ponderação
\mathbf{Z}	Matrix de raízes
z_k	Exponencial complexa dependente do tempo
α_k	Parâmetros de amortecimento identificados no sinal amostrado
$\epsilon[n]$	Erro de aproximação da predição exponencial
ψ_k	Fases iniciais identificados no sinal amostrado
η_T	Média temporal de um processo estocástico
θ	Vetor dos parâmetros a b em um modelo <i>ARMA</i>
$\hat{oldsymbol{ heta}}$	Estimativa do vetor dos parâmetros $\boldsymbol{\theta}$
$ ilde{oldsymbol{ heta}}$	Erro real de estimação de parâmetros
$\vartheta(z)$	Polinômio cujo as raízes são os parâmetros $z_1,,z_p$

ρ	Erro quadrático de estimação de um processo estocástico
$ ho_p$	Mínimo erro quadrático na estimação de um sistema por um model o AR de ordem p
ϕ	Matriz dos regressores
arphi	Vetor dos regressores
ω	Função contínua da freqüência angular (em rad/s)
ω_0	Freqüência angular (em rad/s) de um sinal periódico de período T

Abreviaturas

No caso de abreviaturas internacionalmente conhecidas, optou-se por manter as mesmas em sua lingua original.

ACF	Auto Correlation Function
ADC	Analogic Digital Conversor
AIC	Akaike Information Criterion
AR	Autoregressive
ARMA	Autoregressive Moving Average
CAT	Criterion Autoregressive Transfer Function
CCF	Cross Correlation Function
CIGRE	Conseil International Des Grands Réseaux Electriques
DFT	Discrete Fourier Transform
DGA	Dissolved Gas-in-oil Analysis
DTFT	Discrete-Time Fourier Transform
END	Ensaio não-destrutivo
ETP	Electrical Tough Pitch
ESD	Energy Spectral Density
FFT	Fast Fourier Transform
FPE	Final Prediction Error
FT	Fourier Transform
$ICP^{\textcircled{R}}$	Is a trademark of PCB Piezotronics, Inc.
MA	Moving Average
MDL	Minimum Description Length
OLTC	On-Load Tap Changer
PDF	Probability Density Function
PSD	Power Spectral Density
WSS	Wide-Sense Stationary

Capítulo 1

Introdução

Ensaios não-destrutivos (END) são métodos que garantem a qualidade e a manutenibilidade de produtos e processos (Andrade, 2004).

Na maioria dos casos, a escolha de umEND depende de uma grande quantidade de parâmetros.

Para a escolha do *END* apropriado à realização de determinado diagnóstico, é requerido o conhecimento de detalhes sobre o possível tipo de defeito e a localização deste. A acessibilidade ao defeito também deve ser garantida. Algumas fatos recentes justificam o emprego de *END* nas empresas, como por exemplo:

- 1. Aumento nos padrões de qualidade dos produtos e processos;
- 2. Aumento dos custos causado por paradas imprevistas no sistema de produção;
- 3. Aumento nos padrões de segurança e proteção ambiental;
- 4. Melhoria dos instrumentos de controle e sensores;
- 5. Aumento da experiência e do entendimento na interpretação de sinais.

Os ENDs mais comuns são:

- Inspeção Visual;
- Ensaios de Líquido Penetrante;
- Ensaios de Partículas Magnéticas;
- Ultra-som;
- Raio X;

- Ensaios com a Corrente de Eddy;
- Análise de Vibrações.

1.1 Condições para o Monitoramento de Máquinas por Análise de Vibrações.

Com os altos investimentos que as empresas fazem atualmente em máquinas e equipamentos, as paradas ocasionadas por quebras ou falhas desses sistemas, ocasionam interrupção da produção, tornando-se uma situação dispendiosa. Conseqüentemente, uma grande quantidade de esforços e inovações é aplicada no processo de manutenção dos sistemas produtivos, visando aumentar os intervalos de tempo entre falhas.

Durante sua vida útil, sabemos que as máquinas vão sofrendo um processo de desgaste continuo. Com o passar do tempo, se nada for feito para minimizar ou evitar tal desgaste, o equipamento quebrará causando a parada do processo ao qual faz parte.

Quando é que uma Máquina Quebra?

Esta pergunta é difícil de responder e sua resposta envolve muitas considerações. Podemos dizer, intuitivamente, que se não fizermos a manutenção correta de um equipamento, sua quebra ocorrerá mais cedo do que uma máquina que possui um plano de manutenção (corretamente executado). Podemos fazer o acompanhamento de determinados parâmetros das máquinas e através destes prever, com uma certa antecedência, a ocorrência de falhas. Chamamos esse acompanhamento de monitoramento e, para tanto, devemos encontrar parâmetros característicos que descrevam as condições de operação das máquinas sob análise.

Uma possibilidade é medir o nível de vibrações em grandezas tais como, deslocamento, velocidade ou aceleração, e observar sinais característicos presentes nas variações desses parâmetros, os quais fornecerão informações importantes sobre as condições de trabalho do equipamento, indicando o momento em que a manutenção deve ser realizada para evitar a quebra do mesmo.

Vibração é uma oscilação mecânica em torno de um ponto de equilíbrio. Podemos encontrála em máquinas como resultado da presença de forças dinâmicas, originadas nas partes em movimento, ou como resposta a excitação por pulsos. Freqüentemente ela é citada como um fenômeno destrutivo, mas às vezes pode ser gerada intencionalmente para realizar algum tipo de trabalho, como por exemplo: britadeiras, compactadores, caixas de som, etc.

A análise de vibrações utilizada no monitoramento de equipamentos como um método de *END* (ensaio não destrutivo) permite identificar com precisão os possíveis defeitos presentes nos componentes mecânicos de máquinas e estruturas. Atualmente as empresas têm enfrentado desafios, tais como: redução de custos, aumento do tempo de operação das máquinas e outros inerentes a qualquer unidade produtiva. Com isso, a busca de técnicas que possibilitem solucionar problemas, tornou-se intensa. Uma alternativa é a programação de intervenções através do acompanhamento da condição de funcionamento das máquinas, conhecida por Manutenção Preditiva ou Manutenção por Condição.

A manutenção preditiva diferencia-se da corretiva pelo fato de que a intervenção no equipamento somente ocorrerá a partir do momento em que este apresentar os sinais característicos de falha, enquanto que na manutenção corretiva a intervenção ocorre quando o equipamento quebra, implicando em um aumento de custos de manutenção (horas de parada, mão-de-obra, falta de componentes para reposição, dentre outros).

A manutenção preditiva é aquela que indica as condições reais de funcionamento das máquinas, baseada em dados que informam o seu desgaste ou processo de degradação. Trata-se da manutenção que prediz o tempo de vida útil dos componentes das máquinas e equipamentos e as condições para que esse tempo de vida seja bem aproveitado. A manutenção preditiva baseiase no monitoramento da condição, que é feita com a coleta de dados periódicos, interpretação desses dados, avaliando a sua severidade e traçando sua tendência ao longo do tempo, visando uma intervenção coerente, tanto técnica como econômica.

Os ensaios não destrutivos podem ser utilizados para realizar uma avaliação segura das condições de funcionamento dos equipamentos, fazendo-se o acompanhamento da evolução de falhas. Com isso, é possível fornecer previsões de falha dos equipamentos, garantindo-se a operação sem riscos de quebras inesperadas até a execução de uma parada planejada.

1.2 Manutenção Preditiva Através da Análise de Vibrações

Em linhas gerais, a implantação desta técnica de diagnose pode ser dividida em duas fases:

- A primeira inclui o domínio da tecnologia e o acompanhamento das máquinas consideradas críticas para o processo produtivo. O sistema de gerenciamento é geralmente constituído de um coletor de dados, e o respectivo *software* de análise.
- A segunda fase consiste na divulgação e suporte da implantação desta tecnologia no programa geral de manutenção da empresa.

Portanto, o planejamento (definição dos níveis máximos de vibração, periodicidade das medidas, etc.), o acompanhamento do histórico, o diagnóstico (análise espectral do sinal de vibração) e a decisão de onde e quando intervir são atribuições da manutenção da empresa.

Uma empresa especializada ou um grupo de especialistas intitulado de Manutenção Preditiva Central deve prestar apoio na implantação, no planejamento e nas análises realizadas pela



Figura 1.1: Fluxo de implantação da Manutenção Preditiva.

manutenção da empresa, quando os recursos alocados nas áreas não forem suficientes. A Figura 1.1 (Andrade, 2004) mostra um diagrama em blocos de um sistema de manutenção preditiva.

Para a implantação da Manutenção Preditiva em equipamentos através da medida e análise de vibrações, é necessário estabelecer o seguinte:

- Lista dos equipamentos a serem medidos com respectiva identificação e cadastramento no sistema;
- Levantamento de dados construtivos e operacionais dos equipamentos, tais como modelo, tipo de acionamento, potência, desenhos construtivos, dentre outros;
- Histórico de manutenção dos equipamentos;
- Escolha dos pontos de medição e sua identificação no sistema e na máquina;
- Aparelho de medição e registro dos sinais de vibração;
- Grandezas a serem medidas para cada ponto;
- Níveis de alarme para cada ponto de medição;
- Periodicidade das medições;

- Programação dos pontos de coleta de dados;
- Informações e relatórios periódicos.

1.3 Resultados Previstos

As atividades de Manutenção Preditiva permitem ganhos financeiros resultantes dos seguintes benefícios:

- a) Redução dos custos de manutenção: Com base na análise de vibrações e nas curvas de tendência, pode-se ter uma previsão de quando será necessário uma intervenção de manutenção, e quais os serviços a serem realizados, prolongando-se assim a vida útil de componentes, substituindo-se apenas o necessário;
- b) Aumento da eficiência das intervenções de manutenção: Através da indicação antecipada dos elementos com falha e da avaliação dos resultados das intervenções;
- c) Aumento da disponibilidade de equipamentos: A utilização de programas preditivos pode virtualmente eliminar paralisações imprevistas devido à falha de máquinas, bem como reduzir a necessidade de programação de paradas desnecessárias para serviços preventivos;
- d) Aumento da confiabilidade operacional: A eliminação de paradas não programadas aumenta a confiabilidade operacional, reduzindo-se riscos de perda de produção.

1.4 Objetivo do Trabalho

Nesse trabalho propõe-se e estuda-se a implementação de um sistema preditivo (não-intrusivo) capaz de avaliar a condição de desgaste dos contatos montados no sistema mecânico utilizado para controle de tensão de saída nos *OLTC*s (On-Load Tap Changer).

O monitoramento do sistema acontece através da análise da vibração emitida pelo equipamento a cada mudança de contato. É feita a modelagem do sinal de vibração utilizando-se técnicas de análise espectral (Método de Prony). Com o monitoramento torna-se possível determinar o estado do *OLTC* e programar as paradas para manutenção, prolongando ao máximo o tempo de uso dos reguladores, sem por em risco a qualidade da tensão fornecida ao consumidor final.

O sistema de monitoramento aplicado nesse trabalho, conforme a Figura 1.2, é composto de:



Figura 1.2: Fluxo do sistema não-intrusivo de monitoramento proposto para OLTCs.

- Módulo de Condicionamento de Dados formado pelo sensor de vibração e circuito de polarização, amplificador e filtros analógicos.
- Rotina de Tratamento de Dados rotina para processamento do sinal, na qual o sinal é processado e é feita a estimativa dos parâmetros do modelo para a análise espectral.
- Módulo de Análise de Parâmetros a partir dos parâmetros obtidos pelo Método de Prony, chega-se à condição de funcionamento do *OLTC*.

1.5 Organização da Dissertação

O texto está dividido em 8 capítulos:

- O Capítulo 1 apresenta uma introdução acerca das técnicas não intrusivas utilizadas em monitoramento de sistemas.
- No Capítulo 2 é feita uma descrição dos métodos clássicos de estimação espectral.
- O Capítulo 3 descreve os métodos auto regressivos (estatísticos) utilizados na estimação espectral.
- O Capítulo 4 aborda um método numéricos aplicado à estimação espectral.

- No Capítulo 5 descreve-se a abordagem teórica do Método de Prony.
- O Capítulo 6 apresenta a plataforma experimental utilizada nesse trabalho.
- No Capitulo 7 é apresentada a metodologia de coleta de dados e os resultados.
- O Capítulo 8 conclui a dissertação e apresenta sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Estimação Espectral Clássica

2.1 Introdução

Segundo (Simas Filho, 2004) o monitoramento de um OLTC pode ser efetuado de diversas formas, já desenvolvidos e validadas, como por exemplo:

- Análise das características do óleo isolante (Wang et al., 2000a), chamada de DGA (Dissolved Gas-in-oil Analysis). Esta técnica permite associar a mudança da concentração de certos gases dissolvidos no óleo às condições de falha do equipamento. A análise é feita de forma não-intrusiva, usando dados de imagens térmicas no espectro do infravermelho.
- 2. Análise dos dados extraídos do sinal de vibração, colhido na carcaça do equipamento a cada mudança de contatos:
 - utilizando a transformada wavelet para detectar a envoltória do sinal e depois aplicase a análise dos dados com mapas auto-organizáveis (P.Kang & Birtwhistle, 2001a), (P.Kang & Birtwhistle, 2001b), (Pengju Kang & McCulloch, 2000a).
 - M. Foata em (Foata et al., 2000) usa convolução de Hilbert para detectar a envoltória, fazendo comparações entre o sinal medido e uma referência pré-estabelecida .

No estudo da CIGRE - Conseil International Des Grands Réseaux Electriques (Guuinic & Aubin, 2001) pode-se encontrar os métodos mais usados para monitoramento de OLTCs. Além dos citados acima (DGA e análise acústica), o estudo indica que pode-se extrair informações importantes a partir do monitoramento das seguintes variáveis: corrente e torque do motor do sistema de posicionamento e temperatura relativa das partes do OLTC.

A proposta desenvolvida nesse trabalho esta fundamentada na aplicação do *END* (Ensaio Não Destrutivo) por análise do sinal de vibração emitido pelo *OLTC*, coletado de forma não intrusiva, no momento de acionamento do contato.

O diagnóstico da condição dos contatos do *OLTC* é efetuado utilizando-se como ferramenta para análise desse sinal a estimação espectral pelo Método de Prony. Foi utilizado um módulo de aquisição de dados com filtragem analógica e desenvolvida uma rotina de tratamento do sinal. O método utilizado permite a obtenção de características importantes do sinal como amplitudes, fase e amortecimento dos principais componentes de freqüências. A partir dessas variáveis, é feito o diagnóstico do equipamento. Em comparação com métodos existentes, o processo de análise espectral utilizando-se Prony é simplificado, visto que é usado um número limitado de parâmetros e não a envoltória do sinal.

2.2 Técnicas de Processamento de Sinais

Processamento de sinais abrange o conjunto de técnicas utilizadas para extrair informações importantes dos dados coletados a partir de um sinal proveniente de um processo ou sistema. Para sinais determinísticos as informações geralmente estão relacionadas com os componentes dominantes de algumas freqüências. Conseqüentemente técnicas de estimação espectral baseada na transformada de Fourier podem ser aplicadas à análise desse sinal. Para sinais não determinísticos (estocásticos, transientes ou contaminados com ruido) é preciso usar uma abordagem estatística, não sendo mais possível determinar o espectro exato de freqüência, mas sim, uma estimativa através de um procedimento de tratamento do sinal.

2.2.1 Transformada de Fourier

Uma ferramenta clássica de processamento de sinais é a transformada de Fourier (FT - Fourier Transform) que é assim chamada em homenagem ao francês Jean Baptiste Fourier (1768-1830) um dos pioneiros no estudo da representação de funções por séries trigonométricas.

A FT é um procedimento matemático que permite a partir de um sinal no domínio temporal x(t) obter uma função $X(\omega)$ descrevendo o comportamento em freqüência desse sinal.

Considerando-se inicialmente um sinal periódico x(t), com período T, pode-se expressar tal sinal por uma soma (em geral infinita) de exponenciais complexas (Kamen & Heck, 2000). Assim,

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad -\infty < t < \infty.$$
(2.1)

A representação acima é conhecida como série de Fourier, e os coeficientes c_k são calculados através da seguinte expressão:

$$c_k = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
(2.2)

Para que um sinal periódico tenha representação em séries de Fourier é necessário que ele atenda as seguintes condições (Condições de Dirichlet):

- a) |x(t)| deve ser integravel em qualquer período: $\int_{a}^{a+T} |x(t)| dt < \infty;$
- b) x(t) deve possuir um número finito de máximos e mínimos em qualquer período;
- c) x(t) deve possuir um número finito de descontinuidades em qualquer período.

Sinais não-periódicos também podem ser expressos em função de seus componentes de freqüência, mas para tal usa-se agora a Transformada de Fourier:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \quad -\infty < \omega < \infty,$$
(2.3)

onde ω é a variável contínua caracterizando a freqüência angular (em rad/s). A existência da Transformada de Fourier também está atrelada às condições de Dirichlet, descritas anteriormente.

A equação (2.4) permite o cálculo da Transformada Inversa de Fourier, ou seja, a reconstituição do sinal temporal a partir de seu espectro em freqüência.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$
(2.4)

Dado um sinal discreto x[n], sua Transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT) é definida como:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}.$$
(2.5)

A *DTFT* é portanto uma função contínua da variável real Ω , obtida a partir de uma seqüência amostrada. Pode-se notar que (2.5) é uma versão discreta de (2.3), onde o somatório substitui a integral.

Por ser uma função contínua, $X(\Omega)$ não pode ser manipulada digitalmente, para isso foi preciso discretizar os valores de freqüência, levando ao desenvolvimento da Transformada Discreta de Fourier (*DFT*) (Kamen & Heck, 2000).

Supondo que a seqüência discreta x[n] seja zero para $0 > n \ge N$, onde N é um inteiro positivo. A *DFT* (X_k) de x[n] é definida por

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \qquad k = 0, 1, ..., N-1.$$
(2.6)

Diferentemente da DTFT, a DFT é uma função discreta, que pode ser implementada facilmente em sistemas digitais. Para o cálculo da DFT desenvolveu-se um algoritmo bastante eficiente conhecido por FFT (*Fast Fourier Transform*). Essa contribuição facilitou muito o tratamento de sinais amostrados com grande número de amostras. O algoritmo da FFT é descrito em detalhes em (David J. De Fatta, 1988).

2.2.2 Sinais: Classificação e Tratamento Estatístico

Os sinais podem ser classificados em determinísticos e não determinísticos. Para sinais determinísticos as informações geralmente estão relacionadas com os componentes dominantes de algumas freqüências. A obtenção do espectro de freqüência através do uso direto da transformada de Fourier apresenta resultados confiáveis quando aplicado a processos determinísticos, conseqüentemente técnicas de estimação espectral baseada na transformada de Fourier podem ser aplicadas à análise desse sinal. Para sinais não determinísticos (estocásticos, transientes ou contaminados com ruido) é preciso usar uma abordagem estatística, não sendo mais possível determinar o espectro exato de freqüência, mas sim, uma estimativa através de um procedimento de tratamento do sinal. Portanto, para o tratamento de sinais não determinísticos alguns conceitos de estatística devem ser aplicados, e tais conceitos são abordados no Apêndice A.1.

Conforme definição (Apêndice A.1) a função auto correlação de um sinal estocástico $\boldsymbol{x}[n]$ é dada por

$$r_{xx}[n_1, n_2] = \xi\{x[n_1]x^*[n_2]\},\tag{2.7}$$

onde ξ é o operador esperança. Diz-se também que $\overline{x}[n] = \xi\{x[n]\}$ é a média ou valor esperado de x[n], e $x^*[n]$ é o complexo conjugado de x[n].

Pode-se definir a função de auto covariância como

$$c_{xx}[n_1, n_2] = \xi\{(x[n_1] - \overline{x}[n_1])(x^*[n_2] - \overline{x}^*[n_2])\}.$$
(2.8)

Os termos "correlação" e "covariância" são muitas vezes usados como sinônimos, mas, analisando as equações (2.7) e (2.8), vemos que elas são iguais apenas quando o processo em questão (x[n]) tem média zero.

Para a análise de dois processos estocásticos x[n] e y[n] define-se a correlação cruzada como sendo

$$r_{xy}[n_1, n_2] = \xi\{x[n_1]y^*[n_2]\}.$$
(2.9)

Um processo estocástico é dito estacionário em sentido amplo (WWS - Wide Sense Stationary se ele tem a média constante para todos os índices temporais e sua função de auto correlação depende somente da diferença $m = n_1 - n_2$. Um processo estocástico WWS discreto x[n] é caracterizado por sua média constante:

$$\overline{x}[n] = \overline{x},\tag{2.10}$$

por uma função de auto correlação dada por

$$r_{xx}(m) = \xi \{ x[n+m]x^*[n] \}, \qquad (2.11)$$

e função de auto covariância

$$c_{xx}(m) = r_{xx}(m) - |\overline{x}|^2.$$
 (2.12)

A densidade espectral de potência (*PSD* - *Power Espectral Density*) é definida como sendo a *DTFT* da função de auto correlação, dada por

$$P_{xx}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}[n]e^{-j\Omega n},$$
(2.13)

No caso de processos contínuos, a DTFT é substituída pela Transformada de Fourier (FT).

A obtenção do espectro de freqüência de sinais não determinísticos através da densidade espectral de potência (*PSD* - *Power Espectral Density*) apresenta maior confiabilidade nos resultados do que a obtenção do espectro de freqüência através do uso direto da transformada de Fourier, já que a função de auto correlação é uma função determinística.

Processos de média ergódica são definidos como aqueles que possuem média temporal η_T , calculada a partir de uma realização de x(t), próxima de $\eta = \xi\{x(t)\}$, com probabilidade próxima de 1. Assim,

$$\xi\{\eta_T\} = \xi\left\{\frac{1}{2T}\sum_{n=-T}^T x[n]\right\} = \eta.$$
(2.14)

Para processos de média ergódica a PSD pode ser estimada diretamente dos valores de x[n] utilizando a expressão (Papoulis, 1991):

$$P_{xx}(\Omega) \approx S_T(\Omega) = \xi \left\{ \frac{1}{2T} \left| \sum_{n=-T}^T W[n] x[n] e^{-2j\Omega n} \right|^2 \right\},\tag{2.15}$$

onde W[n] é a função janela de ponderação e $S_T(\Omega)$ é a densidade de potência do sinal $x_T(t)$, dado por

$$x_T(t) = x(t)p_T(t) \qquad p_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$$
(2.16)

Capítulo 3

Processos Auto Regressivos

3.1 Introdução

As técnicas clássicas de estimação espectral usam as equações (2.13) e (2.15) para obter aproximações da densidade espectral de potência (PSD) do sinal x[n]. O método que usa a aproximação diretamente a partir do sinal x[n] é chamado periodograma (equação 2.15). O método que permite obter a PSD a partir da DTFT da função de auto correlação do sinal é conhecido como correlograma (equação 2.13). Essas técnicas apresentam algumas limitações de resolução, que nos periodogramas depende do tipo de janela escolhido. Eles necessitam de janelas maiores e maior número de amostras para se obter uma resolução satisfatória. Métodos iterativos de cálculo de periodogramas e correlogramas estão descritos em (S.Lawrence Marple, 1987).

3.2 Modelos Paramétricos de Processos Estocásticos

Uma solução para alguns dos problemas das técnicas clássicas de estimação espectral é o uso de modelos paramétricos. Esses métodos obtém, em geral, resultados melhores, mesmo para sinais com poucas amostras. São derivados do filtro linear definido a partir de uma equação de diferença. Assim,

$$\sum_{k=0}^{p} a[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{q} b[k]u[n-k], \qquad (3.1)$$

sendo que x[n] e u[n] são, respectivamente, a saída e a entrada do sinal no instante n.

3.2.1 Modelos Auto Regressivos

Basicamente três modelos paramétricos são utilizados para estimação espectral:

• ARMA (Autoregressive Moving Average),

- MA (Moving Average),
- AR (Autoregressive).

O modelo ARMA é descrito pela equação de diferenças (3.1) fazendo-se a[0] igual a 1.

Sendo $\hat{x}[n]$ o valor estimado para x[n], na representação do modelo ARMA, a equação (3.1) pode ser reescrita como

$$\hat{x}[n] = -\sum_{k=1}^{p} a[k]x[n-k] + \sum_{k=0}^{q} b[k]u[n-k], \qquad (3.2)$$

em que $\mathbf{a} \in \mathbf{b}$ são os vetores de parâmetros a serem determinados e \mathbf{u} é o o sinal de entrada.

O modelo MA é derivado do ARMA (3.2) zerando-se todos os coeficientes a[k]. Dessa maneira se obtém (3.3).

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=0}^{q} b[k] . u[n-k].$$
(3.3)

O modelo AR também é derivado do ARMA (3.2) zerando-se todos os coeficientes b[k], com exceção de b[0] que agora é considerado igual a 1. Assim obtém-se (3.4).

$$\hat{x}[n] = -\sum_{k=1}^{p} a[k] \cdot x[n-k] + u[n]$$
(3.4)

Portanto, (3.2) expressa um modelo auto regressivo de média móvel (ARMA - AutoregressiveMoving Average) de x[n], onde a entrada u[n] é uma seqüencia de ruído branco com média zero e variância ρ . Os parâmetros a[k] são responsáveis pela parte auto regressiva (AR) e os parâmetros b[k] pela média móvel (MA). Pode-se utilizar esquemas mais simples, com apenas uma das partes do modelo ARMA.

As representações gráficas dos modelos ARMA, AR e MA são mostradas nas Figuras 3.1, 3.2 e 3.3.



Figura 3.1: Representação do modelo ARMA



Figura 3.2: Representação do modelo AR



Figura 3.3: Representação do modelo MA

3.2.2 Estimação Espectral

A estimação espectral em um modelo ARMA relaciona os coeficientes a[k] e b[k] com a função de auto correlação do sinal a ser analisado. Segundo Lawrence (S.Lawrence Marple, 1987), essa relação pode ser obtida por

$$\xi\{x[n]x^*[n-m]\} = -\sum_{k=1}^{p} a[k]\xi\{x[n-k]x^*[n-m]\} + \sum_{k=0}^{q} b[k]\xi\{u[n-k]x^*[n-m]\}, \quad (3.5)$$

que, com o auxílio de (2.11), pode ser reduzida a

$$r_{xx}[m] = -\sum_{k=1}^{p} a[k]r_{xx}[m-k] + \sum_{k=0}^{q} b[k]r_{ux}[m-k].$$
(3.6)

O ganho estático do sistema é igual a um, já que se considerou que b[0] = 1 e a[0] = 1.

Lembrando-se que a entrada (u[k]) considerada para o sistema é uma seqüencia de ruído branco com variância ρ_p , tem-se que a correlação cruzada entre a entrada e saída do sistema pode ser expressa em função da resposta ao impulso (h[n]) desse sistema. Portanto, podemos escrever:

$$r_{ux}[i] = \begin{cases} 0 & i > 0, \\ \rho_p & i = 0, \\ \rho_p h^*[-i] & i < 0. \end{cases}$$
(3.7)

Substituindo-se (3.7) em (3.6) chega-se a seguinte expressão para $r_{xx}[m]$:

$$r_{xx}[m] = \begin{cases} r_{xx}^*[-m] & m < 0, \\ -\sum_{k=1}^p a[k]r_{xx}[m-k] + \rho_p \sum_{k=m}^q b[k]h^*[k-m] & 0 \le m \le q, \\ -\sum_{k=1}^p a[k]r_{xx}[m-k] & m > q. \end{cases}$$
(3.8)

Na análise do sinal de vibração do estudo desta dissertação utilizou-se um método auto regressivo (AR) para estimação espectral que não leva em consideração a parte MA (q = 0). Fazendo-se q = 0 na equação (3.8), obtém-se

$$r_{xx}[m] = \begin{cases} r_{xx}^*[-m] & m < 0, \\ -\sum_{k=1}^p a[k]r_{xx}[-k] + \rho_p & m = 0, \\ -\sum_{k=1}^p a[k]r_{xx}[m-k] & m > 0, \end{cases}$$
(3.9)

que pode ser reescrita na forma matricial

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & \dots & r_{xx}[-p] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}[-p+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[p] & r_{xx}[p-1] & \dots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a[1] \\ \vdots \\ a[p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
(3.10)

O sistema de equações obtido em (3.10) é conhecido como Equações Normais de Yule-Walker e através dele pode-se determinar os parâmetros AR a partir da função de auto correlação $r_{xx}(k)$. Em problemas reais, entretanto, os valores de $r_{xx}(k)$ não são conhecidos e precisam ser estimados a partir da seqüência x[n].

Capítulo 4

Estimação Espectral Auto Regressiva -Método Numérico

4.1 Introdução

A estimação espectral auto regressiva (AR) tem recebido muita atenção na literatura técnica que trata acerca de modelos para séries temporais. Esse interesse tem origem em duas razões. Primeiro, o espectro resultante de uma estimação auto regressiva tende a ter cumes afiados, uma característica associada freqüentemente a uma alta resolução. Segundo, estimativas de parâmetros auto regressivos (AR) podem ser obtidas através da solução de sistemas de equações lineares. Esse capítulo aborda um método numéricos aplicado à estimação espectral auto regressiva.

4.2 Método Estatístico de Estimação

Considere que o modelo ARMA descrito no Capítulo 3 e ilustrado na Figura 3.1 possa representar adequadamente um sistema.

Então:

$$A(q)x[n] = q^{-d}B(q)u[n-1] + e[n],$$
(4.1)

em que:

- u[n] é o sinal de entrada amostrado no sistema,
- x[n] é o sinal de saída amostrado no sistema,
- e[n] é o erro de predição,

- $\bullet~d$ é um número que representa o atraso da resposta na saída do sistema,
- e A(q) e B(q) são polinômios que podem ser escritos da seguinte forma:

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_p q^{-p},$$

$$B(q) = b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_q q^{-q},$$
(4.2)

 $\operatorname{com} q \leq p.$

A partir deste modelo, pode-se escrever

$$x[n] = -a_1 x[n-1] - a_2 x[n-2] - \dots - a_p x[n-p] + b_0 u[n-d] + b_1 u[n-1-d] + \dots + b_q u[n-q-d] + e[n],$$
(4.3)

ou ainda

$$x[n] = \begin{bmatrix} -x[n-1] & -x[n-2]... & -x[n-p] & u[n-1-d] & u[n-2-d]... & u[n-q-d] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{bmatrix} + e[n].$$

Definindo-se

$$\boldsymbol{\varphi}[n]^T = \begin{bmatrix} -x[n-1] & -x[n-2]... & -x[n-p] & u[n-1-d] & u[n-2-d]... & u[n-q-d] \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

onde $\varphi[n]$ é o vetor dos regressores e θ o vetor dos parâmetros. Assim,

$$x[n] = \boldsymbol{\varphi}[n]^T \boldsymbol{\theta} + e[n], \qquad (4.6)$$

tal que $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbb{R}^s$ e $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^s$, com s = p + q.

Define-se também:

- 1. $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}$, sendo $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ uma estimativa de $\boldsymbol{\theta}$,
- 2. $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \hat{\mathbf{x}}$, sendo $\hat{\mathbf{x}}$ uma estimativa de \mathbf{x} no instante k realizada a partir de $\hat{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\varphi}[k]^T \hat{\boldsymbol{\theta}}$,

em que $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ é o erro real de estimação de parâmetros e $\tilde{\mathbf{x}}$ é o erro real de predição.

O objetivo da estimação de parâmetros é determinar a partir de medidas realizadas uma estimativa $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$. Pretende-se assim obter um estimador tal que $\hat{\boldsymbol{\theta}} = f(\boldsymbol{\theta}(.))$.

Considere-se que N medidas são realizadas para d=0 (sistema sem atraso na resposta), então obtém-se

$$\begin{cases} x[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta} + e[0] \\ x[1] = \begin{bmatrix} -x[0] & 0 & \dots & 0 & u[0] & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta} + e[1] \\ x[2] = \begin{bmatrix} -x[1] & -x[0] & \dots & 0 & u[1] & u[0] & \dots & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta} + e[2] \\ \vdots \\ x[N] = \begin{bmatrix} -x[N-1] & -x[N-2] & \dots & -x[N-p] & u[N-1] & u[N-2] & \dots & u[N-q] \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta} + e[N] \end{cases}$$

Na forma vetorial, fazendo-se x[0] = 0 e considerando-se que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[1] \\ x[2] \\ x[3] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix}, \qquad (4.7)$$

tem-se que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & u[0] & 0 & \dots & 0 \\ -x[1] & 0 & \dots & 0 & u[1] & u[0] & \dots & 0 \\ -x[2] & -x[1] & \dots & 0 & u[2] & u[1] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -x[N-1] & -x[N-2] & \dots & -x[N-p] & u[N-1] & u[N-2] & u[N-q] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e[1] \\ e[2] \\ e[3] \\ \vdots \\ e[N] \end{bmatrix}$$
ou na forma vetorial

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{e} \tag{4.8}$$

onde o vetor \mathbf{x} de dimensão $N \times 1$ é o vetor do sinal amostrado representado por (4.7); a matriz $\boldsymbol{\phi}$ de dimensão $N \times (p+q)$ é a matriz dos regressores; o vetor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ de dimensão $N \times 1$ é a estimativa do vetor dos parâmetros; o vetor \mathbf{e} de dimensão $N \times 1$ é o vetor erro de predição.

Assim, têm-se

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & u[0] & 0 & \dots & 0 \\ -x[1] & 0 & \dots & 0 & u[1] & u[0] & \dots & 0 \\ -x[2] & -x[1] & \dots & 0 & u[2] & u[1] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -x[N-1] & -x[N-2] & \dots & -x[N-p] & u[N-1] & u[N-2] & u[N-q] \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

е

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \\ b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e[1] \\ e[2] \\ e[3] \\ \vdots \\ e[N] \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Observando-se (4.4) e a definição de ϕ em (4.9), podemos reescrever (4.8) como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}[1]^T \\ \boldsymbol{\varphi}[2]^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}[N]^T \end{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{e} \qquad \text{com} \qquad \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}[1]^T \\ \boldsymbol{\varphi}[2]^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}[N]^T \end{bmatrix}.$$
(4.11)

4.3 Equação Normal para os Mínimos Quadrados

A algebra matricial propicia uma metodologia concisa para expressão das equações lineares simultâneas na análise dos mínimos quadrados.

Considere o sistema dado na Seção 4.2, onde $\hat{x}[n]$ é a predição da seqüência complexa x[n] dada pela combinação linear dos p+q termos x[n-1], ..., x[n-p], u[n], ..., u[n-q]. Considerando-se d = 0 (sistema sem atraso na resposta), a equação (4.3) pode então ser reescrita como

$$\hat{x}[n] = -a_1 x[n-1] - a_2 x[n-2] - \dots - a_p x[n-p] + b_0 u[n] + b_1 u[n-1] + \dots + b_q u[n-q] + e[n],$$
(4.12)

para $1 \le n \le N$. Assumindo-se que N > (p+q), o sistema linear construído através de (4.12) torna-se um sistema de equações sobredeterminado.

A solução mostrada a seguir foi apresentada por Gauss e Legendre, independentemente, no início do Século XIX.

"O valor mais provável das grandezas desconhecidas é aquele que minimiza a soma dos erros quadrados ou dos quadrados das diferenças entre os valores medidos e os calculados multiplicados por pesos ou números que indicam o grau de precisão das medidas realizadas".

Portanto, um método que pode ser utilizado para atribuir valores ótimos para os parâmetros $a[1], \ldots, a[p], b[1] \ldots b[q]$ é o que minimiza a soma dos quadrados dos erros de predição, dado pela equação (4.13),

$$E = \sum_{n=1}^{N} |e[n]|^2, \qquad (4.13)$$

onde $e[n] = x[n] - \hat{x}[n]$ é o erro complexo entre o valor atual amostrado x[n] e a predição linear $\hat{x}[n]$.

Uma expressão alternativa para as N equações dos erros é dada por (4.8), que pode ser reescrita como

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\phi} \hat{\boldsymbol{\theta}},\tag{4.14}$$

onde o vetor **e** de dimensão $N \times 1$ é o vetor erro de predição; o vetor **x** de dimensão $N \times 1$ é o vetor do sinal amostrado (4.7); a matriz ϕ de dimensão $N \times (p+q)$ é a matriz dos regressores (4.9); o vetor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ de dimensão $N \times 1$ é a estimativa do vetor dos parâmetros (4.10).

Observando-se (4.14), podemos reescreve-la

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & -\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix}, \qquad (4.15)$$

onde o erro quadrático é escrito agora

$$E = \mathbf{e}^H \mathbf{e},\tag{4.16}$$

sendo \mathbf{e}^{H} a operação **Transposta Hermitian**¹ do vetor \mathbf{e} .

Substituindo-se (4.14) em (4.16), obtém-se:

$$E = (\mathbf{x} - \boldsymbol{\phi}\hat{\boldsymbol{\theta}})^{H}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\phi}\hat{\boldsymbol{\theta}}),$$
$$E = (\mathbf{x}^{H} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{H}\boldsymbol{\phi}^{H})(\mathbf{x} - \boldsymbol{\phi}\hat{\boldsymbol{\theta}}),$$
$$E = \mathbf{x}^{H}\mathbf{x} - \mathbf{x}^{H}\boldsymbol{\phi}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^{H}\boldsymbol{\phi}^{H}\mathbf{x} + \hat{\boldsymbol{\theta}}^{H}\boldsymbol{\phi}^{H}\boldsymbol{\phi}\hat{\boldsymbol{\theta}}, \qquad (4.17)$$

em que o produto interno vetorial $\mathbf{x}^H \mathbf{x}$ resulta em um escalar, o produto matriz-vetor $\boldsymbol{\phi}^H \mathbf{x}$ resulta em um vetor de dimensão $(p+q) \times 1$ e o produto matriz-matriz $\boldsymbol{\phi}^H \boldsymbol{\phi}$ resulta em uma matriz quadrada de dimensão $(p+q) \times (p+q)$.

Na equação (4.17), deve-se observar que $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{H}\boldsymbol{\phi}^{H}\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{H}\boldsymbol{\phi}\hat{\boldsymbol{\theta}})^{H}$. Como $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{H}\boldsymbol{\phi}^{H}\mathbf{x}$ é um escalar, então $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{H}\boldsymbol{\phi}^{H}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{H}\boldsymbol{\phi}\hat{\boldsymbol{\theta}}$ nos permite reescrever (4.17) como

$$E = \mathbf{x}^{H}\mathbf{x} - 2\hat{\boldsymbol{\theta}}^{H}\boldsymbol{\phi}^{H}\mathbf{x} + \hat{\boldsymbol{\theta}}^{H}\boldsymbol{\phi}^{H}\boldsymbol{\phi}^{H}\boldsymbol{\phi}\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$
(4.18)

Assim, o mínimo da função E dado por (4.18), é obtido igualando-se a zero o gradiente de E em relação a $\hat{\theta}$,

¹A *Transposta Hermitian* de uma matriz **A** de dimensão $m \times n$ é a matriz **A**^H de dimensão $n \times m$ obtida pela transposição da matriz formada pelos complexos conjugados dos elementos da matriz **A**.

Assim, dado $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a[1,1] & a[1,2] & \cdots & a[1,n] \\ a[2,1] & a[2,1] & \cdots & a[2,n] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a[m,1] & a[m,2] & \cdots & a[m,n] \end{bmatrix}, \text{ obtém-se } \mathbf{A}^{H} = \begin{bmatrix} a^{*}[1,1] & a^{*}[2,1] & \cdots & a^{*}[m,1] \\ a^{*}[1,2] & a^{*}[2,2] & \cdots & a^{*}[m,2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^{*}[1,n] & a^{*}[2,n] & \cdots & a^{*}[m,n] \end{bmatrix},$

podendo-se escrever $\mathbf{A}^H = (\mathbf{A}^*)^T = (\mathbf{A}^T)^*$. A matriz \mathbf{A}^* é a designação dada a matriz cujo elemento (i, j) é o complexo conjugado do elemento (i, j) da matriz \mathbf{A} .

Capítulo 4. Estimação Espectral Auto Regressiva - Método Numérico

$$\frac{\partial E}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}} = -2\boldsymbol{\phi}^H \mathbf{x} + 2\boldsymbol{\phi}^H \boldsymbol{\phi} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}, \qquad (4.19)$$

de onde

$$\boldsymbol{\phi}^{H}\boldsymbol{\phi}\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\phi}^{H}\mathbf{x}.$$
(4.20)

O erro quadrático mínimo é obtido por substituição de (4.20) em (4.17), resultando em

$$E_{\min} = \mathbf{x}^H \mathbf{x} - \mathbf{x}^H \boldsymbol{\phi} \hat{\boldsymbol{\theta}}.$$
 (4.21)

Com as equações (4.20) e (4.21), pode-se obter o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{H}\mathbf{x} - \mathbf{x}^{H}\boldsymbol{\phi}\hat{\boldsymbol{\theta}} = E_{\min} \\ \boldsymbol{\phi}^{H}\boldsymbol{\phi}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\phi}^{H}\mathbf{x} = \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

que de forma vetorial é escrito como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{H}\mathbf{x} & -\mathbf{x}^{H}\boldsymbol{\phi} \\ -\boldsymbol{\phi}^{H}\mathbf{x} & \boldsymbol{\phi}^{H}\boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} & -\boldsymbol{\phi} \end{bmatrix}^{H} \begin{bmatrix} \mathbf{x} & -\boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{\min} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Com $\mathbf{Z} = [\mathbf{x} & -\boldsymbol{\phi}]$, tem-se

$$\mathbf{Z}^{H}\mathbf{Z}\begin{bmatrix}1\\\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E_{\min}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}.$$
(4.22)

A equação (4.22) é denominada *equação normal* e é usada na análise dos mínimos quadrados.

4.4 Métodos de Estimação Linear pela Covariância

Consideremos que uma seqüência de N amostras de um processo x[1], x[2], ..., x[N] é usada para a estimativa dos p-enésimos coeficientes (parâmetros) de um modelo AR.

A predição linear "a priori" $\hat{x}[n]$ para x[n] é

$$\hat{x}[n] = -\sum_{k=1}^{p} a[k]x[n-k], \qquad (4.23)$$

onde a[k] são os parâmetros AR. Dessa forma, o erro de predição linear é dado por

$$e[n] = x[n] - \hat{x}[n] = x[n] + \sum_{k=1}^{p} a[k]x[n-k].$$
(4.24)

Esta expressão é idêntica à descrita pela forma recursiva para um processo auto regressivo de p-ésima ordem, exceto quando e[n] não tiver as mesmas propriedades de um ruído branco. O erro de predição linear de uma seqüência finita pode ou não ser um ruido branco. Com propósito de ajuste do modelo auto regressivo, assumi-se que o erro de predição converge para o ruído branco.

O erro de predição linear é então definido para o intervalo n = 1 até n = N + p. Assume-se que x[n] = 0 para n < 1 e n > N. Desta forma, pode-se representar (4.24) por

$$\begin{bmatrix} e[1] \\ \vdots \\ e[p+1] \\ \vdots \\ e[N] \\ \vdots \\ e[N+p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[1] & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x[p+1] & \cdots & x[1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N] & x[N-p] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x[N] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a[1] \\ \vdots \\ a[p] \end{bmatrix}$$
(4.25)

onde \mathbf{X}_p é a matriz de amostras e é uma matriz retangular tipo Toeplitz² de dimensão $(N + p) \times (p+1)$. Os dados do canto superior direito e canto inferior esquerdo dessa matriz são zeros, enfatizando o janelamento implícito da seqüência de dados. Esta matriz pode ser particionada em três submatrizes:

$$\mathbf{X}_{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{\mathbf{p}} \\ \mathbf{T}_{\mathbf{p}} \\ \mathbf{U}_{\mathbf{p}} \end{bmatrix}$$
(4.26)

Um exemplo de uma matriz Toeplit
z $5\times4:$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t[0] & t[-1] & t[-2] & t[-3] \\ t[1] & t[0] & t[-1] & t[-2] \\ t[2] & t[1] & t[0] & t[-1] \\ t[3] & t[2] & t[1] & t[0] \\ t[4] & t[3] & t[2] & t[1] \end{bmatrix}.$$

²Esta matriz tem a propriedade de que todos os elementos ao longo de qualquer diagonal na direção principal são idênticos, isto é t(i, j) = t(i - j).

onde a matriz triangular inferior $\mathbf{L}_{\mathbf{p}}$ de dimensão $p \times (p+1)$, a matriz retangular $\mathbf{T}_{\mathbf{p}}$ de dimensão $(N-p) \times (p+1)$ e a matriz triangular superior $\mathbf{U}_{\mathbf{p}}$ de dimensão $p \times (p+1)$ são definidas por

$$\mathbf{L}_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} x[1] & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ x[p] & \cdots & x[1] & 0 \end{bmatrix},$$
(4.27)

$$\mathbf{T}_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} x[p+1] & \cdots & x[1] \\ \vdots & & \vdots \\ x[N] & \cdots & x[N-p] \end{bmatrix},$$
(4.28)

$$\mathbf{U}_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 & x[N] & \cdots & x[N-p+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x[N] \end{bmatrix}.$$
 (4.29)

A estimação dos parâmetros a[k] do modelo AR deve ser realizada visando minimizar o erro ρ dado por

$$\rho = \sum_{n} e[n]^2.$$
 (4.30)

Com base nos resultados de (4.30), dividindo-se " ρ " por "N", tem-se a variância da amostra do processo. Nessa mesma equação, o intervalo do somatório, propositalmente, não esta identificado, visto que existem três casos possíveis que determinam a sua seleção. Com a determinação do intervalo do somatório em (4.30), também determina-se o método de estimação dos parâmetros AR. Como mencionado anteriormente, existem basicamente três opções: o janelado, o pré-janelado e o não janelado. O método janelado utiliza o intervalo completo do somatório em (4.30), ou seja minimiza-se os erros de e[1] até e[N+p]. Isso exige que se considere os dados anteriores a x[1] e posteriores a x[N] iguais a zero, o que é equivalente a "janelar" o sinal. O método pré-janelado considera apenas o intervalo de erros entre e[1]até e[N]. Isso é equivalente a "janelar" apenas os dados anteriores a x[1]. O método não janelado considera apenas os dados disponíveis e é conhecido na literatura por método da covariância (Makhoul, 1975). Esta terminologia não corresponde a definição padrão dada pela estatística para esse termo: "A covariância é a correlação com a média removida".

Neste trabalho, sendo a amostra formada por um sinal transiente e estando todas as informações de nosso interesse contidas no sinal amostrado, estaremos utilizando o método não janelado, considerando-se apenas os dados disponíveis. A relação entre o vetor erro de predição **e** e o vetor de parâmetros de predição **a**, considerandose o *método da covariância* (não ajanelado) e (4.25), pode ser expressa como

$$\mathbf{e} = \mathbf{T}_{\mathbf{p}} \begin{bmatrix} 1\\ \mathbf{a} \end{bmatrix}, \tag{4.31}$$

onde $\mathbf{T}_{\mathbf{p}}$ é a matriz de amostras (não janelada) e é uma matriz retangular tipo Toeplitz de dimensão $(N-p) \times (p+1)$, conforme (4.28). O vetor de parâmetros de predição \mathbf{a} e o vetor erro de predição (não ajanelado) \mathbf{e} são dados por (4.32). Assim,

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e[p] \\ \vdots \\ e[N] \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a[1] \\ \vdots \\ a[p] \end{bmatrix}. \tag{4.32}$$

O erro quadrático (4.16)

$$E = \sum_{n=p+1}^{N} |e[n]|^2 = \mathbf{e}^H \mathbf{e}$$
(4.33)

é minimizado conforme a *equação normal* (4.22), que pode ser reescrita como

$$\mathbf{T}_{\mathbf{p}}{}^{H}\mathbf{T}_{\mathbf{p}}\begin{bmatrix}1\\\mathbf{a}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E_{\min}\\\mathbf{0}_{p}\end{bmatrix},\tag{4.34}$$

onde $\mathbf{T}_{\mathbf{p}}$ é dado por (4.28), **a** é o vetor de parâmetros de predição e $\mathbf{0}_p$ é um vetor nulo (ambos são vetores de dimensão p). E_{\min} é a minimização de ρ (dado por 4.30). Apesar de E_{\min} não ser conhecido *a priori*, a solução para (4.34), dada pelo vetor de parâmetros **a**, é facilmente obtida da seguinte forma:

- 1. Atribui-se inicialmente qualquer valor para E_{\min} ,
- 2. Soluciona-se a equação normal escrita em (4.34),
- 3. Normaliza-se o vetor solução obtido dividindo-se todas suas linhas pelo valor de seu primeiro elemento,
- 4. Chega-se ao vetor a que é a solução obtido pelo método da covariância.

A normalização do vetor solução justifica-se simplesmente pelo fato de sabermos (*a priori*) que o primeiro elemento desse vetor é unitário.

Vetor Solução =
$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}$$

A técnica de Prony incorpora, em uma de suas etapas, o método da covariância descrito neste capítulo.

Capítulo 5

Método de Prony

5.1 Introdução

O método de Prony é uma técnica para a modelagem de uma seqüência de dados amostrados através de uma combinação linear de exponenciais. Embora ele não seja uma técnica de estimação espectral, o método de Prony esta íntimamente ligado ao algorítimo de predição linear via o método dos mínimos quadrados usado na estimação paramétrica dos modelos AR e ARMA. O método de Prony busca ajustar um modelo exponencial determinístico à seqüência de dados, em contraste com os métodos AR e ARMA que buscam ajustar um modelo estocástico para tal. A interpretação espectral do método Prony pode ser obtida pelo processamento da densidade espectral de energia (ESD - "Energy Spectral Density") do modelo exponencial determinístico.

Gaspard Riche, Barão de Prony (Prony, 1795) foi levado a acreditar que certas leis governavam a expansão de vários gases e que tais leis podiam ser representadas por somas de exponenciais amortecidas. Ele propôs um método de interpolação para alguns dos dados obtidos em seus experimentos, ajustando-os a um modelo exponencial aplicado a alguns desses dados medidos (igualmente espaçados); então, os pontos intermediários eram obtidos pela avaliação do modelo exponencial. A versão moderna para os mínimos quadrados aplicados ao método de modelagem exponencial evoluiu significativamente a partir do procedimento original de Prony. O método apresentado por Prony ajustava, pura e simplesmente as exponenciais amortecidas aos N pontos coletados de um sinal. A versão moderna do método de Prony generaliza o ajuste para modelos de senóides amortecidas (de ordem p) aos N pontos coletados de um sinal, fazendo uso da análise dos mínimos quadrados.

Existem três passos básicos para serem seguidos no método de Prony.

• No primeiro, os parâmetros lineares que ajustam os dados são estimados através da solução de um sistema linear.

- No segundo passo são calculadas as raízes de um polinômio cujos parâmetros são obtidos pela solução do sistema linear do passo anterior. As raízes obtidas fornecem a estimação das freqüências e dos fatores de amortecimento de cada termo exponencial do modelo de base da técnica de Prony.
- O terceiro passo envolve a solução de um segundo sistema linear que leva a determinação (ou estimação) das amplitudes das senóides (originadas das exponenciais complexas) e de suas respectivas fases iniciais.

A relação entre a predição linear e os parâmetros auto regressivos leva-nos a interpretar o primeiro e o segundo passo como a determinação dos pólos de um processo AR.

5.2 Resumo

Considerando uma seqüência de N amostras de números complexos x[1], ..., x[N] o método de Prony irá estimar $\hat{x}[n]$ através de um modelo exponencial complexo com *p*-termos. Assim,

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{p} A_k \exp[(\alpha_k + j2\pi f_k)(n-1)T + j\psi_k],$$
(5.1)

em que $1 \leq n \leq N$, onde T é o intervalo de amostragem, A_k é a amplitude da exponencial complexa, α_k é o fator de amortecimento, f_k é a freqüência da senóide, e ψ_k é a fase inicial da senóide. Os parâmetros são completamente arbitrários. No caso de amostra de dados reais, a exponencial complexa ocorre em pares complexos conjugados de igual amplitude. Isso reduz a tal representação a

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{p/2} 2A_k \exp[\alpha_k(n-1)T] \cos[2\pi f_k(n-1)T + \psi_k],$$
(5.2)

Se o número de exponenciais complexas p é par, então existirão p/2 cossenóides amortecidas. Se p é impar, então existirão (p-1)/2 cossenóides amortecidas somadas a uma única exponencial amortecida.

A Figura 5.1 apresenta a seqüência dos passos para estimação da amplitude, fator de amortecimento, freqüência e fase inicial utilizando-se o método de Prony. As saídas da subrotina PRONY (apresentada no Apêndice B.1) são dois vetores contendo os parâmetros associados às p exponenciais complexas, estimados conforme as Seções 5.4 e 5.5. Esses parâmetros servem como dados de entrada para sub-rotina EXPARAMS (apresentada no Apêndice B.2) que calcula os quatro parâmetros reais: amplitude, fase, fator de amortecimento e freqüência.



Figura 5.1: Fluxograma da aplicação do modelo de estimação exponencial (Método de Prony)



Figura 5.2: Exemplo de estimativa espectral por Prony

A Figura 5.2 descreve o resultado de uma estimativa espectral pelo método de Prony, baseada em uma amostragem de um processo através de 9770 amostras. Nesse exemplo utilizouse para modelagem o método de Prony de décima sexta ordem. O método de Prony produz linhas no espectro (raias), porque pressupõe um modelo senoidal para o processo. Esse resultado é muito satisfatório quando se deseja a estimação de eventos determinísticos mas é inexato na estimação ou representação de processos com ruído colorido.

5.3 Estimação Interativa - Parâmetros das Exponenciais

O valor estimado das variáveis de um processo estocástico, usando-se um modelo exponencial complexo com p-termos da equação (5.1) é representado por

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{p} h_k z_k^{n-1}, \tag{5.3}$$

onde h_k e z_k são constantes complexas definidas como

$$h_k = A_k \exp(j\psi_k),\tag{5.4}$$

е

$$z_k = \exp[(\alpha_k + j2\pi f_k)T].$$
(5.5)

Note que h_k é uma amplitude complexa, sendo independente do tempo, e z_k é a exponencial complexa, dependente do tempo. Idealmente, na identificação do melhor modelo, procura-se minimizar o erro quadrático ρ , interativamente, sobre todas as N amostras do sinal. O erro quadrático ρ é dado por

$$\rho = \sum_{n=1}^{N} |\epsilon(n)|^2,$$
(5.6)

onde,

$$\epsilon[n] = x[n] - \hat{x}[n], \qquad (5.7)$$

ou ainda, substituindo-se (5.3) em (5.7), pode-se escrever

$$\epsilon[n] = x[n] - \sum_{k=1}^{p} h_k . z_k^{n-1}, \qquad (5.8)$$

onde $\epsilon[n]$ é o erro de aproximação da predição exponencial. Portanto, a minimização do erro quadrático ρ , dado por (5.6), dar-se-a com respeito aos parâmetros h_k , z_k e ao número de exponenciais p. Isso torna-se um problema difícil pois é não linear, até mesmo para p conhecido. Essa dificuldade pode ser demonstrada através de um caso simplificado de estimação exponencial, como veremos a seguir.

Consideremos o modelo exponencial amortecido e simplificado representado por

$$\hat{x}[n] = A \exp(a[n-1]T) \tag{5.9}$$

Para este modelo, a expressão do erro de aproximação da predição exponencial pode ser escrita substituindo-se (5.9) em (5.7). Assim,

$$\epsilon[n] = x[n] - A \exp(a[n-1]T).$$
(5.10)

Considerando-se o erro de aproximação da predição exponencial, dado em (5.10), e o erro quadrático ρ , dado por (5.6), o erro quadrático mínimo desse modelo é obtido igualando-se a zero a derivada de (5.6) em relação a $A \in \alpha$. Assim,

$$\frac{\partial \rho}{\partial A} = c_1 - c_2 A = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \alpha} = c_3 - c_4 A = 0,$$
(5.11)

onde

$$c_{1} = \sum_{n=1}^{N} x[n] \exp(\alpha[n-1]T),$$

$$c_{2} = \sum_{n=1}^{N} \exp(2\alpha[n-1]T),$$

$$c_{1} = \sum_{n=1}^{N} (n-1)x[n] \exp(\alpha[n-1]T),$$

$$c_{1} = \sum_{n=1}^{N} (n-1)x[n] \exp(2\alpha[n-1]T).$$
(5.12)

Por simplificação, é assumido que x[n], $A \in \alpha$ são reais. Da primeira equação em (5.11) obtém-se $A = c_1/c_2$; substituindo-se esse resultado na segunda equação em (5.11) chega-se a

$$c_2 c_3 - c_1 c_4 = 0 \tag{5.13}$$

A equação (5.13) é uma relação não linear em termos das somas envolvendo $\exp(2\alpha[n-1]T)$, com sua solução em α .

Algorítimos interativos, como o procedimento do mínimo gradiente foram desenvolvidos para minimizar a equação (5.13), interativamente, com respeito a todos os parâmetros exponenciais (McDonough, 1963; McDonough & Huggins, 1968; Evans & Fischl, 1973). Esses algorítimos têm um alto custo computacional, requerendo a inversão de grandes matrizes formadas por um grande número de amostras. O algorítimo de mínimo gradiente, aplicado a um sistema de equações, pode não convergir para um mínimo global. Essas dificuldades computacionais conduziram ao desenvolvimento de um método alternativo para minimização de ρ conhecido como Método dos Mínimos Quadrados Aplicado a Prony (Seção 5.5) que utiliza a solução de um sistema de equações lineares. O *Método dos Mínimos Quadrados Aplicado a Prony* embute os aspectos não lineares do modelo exponencial em uma fatoração polinomial, para a qual estão disponíveis algorítimos com menor custo computacional.

5.4 Conceitos Básicos do Método de Prony

Se usarmos um número suficientes de amostras como parâmetros para um modelo exponencial, um modelo exponencial exato pode ser ajustado a essas amostras. Considere um modelo p – exponencial como a função descrita por

$$x[n] = \sum_{k=1}^{p} h_k z_k^{n-1}.$$
(5.14)

Note que x[n] é usado no lugar de $\hat{x}[n]$, isso porque são necessárias precisamente 2p amostras x[1], ..., x[2p] para ajuste a um modelo exponencial exato, determinado pelos 2p parâmetros complexos $h_1, ..., h_p, z_1, ..., z_p$.

As p equações descritas por (5.14), para $1 \leq n \leq p,$ são expressas na forma vetorial por

$$\begin{bmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \cdots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \cdots & z_p^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{p-1} & z_2^{p-1} & \cdots & z_p^{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[p] \end{bmatrix}.$$
(5.15)

A matriz com os elementos z indexados no tempo (5.15) tem a estrutura de Vandermonde¹. Se encontrado um método para determinação dos elementos z, então (5.15) caracteriza um sistema linear que tem como solução o vetor de amplitudes complexas $[h_1, ..., h_p]^T$. A contribuição de Prony foi a descoberta de tal método.

A chave para se chegar a este método é reconhecer que os termos gerados em (5.14) são as soluções de algumas equações lineares de diferenças. Para encontrarmos tais equações de diferenças, primeiro define-se um polinômio $\vartheta(z)$ cujas as raízes são os parâmetros $z_1, ..., z_p$,

$$\vartheta(z) = \prod_{k=1}^{p} (z - z_k).$$
(5.16)

Se o produtório em (5.16) for expandido, então o polinômio pode ser reescrito como

¹A matriz de Vandermonde **V** é uma matriz de dimensão $m \ge n$ cujos elementos são expressos em termos de potências dos n parâmetros $x_1, ..., x_n$ com a seguinte lei de formação: $v[i, j] = x_j^{i-1}$ para $1 \le i \le m, 1 \le j \le m$

$$\vartheta(z) = \sum_{m=0}^{p} a[m] z^{p-m},$$
(5.17)

onde a[m] são parâmetros complexos com a[0] = 1.

Modificando-se os índices de (5.14) de n para n-m e multiplicando-se pelo parâmetro a[m], obtém-se:

$$a[m]x[n-m] = a[m] \sum_{k=1}^{p} h_k z_k^{n-m-1}.$$
(5.18)

Considerando-se o somatório de 0 a p nos dois lados de (5.18) e fazendo-se k = i, temos

$$\sum_{m=0}^{p} a[m]x[n-m] = \sum_{i=1}^{p} h_i \sum_{m=0}^{p} a[m]z_i^{n-m-1},$$
(5.19)

que é valido para $p+1 \leq n \leq 2p.$ Fazendo-se a substituição $z_i^{n-m-1} = z_i^{n-p-1} z_i^{p-m},$ então obtém-se

$$\sum_{m=0}^{p} a[m]x[n-m] = \sum_{i=1}^{p} h_i z_i^{n-p-1} \sum_{m=0}^{p} a[m] z_i^{p-m}.$$
(5.20)

O somatório mais a direita de (5.20) pode ser identificado com a equação polinomial (5.17), onde z_i são as raízes. Desse modo, obtém-se

$$\sum_{m=0}^{p} a[m]x[n-m] = 0.$$
(5.21)

Deve-se observar que (5.21) é válida para $p + 1 \le n \le 2p$, pois o argumento de x varia de 1 a 2p (devem existir exatamente 2p amostras disponíveis do sinal para que o sistema linear dado por 5.21 seja determinado). Reescrevendo (5.21) para os valores válidos de n e observando que a[0] = 1, chega-se a seguinte seguinte equação vetorial:

$$\begin{bmatrix} x[p] & x[p-1] & \cdots & x[1] \\ x[p+1] & x[p] & \cdots & x[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[2p-1] & x[2p-2] & \cdots & x[p] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a[1] \\ a[2] \\ \vdots \\ a[p] \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} x[p+1] \\ x[p+2] \\ \vdots \\ x[2p] \end{bmatrix}.$$
 (5.22)

Como o sistema linear (5.22) possui p linhas e p variáveis a[1], a[2], ..., a[p], a solução é "exata". O termo exato é aqui usado para exprimir o fato de que se o sinal é reconstruído

exatamente com os parâmetros a partir da solução desse sistema. A solução do sistema (5.22) em a[m] permite que se construa o polinômio descrito em (5.17). Determinando-se as raízes z_k desse polinômio, os parâmetros de amortecimento α_k e as freqüências f_k do sinal são determinadas pelas seguintes equações:

$$\alpha_k = \frac{\ln|z_k|}{T},\tag{5.23}$$

$$f_k = \frac{\tan^{-1} \left[\frac{\operatorname{Im}(z_k)}{\operatorname{Re}(z_k)} \right]}{2\pi T}.$$
(5.24)

Com os valores das raízes z_k , pode-se resolver o sistema da equação (5.15) e determinar os valores de h_k . Finalmente, a partir dos valores de h_k , os valores das amplitudes A_k e das fases iniciais ψ_k são determinadas. Assim,

$$A_k = |h_k|, \qquad (5.25)$$

$$\psi_k = \tan^{-1} \left[\frac{\mathrm{Im}(h_k)}{\mathrm{Re}(h_k)} \right].$$
(5.26)

5.5 Método dos Mínimos Quadrados Aplicado a Prony

Em situações reais, o número de amostras discretas N de um processo estocástico usualmente excede o número mínimo necessário para ajuste do modelo p-exponencial. Sendo assim N > 2p. Nesse caso, há uma sobredeterminação no sistema linear proposto em 5.22. Aqui também, a seqüência de dados é aproximada por uma seqüência exponencial dada por (5.3), reescrita como

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=1}^{p} h_k z_k^{n-1}, \qquad (5.27)$$

onde $1 \leq n \leq N$. O erro de predição do modelo exponencial é dado por $\epsilon[n] = x[n] - \hat{x}[n]$. Interativamente, deve ser encontrado, para uma ordem p dada, os parâmetros $\{h_k, z_k\}$ para k = 1, ..., p que minimizem o erro quadrático total

$$\rho = \sum_{n=1}^{N} |\epsilon[n]|^2.$$
(5.28)

Foi mostrado na Seção 5.3 que este é um difícil problema não linear, até mesmo para p conhecido. Uma solução (otimizada) pode ser obtida com uma variação do método de Prony apresentado na Seção 5.4. A substituição apropriada do primeiro e segundo passo do método de Prony (Seção 5.1) por um procedimento de mínimos quadrados linear resultará em um procedimento de modelagem exponencial que muitas vezes tem sido chamado *Método de Prony Extendido* (Householder, 1950; McDonough, 1963). Essa solução aproxima a não linearidade do ajuste exponencial a uma fatoração polinomial.

O método de Prony extendido considera apenas as amostras p + 1 até N do sinal analisado. De (5.21), pode-se deduzir

$$\hat{x}[n] = -a[1]x[n-1] - \dots - a[p]x[n-p].$$
(5.29)

Nota-se que agora existe um circunflexo em $\hat{x}[n]$ indicando que estamos realizando uma estimativa da amostra x[n] do sinal em função dos valores de $x[n-1], \dots, x[n-p]$, considerando que a[0] = 1.

De maneira similar a (5.7) pode-se escrever

$$e[n] = x[n] - \hat{x}[n].$$
(5.30)

Considerando (5.29) e (5.30), obtém-se

$$\sum_{m=0}^{p} a[m]x[n-m] = e[n] \quad , p+1 \le n \le N, \quad a[0] = 1.$$
(5.31)

Portanto, em um sistema linear sobredeterminado, (5.21) pode ser reescrita como

$$\sum_{m=0}^{p} a[m]x[n-m] = e[n], \qquad (5.32)$$

para $p + 1 \le n \le N$. O termo e[n] em (5.32) representa o erro da predição linear, em contraste com $\epsilon[n]$ em (5.28) que representa o erro da aproximação exponencial. Quando se faz cada termo a[m] como parâmetros de predição linear, (5.32) torna-se similar a equação do erro de predição linear "a priori" descrita na Seção 4.4. Em vez de solucionar o sistema linear exato descrito por (5.21), os parâmetros a[m] são selecionados de maneira que esses minimizem o erro absoluto quadrático de predição linear $\sum_{n=p+1}^{N} |e(n)|^2$, que é uma razoável aproximação do erro quadrático exponencial ρ dado por (5.28). Esse é o método da covariância para predição.

Como mencionado anteriormente, o que se procura é minimizar o erro absoluto quadrático descrito por $\sum_{n=p+1}^{N} |e(n)|^2$, que contempla todas as amostras do sinal analisado.

A equação (5.32) pode ser extendida como

$$\begin{bmatrix} x[p+1] & x[p] & \cdots & x[1] \\ x[p+2] & x[p+1] & \cdots & x[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N] & x[N-1] & \cdots & x[N-p] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a[1] \\ \vdots \\ a[p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e[p+1] \\ e[p+2] \\ \vdots \\ e[N] \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

onde os parâmetros a[1], a[2], ..., a[p] podem ser estimados por um algoritmo de mínimos quadrados (Seção 4.4) aplicado a (5.33), solucionando-se

$$\mathbf{T}_{\mathbf{p}}{}^{H}\mathbf{T}_{\mathbf{p}}\left[\begin{array}{c}1\\\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}E_{\min}\\\mathbf{0}\end{array}\right],\tag{5.34}$$

onde a matriz $\mathbf{T}_{\mathbf{p}}$ de dimensão $(N - p) \times (p + 1)$ é uma matriz tipo Toeplitz formada por $[\mathbf{x} - \boldsymbol{\phi}]$; o vetor \mathbf{x} de dimensão $(N - p) \times 1$ é o vetor do sinal amostrado; $\boldsymbol{\phi}$ de dimensão $(N - p) \times p$ é a matrix de regressores (seção 4.2) e o vetor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ de dimensão $p \times 1$ é o vetor de parâmetros. Eles são dados por

$$\mathbf{T}_p = [\mathbf{x} \ -\boldsymbol{\phi}],$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[p+1] \\ x[p+2] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} -x[p] & -x[p-1] & \cdots & -x[1] \\ -x[p+1] & -x[p] & \cdots & -x[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -x[N-1] & -x[N-2] & \cdots & -x[N-p] \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\hat{\theta}} = \begin{bmatrix} a[1] \\ a[2] \\ \vdots \\ a[p] \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Deste ponto em diante o Método de Prony Extendido possui uma estrutura semelhante ao Método de Prony. Dado que se possui o vetor com os parâmetros a[m], que minimizam o erro quadrático de predição $\sum_{n=p+1}^{N} |e(n)|^2$, podemos construir o polinômio descrito em (5.17). Determinando-se as raízes z_k desse polinômio, os parâmetros de amortecimento α_k e as freqüências f_k do sinal são determinadas por (5.23) e (5.24), respectivamente.

Aplicando-se (5.27) em (5.7), pode-se escrever

$$\begin{bmatrix} x[1] & z_1^0 & z_2^0 & \cdots & z_p^0 \\ x[2] & z_1^1 & z_2^1 & \cdots & z_p^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N] & z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_p^{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon[1] \\ \epsilon[2] \\ \vdots \\ \epsilon[N] \end{bmatrix}.$$
(5.36)

Os parâmetros h_k são determinados aplicando-se mínimos quadrados (Seção 4.4) a (5.36), solucionando-se

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{p}}{}^{H}\mathbf{Z}_{\mathbf{p}}\begin{bmatrix}1\\\mathbf{h}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E_{\min}\\\mathbf{0}\end{bmatrix},\tag{5.37}$$

onde a matriz $\mathbf{Z}_{\mathbf{p}}$ de dimensão $N \times (p+1)$ é a matriz formada por $[\mathbf{x} \ \mathbf{Z}]$; o vetor \mathbf{x} de dimensão $N \times 1$ é o vetor do sinal amostrado; \mathbf{Z} de dimensão $N \times p$ é a matrix de raízes e o vetor \mathbf{h} de dimensão $p \times 1$ é o vetor de parâmetros. Eles são dados por

$$\mathbf{Z}_p = [\mathbf{x} \ \mathbf{Z}],$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \cdots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \cdots & z_p^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_p^{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix}.$$
(5.38)

Finalmente, a partir dos valores de h_k , as amplitudes A_k e as fases iniciais ψ_k são determinadas por (5.25) e (5.26), respectivamente.

5.6 Implementação do Algoritmo de Prony

A implementação do algoritmo se inicia com a montagem da matriz de regressores ϕ . Em seguida, através de uma rotina de mínimos quadrados, soluciona-se um sistema para determinação dos parâmetros a[m] da equação de diferenças do Método de Prony.

Extraindo-se as raízes z_k do polinômio característico do sistema, equacionado pelos parâmetros a[m] extraídos anteriormente, calcula-se as freqüências f_k das senóides amortecidas que compõem o sinal como também seus fatores de amortecimento α_k .

Ainda com as raízes z_k , determina-se através do método dos mínimos quadrados os parâmetros h_k que serão utilizados para o cálculo das amplitudes A_k e fases ψ_k iniciais das senóides amortecidas que compõem o sinal.

 1° passo:

- Definir a ordem do modelo *p*.
- Montagem da matriz $\mathbf{T}_{\mathbf{p}}$ de dimensão $(N p) \times (p + 1)$ que é a matriz tipo Toeplitz formada por $[\mathbf{x} \boldsymbol{\phi}]$, conforme (5.35). Assim,

$$\mathbf{T}_{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} x[p+1] & x[p] & \cdots & x[1] \\ x[p+2] & x[p+1] & \cdots & x[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N] & x[N-1] & \cdots & x[N-p] \end{bmatrix}$$

 2° passo:

• Estimar os parâmetros a[m] que minimizam o erro descrito por (5.31), aplicando-se o método dos mínimos quadrados dado por (5.34). Portanto,

$$\mathbf{T}_{\mathbf{p}}^{H}\mathbf{T}_{\mathbf{p}}\begin{bmatrix}1\\\hat{\boldsymbol{\theta}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E_{\min}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}.$$

 3° passo:

• Cálculo das raízes z_k do polinômio característico do sistema, equação (5.17),

$$\vartheta(z) = \sum_{m=0}^{p} a[m]. z^{p-m}.$$

 4° passo:

• Determinação dos parâmetros de amortecimento α_k e das freqüências f_k dos componentes do sinal, conforme (5.23) e (5.24). Assim,

$$\alpha_k = \ln \left| z_k \right| / T,$$

$$f_k = \frac{\tan^{-1} \left[\frac{\operatorname{Im}(z_k)}{\operatorname{Re}(z_k)} \right]}{2.\pi . T}.$$

 5° passo:

• Montagem da matriz das raízes \mathbf{Z} , conforme (5.38),

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \cdots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \cdots & z_p^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \cdots & z_p^{N-1} \end{bmatrix}.$$

- Montagem da matriz $\mathbf{Z}_{\mathbf{p}}$ de dimensão $N \times (p+1)$ que é a matriz formada por $[\mathbf{x} \ \mathbf{Z}]$, conforme (5.38).
- Determinação dos parâmetros h_k aplicando-se o método dos mínimos quadrados, conforme (5.37),

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{p}}^{H}\mathbf{Z}_{\mathbf{p}}\begin{bmatrix}1\\\mathbf{h}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}E_{\min}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}.$$

 6° passo:

• Determinação das amplitudes α_k e das fases ψ_k dos componentes do sinal, conforme (5.25) e (5.26). Assim,

$$A_k = \left| h_k \right|,$$

$$\psi_k = \tan^{-1} \left[\frac{\operatorname{Im}(h_k)}{\operatorname{Re}(h_k)} \right].$$

Capítulo 6

Plataforma Experimental

6.1 Introdução

Em função do alcance dos resultados pretendidos nesta pesquisa, a escolha da plataforma experimental assumiu grande importância em vista de todas as atividades desse trabalho em questão. Tornou-se fundamental que os ensaios evidenciassem a realidade da dinâmica da mudança de contatos durante o processo de comutação. Também foi necessário que a plataforma possibilitasse ensaios com os contatos em diversos níveis de desgaste. Para atendermos tais requisitos, escolhemos como plataforma experimental um sistema de coleta de sinal aplicado a um regulador de tensão $McGraw - Edison^{\mbox{\embox{\ms}\embox{\ms}\embox{\embox{\embox{\embox{\embox{\embox{\embox{\embox{\embox{\embox{\embox{\embox{\embox{\embox{\embox{\embox{\embox{\ms}\embox{\ms}\embox{\embox{\embox{\ms}\embox{\ms}\embox{\embox{\embox{\embox{\ms}\embox{\ms}\embox{\embox{\embox{\embox{\embox{\ms}\embox{\ms}\embox{\ms}\embox{\ms}\embox{\$

6.2 O Regulador de Tensão (*OLTC*)-Equipamento Piloto

O regulador de tensão sob carga $McGraw - Edison^{\textcircled{B}}VR - 32$, daqui em diante denominado OLTC (*On-Load Tap Changer*), é responsável por manter constante a tensão fornecida por subestações de energia elétrica. O OLTC muda as derivações de seu transformador de potência através de um controlador, para manter a tensão de saída em um nível pré-definido, mesmo com mudança de carga e de tensão de entrada da subestação. Essa constância do sinal de saída deve-se à mudança controlada da relação de enrolamento para uma dada carga, sem interrupção do fornecimento da corrente elétrica. O número elevado de chaveamentos causa a deterioração ou desgaste dos mecanismos ou contatos, o que pode resultar em falhas no OLTC (Kang & Birtwhistle, 2001), (Kang & Birtwhistle, 2003) e (Wang et al., 2000b). O bom funcionamento dos reguladores de tensão é muito importante para a confiabilidade do sistema de distribuição de energia elétrica.



Figura 6.1: Plataforma Experimental.

Portanto, os *OLTCs* são autotransformadores reguladores. O modelo utilizado neste trabalho é apresentado nas Figuras 6.2 e 6.3. Eles regulam a tensão de linha em ± 10 % através de 32 passos; com passos de aproximadamente 5/8 %.

Reguladores McGraw-Edison são fornecidos com as seguintes especificações de fábrica:

- ✓ Dupla elevação 55/65 ^{o}C .
- \checkmark Capacidade ADD AMP TM.
- \checkmark Construção unitária.
- \checkmark Tanque selado.
- \checkmark Dispositivo de alívio de pressão.
- \checkmark Buchas HIGH-CREEP com terminais tipo presilha.
- \checkmark Pára-raio série externo tipo MOV.
- \checkmark Provisão para montagem de pára-raio SHUNT.
- \checkmark Duas placas de identificação gravados a las
er.
- \checkmark Indicador visual de nível de óleo.
- \checkmark Conexão superior para filtro prensa.
- \checkmark Válvula de dreno e dispositivo para coleta de amostra de óleo.
- \checkmark At ende aos requisitos da Year 2000.



Figura 6.2: Regulador de tensão - Equipamento Piloto.

Todos os *OLTCs* McGraw-Edison são fabricados e testados segundo a norma ANSI C57.15. Seus principais componentes externos podem ser visualizados na Figura 6.3. A construção sobre uma única estrutura , sustentada sobre o conjunto interno da tampa, facilita a inspeção e manutenção. Há três tipos de reguladores de tensão por passos: enrolamento série do lado da fonte (TIPO B), enrolamento série do lado da carga (TIPO A) e transformador série. Reguladores McGraw-Edison são usualmente equipados com um enrolamento equalizador. As placas de identificação localizados no tanque e na caixa de controle definem o circuito de potência envolvido.

Um OLTC é composto basicamente de: comutador de tap, transformador, óleo isolante, módulo de controle, carcaça e ferragens de sustentação. Na Figura 6.4 tem-se um OLTCem processo de manutenção, no qual pode-se identificar o comutador e o transformador. As falhas mais relevantes em OLTCs acontecem por baixa isolação e por defeitos no sistema de posicionamento do comutador.

Por ser um dispositivo de comutação eletro-mecânico, o comutador é a parte mais vulnerável à falhas. Portanto, as causas mais freqüentes de falhas em um OLTC são defeitos nos contatos ou no mecanismo de posicionamento (Pengju Kang & McCulloch, 2000b). No chaveamento de um novo contato (tap) ocorre o surgimento de arco elétrico, essa descarga provoca a queima do óleo e com isso a formação de carbono. As descargas provocam também o desgaste físico



Figura 6.3: Componentes externos do OLTC.



Figura 6.4: OLTC aberto para manutenção.





dos contatos e conseqüentemente a liberação de partículas de material condutor no óleo. Com o aumento da concentração de carbono e o acúmulo de partículas condutoras, o óleo perde sua capacidade isolante, permitindo assim a formação de arcos mais intensos e de maior duração e, em casos extremos, um curto circuito. Dessa forma, verifica-se que o desgaste dos contatos contribui para a degradação das características isolantes do óleo. Um problema no mecanismo de posicionamento pode deixar os contatos fora de posição, isto é, não acoplados corretamente, gerando descargas parciais entre os contatos. A perda de sincronismo entre o motor e o sistema de disparo pode ocasionar o aumento no tempo de duração dos arcos. A Figura 6.5 ilustra a diferença entre um contato usado (desgastado) e um contato bom (não desgastado).

Atualmente, a manutenção dos equipamentos é feita através de inspeções regulares ou na

ocorrência de falhas. Esse procedimento de reparo é demorado, deixando o *OLTC* fora de operação por muito tempo.

6.2.1 Montagem

O *OLTC* pode ser montado em poste, em plataforma tipo cruzeta ou estrutura elevada. Reguladores são normalmente providos de suporte para montagem em poste ou em plataforma de acordo com sua potência. Uma estrutura de elevação, fabricada pela McGraw-Edison, pode ser utilizada para simplificar a instalação de reguladores que requeiram um distanciamento específico das partes energizadas para o terra. O controle do *OLTC* pode ser montado no seu tanque ou em um ponto remoto da unidade, nesse caso, é usado um cabo encapado para interconexão do controle com o regulador.

6.2.2 Manutenção

O seguinte programa de manutenção é recomendado para um OLTC que tenha sido desmontado:

- 1. Verificar todos os apertos das conexões.
- 2. Verificar o desgaste de todos os contatos.
- 3. Evitar remover do óleo a montagem principal do núcleo e bobina, exceto na ocorrência de uma falha no enrolamento. Uma trava entre a tampa e a borda do tanque deverá ser usada para apoiar o conjunto do núcleo e bobinas, mantendo-os imersos no óleo, até que a inspeção do comutador ou outra manutenção esteja completa. Se for necessário remover o núcleo e as bobinas do óleo, os seguinte passos devem ser seguidos:
 - a) O comutador não deve ser submetido a temperaturas acima de 66°C (150°F). Ele deve ser removido se a unidade for submetido a altas temperaturas.
 - b) Se a unidade ficar fora do óleo por mais do que 4 horas, recomenda-se colocar em estufa por no mínimo 24 horas a 100°C (212°F). Recomenda-se um máximo de duas vezes o número de vezes em que a unidade pode ser colocada na estufa.
 - c) Após retirada da estufa, a unidade deve ser montada no máximo em 04 horas, completando-se o nível de óleo.
 - d) Após completar-se o nível de óleo, recomenda-se submeter a unidade ao vácuo (um mínimo de 2 mm Hg de vácuo) por pelo menos 1 hora. Se o processamento a vácuo não for possível, deixe a montagem interna mergulhada no óleo por pelo menos 5 dias antes de energizar.



Figura 6.6: Módulo Comutador.

- e) Não teste a unidade se não for processado o vácuo ou o período mergulhado não for cumprido.
- 4. Considere atualização dos controles para o último projeto.

6.2.3 Comutador (*Tap Changer*)

Os *OLTCs* são do tipo autotransformadores com várias entradas, permitindo ajustar o número de espiras e, conseqüentemente, a relação de transformação de acordo com a variação da tensão de entrada. O ajuste do número de espiras é feita pelo comutador por meio da chave rotativa do sistema de posicionamento. O comutador permite que o *OLTC* regule suavemente, em degraus precisos com velocidade controlada, o que minimiza arcos e prolonga a vida dos contatos. Se o cursor (contatos móveis) da chave rotativa estiver na posição 0 (contato neutro ou neutral) o regulador está desligado (Martignoni, 1967). Na Figura 6.6, observamos a foto de um módulo comutador de um *OLTC*, mostrando os contatos fixos, os contatos móveis e o sistema de posicionamento.

Quando a tensão de entrada é diferente da tensão de referência, os contatos móveis são deslocados na tentativa de manter a tensão de saída no nível pré-estabelecido. O *OLTC* pode atuar como um elevador ou redutor de tensão, dependendo da tensão de entrada. Como essa operação é realizada sob carga, o processo de mudança de posição do cursor gera arcos elétricos. Na tentativa de diminuir a intensidade desses arcos, usa-se geralmente um autotransformador



Figura 6.7: Placa de contatos do módulo comutador.

preventivo ou reator, projetado para limitar a corrente circulante dentro de um valor de segurança durante o intervalo de tempo em que se faz a transição entre os contatos adjacentes (Christie, 1969). Essa montagem não é capaz de eliminar totalmente os arcos, mas reduz a corrente minimizando a intensidade dos arcos elétricos.

Como já citado anteriormente, o comutador de derivação sob carga, modelo VR-32 com controle CL-5C do fabricante McGraw-Edison regula a tensão de linha em ± 10 % através de 32 passos; com passos de aproximadamente 5/8 % (McGraw-Edison, 1999). Esses reguladores são monofásicos, de 13,8 kV. Seu módulo comutador possui oito contatos fixos, o contato da posição neutra, um par de contatos móveis, uma chave reversora e o sistema de posicionamento (Figuras 6.6, 6.7 e 6.12).

Conforme observamos na Figura 6.8, o contato móvel pode assumir duas posições distintas para cada contato fixo. Em um ciclo completo, têm-se 16 níveis de tensão. Cada um deles pode corresponder a um aumento ou redução da tensão de entrada, conforme a posição da chave reversora contabilizando-se os 32 passos do regulador.



Figura 6.8: Posição relativa contato móvel: a) sobre 1 contato fixo, b) sobre 2 contatos fixos.

6.3 Operação do Comutador

6.3.1 Comutadores de Mola e de Acionamento Direto

Reguladores para aplicação em baixa corrente utilizam comutadores acionados pela energia armazenada em mola, sendo mais comuns para correntes inferiores a 219 A. O comutador usado para uma potência específica é indicado na placa do regulador. A Figura 6.9 ilustra um típico mecanismo de acionamento por mola. Reguladores de tensão usados em aplicações de média ou elevada corrente empregam comutadores acionados diretamente por motor. Eles têm um motor e um conjunto de engrenagens movendo os contatos através de um pinhão. Comutadores de acionamento direto são mais comuns em aplicações para correntes superiores a 219 A. Nesse trabalho estudamos o desgaste em contatos nos reguladores para aplicação em baixa corrente, que utilizam comutadores acionados pela energia armazenada em mola (Figura 6.9).

6.3.2 Motor

O motor para comutadores de acionamento por mola é um motor com reversão de engrenagens, operado por capacitor adequado para uso em corrente alternada 120 V, monofásico a 50 ou 60 Hz. Um mecanismo de freio integral controla a inércia do motor. Todos os componentes são compatíveis com o óleo do transformador e os enrolamentos são resfriados a óleo. O motor pode permanecer com corrente de rotor bloqueado por 720 horas.

6.3.3 Chave de Reversão

A função da chave de reversão é mudar a polaridade do enrolamento com derivações. Quando o comutador de acionamento por mola estiver na posição neutra a chave de reversão é aberta.



Figura 6.9: Disposição das molas no comutador.

O movimento da chave reversora no comutador de acionamento por mola ocorre quando os contatos móveis principais entram ou abandonam a posição neutra.

6.3.4 Mecanismo de Acionamento por Mola

Duas molas de tração são arranjadas em uma configuração triangular para dar ação de molas a um movimento de deslocamento do eixo para mover os contatos da chave. O mecanismo é ajustado para ação suave ao abrir ou fechar o contato (Figuras 6.9 e 6.10).

6.3.5 Contatos

Muitas conexões elétricas são realizadas por uma grande variedade de estruturas. Essas conexões redundam em contatos elétricos. Em nosso estudo, esses contatos podem ser divididos em contatos a arco e não arco.

Os contatos de não arco consistem em anéis deslizantes (frontal e traseiro) que servem como ponto de conexão para o terminal oposto do enrolamento do reator e um terminal dos dois contatos móveis principais. Todas as superfícies de contato são de cobre "Electrical Tough Pitch" e todas as emendas são rebitadas, parafusadas ou soldados para manter a alta - condutividadedo caminho da corrente. O contato móvel principal é dividido para fazer contato com ambas



Figura 6.10: Comutador acionado por molas.

as superfícies do anel deslizante e resistir à separação no caso de curtos de altas correntes.

Há muitos tipos de contatos de arco em um comutador de *OLTC*. Eles podem ser classificados em duas categorias, estacionários e móveis.

- 1. Os contatos estacionários principais são conectados às derivações do enrolamento série. Os contatos móveis principais ligam os anéis deslizantes aos contatos estacionários principais.
- Os contatos estacionários de reversão são ligados aos terminais opostos do enrolamento série. Os contatos móveis de reversão ligam os contatos estacionários de neutro e a bucha de carga ao contato estacionário de reversão.

Todos os corpos dos contatos estacionários são feitos de cobre *ETP* (Electrical Tough Pitch). As bordas dos contatos estacionários estão soldadas com elementos de liga de cobre-tungstênio visto que esses contatos estão sujeitos a danos devido a impactos e efeitos de arco. Os contatos móveis principais são construídos de liga cobre-tungstênio, e são divididos para fazer a conexão em ambos os lados dos contatos estacionários. Esta divisão resiste à separação no caso de surtos de alta corrente. Espaçadores de tubo de cobre e parafusos de aço são empregados para fixar todos os componentes e são um caminho de alta condutividade de corrente. Os contatos móveis reversíveis têm a mesma construção dos contatos móveis principais. A erosão do contato



Figura 6.11: Sobressalentes comutador.

é função de muitas variáveis tais como parâmetros do sistema, tensão, corrente de carga, fator de potência, projeto do reator e projeto do enrolamento principal. Contatos estacionários e contatos móveis devem ser substituídos antes que o arco desgaste até o ponto no qual pode haver queima do cobre, sendo assim, os contatos móveis devem ser substituídos quando sobrar aproximadamente 1/8 de polegada de superfície lisa. A Figura (6.11) apresenta os principais sobressalentes do comutador.

6.3.6 Operação

A Figura 6.12 (Simas Filho, 2004) ilustra o esquema de um regulador de tensão com 32 níveis. E observado que o sistema possui oito contatos fixos, mais a posição neutra, e uma chave reversora. Os contatos móveis podem se posicionar em apenas 1 contato fixo ou sobre 2 contatos fixos adjacentes, conforme ilustrado na Figura (6.8). Então, cada contato fixo é responsável por duas posições distintas do comutador. A cada posição do comutador estão associadas duas relações de transformação, uma elevando e outra reduzindo, de acordo com a posição da chave reversora. A chave reversora somente é acionada quando o regulador está na posição neutra. As Tabelas 6.1 e 6.2 (Simas Filho, 2004) ilustram o ciclo completo de um regulador de 32 posições, mostrando a correspondência entre a posição dos contatos e a relação de transformação. É verificado que uma mesma posição pode corresponder a uma relação positiva e outra negativa; por exemplo, a posição 2 corresponde às relações -14 e 4. A relação -16 será usada quando a tensão de entrada estiver 10% acima da tensão padrão, já a relação 1 será usada quando a tensão de entrada estiver entre 5/8% e 10/8% abaixo da tensão padrão.

Quando a chave reversora está na posição VR (*raise* - elevando) o OLTC está elevando a tensão de entrada, já a posição VL(*lower* - reduzindo) é responsável pela diminuição da tensão de entrada. Admitindo-se que para a chave na posição VR os passos assumam valores positivos



Figura 6.12: Esquema do Módulo Comutador

Meio Ciclo Negativo do Regulador																	
Posição	1	1/2	2	2/3	3	3/4	4	4/5	5	5/6	6	6/7	7	7/8	8	8/N	N
Relação	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0

Tabela 6.1: Ciclo negativo de um regulador de 32 posições

e para a posição VL valores negativos, um ciclo completo do comutador se dá quando o mesmo saí da posição +16 (máxima elevação de tensão), chega até a neutra (posição zero, onde não há transformação de voltagem) e depois é reduzido até a posição -16 (máxima redução).

6.3.7 O Modulo Comutador e a Mudança de TAP

O módulo comutador de derivação (tap) é composto, conforme mostrado na Figura (6.6), de um jogo de contatos fixos, dois contatos móveis, motor e mola de disparo, sendo que os dois últimos são parte do sistema de posicionamento. É no módulo de controle que se verifica

Meio Ciclo Positivo do Regulador																	
Posição	N	N/1	1	1/2	2	2/3	3	3/4	4	4/5	5	5/6	6	6/7	7	7/8	8
Relação	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Tabela 6.2: Ciclo positivo de um regulador de 32 posições



Figura 6.13: Estágios de uma Mudança de Tap.



Figura 6.14: Intervalos de Tempo do Sinal.

as variações nas características da rede elétrica e se determina para qual nível o sistema de posicionamento deve levar os contatos. O motor é então acionado e, através de um sistema de correntes e engrenagens, leva a mola até a posição em que ocorre o disparo, ocorrendo mudança de contato.

A mudança de *tap* pode ser dividida em quatro estágios, ver Figura 6.13 (Simas Filho, 2004). No primeiro estágio ocorre o início da comutação. No segundo, os contatos móveis estão sendo arrastados sobre os fixos. No terceiro, um dos contatos móveis se desprende do contato fixo, nesta etapa ocorrem os arcos elétricos. No último estágio, os contatos móveis finalizam o acoplamento. Dessa forma, pode-se associar a cada um desses estágios uma parte do sinal de vibração adquirido.

A Figura (6.14) mostra, no domínio do tempo, dois sinais de vibração coletados na carcaça de um *OLTC*. Um dos sinais representa a resposta dinâmica de um contato bom (não desgastados), o outro, a resposta dinâmica de um contato usado (desgastado), ambos sinais coletados no momento de uma comutação. Nessa mesma figura, dividem-se esses sinais de vibração nos intervalos $a, b \in c$. Em a ocorrem os estágios $1 \in 2$ definidos na figura (6.13), em b, intervalo de maior amplitude do sinal, ocorrem os estágios $3 \in 4$, e c é o tempo de resposta de todo o sistema ao estímulo de vibração gerado pela troca de tap. As informações mais importantes do sinal estão nos intervalos $a \in b$. No intervalo a temos a ocorrência de eventos mecânicos como disparo da mola e arraste dos contatos. Em b, temos eventos elétricos e mecânicos como arco elétrico, acoplamento e arraste dos contatos.

A busca de informações e extração de parâmetros é feita baseada nas informações acima.

O sinal de vibração foi amostrado a uma freqüência de 44.100 Hz, cada amostra da dinâmica da comutação dura entre 180 e 220 ms, o que corresponde a um sinal com 7900 a 9700 amostras. O intervalo \boldsymbol{a} dura aproximadamente 20 ms e \boldsymbol{b} 80 ms, correspondendo a aproximadamente 880 e 3500 amostras, respectivamente. O restante do tempo corresponde ao intervalo \boldsymbol{c} .

6.4 Módulo de Condicionamento de Dados

Para a aquisição do sinal de vibração foi aplicado o Módulo de Condicionamento de Sinais (Figura 6.15). O módulo é composto por: sensor de vibração (Acelerômetro - Figura 6.16), circuito de polarização do acelerômetro (Fonte $ICP^{\mathbb{R}}$ - Figura 6.17), amplificador de ganho ajustável e filtro analógico passa-baixas (Figura 6.18).

Como sensor de vibração foi utilizado um acelerômetro tipo 4395 Bruel Kjaer com alimentação $ICP^{\mathbb{B}}$, sensibilidade de 1 $mV/(m/s^2)$, freqüência de ressonância de 37 kHz e resposta linear até 18 kHz.

A fonte CC que alimenta os circuitos citados (Figura 6.19), pode ser ligada na rede elétrica de 110 ou 220 volts. O módulo de condicionamento tem como entrada o sinal de vibração medido pelo acelerômetro e sua saída é conectada a um computador *notebook* através da sua placa de som. O sinal pode ser, então, amostrado com a freqüência desejada e salvodo em formato de arquivo de som (*.wav*), para ser tratado e analisado posteriormente. Na Figura 6.15 pode-se ver o módulo de condicionamento de dados.


Figura 6.15: Módulo de Condicionamento de Sinais.



Figura 6.16: Acelerômetro tipo 4395 Bruel Kjaer (Alimentação $ICP^{\textcircled{B}}$).



Figura 6.17: Circuito de polarização do sensor (Fonte $ICP^{\textcircled{B}}).$



Figura 6.18: Circuito amplificador com filtro analógico.



Figura 6.19: Fonte CC.

Capítulo 7

Coleta de Dados e Resultados

7.1 Introdução

A coleta dos dados foi feita de forma criteriosa, utilizando-se um ponto com a melhor condução mecânica (rigidez) para captação do sinal de vibração. O sinal foi coletado com a freqüência máxima disponível no *ADC* (*Analogic Digital Conversor*) utilizado (placa de som com 44.100 Hz). O acelerômetro foi fixado ao corpo de Regulador de Tensão com uma base magnética encapsulada (Figura 7.1).

A partir do sinal de vibração coletado, realizou-se o procedimento de estimativa espectral utilizando o método de Prony (Seção 5.6). Na Seção (7.2), é apresentada a abordagem da metodologia utilizada para a definição da ordem na representação do sinal pelo modelo aplicado.

Como veremos na Seção (7.3), a partir da estimação espectral de um sinal de vibração coletado, a evidencia da existência de determinadas freqüências identificará a condição do contato.

A respeito da coleta de dados e dos resultados obtidos devemos considerar alguns fatos:

 As medidas foram tomadas em um equipamentos piloto que estava em processo de manutenção. Não há garantia que os contatos estivessem uniformemente usados (desgastados);



Figura 7.1: Fixação do sensor com base magnética.

- As diferentes posições dos contatos no comutador faz com que os sinais de vibração adquiridos na carcaça do OLTC apresentem características particulares devido aos múltiplos caminhos de propagação através do óleo isolante, sofrendo reflexões e refrações nas estruturas internas do equipamento;
- 3. Buscamos a identificação de parâmetros, na estimativa espectral usada, que pudessem ser considerados para o diagnóstico de todos os contatos, independente da posição;
- 4. Os sinais, antes de processados, têm a amplitude normalizada, considerando-se sempre o valor máximo igual a 1.

7.2 Seleção da Ordem do Modelo

A ordem p do filtro que melhor representa um sistema através de um modelo AR não é conhecida a priori. Usualmente postulam-se várias ordens para o modelo, testando-se, posteriormente, a eficiência e eficácia de cada uma delas. O teste de eficácia e eficiência de determinada ordem está baseado em alguns critérios relacionados ao erro de estimação. A aplicação desses critérios permite a escolha da melhor ordem para o modelo na representação do sistema.

A suposição de um valor baixo para ordem p resultará em uma estimativa espectral com baixa resolução e uma alta variância do erro de estimação. A suposição de um valor alto para ordem p aumentará a resolução e reduzirá a variância do erro de estimação, mas aumentará o custo computacional. Assim, para a estimação espectral, a seleção da melhor ordem na representação de um sistema através de um modelo AR está fundamentada no compromisso a ser encontrado entre o aumento da resolução, a redução da variância do erro de estimação e o custo de processamento.

Uma aproximação intuitiva para a ordem ideal na representação de um sistema através de um modelo AR pode ser alcançada incrementando-se a ordem, na construção desse modelo, até que a variância do erro de estimação seja mínimizada. Porém, muitos procedimentos de estimação, inclusive o apresentado neste trabalho, têm a variância do erro de estimação decaindo monotomicamente com o incremento da ordem p. Por exemplo, segundo (S.Lawrence Marple, 1987), o método da covariância modificada de Burg e o método da auto correlação de Yule-Walker (que tem o mesmo princípio do método da covariância considerado na Seção 5.5) envolvem uma relação da seguinte forma:

$$\rho_p = \rho_{p-1} (1 - |a_p[p]|^2), \tag{7.1}$$

para o mínimo erro quadrado ρ_p referente à estimação da resposta de um sistema dada por um modelo AR de ordem p, onde $0 < |a_p[p]|^2 \le 1$.

Pela forma de (7.1), observamos que com o incremento da ordem p do modelo, também haverá um incremento no valor da norma do vetor de parâmetros de predição linear $(|a_p[p]|^2)$ e, consequentemente, um contínuo decréscimo da variância do erro de estimação ρ_p . Então, somente a observação da variância do erro de estimação não é suficiente para indicar quando finalizar a busca da melhor ordem, a menos que haja alguma ordem, depois da qual, a taxa de redução da variância do erro de estimação repentinamente diminua.

Muitos critérios tem sido propostos para seleção da ordem de um modelo AR. Akaike (Akaike, 1969) propôs dois critérios. O seu primeiro critério proposto é o FPE (Final Prediction Error). Esse critério seleciona a ordem de um modelo AR de forma que a variância do erro associada a um fator de ordem seja minimizada. O número FPE para um modelo AR é definido por

$$FPE[p] = \hat{\rho}_p(\frac{N + (p+1)}{N - (p+1)}), \tag{7.2}$$

onde $N \neq 0$ numero de amostras, $\hat{\rho}_p \neq 0$ a estimativa da variância do erro de estimação (a variância do erro da predição linear e[n] pode ser usada como estimativa desse valor).

Observe que, em (7.2), o termo entre parênteses é diretamente proporcional a ordem p, refletindo o custo computacional do aumento da ordem, assim como o custo do aumento da resolução com conseqüente redução da variância do erro de estimação.

A ordem p selecionada será aquela que minimiza o número FPE.

Akaike (Akaike, 1974) sugeriu o seu segundo critério usando conceitos de probabilidade. Esse novo critério chamado AIC (Akaike Information Criterion) determina a ordem do modelo assumindo que o processo modelado tem sua distribuição Gausiana. O número AIC tem a seguinte forma:

$$AIC[p] = N \ln(\hat{\rho}_p) + 2p. \tag{7.3}$$

O termo 2p representa a penalidade pelo uso de coeficientes adicionais (aumento da ordem), no modelo AR, que não resultem em uma substancial redução da variância do erro de estimação. Novamente, a ordem p selecionada é aquela que minimiza o número AIC. Com $N \to \infty$, o número AIC e o número FPE são assintoticamente equivalentes.

Kashyap (Kashyap, 1980) encontrou uma inconsistência estatística no número AIC, pois a probabilidade de erro (encontrada para determinada ordem) não tende a zero com $N \to \infty$. Com o aumento do numero de pontos de uma amostra de um processo, essa inconsistência levaria a uma sobre-estimação da ordem. Em resposta a isso, Rissanen (Rissanen, 1983) propôs o número MDL (*Minimum Description Length*), uma variação do número AIC obtido por

$$MDL[p] = N \ln(\hat{\rho}_p) + p \ln(N), \tag{7.4}$$

que é estatisticamente consistente, pois o incremento de $p \ln(N)$ é maior e mais rápido do que o de p.

Um outro método (CAT - Criterion Autoregressive Transfer Function) foi proposto por Parzen (Parzen, 1974), no qual a ordem p é definida pelo mínimo do número CAT que tem a seguinte forma:

$$CAT[p] = \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{p} \bar{\rho}_{j}^{-1}\right) - \bar{\rho}_{p}^{-1}, \qquad (7.5)$$

onde $\bar{\rho_j} = [N/(N-j)]\hat{\rho}_j$.

Os resultados obtidos na avaliação da ordem usando os números FPE, AIC, MDL e CAT são convergentes quando aplicados em um modelo AR modelando um processo AR.

A seguir apresentaremos uma série de Figuras que mostram os resultados de avaliação da ordem usando os números FPE, AIC, MDL e CAT aplicados a 20 sinais coletados em uma montagem com contatos bons (não desgastados) e a 20 sinais coletados em uma montagem com contatos usados (desgastados).

Visando determinar qual a melhor taxa de amostragem para coleta do sinal, aplicamos a dizimação ao sinal coletado (44.100 Hz), o que equivale a uma reamostragem do sinal com uma aplicação de um filtro passa-baixas. A dizimação foi aplicada na seguinte condição:

- **Dizimação n=2** Reamostragem digital do sinal com taxa de amostragem em 22.050 Hz com filtro passa baixa (FIR ordem 30) de 11.025 Hz.
- **Dizimação n=3** Reamostragem digital do sinal com taxa de amostragem em 14.700 Hz com filtro passa baixa (FIR ordem 30) de 7.350 Hz.

Após cada dizimação do sinal, novamente avaliamos a ordem usando os números FPE, AIC, $MDL \in CAT$.



Figura 7.2: Definição da ordem pelo critério *FPE* para os sinais sem dizimação. a) Curvas dos números *FPE* (contatos bons - não desgastados e contatos usados - desgastados). b) Derivadas das curvas *FPE* para contatos usados (desgastados). c) Derivadas das curvas *FPE* para contatos bons (não desgastados).



Figura 7.3: Definição da ordem pelo critério *AIC* para os sinais sem dizimação: a) Curvas dos números *AIC* (contatos bons - não desgastados e contatos usados - desgastados); b) Derivadas das curvas *AIC* para contatos usados (desgastados); c) Derivadas das curvas *AIC* para contatos bons (não desgastados).



Figura 7.4: Definição da ordem pelo critério *MDL* para os sinais sem dizimação. a) Curvas dos números *MDL* (contatos bons - não desgastados e contatos usados - desgastados). b) Derivadas das curvas *MDL* para contatos usados (desgastados). c) Derivadas das curvas *MDL* para contatos bons (não desgastados).



Figura 7.5: Definição da ordem pelo critério CAT para os sinais sem dizimação. a) Curvas dos números CAT (contatos bons - não desgastados e contatos usados - desgastados). b) Derivadas das curvas CAT para contatos usados (desgastados). c) Derivadas das curvas CAT para contatos bons (não desgastados).



Figura 7.6: Definição da ordem pelo critério FPE para os sinais com dizimação (n=2). a)
Curvas dos números FPE (contatos bons - não desgastados e contatos usados - desgastados).
b) Derivadas das curvas FPE para contatos usados (desgastados). c) Derivadas das curvas FPE para contatos bons (não desgastados).



Figura 7.7: Definição da ordem pelo critério AIC para os sinais com dizimação (n=2). a)
Curvas dos números AIC (contatos bons - não desgastados e contatos usados - desgastados).
b) Derivadas das curvas AIC para contatos usados (desgastados). c) Derivadas das curvas AIC para contatos bons (não desgastados).



Figura 7.8: Definição da ordem pelo critério MDL para os sinais com dizimação (n=2). a)
Curvas dos números MDL (contatos bons - não desgastados e contatos usados - desgastados).
b) Derivadas das curvas MDL para contatos usados (desgastados). c) Derivadas das curvas MDL para contatos bons (não desgastados).



Figura 7.9: Definição da ordem pelo critério CAT para os sinais com dizimação (n=2). a)
Curvas dos números CAT (contatos bons - não desgastados e contatos usados - desgastados).
b) Derivadas das curvas CAT para contatos usados (desgastados). c) Derivadas das curvas CAT para contatos bons (não desgastados).



Figura 7.10: Definição da ordem pelo critério FPE para os sinais com dizimação (n=3). a)
Curvas dos números FPE (contatos bons - não desgastados e contatos usados - desgastados).
b) Derivadas das curvas FPE para contatos usados (desgastados). c) Derivadas das curvas FPE para contatos bons (não desgastados).



Figura 7.11: Definição da ordem pelo critério AIC para os sinais com dizimação (n=3). a)
Curvas dos números AIC (contatos bons - não desgastados e contatos usados - desgastados).
b) Derivadas das curvas AIC para contatos usados (desgastados). c) Derivadas das curvas AIC para contatos bons (não desgastados).



Figura 7.12: Definição da ordem pelo critério MDL para os sinais com dizimação (n=3). a)
Curvas dos números MDL (contatos bons - não desgastados e contatos usados - desgastados).
b) Derivadas das curvas MDL para contatos usados (desgastados). c) Derivadas das curvas MDL para contatos bons (não desgastados).



Figura 7.13: Definição da ordem pelo critério CAT para os sinais com dizimação (n=3). a)
Curvas dos números CAT (contatos bons - não desgastados e contatos usados - desgastados).
b) Derivadas das curvas CAT para contatos usados (desgastados). c) Derivadas das curvas CAT para contatos bons (não desgastados).

7.3 Análise dos Resultados.

Os cálculos dos números FPE, AIC, MDL e CAT foram efetuados com a ordem p variando de 1 a 50. Esse resultados foram registrados nas Figuras 7.2 a 7.13.

Tendo em vista a classificação dos sinais em contato usado (desgastado) e contato bom (não desgastado), a simples observação desses resultados apresentados em gráficos evidência que:

- No sinal sem dizimação Para todos os métodos utilizados na definição da ordem, considerando-se a ordem p=2, mais de 90 % dos sinais coletados em uma montagem com contatos usados (desgastado) tem um valor de erro de predição maior que dos sinais coletados em uma montagem com contatos bons (não desgastados). Esse percentual decai para 75 % para ordens superiores.
- No sinal com dizimação n=2 Para todos os métodos utilizados na definição da ordem, para toda faixa de ordens considerada (p=1 a p=50), mais de 95 % dos sinais coletados em uma montagem com contatos usados (desgastados) tem um valor de erro de predição maior que dos sinais coletados em uma montagem com contatos bons (não desgastados). Em todos os métodos, a ordem que concentra pelo menos 80 % da queda dos números *FPE*, *AIC*, *MDL* e *CAT* (ver gráficos das derivadas) é p=16 (em uma montagem com contatos usados). Portanto, pode-se considerar, para essa dizimação uma ordem ideal para o modelo *AR*, p=17.
- No sinal com dizimação n=3 Para todos os métodos utilizados na definição da ordem, para toda faixa de ordens considerada (p=1 a p=50), apenas 80 % dos sinais coletados em uma montagem com contatos usados (desgastados) tem um valor de erro de predição maior que dos sinais coletados em uma montagem com contatos bons (não desgastados). Em todos os métodos, a ordem que concentra pelo menos 80 % da queda dos números *FPE*, *AIC*, *MDL* e *CAT* (ver gráficos das derivadas) é p=11 (em uma montagem com contatos bons não desgastados). Portanto, pode-se considerar, para essa dizimação uma ordem ideal para o modelo *AR*, p=12.

Analisando essas evidências podemos concluir que:

A melhor forma de classificação, com 95 % de acerto, é o sinal original dizimado com n=2. Portanto, o sinal poderia ser originalmente coletado a 22.050 Hz, sem prejuizo para identificação. Esse sinal pode ser modelado com um modelo AR de ordem p=17.

- A forma de classificação de menor custo computacional, com 90 % de acerto, é o sinal original (coletado a 44.100 Hz) sem dizimação, aplicando a ele um modelo AR de ordem p=2.
- A dizimação n=3 resulta em um erro de 20 % na classificação, não sendo recomendada para identificação.



Figura 7.14: Estimativa espectral pelo método de PRONY (ordem p=17) para sinais coletados a 44.100 Hz e dizimado (n=2). a) Gráfico linear das raias espectrais. b) Gráfico logaritmo das raias espectrais. c) ZOOM 6,5 a 9,5 kHz do gráfico logaritmo de raias espectrais. d) Pólos do filtro modelado, raízes do polinômio característico equação (5.17).

7.3.1 Prony Aplicado ao Sinal com Dizimação n=2 e ordem p=17

Como já evidenciado, a melhor forma de classificação, com 95 % de acerto, é a modelagem Prony (com um modelo AR de ordem p=17) do sinal original, coletado a 44.100 Hz, dizimado com n=2. Nessa modelagem foi possível identificar um padrão explícito da condição dos contatos, que é ausência de raias entre 7,5 kHz e 8,5 kHz (Figura 7.14 (a) e (c)) para os sinais oriundos dos contatos bons (não desgastados). Observamos essa mesma evidencia no gráfico polar (Figura 7.14 (d)) das raízes do polinômio característico (5.17), nesse gráfico observamos a ausência de pólos entre os ângulos 130 e 140 graus, para os sinais oriundos dos contatos bons (não desgastados).



Figura 7.15: Estimativa espectral pelo método de PRONY (ordem p=2) para sinais coletados a 44.100 Hz sem dizimação: a) Gráfico linear das raias espectrais. b) Gráfico logaritmo das raias espectrais. c) ZOOM 6,5 a 9,5 kHz do gráfico logaritmo de raias espectrais. d) Pólos do filtro modelado, raízes do polinômio característico equação (5.17).

7.3.2 Prony Aplicado ao Sinal sem Dizimação Ordem p=2

Vimos anteriormente, que a forma de classificação de menor custo computacional, com 90 % de acerto, é a modelagem Prony (com um modelo AR de ordem p=2) do sinal original, coletado a 44.100 Hz, sem dizimação. Nessa modelagem foi possível identificar um padrão explícito da condição dos contatos, que é ausência de raias acima de 6,5 kHz (Figura 7.15 (*a*) e (*c*)) para os sinais oriundos dos contatos bons (não desgastados). Observamos essa mesma evidencia no gráfico polar (Figura 7.15 (*d*)) das raízes do polinômio característico (5.17), nesse gráfico observamos a ausência de pólos nos ângulos entre 30 e 180 graus, para os sinais oriundos dos contatos bons (não desgastados).

Capítulo 8

Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho foi feita a descrição do funcionamento de um regulador de tensão e do processo de mudança de contato do *OLTC*. Foi estudada a teoria clássica de processamento de sinais, assim como, alguns métodos paramétricos de estimação espectral. Foram expostos, também, os princípios básicos do Método de Prony através do qual desenvolveu-se uma sistematização para identificar e diagnosticar o estado dos contatos em um *OLTC*s.

A previsão do estado de funcionamento dos reguladores de tensão é muito importante para as equipes de manutenção em concessionárias de energia elétrica. O OLTC é um dos responsáveis pela regulação de tensão na rede de distribuição. Por ser dotado de um dispositivo de acionamento mecânico de seus contatos, está mais sujeito a falhas e apresenta um elevado custo de manutenção, quando comparado aos demais equipamentos desta rede. A condição de operação dos OLTCs está diretamente relacionada ao nível de desgaste dos contatos elétricos do módulo comutador.

Um módulo de condicionamento de sinais foi aplicado para adquirir e caracterizar os sinais de vibração emitidos quando acionada a mudança de contatos em um *OLTC*. O modelo de Prony foi utilizado para analisar esses modos de vibração ocorridos durante a mudança de contatos. Foi possível identificar um padrão explícitos utilizando o modelo de décima sétima ordem que é ausência de raias entre 7,5 kHz e 8,5 kHz (Figura 7.14) para os sinais oriundos dos contatos bons (não desgastados).

Este trabalho mostrou que é possível utilizar o Método de Prony para diagnosticar o estado de operação de um *OLTC*. Entretanto, o modelo desenvolvido reproduz apenas de forma aproximada o estado real do *OLTC*. É possível que algum modo de falha, sem indícios, não seja identificado pelo método utilizado no sistema de diagnósticos e, portanto, ocorram falhas e/ou problemas no equipamento. No entanto, os problemas relacionados aos desgastes dos contatos, mudanças superfícies dos contatos, folgas no posicionamento e outras características que são modificadas continuamente e relacionadas diretamente à condição dos contatos, tais situações podem ser identificadas e diagnosticadas ao longo da vida útil do equipamento. Desse modo, O sistema de monitoramento proposto apresenta baixo custo, é de fácil implementação, não exige grandes recursos computacionais e pode ser aplicado a outros modelos de reguladores. Para isso é necessário repetir a análise inicial do sinal com a estimação dos parâmetros através do Método de Prony. Os resultados experimentais obtidos são bastante animadores. Comparada com as principais pesquisas existentes nesta área (Foata et al., 2000),(Pengju Kang & McCulloch, 2000b),(P.Kang & Birtwhistle, 2001a) e (Kang & Birtwhistle, 2001), a modelagem utilizada visou uma redução do esforço computacional envolvido em tal tarefa.

Fazendo-se uso de um modelo de segunda ordem simplifica-se a análise e reduz-se o esforço computacional, encontrando-se uma freqüência dominante, que após verificada, permite a determinação do estado de desgaste dos contatos.

É possível automatizar o processo de identificação utilizando-se rede neurais como um sistema classificador.

Estão sendo desenvolvidas, paralelamente a este trabalho, outras duas técnicas para o tratamento do sinal de vibração em *OLTC*s. Uma utilizando a transformada Wavelet (Mallat & Hwang, 1992) e outra o método de Algoritmos Genético (Simas Filho, 2004). Fica a sugestão para a elaboração de um estudo comparativo, mostrando as vantagens e desvantagens de cada técnica, apontando para a mais adequada, ou até, verificando a possível utilização conjunta de tais métodos.

Apêndice A

Processos Estocásticos

A.1 Conceitos Importantes

Um processo estocástico discreto pode ser imaginado como uma coleção, ou conjunto, de seqüencias de valores (números reais ou complexos) em função do tempo. Esse conjunto de seqüencias pode ser denotado como x[n;i], sendo que i é a *i-enesima* seqüência e n sendo o indexador do tempo. Para um dado i representando uma seqüência do conjunto observado, utilizaremos a notação abreviada x[n].

Para um determinado valor fixo do indexador do tempo n, o valor do elemento observado x[n;i] sobre todo conjunto de seqüencias (para todo i) será definido como variável aleatória. A faixa de valores que pode ser representada em x[n] é, em geral, contínua, contudo x[n;i] é discreta em ambos $n \in i$.

A probabilidade que x[n] assuma valores em determinada faixa α é dada pela função distribuição de probabilidade $F(\alpha; n) = Pr(x[n] \leq \alpha)$. A correspondente Função de Densidade de Probabilidade (*PDF* - "Probability Density Function") é dada por $p(\alpha, n) = \partial F(\alpha, n) / \partial \alpha$.

A média ou valor esperado para um processo estocástico x[n] é definido como:

$$\bar{x}[n] = \xi\{x[n]\} \tag{A.1}$$

em que a letra ξ representa o operador estatístico esperança.

A auto correlação de um processo estocástico para um par de instantes $n_1 \in n_2$ é definida como:

$$r_{xx}[n_1, n_2] = \xi\{x[n_1]x^*[n_2]\}$$
(A.2)

A equação (A.2) é a definição para auto correlação, na engenharia, inicialmente sugerida por Wiener. Estatísticos reservam o termo auto correlação para referenciar a grandeza normalizada (variando entre zero e um) que mede o quanto duas variáveis aleatórias, em um processo estocástico, são estatisticamente idênticas.

A auto correlação de um processo estocástico x[n; i] com a média removida é a auto covariância, definida como:

$$c_{xx}[n_1, n_2] = \xi\{(x[n_1] - \bar{x}[n_1])(x^*[n_2] - \bar{x}^*[n_2])\}$$
(A.3)

em que

$$c_{xx}[n_1, n_2] = r_{xx}[n_1, n_2] - \bar{x}[n_1]\bar{x}^*[n_2]$$
(A.4)

Se o processo estocástico tem média zero para todo n, então a auto correlação e auto covariância são idênticas:

$$c_{xx}[n_1, n_2] = r_{xx}[n_1, n_2] \tag{A.5}$$

Os termos "correlação" e "covariância" são freqüentemente usados como sinônimos na literatura, mas são formalmente idênticos somente para processos de média zero.

Quando dois diferentes processos estocásticos x[n] e y[n] são observados pode-se definir a correlação cruzada como:

$$r_{xy}[n_1, n_2] = \xi\{x[n_1]y^*[n_2]\}$$
(A.6)

e a covariância cruzada como:

$$c_{xy}[n_1, n_2] = \xi\{(x[n_1] - \bar{x}[n_1])(y^*[n_2] - \bar{y}^*[n_2])\}$$

= $r_{xy}[n_1, n_2] - \bar{x}[n_1]\bar{y}^*[n_2]$ (A.7)

Dois processos estocásticos são ditos incorrelatos se $c_{xy}[n_1, n_2] = 0$ para todo $n_1 \in n_2$.

Um processo estocástico é dito estacionário no sentido amplo (*WSS*: "*Wide-Sense Statio*nary") se sua média não depende do tempo (ela é constante para todos os indexadores de tempo) e sua auto correlação depende apenas do espaço de tempo entre as duas variáveis aleatórias observadas ($m = n_2 - n_1$).

Dois processos estocásticos são conjuntamente estacionários no sentido amplo WSS se cada um é WSS e sua correlação cruzada depende unicamente do espaço de tempo entre as duas variáveis aleatórias consideradas. Note que para a definição do processo estocástico estacionário

$$\bar{x}[n] = \bar{x},\tag{A.8}$$

e uma função de auto correlação (ACF - "Auto Correlation Function")

$$r_{xx}[m] = \xi\{x[n+m]x^*[n]\}$$
(A.9)

que é função do espaço de tempo m entre as duas variáveis aleatórias observadas, e uma função de auto covariância

$$c_{xx}[m] = \xi \left\{ (x[n+m] - \bar{x})(x^*[n] - \bar{x}^*) \right\} = r_{xx}[m] - |\bar{x}|^2.$$
(A.10)

Os processos estocásticos discretos e conjuntamente estacionários no sentido amplo WSSx[n] e y[n] são estatisticamente caracterizados pela função de correlação cruzada (CCF - "Cross Correlation Function")

$$r_{xy}[m] = \xi\{x[n+m]y^*[n]\}$$
(A.11)

que é função do espaço de tempo m entre as duas variáveis aleatórias observadas, e uma função de covariância cruzada

$$c_{xy}[m] = \xi \left\{ (x[n+m] - \bar{x})(y^*[n] - \bar{y}^*) \right\} = r_{xy}[m] - \bar{x}\bar{y}^2$$
(A.12)

Algumas propriedades usuais são:

$$r_{xx}[0] \ge |r_{xx}[m]|$$

$$r_{xx}[-m] = r_{xx}^{*}[m]$$

$$r_{xx}[0]r_{yy}[0] \ge |r_{xy}[m]|^{2}$$

$$r_{xy}[-m] = r_{yx}^{*}[m]$$
(A.13)

aplicadas para todo número inteiro m. É fácil ver, através dessas propriedades, que uma função

90

de auto correlação ACF de um processo estocástico discreto e estacionário no sentido amplo WSS terá o seu máximo na origem (m=0).

Se a matriz de auto correlação ("Hermitian Toepliz"):

$$R_{M} = \begin{bmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & \cdots & r_{xx}[-M] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \cdots & r_{xx}[-M+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[M] & r_{xx}[M-1] & \cdots & r_{xx}[0] \end{bmatrix}$$
(A.14)

é formada por (M+1) componentes de uma função de auto correlação ACF, então a forma quadrática:

$$a^{H}R_{M}a = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{M} a[m]a^{*}[n]r_{xx}[m-n] \ge 0$$
(A.15)

será semi-definida positiva para qualquer vetor arbitrário a(Mx1), sendo $r_{xx}[m]$ uma função de auto correlação valida. A função de auto correlação ACF é dita como tendo a propriedade semi-definida positiva.

A função densidade espectral de potência *PSD* - "*Power Spectral Density*" é definida como sendo a Transformada de Fourier no Tempo Discreto *DTFT* - "*Discrete-Time Fourier Trans-form*" da função de auto correlação:

$$P_{xx}(f) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}[m] \exp(-j2\pi f mT)$$
(A.16)

A função densidade espectral de potência PSD é assumida para a faixa limitada em $\pm 1/2T$ Hz, e é periódica com freqüência 1/T Hz. A PSD descreve como a variância de um processo estocástico esta distribuída em freqüências. Para justificar seu nome, considere a inversa da DTFT:

$$r_{xx}[m] = \int_{-1/2T}^{1/2T} P_{xx}(f) \exp(j2\pi fmT) \, df.$$
(A.17)

que avaliada para m=0,

$$r_{xx}[0] = \int_{-1/2T}^{1/2T} P_{xx}(f) df.$$
 (A.18)

A auto correlação, com atraso igual a zero (m=0), representa a potência média de um processo estocástico. A área sob $P_{xx}(f)$ é uma função densidade (potência por unidade de freqüência) que representa a distribuição de potência por freqüências. O par de equações (A.16) e (A.17) (transformada de Fourier e sua inversa) é freqüentemente citado como o teorema tempo discreto Wiener-Khintchine. Devido a propriedade $r_{xx}[-m] = r_{xx}^*[m]$, a *PSD* pode ser uma função estritamente real positiva. Se a função de auto correlação *ACF* é formada por valores estritamente reais, então $r_{xx}[-m] = r_{xx}[m]$ e a *PSD* pode ser expressa como uma transformada de cosseno:

$$P_{xx}(f) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}[m] \cos(2\pi f mT)$$
(A.19)

em que $P_{xx}(f)$ é uma função simétrica, portanto $P_{xx}(f) = P_{xx}(-f)$.

A.2 Modelos Paramétricos de Processos Estocásticos

A densidade espectral de potência PSD já foi definida na seção A.1 como a transformada de Fourier no tempo discreto da função de auto correlação ACF de um processo estocástico. A relação de transformação entre PSD e ACF pode ser considerada como uma relação não paramétrica, envolvendo o momento estatístico de segunda ordem de um processo estocástico. Uma relação paramétrica entre PSD e ACF envolvendo o momento estatístico de segunda ordem pode ser criada levando-se em conta um modelo baseado numa série temporal de um processo estocástico. A PSD de um modelo baseado numa série temporal será então função do modelo de parâmetros relacionado a ACF. Uma classe especial de modelos, direcionados a processos com presença de ruido branco, é descrita nessa seção. Nessa classe estão inclusos os modelos de processos auto regressivos ("Autoregressive" $\rightarrow AR$), os modelos de processos com média móvel ("Moving Average" $\rightarrow MA$) e os modelos de processos auto regressivos com média móvel ("Autoregressive Moving Average" $\rightarrow ARMA$). As variáveis de saídas dessa classe de modelos tem a densidade espectral de potência PSD expressa em termos dos parâmetros do modelo. A motivação para o uso de modelos paramétricos na representação de processos estocásticos é aumentar o alcance do uso de estivadores baseados em PSD na produção de modelos clássicos de estimação espectral.

Em um processo típico de modelagem, aos dados indisponíveis ou aos valores não estimados na função de auto correlação *ACF* são atribuídos o valor nulo (zero), o que normalmente é irreal e leva à distorções na estimativa espectral. Freqüentemente, temos disponível algum conhecimento do processo amostrado e que esta sendo modelado. Essas informações podem ser usadas para construção de um modelo mais aproximado para reconstrução da seqüência observada. Assim, aplicando-se funções de janelamento, poderemos eliminar o impacto de algumas dessas distorções.

O nível de qualidade na resolução espectral, qualquer que seja, é determinado pela escolha conveniente do modelo, que terá como principal característica a capacidade de ajustar os dados medidos ou a função de auto correlação *ACF* (conhecida ou estimada através dos dados) através de pequeno numero de parâmetros.

A.2.1 Resumo

A aproximação paramétrica para estimação espectral envolve três passos:

 Como primeiro passo, faz-se a escolha apropriada do modelo paramétrico de série temporal que represente os dados medidos e gravados. Nessa seção, focamos o interesse em três modelos paramétricos de série temporal típicos: os modelos de processos auto regressivos ("Autoregressive"→ AR), os modelos de processos com média móvel ("Moving Average" $\rightarrow MA$) e os modelos de processos auto regressivos com média móvel ("Autoregressive Moving Average" $\rightarrow ARMA$). Se a forma esperada para o espectro do processo for com presença de muitos cumes afinados e sem distribuição em faixas de freqüências (montanhas com bases largas), então o modelo AR é o mais apropriado. Caso contrário, havendo presença de faixas de freqüências distribuídas sem a presença de muitos cumes afinados, então o modelo MA é mais apropriado. O modelo ARMA pode representar, em geral, ambos tipos de extremos. Quando a forma de determinado espectro é razoavelmente modelada por dois ou mais dos três modelos aqui propostos, então o modelo que resultar no menor número de parâmetros deve ser o selecionado. Esse é o princípio da passimônia promovido por (Box, 1970). A argumentação para esse princípio é que melhores estimações estatísticas são possíveis se o número de parâmetros estimados é minimizado. O peso computacional para estimativa de parâmetros em um modelo AR é freqüentemente e significativamente menor que o requerido para estimar parâmetros dos modelos MA ou ARMA. Sendo assim, uma série temporal AR será, em muitas ocasiões, o modelo escolhido, embora nem sempre seja o modelo com menor número de parâmetros. A questão de como selecionar o número de parâmetros é tratada na seção 7.2.

- Como segundo passo, faz-se uma estimativa dos parâmetros do modelo.
- Como terceiro passo, insere-se a estimativa dos parâmetros na expressão teórica do *PSD* apropriado ao modelo.

Apêndice B

Rotinas para aplicação dos algorítimos

B.1 Sub-rotina PRONY (MATLAB)

function [f,alfa,A,psi] = PRONY(x,Fs,n,Normaliza)

```
%
                                             %
% Função de implementação do algoritmo de Identificacao AR Prony
                                             %
% A(q-1)x(k) = 0
                                             %
% com:
                                             %
% A(q-1) = 1+a1*q-1+a2*q-2+...+an*q-n
                                             %
% x(k) = -a1_x(k-1)-a2_x(k-2)-...-an_x(k-n)
                                             %
% T_p(k).teta = e(k)
                                             %
%
                                             %
%......Definicoes do Estimador Minimos Quadrados para AR.....%
%
                                             %
\% N = numero de amostras
                                             %
% n = ordem do polinomio A(q-1)
                                             %
%
                                             %
%.....%
%......Definição das caracteristicas das amostras.....%
%
                                             %
```

```
% Fs = Taxa de amostragem em Hz
                                             %
% Normaliza = Indica se o sinal sera normalizado antes da execucao
                                             %
%
         da rotina. Opçoes( "s" ou "n".
                                              %
%
                                             %
%.....%
%.....%
% INICIALIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS
e_{min} = 1e-200;
if upper(Normaliza) == 'S'
  x=x./max(x);
end
N = length(x);
T = 1/Fs;
Z=zeros(N,n);
T_p=zeros(N-n,n+1);
%.....
% MONTAGEM DA MATRIZ TOEPLITZ
for m = 0:n
  T_p(1:N-n,m+1) = x((n+1-m):N-m);
end
%.....
% ESTIMATIVA DO VETOR DE PARÂMETROS (a)
teta = inv(conj(T_p')*T_p)*[e_min;zeros(1,n)'];
teta = teta/teta(1);
% e = x(n+1:N) - T_p * teta(2:n+1);
\% e = norm(e)
a_prony = [teta]';
```

```
%.....
```

```
% CALCULO DAS RAÍZES DO POLINÔMIO FORMADO PELO VETOR DE PARÂMETROS
z=roots(a_prony);
figure(20);
compass(z,'b');
hold on;
%.....
% MONTAGEM DA MATRIZ DE EXPONENCIAIS DAS RAÍZES
Z(1,:)=repmat(1,[1 n 1]);
for i=1:n
  Z(2,i)=z(i);
end
for i=3:N;
  Z(i,:)=Z(2,:).^(i-1);
end
%.....
% MONTAGEM DA MATRIZ Z_p
Z_p = [x Z];
%.....
% ESTIMATIVA DO VETOR DE PARAMETROS (h)
teta = inv(conj(Z_p')*Z_p)*[e_min;zeros(1,n)'];
teta = teta/teta(1):
h = teta(2:n+1);
figure(21)
compass(h,'b');
hold on;
%.....
% RODA ROTINA DE ESTIMATIVA DE PARAMETROS
[f,alfa,A,psi] = EXPARAMS(z,h,Fs,T);
figure(2);
hold on; stem(f,A,'b');
grid on;
```

function [f,alfa,A,psi] = EXPARAMS(z,h,Fs,T)

B.2 Sub-rotina EXPARAMS (MATLAB)

```
%.....
% CALCULO DAS FREQÜÊNCIAS E AMORTECIMENTO
f = (angle(z).*(Fs/(2*pi)))';
alfa = (log(abs(z))./T)';
%.....
% CALCULO DAS AMPLITUDES E FASES
A = abs(h)';
psi = (angle(h))'.*360/(2*pi);
```

Bibliografia

- Akaike, H. (1969). Power Spectrum Estimation through Autoregression Model Fitting, Ann. Inst. Stat. Math.
- Akaike, H. (1974). A New Look at the Statistical Model Identification, IEEE Trans. Autom. Control.
- Andrade, A. F. A. (2004). Técnicas de análise de vibrações, SENAI DR BA, Salvador-BA.
- Box, G.E.P., a. G. (1970). Time series analysis forecasting and control, *Technical report*, Holden-Day.
- Christie, C. V. (1969). Elementos de Eletrotécnica, Ed. Globo.
- David J. De Fatta, Joseph G. Lucas, W. S. H. (1988). Digital Signal Processing: A System Design Approach, John Wiley and Sons.
- Evans, A. G. & Fischl, R. (1973). Optimal Least-Squares Time-Domain Synthesis of Recursive Digital Filters, Vol. AU-21, pp. 61-65, IEEE Trans. Audio Electoacoust.
- Foata, M., Beauchemin, R. & Rajotte, C. (2000). On-line testing of on-load tap changers with a portable acoustic system, *IEEE 9th International Conference on Transmission and* Distribution Construction, Operation and Live-Line Maintenance Proceedings pp. 293 – 298.
- Guuinic, P. & Aubin, J. (2001). Cigre's work on power transforms, *EPRI Substation Equipment Diagnostics Conference IX*.
- Householder, A. S. (1950). On prony's method of fitting exponential decay curves and multiplehit survival curves, *Technical report*, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tenn.
- Kamen, E. W. & Heck, B. S. (2000). Fundamentals of Signals and Systems, Using the Web and Matlab®, second edn, Prentice Hall.
- Kang, P. & Birtwhistle, D. (2001). Condition assessment of power transformer on load tapchangers using wavelet analysis, *IEEE Transaction on Power Delivery* 16: ...
- Kang, P. & Birtwhistle, D. (2003). Condition assessment of power transformer onload tap changers using wavelet analysis and self-organizing map: Field evaluation, *IEEE - Trasactions on Power Delivery* 18: ...
- Kashyap, R. L. (1980). Inconsistency of the AIC Rule for Estimating the Order of Autoregressive Models, IEEE Trans. Autom. Control.
- Makhoul, J. (1975). Linear Prediction: A tutorial Review., Proc. IEEE.
- Mallat, S. & Hwang, W. L. (1992). Singularity detection an processing with wavelets, *IEEE Transactions on Information Theory* **38**(2).
- Martignoni, A. (1967). Transformadores, Ed. MEC-EI.
- McDonough, R. N. (1963). Representations and Analysis of Signal, Ph.d. dissertation, Department of Electrical Engineering, John Hopkins University, Baltimore, Md.
- McDonough, R. N. & Huggins, W. H. (1968). Best Least-Square Representation of Signals by Exponentials, Vol. AC-13, pp. 408-412, IEEE Trans. Autom. Control.
- McGraw-Edison (1999). Reguladores de Tensão McGraw-Edison VR-32/CL-5, Instalação, Operação, Manutenção e Informações Sobre Peças de Reposição, McGraw-Edison.
- Papoulis, A. (1991). Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, McGraw-Hill.
- Parzen, E. (1974). Some Recent Advances in Time Series Modeling, IEEE Trans. Autom. Control.
- Pengju Kang, David Birtwhistle, J. D. & McCulloch, D. (2000a). Non-invasive on-line condition monitoring of on load tap changers, *IEE Proceedings on Generation*, *Transmission and Distribution* 3: 2223–2228.
- Pengju Kang, David Birtwhistle, J. D. & McCulloch, D. (2000b). Non-invasive on-line condition monitoring of on load tap changers, *Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings* 3: 2223–2228.
- P.Kang & Birtwhistle, D. (2001a). Condition monitoring of power transformer on-load-tapchangers. part 1: Automatic condition diagnostics, *IEE Proceedings on Generation, Trans*mission and Distribution 148(4): 301–306.
- P.Kang & Birtwhistle, D. (2001b). Condition monitoring of power transformer on-load-tapchangers. part 2: Detection of ageing from vibration signatures, *IEE Proceedings on Generation*, *Transmission and Distribution* 148(4): 307–311.

- Prony, G. C. F. M. R. (1795). Essai expérimental et analytique sur les loi de la dilatabilité et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la capeur de l'alkool, à différentes températures, *Technical report*, J. de l'Ecole Polytechnique,.
- Rissanen, J. (1983). A Universal Prior for the Integers and Estimation by Minimum Description Length, Ann. Stat.
- Simas Filho, E. F. (2004). Monitoramento de reguladores de tensão utilizando análise de vibração através de sistemas inteligentes, Master's thesis, Universidade Federal da Bahia, Salvador-BA.
- S.Lawrence Marple, J. (1987). Digital Spectral Analysis with Aplication, Prentice Hall P T R.
- Wang, H., Liu, Y. & Griffin, P. (2000a). Artificial intelligence in oltc fault diagnosis using dissolved gas-in-oil information, *IEEE Power Engineering Society Summer Meeting* 4: 2422 – 2427.
- Wang, Z., Liu, Y. & Griffin, P. (2000b). Design and implementation of a fast on-load tap changing regulator, *IEEE* ...: ...