



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

ESCOLA POLITÉCNICA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA

MARCONI OLIVEIRA DE ALMEIDA

Dissertação Mestrado

**ALOCÇÃO PARCIAL DE AUTOVALORES
COM $\mathbb{D}$ -ESTABILIDADE PARA SISTEMAS
LINEARES INVARIANTES NO TEMPO**

Salvador

Março 2019

MARCONI OLIVEIRA DE ALMEIDA

**ALOCAÇÃO PARCIAL DE AUTOVALORES COM
 $\mathbb{D}$ -ESTABILIDADE PARA SISTEMAS LINEARES
INVARIANTES NO TEMPO**

Dissertação Mestrado

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal da Bahia como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: José Mário Araújo

Salvador

Março 2019

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Universitário de Bibliotecas (SIBI/UFBA),
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Oliveira de Almeida, Marconi
ALOCÇÃO PARCIAL DE AUTOVALORES COM D-ESTABILIDADE
PARA SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO / Marconi
Oliveira de Almeida. -- SALVADOR, 2019.
84 f. : il

Orientador: José Mário Araújo.
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Elétrica) -- Universidade Federal da
Bahia, Escola Politécnica, 2019.

1. Controle. 2. D-estabilidade. 3. LMI. 4. LTI. 5.
PEVA. I. Araújo, José Mário. II. Título.

Marconi Oliveira de Almeida

Alocação Parcial de Autovalores com D-Estabilidade para sistemas Lineares Invariantes no Tempo

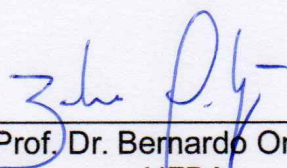
Dissertação apresentada à Universidade Federal da Bahia, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, para a obtenção do título de *Mestre*.

APROVADA em: 15 de Março de 2019.

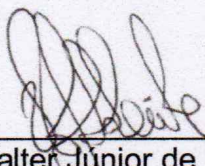
BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. José Mario Araújo
Orientador – IFBA



Prof. Dr. Bernardo Ordoñez
UFBA



Prof. Dr. Valter Junior de Souza Leite
CEFET - MG

Dedico este trabalho ao Criador de toda razão e emoção existente no universo e a meus queridos e generosos pais.

Agradecimentos

Ao Orientador deste trabalho pela disponibilidade de dar conselhos em horários diversos. A Capes pelo apoio financeiro no período inicial de elaboração deste trabalho. Aos docentes do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica por permitirem minha permanência neste curso que possibilitou acesso ao conhecimento necessário para construção deste trabalho.

Resumo

Alocação Parcial de Autovalores (PEVA – Partial Eigenvalue Assignment) é uma técnica de controle linear por realimentação de estados cujo objetivo é modificar a resposta transitória de um sistema linear invariante no tempo (LTI), através da mudança dos autovalores do sistema em malha aberta. A quantidade reduzida de variáveis utilizadas pelo PEVA, numa relação diretamente proporcional a quantidade de autovalores não desejados, torna-a uma metodologia de alocação dos pólos computacionalmente viável e eficaz para projeto de sistemas em larga escala (LSS). Entretanto, a alocação convencional que tem como objetivo atingir um conjunto específico de coordenadas pontuais no plano complexo, é difícil aplicar o PEVA em projeto de controle multi-objetivo, comumente requisitados em diversas áreas da engenharia. A fim de reduzir essa dificuldade, uma nova abordagem para PEVA usando a alocação regional de autovalores é desejada e estudada. Um novo teorema baseado em desigualdades matriciais lineares (LMI) para calcular a matriz de realimentação é criado para resolver o problema PEVA-regional, o qual pode ser computados em programas de linguagem de script no MATLAB (Mathworks, Massachusetts, EUA). Este teorema é construído usando elementos da teoria clássica do PEVA-estrito, teorema de $\mathbb{D}$ -estabilidade e transformação de similaridade. Após o cálculo da matriz de realimentação, a análise espectral do sistema de malha aberta e de malha fechada é feita após a construção: Gráficos de localização dos autovalores no plano complexo; tabelas comparativas dos autovalores do sistema em malha aberta e fechada; e resposta transitória com entradas zero. Aplicada esta técnica para diferentes projetos de controle e executada a etapa de análise, pode-se observar que o teorema é capaz de alocar os autovalores para regiões desejadas e evitar o fenômeno de *spillover* com precisão de quatro dígitos decimais. Os bons resultados da teoria regional-PEVA proposta e o seu sucesso em garantir os objetivos de controle permitem que esta dissertação de mestrado ofereça uma boa base para pesquisas futuras em projetos de controle linear multi-objetivo.

Palavras-chaves: LTI, $\mathbb{D}$ -Estabilidade, LMI, PEVA, Controle.

Abstract

The Partial Eigenvalue Assignment (PEVA) is a technique of linear control state feedback, which aims to modify the transient response of a linear time-invariant system (LTI) by changing the eigenvalues of an open loop system. The reduced number of variables used by PEVA, in a ratio directly proportional to the number of undesired eigenvalues, turns it a pole allocation methodology computationally feasible and efficient in control designs for large-scale systems (LSS). However, due to the conventional allocation for reaching a specific set of coordinate points on the complex plane, it is challenging to apply PEVA in multi-objective control project, commonly required in several areas of engineering. To reduce this difficulty, a new approach for PEVA using the regional allocation of eigenvalues is desired and studied. A new theorem based on linear matrix inequalities (LMI) to calculate feedback matrix is created to solve PEVA-regional problems, which can be computed on MATLAB (Mathworks, Massachusetts, USA) script language programs. This theorem is built using elements of the classical theory strict-PEVA, the theorem of $\mathbb{D}$ -stability, and similarity transformation. After calculating feedback matrix, spectral analysis of the open-loop and closed-loop system are made after building up: Complex-plane eigenvalue localization charts; comparative tables of open-loop and closed-loop system's eigenvalues; and transient response with zero inputs. Applied this technique for different control projects and executed analysis step, it can be observed that theorem can allocate the eigenvalues to desired regions and avoid the phenomenon of spillover with an accuracy of four decimal digits. The good results of regional-PEVA theory proposed and its success in guaranteeing control objectives enable this masters dissertation offers an excellent base for futures researches on linear multi-objective control projects.

Key-words: LTI, $\mathbb{D}$ -Stability, LMI, PEVA, Control.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Localização dos modos de malha aberta e fechada para o Modelo I. . .	41
Figura 2 – Localização dos modos de malha aberta e fechada para o Modelo II. . .	43
Figura 3 – Localização dos modos de malha aberta e fechada para o Modelo III. . .	44
Figura 4 – Localização dos modos de malha aberta e fechada via métodos EVA e PEVA modelo III, projeto nominal com perturbação na matriz $\mathbf{K}$	44
Figura 5 – Comportamento dos elementos do vetor deslocamento para o Modelo III submetido a perturbação da matriz $\mathbf{K}$	45
Figura 6 – Localização dos modos de malha aberta e fechada para o Modelo IV. . .	45
Figura 7 – Localização dos modos de malha aberta e fechada para o Modelo V. . .	48
Figura 8 – Localização dos modos de malha aberta e fechada para o Modelo VI. . .	49
Figura 9 – Modelo Simulink Visão Geral	63
Figura 10 – Especificação dos parâmetros para bloco 1	64
Figura 11 – Especificação dos parâmetros para bloco 2	64
Figura 12 – Especificação dos parâmetros para bloco 3	65
Figura 13 – Especificação dos parâmetros para bloco 4	65
Figura 14 – Especificação dos parâmetros para bloco 5	66
Figura 15 – Especificação dos parâmetros para bloco SUM	66
Figura 16 – Especificação dos parâmetros para bloco Control Signal	67
Figura 17 – Especificação dos parâmetros para bloco Feedback EVA	67
Figura 18 – Especificação dos parâmetros para bloco Feedback PEVA	68
Figura 19 – Comandos para especificação de variáveis F1 e F2 para uso no simulink	68
Figura 20 – Bloco seletor para resposta da simulação, chave conectada ao ramo de cima para método PEVA, em baixo para EVA	68
Figura 21 – Configuração, Observação e exportação de resultados no bloco Scope all x	68

Lista de tabelas

Tabela 1 – Funções características de $\mathbb{D}_{(\mathbf{L}, \mathbf{V})}$	18
Tabela 2 – Regiões $\mathbb{D}$ -estáveis para alocação do sistema descrito pelo Modelo I . .	33
Tabela 3 – Regiões $\mathbb{D}$ -estáveis para alocação do sistema descrito pelo Modelo II . .	34
Tabela 4 – Regiões $\mathbb{D}$ -estáveis para alocação do sistema descrito pelo Modelo III .	34
Tabela 5 – Regiões $\mathbb{D}$ -estáveis para alocação do sistema descrito pelo Modelo IV .	35
Tabela 6 – Regiões $\mathbb{D}$ -estáveis para alocação do sistema descrito pelo Modelo V . .	36
Tabela 7 – Modos do sistema do modelo I	41
Tabela 8 – Modos do sistema do modelo II	43
Tabela 9 – Modos do sistema do modelo III	44
Tabela 10 – Modos do sistema do modelo IV	46
Tabela 11 – Modos do sistema do modelo V	48
Tabela 12 – Modos selecionados do modelo VI	49

Lista de abreviaturas e siglas

EVA	Atribuição de autovalor, do inglês <i>Eigenvalue Assignment</i> .
LMI	Inequação linear matricial, do inglês <i>Linear Matrix Inequality</i> .
LSS	Sistema de larga escala, do inglês <i>Large-Scale System</i> .
LTI	Linear e invariante no tempo, do inglês <i>Linear Time Invariant</i> .
MIMO	Múltiplas entradas e múltiplas saídas, do inglês <i>Multi-Input Multi-Output</i> .
PEVA	Atribuição parcial de autovalor, do inglês <i>Partial Eigenvalue Assignment</i> .
SISO	Única entrada e única saída, do inglês <i>Single-Input Single-Output</i> .

Lista de símbolos

$\mathbf{A}$	Matriz de estados do sistema LTI.
$\mathbf{B}$	Matriz de entradas do sistema LTI.
$\mathbf{F}$	Matriz de ganho por retroalimentação do sistema LTI.
$\mathbf{F}_p$	Matriz de retroalimentação proporcional.
$\mathbf{F}_d$	Matriz de retroalimentação derivativa.
$\mathbf{I}_{n \times m}$	Matriz identidade com n-linhas e m-colunas.
$\mathbf{0}_{n \times m}$	Matriz nula com n-linhas e m-colunas.
$\mathbf{M}$	Matriz de massa.
$\mathbf{D}$	Matriz de amortecimento.
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez.
$\mathbf{N}$	Matriz de influência.
$\mathbf{Y}_1$	Matriz dos autovetores linearmente independentes dos modos do sistema em malha aberta utilizadas no PEVA.
$\tilde{\mathbf{Y}}_1$	Matriz similar real de $\mathbf{Y}_1$.
$\tilde{\mathbf{Y}}_1^H$	Matriz transposta hermitiana de $\tilde{\mathbf{Y}}_1$.
$\mathbf{\Gamma}$	Matriz cujas linhas são compostas por vetores γ_i .
$\mathbf{Z}_1$	Matriz não singular solução da equação de Sylvester.
$\mathbf{\Lambda}_1$	Matriz diagonal dos modos do sistema em malha aberta usados no PEVA.
$\tilde{\mathbf{\Lambda}}_1$	Matriz real similar de $\mathbf{\Lambda}_1$.
$\mathbf{\Lambda}_{c1}$	Matriz diagonal dos modos do sistema em malha fechadas desejados no PEVA.
$\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{c1}$	Matriz real similar de $\mathbf{\Lambda}_{c1}$.
$\mathbf{Q}$	Matriz de Transformação similaridade.
$\mathbf{Q}_j$	Submatriz de $\mathbf{Q}$.

$\mathbf{X}_{c1}$	Matriz dos autovetores a direita dos modos do sistema em malha fechada desejados via alocação parcial.
Φ	Matriz de retroalimentação do sistema equivalente de ordem reduzida.
$\mathbf{W}$	Matriz real solução da LMI de $\mathbb{D}$ -estabilidade.
$\mathbf{P}$	Matriz simétrica definida positiva solução da LMI de $\mathbb{D}$ -estabilidade.
$\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$	Produto de kronecker de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.
$\mathbf{X} \prec 0$	Matriz $\mathbf{X}$ é definida negativa.
$\sigma(\mathbf{X})$	Espectro da matriz $\mathbf{X}$.
α	Limite superior da $\mathbb{D}$ -região do tipo faixa.
β	Limite inferior da $\mathbb{D}$ -região do tipo faixa.
r	Raio da $\mathbb{D}$ -região do tipo disco.
q	Centro da $\mathbb{D}$ -região do tipo disco.
θ	Ângulo da $\mathbb{D}$ -região do tipo setor.
λ_i	i -ésimo modo do sistema em malha aberta.
λ_{Ri}	Parte real de λ_i .
λ_{Ii}	Parte imaginária de λ_i .
μ_i	i -ésimo modo do sistema em malha fechada.
$\mathbf{x}(t)$	Vetor de variáveis de estado do sistema LTI.
$\dot{\mathbf{x}}(t)$	Derivada temporal de $\mathbf{x}(t)$.
$\mathbf{x}_0$	Vetor de estados iniciais.
$\mathbf{x}_f$	Vetor de estados finais.
$\mathbf{u}(t)$	Vetor de entradas do sistema LTI.
$\mathbf{h}(t)$	Vetor de deslocamento do sistema de segunda ordem.
$\dot{\mathbf{h}}(t)$	Vetor de velocidade do sistema de segunda ordem.
$\ddot{\mathbf{h}}(t)$	Vetor de aceleração do sistema de segunda ordem.
$\mathbf{y}_i$	autovetor à esquerda associado a autovalor λ_i .

$\mathbf{y}_{Ri}$	Parte real de $\mathbf{y}_i$.
$\mathbf{y}_{Ii}$	Parte imaginária de $\mathbf{y}_i$.
γ_i	Vetor de livre escolha com n-linhas.
$\mathbb{D}$	Conjunto dos autovalores descritos pela por LMI.
$\mathbb{D}_\theta$	$\mathbb{D}$ -região do tipo setor.
$\mathbb{D}_{q,r}$	$\mathbb{D}$ -região do tipo disco.
$\mathbb{H}_{\alpha,\beta}$	$\mathbb{D}$ -região do tipo faixa.
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{S}$	Conjunto das matrizes simétricas.
$\mathbb{Y}_A$	Conjunto dos modos do sistema em malha aberta.
$\mathbb{Y}_{pA}$	Subconjunto dos modos do sistema em malha aberta de elementos não desejados.
$\overline{\mathbb{Y}}_{pA}$	Complementar de $\mathbb{Y}_{pA}$.
$\mathbb{Y}_{cA}$	Conjunto dos modos do sistema em malha fechada desejados.
$\mathbb{Y}_{pcA}$	Subconjunto de $\mathbb{Y}_{cA}$.
$\mathbf{H}_{\mathbb{D}}(s)$	Função característica do conjunto $\mathbb{D}$.
$\mathbf{R}_{\mathbb{D}}(\mathbf{A}, \mathbf{P})$	LMI para $\mathbb{D}$ -estabilidade de um sistema em malha aberta.
$\mathbf{R}_{\mathbb{D}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{W})$	LMI para $\mathbb{D}$ -estabilidade de um sistema em malha fechada.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	6
1.2	Organização do Trabalho	6
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
2.1	Abordagem Paramétrica para o PEVA-estrito	9
2.1.1	Conceitos e Teoremas elementares para EVA-estrito e PEVA-estrito	9
2.1.2	Método e Algoritmos	13
2.2	EVA-regional e $\mathbb{D}$-estabilidade	16
2.2.1	Introdução a LMI	16
2.2.2	Teorema da $\mathbb{D}$ -estabilidade e LMI	17
2.2.3	Informações adicionais sobre $\mathbb{D}$ -estabilidade e técnicas de controle robusto	20
3	PROPOSTA	23
3.1	Hipóteses decorrente da pesquisa	29
4	METODOLOGIA	31
4.1	Diretrizes da Simulação	31
4.2	Instrumento e Software	31
4.3	Amostras	31
4.3.1	Modelo I	32
4.3.2	Modelo II	33
4.3.3	Modelo III	34
4.3.4	Modelo IV	35
4.3.5	Modelo V	35
4.3.6	Modelo VI	36
4.4	Tratamento de Dados	37
5	RESULTADOS E ANÁLISE	41
5.1	Modelo I	41
5.2	Modelo II	42
5.3	Modelo III	43
5.4	Modelo IV	45
5.5	Modelo V	47
5.6	Modelo VI	48
	Considerações Finais	51

REFERÊNCIAS	55
APÊNDICES	61
APÊNDICE A – VIBRATION_SYS.MDL	63
ANEXO A – ARTIGO	69
ANEXO B – MATRIZ DE RETROALIMENTAÇÃO MODELO VI	81

1 Introdução

Aplicação de estruturas de controle baseadas em modelos de sistemas lineares é usual em diversas áreas de engenharia; dentre elas, destaca-se a realimentação de estados pela simplicidade e capacidade de controlar características dinâmicas importantes do sistema. Várias contribuições foram desenvolvidas ao longo de quase seis décadas para determinar a matriz de realimentação por estados em projetos de controle, considerando os mais variados objetivos: rejeição à perturbações, redução do esforço para o controlador, minimização da interferência do ruído, estabilidade, rastreamento dinâmico, dentre outras. A abordagem por Atribuição de Autovalores (EVA, do inglês *Eigenvalue Assignment*), também conhecida como alocação de pólos ou alocação de autovalores, desenvolvida inicialmente por Bass e Gura (1965) para sistemas lineares SISO (do inglês *single-input and single-output*), tem inspirado a construção de novos métodos para melhorar a resposta transitória de sistemas multi-variáveis com representação de primeira ordem, segunda-ordem, ordem-superior, retardo temporal, entre outros. Entretanto, observa-se que a aplicação do EVA para sistemas com grande quantidade de variáveis de estados pode apresentar dificuldades numéricas de implementação. Neste contexto, surgiu a Atribuição Parcial de Autovalores (mais conhecido como PEVA, do inglês *Partial Eigenvalue Assignment*).

O EVA é um tema clássico na literatura de controle linear e pode ser categorizado por tipos de alocação: **estricto**, quando os autovalores desejados são especificados em coordenadas pontuais; e **regional** no caso da atribuição ser permitida para regiões delimitadas no plano complexo. Alguns livros de sistemas lineares geralmente abordam o EVA estrito, dentre os quais destacam-se Sinha (2007), Chen (1993), Fairman (1998), Antsaklis e Michel (2006), Rugh e Rugh (1996) e Hespanha (2009). A importância desse assunto no tema da estabilização por retroalimentação é discutida em livros desde a década de 70, conforme descrito por Datta (2004):

“Feedback stabilization and EVA (pole-placement) are two central problems in control theory. For detailed treatment of these problems, see Brockett (1970), Brogan (1991), Friedland (1986), Chen (1984), Kailath (1980), Wonham (1985), Kwakernaak and Sivan (1972), etc.” (DATTa, 2004, pg.397)

“Estabilização por retroalimentação e EVA (alocação de polos) são dois problemas centrais na teoria de controle. Para um detalhado tratamento sobre estes problemas veja Brockett (1970), Brogan (1991), Friedland (1986), Chen (1984), Kailath (1980), Wonham (1985), Kwakernaak and Sivan (1972), etc.” (DATTa, 2004, pg.397, tradução própria)

A principal qualidade do EVA para determinar a matriz de retroalimentação é sua capacidade de relacionar, implicitamente ou explicitamente, os autovalores das matrizes da equação do sistema e sua resposta transitória, pois pela teoria de sistemas lineares, a posição dos autovalores tem influência no comportamento dos estados. Em sistemas SISO de segunda ordem essas relações são evidenciadas por fórmulas que quantificam medidas como tempo de pico, acomodação e máximo sobressinal. No contexto de sistema MIMO (do inglês *multi-input multi-output*) a função de transferência do sistema, graças as propriedades lineares, pode ser decomposta em frações parciais resultando numa superposição de funções de primeira e segunda ordem, cada uma possuindo características transitórias próprias. Essas relações tornam a técnica útil para atender objetivos de controle desejados para a resposta transitória como rápido decaimento, bom amortecimento e outras características dinâmicas desejadas a resposta transitória (CHILALI; GAHINET; APKARIAN, 1999). O problema do controlador por rastreamento monotônico (NTOGRAMATZIDIS et al., 2014) é um assunto cuja aplicação do EVA é essencial, pois deseja-se que o sistema tenha um pequeno tempo de estabilização capaz de evitar *overshoot* e o *undershoot*.

Do ponto de vista analítico, as fórmulas de Bass e Gura (1965) e Ackermann (1972) conseguem descrever a relação de proporcionalidade entre a matriz de retroalimentação, vetor deslocamento dos autovalores e inversa da matriz de controlabilidade (DATTA, 2004, pg.360). Ao analisar essas fórmulas e as limitações dos elementos que constituem o sistema de controle, Friedland (2012) descreve os desafios para utilização da técnica EVA, conforme listado a seguir:

- Existe proporcionalidade entre deslocamento de polos e aumento da matriz de retroalimentação; em função disso, deve-se evitar grandes deslocamentos para não haver saturação do regulador e aumento da interferência do ruído.
- Devido a proporcionalidade da matriz de retroalimentação e da matriz inversa da controlabilidade, a própria estrutura do sistema controlável pode favorecer um ganho elevado no regulador; neste caso, aconselha-se minimizar a alocação para evitar a saturação e interferência do ruído.
- A depender da modelagem, o comportamento do sistema em alta frequência pode ser desconhecido; logo, para evitar eventos indesejáveis como ressonância destrutiva e instabilidade limita-se a alocação para regiões aceitáveis.
- Distanciar polos da origem favorece o decaimento da resposta transitória; entretanto, mais energia será necessária ao controlador. Se houver polos próximos a origem a dinâmica transitória será lenta; assim, deve-se evitar a separação extrema de polos com objetivo de melhorar o aproveitamento energético do regulador.

Apesar das fórmulas analíticas de Bass-Gura e Ackermann determinarem a matriz de retroalimentação, podem existir dificuldades numéricas devido ao mau-condicionamento de matrizes, como descreve [Datta \(2004\)](#):

“There are many methods for the EVA problem. As stated in Chapter 10, some of the well-known theoretical formulas, such as the Ackermann formula, the Bass-Gura formula, etc., though important in their own rights, do not yield to computationally viable methods. The primary reason is that these methods are based on transformation of the controllable pair (A,B) to the controller-companion form, and the transforming matrix can be highly ill-conditioned in some cases.”([DATTA, 2004](#), pg.405)

“Existem muitos métodos para o problema EVA. Como dito no Capítulo 10, algumas das fórmulas teóricas mais conhecidas, como a fórmula de Ackermann e a de Bass-Gura, etc., embora importantes em seus próprios direitos, não resultam em métodos computacionalmente viáveis. A principal razão é que essas são baseadas na transformação do par controlável (A,B) para a forma controlável-companheira, e a matriz transformada pode ser altamente má-condicionada em alguns casos.”([DATTA, 2004](#), pg.405, tradução própria)

As dificuldades numéricas apresentadas pelas fórmulas analíticas foram incentivos para busca de novos métodos numéricos capazes de tornar computacionalmente viável o problema EVA estrito. [Datta \(2004\)](#) mostra diferentes algoritmos para obter a matriz de retroalimentação e discute suas vantagens e restrições. Entretanto, autores como [Datta et al. \(2002\)](#) e [Saad \(1986\)](#) descrevem a inviabilidade dessas técnicas para sistemas com muitas variáveis de estados e criticam a aplicação em problemas nos quais deseja-se alocar somente poucos autovalores:

“However, in many realistic situation the matrix A is so large that use of a QR-like algorithm becomes impractical...Using these techniques to solve such large pole assignment problems is not only uneconomical, but also untrustworthy.”([SAAD, 1986](#), pg.1)

“Entretanto, muitas situações realísticas a matriz A é tão larga que o uso de algoritmos QR torna-se impraticável...Usando estas técnicas para resolver problemas sobre atribuição de grande quantidade de polos não é só antieconômico, mas também não confiável.”([SAAD, 1986](#), pg.1, tradução própria)

“Many practical applications such as the design of large and sparse structures, electrical networks, power systems, computer networks, etc., give rise to very large and sparse problems and the conventional numerical methods (e.g. the QR based and Schur methods) for EVA problem do not work well. Furthermore, in most of these applications only a small number of eigenvalues, which are responsible for instability and other undesirable phenomena, need to be reassigned. Clearly, a complete eigenvalue assignment, in case when only a few eigenvalues are bad”, does not make sense.”([DATTA et al., 2002](#), pg.1-2)

“Muitas aplicações práticas, como o design de grandes e esparsas estruturas, redes elétricas, sistemas de energia, redes de computadores, etc., geram problemas muito grandes e esparsos em métodos numéricos convencionais (por exemplo, os métodos baseados em QR e Schur) para o problema de EVA os quais não funcionam bem. Além disso, na maioria dessas aplicações, apenas um pequeno número de autovalores, responsáveis pela instabilidade e por outros fenômenos indesejáveis, precisa ser reatribuído. Claramente, uma atribuição completa de autovalores, para caso em que apenas alguns autovalores são ruins, não faz sentido”.(DATTA et al., 2002, pg.1-2, tradução própria)

Neste contexto surgiu o PEVA-estrito: método EVA que dispensa a especificação e o uso de autovalores não desejáveis para alocação a fim de reduzir o número de variáveis a serem utilizadas. Consequentemente, essa redução permite que o método tenha menos equações a serem resolvidas e algoritmos menos susceptíveis as restrições numéricas. A relevância no PEVA é reforçada ao verificar a quantidade elevada de artigos com propostas para sistemas de segunda ordem e superiores.

A diversidade de propostas permitiu que novos termos surgissem: QPEVAP (Quadratic Partial Eigenvalue Assignment Problem)(DATTA, 2004), RQPEVA (Robust Quadratic Partial Eigenvalue Assignment Problem) (QIAN; XU, 2005) e o MNRQPEVA (Minimum norm Robust Quadratic Partial Eigenvalue Assignment Problem) (BRAHMA; DATTA, 2009). Artigos recentes que abordam a questão da alocação parcial com foco em modelos de segunda ordem são os trabalhos de Araújo e Santos (2017), Das, Goswami e Datta (2016), Zhang, Ye e Ouyang (2016), Araújo e Santos (2018), Liu e Li (2014), Zhang, Ouyang e Yang (2014), Araújo et al. (2018); e para sistemas de ordem superior tem-se os artigos desenvolvidos por Mao e Dai (2013), Zhang, Ouyang e Yang (2014), Zhang (2016), Ramadan e El-Sayed (2010) .

A solução do problema EVA-regional é interessante devido a capacidade de alocar os autovalores para regiões específicas do plano complexo, possibilitando estabelecer limites e intervalos admissíveis para medidas de resposta transitória, além de evitar problemas por saturação e grande interferência do ruído no regulador. Essa flexibilização é desejável em projetos cujos diferentes objetivos de controle devem ser atendidos conjuntamente. Graças a definição $\mathbb{D}$ -estabilidade e o uso de teoremas correlacionados é possível avaliar se os autovalores pertencem a estes conjuntos regionais, denominados de $\mathbb{D}$ -estáveis. Segundo Datta (1999) o conceito de $\mathbb{D}$ -estabilidade surgiu na análise de sistemas econômicos com equilíbrio geral desenvolvido por Arrow e McManus (1958); posteriormente, artigos surgiram para melhor caracterizar-la, alguns deles são citados por Kushel (2018).

Aplicações de teoremas baseados em Inequações Matriciais Lineares (mais conhecido como LMI's do inglês *Linear Matrix Inequalities*) para sistemas LTI são observadas desde 1890 quando Lyapunov desenvolveu o seu teorema de estabilidade global assintótica (OSTERTAG, 2011). Estudos em problemas de controle surgem na década de 40, quando

cientistas como Yakubovich, Willems, Lur'e e Postnikov reforçaram a importância da aplicação das LMI's (BOYD et al., 1994a, pg.2-3). Pyantiskii, Skorodinskii, Horisberger, Belanger e Karmarkar contribuíram para formulação de problemas de otimização convexa envolvendo LMI's (BOYD et al., 1994a, pg.3-4). Posteriormente, o método de otimização por pontos interiores desenvolvido por Nemirovskii e Gahinet (1994) permitiu que problemas com pequenas e grandes dimensões pudessem ser resolvidos com maior eficiência. Duan e Yu (2013) descrevem a relevância das LMI's na área de controle:

“In the last two decades, linear matrix inequalities (LMIs) have emerged as a powerful tool in the field of control systems analysis and design. Many problems, such as state feedback synthesis, robustness analysis and design, and $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control, can all be reduced to convex or quasi-convex problems that involve LMIs. Due to successful developments of efficient and reliable algorithms for solving LMIs, these problems can now be solved both efficiently and numerically reliably, thereby making this the most attractive feature of LMIs.”(DUAN; YU, 2013, pg. xix)

“Nas duas últimas décadas, as desigualdades matriciais lineares (LMIs) surgiram como uma ferramenta poderosa no campo da análise e projeto de sistemas de controle. Muitos problemas, como síntese por retroalimentação de estado, análise de robustez e design, e controle $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$, podem ser reduzidos a problemas convexos ou quase-convexos que envolvem LMIs. Devido a desenvolvimentos bem-sucedidos de algoritmos eficientes e confiáveis para resolver LMIs, esses problemas agora podem ser resolvidos de maneira eficiente e numericamente confiável, tornando-se, assim, o recurso mais atraente das LMIs.”(DUAN; YU, 2013, pg. xix, tradução própria)

Atualmente, observa-se aplicações de LMI's em diversas áreas da engenharia, alguns exemplos são: Estabilidade de sistemas de controle baseadas em lógica nebulosa (HONG; NAM, 2003; TOULOTTE et al., 2008); Sistemas com levitação magnética (HY-PIUSOVÁ; ROSINOVÁ, 2018); Sistemas de turbina eólica (BAKKA; KARIMI, 2012); Sistema de potência (ARANGUIZ; BARBOSA; VERDEJO, 2015).

O Teorema da D-estabilidade aplicada a regiões definidas por LMI's é conhecido por ser versátil e aplicável em sistemas contínuos e discretos:

“The aforementioned theorem can be viewed as a generalization of the well known continuous- and discrete-time Lyapunov theorems. We remark that this result is really amazing since it not only covers both the well-known continuous- and discrete-time Lyapunov theorems, but also gives truly essential generalization to both of them.” (DUAN; YU, 2013, pg.107)

“O teorema acima mencionado pode ser visto como uma generalização dos teoremas de Lyapunov contínuos e discretos bem conhecidos. Nós observamos que este resultado é realmente surpreendente, uma vez que ele não apenas cobre os teoremas de Lyapunov de tempo contínuo e discreto, mas também fornece uma generalização verdadeiramente essencial para ambos.” (DUAN; YU, 2013, pg.107, Tradução Própria)

Apesar de existir o método alocação total dos autovalores para regiões de estabilidade utilizando LMI's, poucos estudos são observados para o caso da alocação parcial. Alguns artigos para sistemas SISO podem ser citados apesar de não terem como objetivo principal a alocação parcial: [Datta, Chakraborty e Belur \(2012\)](#) buscam um controlador de ordem reduzida; [Datta e Chakraborty \(2014\)](#), [Ou et al. \(2014\)](#) têm como objetivo minimizar a norma da matriz de retroalimentação. Para o sistema MIMO não foi observada aplicação.

1.1 Objetivos

Observando a redução da quantidade de variáveis e equações oferecida pelos métodos PEVA-estrito, bem como as vantagens computacionais existente nos projetos EVA-regional usando LMI, é justificável considerar que a construção de um método PEVA-regional usando LMIs oferecerá qualidade atrativas para diversos projetos de engenharia, inclusive aqueles que demandam controle multiobjetivo. Com base nessa observação é desejado atingir o objetivo principal:

Objetivo Principal. Propor um método de atribuição parcial dos autovalores com alocação para regiões $\mathbb{D}$ -estáveis. —

Para obter em plenitude o objetivo principal é preciso cumprir os seguintes objetivos específicos:

Objetivo Específico 1. Propor um teorema que soluciona o problema de controle do PEVA-regional via $\mathbb{D}$ -estabilidade. —

Objetivo Específico 2. Construir um algoritmo capaz de garantir *no-spillover*, ou seja, evitar espalhamento de autovalores não desejáveis de alocação. —

1.2 Organização do Trabalho

Divide-se este documento em cinco partes centrais: Revisão Bibliográfica; Proposta; Metodologia; Resultado e Análise; e Conclusão.

A Revisão Bibliográfica tem como função apresentar as bases teóricas do método de aproximação paramétrica para o PEVA desenvolvido por [Datta et al. \(2002\)](#). Também inclui o teorema da $\mathbb{D}$ -estabilidade para o EVA regional em sistemas lineares. Cada assunto é descrito num capítulo diferente.

A Proposta mostra como mesclar os teoremas observados no método de [Datta et al. \(2002\)](#) e o teorema da $\mathbb{D}$ -estabilidade para obter o Objetivo específico 1. Posteriormente, apresenta-se o algoritmo para atender o Objetivo específico 2.

A parte relativa à Metodologia é dividida em quatro sub-capítulos:

- Diretrizes da simulação: o qual evidencia as etapas necessárias para a análise espectral do projeto antes e depois do emprego da técnica;
- Instrumento e Software: mostra os componentes utilizados para executar as simulações;
- Amostra: descreve os modelos de sistema LTI usado e os objetivos de alocação;
- Tratamento de Dados: expõe os tipos de gráficos e tabelas utilizados para realizar a análise e descreve as linguagens de *script* para obter os dados necessários.

No capítulo Resultados e Análise apresenta-se os dados obtidos para cada projeto de controle. As figuras, os gráficos e as tabelas foram analisados para verificar se o algoritmo proposto atende ao Objetivo específico 2.

A conclusão apresenta as vantagens e desvantagens sobre o método PEVA regional obtido do trabalho. Nesta parte mostra o artigo publicado no *Journal of Control, Automation and Electrical Systems* no processo de desenvolvimento dessa dissertação e indica-se quatro possíveis linhas de pesquisas a serem desenvolvidas em decorrência desse trabalho.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Abordagem Paramétrica para o PEVA-estrito

Abordagem paramétrica para o PEVA-estrito foi desenvolvido por [Datta et al. \(2002\)](#) em seu artigo *Partial Eigenvalue Assignment in Linear Systems: Existence, Uniqueness and Numerical Solution*. Nele descreve as definições, os teoremas, o algoritmo e as condições de suficiência e necessidade para aplicar a técnica para sistemas LTI. Nesta seção é revisada os elementos centrais para compreender o método desenvolvido pelo autor, juntamente com outras referências. Além disso, faz-se uma revisão de conceitos elementares do EVA regional.

2.1.1 Conceitos e Teoremas elementares para EVA-estrito e PEVA-estrito

Os modelos de sistema LTI em malha aberta e fechada utilizadas neste trabalho são descritos pelas definições [2.1](#) e [2.2](#):

Definição 2.1. Seja $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de n-variáveis de estados,;então o sistema LTI em malha aberta pode ser descrito pela equação no espaço de estado:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (2.1)$$

sendo $\mathbf{A}$ matriz de estados. —

Definição 2.2. Seja $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de n-variáveis de estados e $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor de m-entradas; então o sistema LTI em malha fechada por retroalimentação de estados pode ser descrito pelas equações:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \quad (2.3)$$

sendo as matrizes $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ respectivamente as matriz de estados, entrada e ganho por retroalimentação. —

Os conceitos de espectro e modos do sistema são facilitadores para formulação de outros conceitos fundamentais para EVA e PEVA:

Definição 2.3. O espectro da matriz $\mathbf{A}$, simbolizado pelo função $\sigma(\mathbf{A})$, é o conjunto de todos os seus autovalores. —

Definição 2.4. $\lambda_i \in \mathbb{C}$ será definida como um modo do sistema LTI em malha aberta se $\lambda_i \in \sigma(\mathbf{A})$. —

Definição 2.5. $\mu_i \in \mathbb{C}$ será definida como um modo do sistema LTI em malha fechada se $\mu_i \in \sigma(\mathbf{A} + \mathbf{BF})$. —

Uma das propriedades fundamentais da teoria de controle para sistemas LTI é a controlabilidade (ou atingibilidade), capacidade de permitir a migração das variáveis de estados para valores finais desejados. A definição 2.6 observada no livro de [Aström e Murray \(2008\)](#) permite definir com precisão a propriedade:

Definição 2.6. (ASTRÖM; MURRAY, 2008, pg.107) O sistema LTI é dito controlável se para qualquer vetor de estado $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}_f$ existe um sinal de controle real $\mathbf{u}(t)$ operando no intervalo de t_0 à t_f tal que $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ e $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ —

Existem vários critérios para verificar a controlabilidade do sistema LTI de tempo contínuo, o teorema seguinte apresenta-os:

Teorema 1. (DATTA, 2004, pg.161-163) *Seja o sistema LTI mostrado na definição 2.2 tal que $m \leq n$; então critérios para avaliar a controlabilidade são:*

- Se a matriz de controlabilidade:

$$\mathbf{C}_M = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^n\mathbf{B}] \quad (2.4)$$

tem posto igual a n .

- Se a matriz de controlabilidade graniana:

$$\mathbf{W}_c = \int_0^{t_f} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt \quad (2.5)$$

é não singular para qualquer $t_f > 0$.

- Se os autovetores a esquerda de $\mathbf{A}$ satisfazem:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{B} = \mathbf{0}_{1 \times m} \quad (2.6)$$

tem posto igual a n para todos os autovalores de $\mathbf{A}$.

- Se a matriz:

$$\mathbf{W}_\lambda = [\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_{n \times n} \quad \mathbf{B}] \quad (2.7)$$

tem posto igual a n para qualquer autovalor de $\mathbf{A}$. —

Observa-se pelo Teorema 1 que a controlabilidade do sistema pode ser verificada com o auxílio das expressões 2.6 e 2.7, todas relacionadas com os modos do sistema em malha aberta. A contribuição de cada modo para a análise da controlabilidade do sistema gera o conceito de modo controlável o qual pode ser identificado no Teorema 2:

Teorema 2. (*DATTA et al., 2002*) *Seja o sistema LTI da Definição 2.2; o par de matrizes $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ possui modo controlável λ se o transposto hermitiano do seu autovetor a esquerda $(\mathbf{y}^H)$ satisfaz $\mathbf{y}^H \mathbf{B} \neq \mathbf{0}_{1 \times m}$.* —

O Teorema 2 ajuda a definir os conceitos de controlabilidade completa e parcial descritos na Definição 2.7 e 2.8:

Definição 2.7. Seja o sistema LTI descrito na definição 2.1 e os conjuntos:

$$\mathbb{Y}_A = \sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (2.8)$$

$$\mathbb{Y}_{pA} \subset \mathbb{Y}_A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} \Leftrightarrow p < n \quad (2.9)$$

O sistema LTI é dito parcialmente controlável por meio do subconjunto $\mathbb{Y}_{pA}$ se todos os modos em malha aberta pertencentes a $\mathbb{Y}_{pA}$ são controláveis. —

Definição 2.8. O sistema LTI descrito na definição 2.2 será completamente controlável se todos os modos em malha aberta são controláveis. —

Observa-se que se um sistema é totalmente controlável existem outros conjuntos $\mathbb{Y}_{pA}$ que tornam o sistema parcialmente controlável. Pode-se com os conceitos apresentados definir o problema PEVA-estrito:

Problema 2.1. Seja o sistema LTI descrito pela definição 2.2, o conjunto de modos em malha aberta pela equação 2.8, o conjunto de modos em malha fechada definido pela equação 2.10:

$$\mathbb{Y}_{cA} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\} \quad (2.10)$$

O problema de atribuição de autovalor ou EVA (do inglês, *eigenvalue assignment problem*), consiste em determinar a matriz $\mathbf{F}$ tal que todos os modos em malha fechada pertençam ao conjunto $\mathbb{Y}_{cA}$. —

Datta et al. (2002) descreve um teorema sobre soluções esperadas em problemas EVA:

Teorema 3. *Para o sistema descrito pela definição 2.2 o EVA possui solução para qualquer conjunto $\mathbb{Y}_{cA}$ se for completamente controlável. A solução será única para sistemas de única entrada e para várias entradas existirão infinitas soluções desde que exista solução.* —

O problema PEVA para o sistema LTI com retroalimentação de estados pode ser encontrado em Datta et al. (2002):

Problema 2.2. O problema de atribuição parcial de autovalores para o sistema LTI da definição 2.2, conhecido como PEVA, tem como objetivo determinar a matriz $\mathbf{F}$ especificando os autovalores do sistema em malha aberta a serem alocados e os autovalores desejados em malha fechada correlacionados. —

A grande diferença entre os métodos EVA e PEVA consiste na quantidade de autovalores a serem especificados para solucionar o problema da alocação. O método EVA obriga o projetista a especificar todos os modos desejados do sistema em malha fechada, mesmo que haja modos de malha aberta que não serão alocados. Portanto, em sistema com muitas variáveis de estados o problema da alocação envolve o uso de muitos autovalores e conseqüentemente muitas equações a serem resolvidas. O processo de formulação do problema PEVA, ao permitir escolher somente os autovalores alocáveis e para onde estes serão alocados, reduz a quantidade de variáveis necessárias para solucionar o problema de alocação.

Datta et al. (2002) demonstraram no seu artigo um teorema caracterizando a existência de solução para o PEVA-estrito:

Teorema 4. *Seja os conjuntos fechados em conjugação complexa:*

$$\mathbb{Y}_A = \sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} \quad (2.11)$$

$$\mathbb{Y}_{pA} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\} \Leftrightarrow p \leq n \quad (2.12)$$

$$\bar{\mathbb{Y}}_{pA} = \{\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n\} \quad (2.13)$$

$$\mathbb{Y}_{pcA} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\} \quad (2.14)$$

$$\mathbb{Y}_{cA} = \mathbb{Y}_{pcA} \cup \bar{\mathbb{Y}}_{pA} \quad (2.15)$$

sendo:

- $\mathbb{Y}_A$ o conjunto de modos em malha aberta;
- $\mathbb{Y}_{pA}$ o conjunto de modos em malha aberta não desejados;
- $\bar{\mathbb{Y}}_{pA}$ conjunto de modos de malha aberta desejados na retroalimentação;
- $\mathbb{Y}_{cA}$ o conjunto de modos de malha fechada;
- $\mathbb{Y}_{pcA}$ conjunto de modos de malha fechada desejados.

O PEVA para o sistema LTI com retroalimentação de estados descrito na definição 2.2 é solucionável para qualquer $\mathbb{Y}_{pcA}$ se o sistema for parcialmente controlável para os modos de malha aberta pertencentes a $\mathbb{Y}_{pA}$. A solução será única para um sistema completamente controlável de única entrada; Para sistemas parcialmente controláveis existem infinitas soluções, desde que exista solução. —

2.1.2 Método e Algoritmos

Datta et al. (2002) elabora um algoritmo paramétrico para solucionar o PEVA-estrito utilizando duas suposições:

Suposição 2.1. A matriz de controle $\mathbf{B}$ tem posto completo. —

Suposição 2.2. Os conjuntos $\mathbb{Y}_{pA}$ e $\bar{\mathbb{Y}}_{pA}$ expresso no Teorema 4 são fechados em conjugação complexa e disjuntos —

Segundo o autor, a Suposição 2.1 evita que o posto da matriz $\mathbf{B}$ gere sistemas subdeterminados e mau-condicionados oriundos da fatorização QR, necessária para obter formas canônicas com melhor condicionamento via transformações ortogonais (DATTA, 2004, pg.79). A Suposição 2.2 sobre conjugação complexa deve ser respeitada, pois em termos práticos, todos os sistemas físicos possuem espectro fechado em conjugação complexa (DATTA et al., 2002). A questão da disjunção na suposição 2.2 é para evitar que modos de multiplicidade algébricas superiores a 1 desejáveis de alocação estejam em conjuntos separados; se isso não for respeitado, esses modos que provocam maior sensibilidade a perturbações no sistema não serão corretamente alocados e assim torna-o menos robusto (DATTA et al., 2002).

O Teorema proposto por Datta et al. (2002) para solucionar o PEVA está descrito no Teorema 5:

Teorema 5. *Seja $\mathbf{y}_i$ o autovetor à esquerda associado ao modo do sistema em malha aberta λ_i , seja $\mathbf{Y}_1$ a matriz dos autovetores linearmente independentes dos modos em malha aberta a serem utilizados:*

$$\mathbf{Y}_1 = [\mathbf{y}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{y}_p] \quad (2.16)$$

Seja γ_i um vetor de livre-escolha com n -linhas que possuem conjugação complexa conforme a restrição:

$$\gamma_i = \bar{\gamma}_q \Leftrightarrow \mu_i = \bar{\mu}_q \quad (2.17)$$

Sejam as matrizes:

$$\mathbf{\Gamma} = [\gamma_1 \quad \cdots \quad \gamma_p] \quad (2.18)$$

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \text{diag} \{ \lambda_1, \cdots, \lambda_p \} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{c1} = \text{diag} \{ \mu_1, \cdots, \mu_p \} \quad (2.20)$$

$\text{diag} \{ \}$ é um operador cujas entradas descrevem elementos da diagonal principal de uma matriz. A solução paramétrica para o PEVA-estrito num sistema LTI descrito na definição

2.2 será dada pela conjunto de equações:

$$\Lambda_1 \mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_1 \Lambda_{c1} = \mathbf{Y}_1^H \mathbf{B} \Gamma \quad (2.21)$$

$$\Phi \mathbf{Z}_1 = \Gamma \quad (2.22)$$

$$\mathbf{F} = \Phi \mathbf{Y}_1^H \quad (2.23)$$

sendo $\mathbf{Z}_1$ uma matriz não singular e solução da equação de Sylvester descrita por 2.21; $\mathbf{Y}_1^H$ é a transposta hermitiana de $\mathbf{Y}_1$. —

Prova. Ver no Teorema 4.1 de *Datta et al. (2002)*. —

Algumas observações podem ser realizadas sobre o Teorema 5:

Observação 1. A escolha da matriz Γ tem sido extensivamente discutida em muitos trabalhos envolvendo equação de Sylvester (*ARAÚJO; CASTRO; SANTOS, 2009; CHEN, 2013*). Esses artigos mostram que para o caso de única entrada a escolha da matriz Γ não tem influência na resposta do sistema, pois a solução é única e invariante independentemente de Γ . No caso multivariável para cada escolha de Γ tem-se uma solução diferente e aceitável. Assim, possibilita-se ao projetista explorar soluções que possam atender requisitos adicionais de controle, um exemplo, é a minimização da norma da matriz $\mathbf{F}$ (*BRAHMA; DATTA, 2009*). —

Observação 2. Nos métodos numéricos para solucionar problemas EVA é estimado que a quantidade de FLOPS utilizada seja em função de n^3 ; já o Teorema 5, a depender do método numérico empregado, essa função pode ser proporcional a p^3 . Assim no caso de projetos de controle LSS nos quais $p \ll n$, a preferência pelo Teorema 5 é uma decisão sábia. Algumas desvantagens observadas na aplicação do Teorema 5 são:

1. Buscar um método numérico adequada para resolver a equação de Sylvester, equação 2.21;
 2. Requer a suposição 2.2 seja atendida.
-

A quantidade de variáveis a serem resolvidas nas equações do Teorema 5 é proporcional a quantidade de modos de malha aberta a serem alterados; assim torna-se viável computacionalmente a atribuição de autovalores a sistemas LSS multivariáveis. Uma importante observação feita por *Datta et al. (2002)* consiste em simplificar as equações do Teorema 5:

Observação 3. Substituindo Γ da expressão 2.22 na 2.21 segue a equação:

$$(\Lambda_1 - \mathbf{Y}_1^H \mathbf{B} \Phi) \mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_1 \Lambda_{c1} \quad (2.24)$$

Esse resultado mostra que a matriz $\mathbf{Z}_1$ possui importância na análise da sensibilidade $\sigma(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F})$, ou seja, a sensibilidade dos modos do sistema em malha fechada é dependente implicitamente da equação de Sylvester. Essa dependência é da relação direta entre a matriz Φ e $\mathbf{Z}_1$ explícita na equação 2.24. —

A solução paramétrica pode ser obtida pelo Teorema 5 através de um algoritmo factível e viável numericamente, conforme os procedimentos descrito no algoritmo como se segue:

Algoritmo 1. O método paramétrico para resolver o PEVA segue as etapas:

1. Inserir as entradas:

- a) Matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$;
- b) O conjunto de modos do sistema em malha fechada desejado $\mathbb{Y}_{pcA}$;
- c) O conjunto de modos do sistema em malha aberta não desejado $\mathbb{Y}_{pA}$;
- d) O conjunto de modos do sistema em malha aberta não alterado $\bar{\mathbb{Y}}_{pA}$;
- e) Os autovetores $\mathbf{y}_i$ associados aos elementos de $\mathbb{Y}_{pA}$.

2. Verificar se:

- a) O par de matrizes $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ torna o sistema parcialmente controlável por meio do subconjunto $\mathbb{Y}_{pA}$;
- b) Os conjuntos $\mathbb{Y}_{pA}$, $\bar{\mathbb{Y}}_{pA}$ e $\mathbb{Y}_{pcA}$ são disjuntos

3. Caso a etapa anterior for satisfeita, proceder:

- a) Computar as matrizes:
 - $\Lambda_1 = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_p \}$
 - $\Lambda_{c1} = \text{diag} \{ \mu_1, \dots, \mu_p \}$
 - $\mathbf{Y}_1 = [\mathbf{y}_1 \ \dots \ \mathbf{y}_p]$
- b) Escolher arbitrariamente os vetores $\gamma_1, \dots, \gamma_p \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, tal que $\gamma_i = \bar{\gamma}_q \Leftrightarrow \mu_i = \bar{\mu}_q$.
- c) Computar a matriz $\mathbf{\Gamma} = [\gamma_1 \ \dots \ \gamma_p]$.
- d) Encontrar a matriz $\mathbf{Z}_1$ solução da equação de Sylvester:

$$\Lambda_1 \mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_1 \Lambda_{c1} = \mathbf{Y}_1^H \mathbf{B} \mathbf{\Gamma}$$

- e) Se a solução $\mathbf{Z}_1$ for uma matriz má-condicionada deve-se voltar a etapa b do item 3, caso contrário seguir as próximas etapas.

f) Resolver o sistema linear encontrando Φ :

$$\Phi \mathbf{Z}_1 = \Gamma$$

g) Computando a matriz de retroalimentação de estados desejada $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F} = \Phi \mathbf{Y}_1^H$$

2.2 EVA-regional e $\mathbb{D}$ -estabilidade

Nessa seção descreve elementos teóricos relevantes sobre alocação regional de autovalores e o uso de LMIs.

2.2.1 Introdução a LMI

A forma geral de uma LMI é combinação de soma, variáveis e análise de matrizes, a estrutura é descrita a seguir:

Definição 2.9. (DUAN; YU, 2013, pg.1-2) Seja $\mathbf{Q} \in \mathbb{S}^n$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{E}_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{F}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i = \{1, 2, \dots, l\}$ e seja a função matricial:

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}) = \mathbf{D}^T \mathbf{X} + \mathbf{D} \mathbf{X}^T + \sum_{i=1}^l \left(\mathbf{E}_i^T \mathbf{X} \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i^T \mathbf{X}^T \mathbf{E}_i \right) + \mathbf{Q} \quad (2.25)$$

sendo $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definida como uma matrix de decisão. A função $\mathbf{R}(\mathbf{X})$ definirá uma LMI estrita se $m = n$ e se a matriz resultante é simétrica definida positiva. Assim defini-se a LMI via expressão geral:

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}) \prec 0 \quad (2.26)$$

A estrutura padrão de uma LMI é descrita a seguir:

Definição 2.10. (BOYD et al., 1994b, pg.7) Seja $\mathbf{E}_i \in \mathbb{S}^n$, x_i uma variável escalar de decisão, sendo que $i = 0, 1, 2, \dots, m$; A função matricial simétrica:

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{E}_i \quad (2.27)$$

definirá um problema de LMI estrita definida positiva se:

$$\mathbf{E}(x) \succ 0 \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}_{\neq 0}^n \Rightarrow u^T \mathbf{E}(x) u > 0 \quad (2.28)$$

ou,

$$\mathbf{E}(x) \prec 0 \Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{R}_{\neq 0}^n \Rightarrow u^T \mathbf{E}(x) u < 0 \quad (2.29)$$

A análise de estabilidade para equações diferenciais lineares via LMI são geralmente escritas usando a forma geral, entretanto aplicando operações algébricas é possível reescreve-la na forma padrão descrita na **Definição 2.10**, a prova da proposição 1.1 do livro de [Duan e Yu \(2013, pg.4\)](#) demonstra matematicamente esta conversão. Alguns exemplos de como são feitas essas transformações são dados nos livros de [Duan e Yu \(2013\)](#) e [Boyd et al. \(1994b\)](#).

Métodos de otimização por pontos interiores para problemas envolvendo LMI são apresentados por [Boyd et al. \(1994b, pg.14-18\)](#), felizmente, programas como MATLAB e Scilab possuem *packages* com funções que simplificam a programação para usuários menos especializados.

Alguns problemas clássicos os quais envolvem o uso de LMI são:

- Minimização do máximo autovalor de uma função matricial linear com LMI restritivas, conhecido com EVP ([BOYD et al., 1994b, pg.10](#)).
- Minimização do máximo autovalor generalizado de uma função matricial linear com LMI restritivas, conhecido com GEVP ([BOYD et al., 1994b, pg.11](#)).
- Minimização da norma de função matriciais lineares ([DUAN; YU, 2013, pg.11](#)).
- Solução do problema de controle conhecido como μ -análise ([DUAN; YU, 2013, pg.12](#)).

A resolução o problema EVA-regional é possível de solução graças ao Teorema da $\mathbb{D}$ -estabilidade o qual resulta num problema com LMI. Esse assunto é abordado na subseção seguinte.

2.2.2 Teorema da $\mathbb{D}$ -estabilidade e LMI

Definir um conjunto de autovalores numa região $\mathbb{D}$ num plano complexo especificado por LMI é um assunto preliminar para a discussão sobre $\mathbb{D}$ -estabilidade:

Definição 2.11. ([DUAN; YU, 2013, pg.103](#)) Seja um plano complexo cujas coordenadas são regidas pela variável $s \in \mathbb{C}$. Uma região $\mathbb{D}$ será descrita por uma LMI se existir uma função característica $\mathbf{H}_{\mathbb{D}}(s)$ que satisfaz as equações:

$$\mathbb{D} = \{s \in \mathbb{C} | \mathbf{H}_{\mathbb{D}}(s) < 0\} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{H}_{\mathbb{D}}(s) = \mathbf{L} + s\mathbf{V} + \bar{s}\mathbf{V}^T \quad (2.31)$$

$$\mathbf{L} \in \mathbb{S}^p \subset \mathbb{R}^{p \times p} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{p \times p} \quad (2.33)$$

sendo $\mathbb{S}^p$ o conjunto das matrizes simétricas de ordem p . —

Observação 4 (Chilali, Gahinet e Apkarian (1999), pg.2258). *Qualquer região simétrica em relação ao eixo real pode ser aproximada por uma região descrita por LMI com uma acurácia desejada qualquer. O uso destas regiões (as quais agrupam pólos em LMI) torna o uso da programação semi-definida convexa facilmente tratável via técnica de otimização por pontos interiores.* —

Na literatura existe alguns tipos de $\mathbb{D}$ -regiões convexas já definidas. As mais comuns são descritas no livro de Duan e Yu (2013):

- Seção ou faixa vertical cujos autovalores possuem parte real limitada por $-\beta < \text{Re}\{s\} < -\alpha < 0$;
- Disco de raio r cujo centro em eixo real de valores negativos ($s = -q$) ;
- Setor, um Triângulo isósceles de vértice na origem e bissetriz coincidente com eixo real de valores negativos com angulo de base θ .

A Tabela 1 mostra as funções características das $\mathbb{D}$ -regiões citadas neste trabalho. Uma importante definição é o produto de Kronecker que ajuda a formular o problema da $\mathbb{D}$ -estabilidade por LMI.

Tabela 1 – Funções características de $\mathbb{D}_{(\mathbf{L}, \mathbf{V})}$

Conjunto	Identificação	$\mathbf{L}$	$\mathbf{V}$
Faixa vertical	$\mathbb{H}_{\alpha, \beta}$	$2 \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Disco	$\mathbb{D}_{q, r}$	$\begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Triângulo	$\mathbb{D}_{\theta}$	$\mathbf{0}_{2 \times 2}$	$\begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$

Definição 2.12. (BERNSTEIN, 2005) Sejam as matrizes $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{l \times q}$, seja a_{ik} o elemento da i -ésima linha e k -ésima coluna da matriz $\mathbf{A}$. O produto de Kronecker entre as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ será definida pela operação:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1m}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2m}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{B} & a_{n2}\mathbf{B} & \cdots & a_{nm}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Para determinar se os autovalores do sistema LTI estão contidos numa região estável especificada pelo conjunto $\mathbb{D}$, é útil recorrer a definição de $\mathbb{D}$ -estabilidade:

Definição 2.13. Seja um sistema LTI no espaço de estados e a região LMI definida pelas equações 2.30 e 2.31; O sistema será considerado $\mathbb{D}$ -estável se os seus modos pertencem ao conjunto $\mathbb{D}$. —

Para definir corretamente se um sistema LTI (seja em malha aberta ou fechada) é de fato $\mathbb{D}$ -estável teoremas podem ser utilizados:

Teorema 6. (DUAN; YU, 2013, pg.107) *Seja um sistema LTI em malha aberta e a região LMI definida pelas equações 2.30 e 2.31; A matriz de estados do sistema em malha aberta, $\mathbf{A}$, será considerada $\mathbb{D}$ -estável, ou seja, possuirá autovalores no conjunto $\mathbb{D}$ se existir uma matriz simétrica definida positiva $\mathbf{P}$ que satisfaz a LMI:*

$$\mathbf{R}_{\mathbb{D}}(\mathbf{A}, \mathbf{P}) = \mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{V} \otimes (\mathbf{A}\mathbf{P}) + \mathbf{V}^T \otimes (\mathbf{A}\mathbf{P})^T \prec 0 \quad (2.35)$$

$$\mathbf{P} \in \mathbb{S}^n \quad (2.36)$$

sendo ' $\prec$ ' o operador que descreve a matriz à esquerda como definida negativa. —

Teorema 7. (DUAN; YU, 2013, pg.208) *Seja um sistema LTI em malha fechada por retroalimentação de estados e a região definida por LMI segundo as equações 2.30 e 2.31; A matriz de estados do sistema em malha fechada, $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F}$, será considerada $\mathbb{D}$ -estável, ou seja, possuirá autovalores no conjunto $\mathbb{D}$ se, e somente se, existir uma matriz simétrica definida positiva $\mathbf{P} \in \mathbb{S}^n$ e outra real $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ que satisfaça a LMI:*

$$\mathbf{R}_{\mathbb{D}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{W}) = \mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{V} \otimes (\mathbf{A}\mathbf{P}) + \mathbf{V}^T \otimes (\mathbf{A}\mathbf{P})^T + \mathbf{V} \otimes (\mathbf{B}\mathbf{W}) + \mathbf{V}^T \otimes (\mathbf{B}\mathbf{W})^T \prec 0 \quad (2.37)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}\mathbf{P}^{-1} \quad (2.38)$$

onde a matriz $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{F}$ é a retroalimentação de estados. —

Pelo **Teorema 7** e usando a Tabela 1 é possível obter as LMI de estabilidade para as $\mathbb{D}$ -regiões, para a região do tipo Faixa, segue a seguinte LMI:

$$\begin{bmatrix} 2\alpha\mathbf{P} + \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{W} + \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T & 0 \\ 0 & -2\beta\mathbf{P} - \mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{A}^T - \mathbf{B}\mathbf{W} - \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.39)$$

Do tipo Disco:

$$\begin{bmatrix} -r\mathbf{P} & q\mathbf{P} + \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{W} + \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T \\ q\mathbf{P} + \mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{W} + \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T & -r\mathbf{P} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.40)$$

Do tipo Setor:

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{W} + \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T) \sin(\theta) & (\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{W} + \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T) \cos(\theta) \\ -(\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{W} + \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T) \cos(\theta) & (\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{W} + \mathbf{W}^T\mathbf{B}^T) \sin(\theta) \end{bmatrix} \prec 0 \quad (2.41)$$

A $\mathbb{D}$ -estabilidade é facilmente aplicável a projetos de controle que visam a interseção de diferentes $\mathbb{D}$ -regiões via a Proposição 2.2.2.1 e o Lema 2.1, como se seguem:

Proposição 2.2.2.1. (DUAN; YU, 2013, pg.106) Sejam duas $\mathbb{D}$ -regiões estáveis convexas definidas por LMI denominadas por $\mathbb{D}_1$ e $\mathbb{D}_2$ com as funções características $\mathbf{H}_{\mathbb{D}_1}(s)$ e $\mathbf{H}_{\mathbb{D}_2}(s)$ descritas a seguir:

$$\mathbf{H}_{\mathbb{D}_1}(s) = \mathbf{L}_1 + s\mathbf{V}_1 + \bar{s}\mathbf{V}_1^T \quad (2.42)$$

$$\mathbf{H}_{\mathbb{D}_2}(s) = \mathbf{L}_2 + s\mathbf{V}_2 + \bar{s}\mathbf{V}_2^T \quad (2.43)$$

Se $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1 \cap \mathbb{D}_2$, então:

$$\mathbf{H}_{\mathbb{D}}(s) = \mathbf{L} + s\mathbf{V} + \bar{s}\mathbf{V}^T \quad (2.44)$$

$$\mathbf{L} = \text{blkdiag}\{\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2\} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{V} = \text{blkdiag}\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\} \quad (2.46)$$

sendo $\text{blkdiag}\{\}$ o operador cujas entradas são elementos de uma matriz bloco diagonal. —

Lema 2.1. (DUAN; YU, 2013, pg.108) Sejam $\mathbb{D}_1$ e $\mathbb{D}_2$ duas $\mathbb{D}$ -regiões estáveis, a matriz $\mathbf{A}$ será tanto $\mathbb{D}_1$ -estável como $\mathbb{D}_2$ -estável se existir uma matriz $\mathbf{P} \in \mathbb{S}$ definida positiva que satisfaçam as LMIs:

$$\mathbf{R}_{\mathbb{D}_1}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{W}) \prec 0 \quad (2.47)$$

$$\mathbf{R}_{\mathbb{D}_2}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{W}) \prec 0 \quad (2.48)$$

2.2.3 Informações adicionais sobre $\mathbb{D}$ -estabilidade e técnicas de controle robusto

A teoria da alocação regional de pólos via teoremas com LMI focados em aplicação para controle podem ser lidos nos livros de Liu e Yao (2016, pg.384-406) e Duan e Yu (2013, pg.99-109, 204-210, 325-339). Nesses livros além de encontrar os assuntos relacionados a subseção anterior, pode encontrar assunto relacionados a $\mathbb{D}$ -estabilidade robusta e aplicação em controle multiobjetivo conjuntamente com técnicas de otimização $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$.

O estudo da estabilidade robusta para sistemas lineares incertos datam desde a década 60, o artigo de Barmish e Kang (1993) citam vários artigos desenvolvidos até o início da década de 90. O trabalho de Geromel, Oliveira e Hsu (1998) permitiu uma importante contribuições para a caracterização do problema no espaço de estados, oferecendo teorema e condições baseados em LMI e matrizes cujas incertezas paramétricas

são descritas por politopos convexos. A extensão dessas condições para aplicação objetiva da $\mathbb{D}$ -estabilidade foi desenvolvida por [Peaucelle et al. \(2000\)](#), posteriormente novas propostas foram descritas por [Ramos e Peres \(2002\)](#) e [Leite e Peres \(2003\)](#).

Artigos relacionados aplicação da $\mathbb{D}$ -estabilidade em sistemas de controle recente, entre 2014 à 2019, podem ser encontrados em site de periódicos como IEEE Xplore. Numa breve pesquisa usando as palavras “*d-stability*” foram identificados 48 artigos relacionados, sendo que 26 foram identificados com os termos LMI.

3 Proposta

Recorrendo a Observação 3, descrito na página 14, pode-se verificar que a equação 2.24 descreve relação de propriedades comuns na análise de um sistema LTI em malha fechada por retroalimentação de estados. Esse sistema tem como matriz de estados a matriz de autovalores Λ_1 ; o produto das matrizes $\mathbf{Y}_1^H \mathbf{B}$ é a matriz de entradas; Φ , é a matriz de ganho por retroalimentação e Λ_{c1} uma matriz cujos elementos da diagonal principal são os modos do sistema em malha fechada. Tendo em vista estas associações pode-se escrever um novo problema:

Problema 3.1. Sejam os conjuntos fechados em conjugação complexa $\mathbb{Y}_{pA}$ e $\mathbb{Y}_{pcA}$ do Teorema 5 da página 13; e o sistema LTI:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \Lambda_1 \mathbf{z}(t) + \mathbf{Y}_1^H \mathbf{B} \psi(t) \quad (3.1)$$

$$\psi(t) = -\Phi \mathbf{z}(t) \quad (3.2)$$

As matrizes Λ_1 , $\mathbf{Y}_1^H$, Φ e $\mathbf{B}$ são as mesmas observadas no Teorema 5 na página 13. O objetivo é atribuir autovalores ao sistema tal que os modos em malha fechada pertençam ao conjunto $\mathbb{Y}_{pcA}$ ajustando corretamente a matriz Φ . —

Solucionar o Problema 3.1 simplificaria a execução do Teorema 5 pois não haverá necessidade de usar as equações 2.21 e 2.22, já que a solução do problema é a mesma matriz Φ desejada na equação 2.22. Outra vantagem de utilizar este problema é que a estrutura do sistema permite a aplicação do Teorema da $\mathbb{D}$ -estabilidade da página 19. Isto resulta que técnicas com LMI podem ser utilizadas e conseqüentemente as vantagens de sua aplicação. Pode-se formalizar a ideia via Teorema 2.2, como se segue:

Teorema 8. *Pode-se solucionar o Problema 2.2 para $\mathbb{Y}_{pcA} \subset \mathbb{D}$, sendo $\mathbb{D}$ uma região $\mathbb{D}$ -estável nas seguintes etapas:*

1. *Aplicando o Teorema da $\mathbb{D}$ -estabilidade no Problema 3.1;*
2. *Buscando solução para a factível LMI:*

$$\mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{V} \otimes \Lambda_1 \mathbf{P} + \mathbf{V}^T \otimes (\Lambda_1 \mathbf{P})^T + \mathbf{V} \otimes \mathbf{Y}_1 \mathbf{B} \mathbf{W} + \mathbf{V}^T \otimes (\mathbf{Y}_1 \mathbf{B} \mathbf{W})^T \prec 0 \quad (3.3)$$

3. *Calcular a matriz:*

$$\Phi \mathbf{P} = -\mathbf{W} \quad (3.4)$$

4. *Calcular a matriz de retroalimentação via equação 2.23.*

Prova. Primeiramente, verifica-se a inequação 3.3. Sabe-se pela literatura que a $\mathbb{D}$ -estabilidade para o sistema LTI com retroalimentação de estados é dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{BF}) \mathbf{x}(t) \quad (3.5)$$

terá os modos alocados para a região $\mathbb{D}$ -estável com função característica $\mathbf{H}_{\mathbb{D}}$ se satisfazer a LMI:

$$\mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{V} \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{BF}) \mathbf{P} + \mathbf{V}^T \otimes ((\mathbf{A} + \mathbf{BF}) \mathbf{P})^T \prec 0 \quad (3.6)$$

que pode ser descrita conforme o Teorema 7 substituindo $\mathbf{F} = \mathbf{WP}$ e aplicando a propriedade da distributividade do operador de Kronecker.

Para aplicar a LMI descrita em 3.6 no sistema do **Problema 3.1**, para descrever $\mathbb{D}$ -estabilidade, deve-se fazer as substituições:

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{\Lambda}_1 \quad (3.7)$$

$$\mathbf{B} \mapsto \mathbf{Y}_1 \mathbf{B} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{F} \mapsto -\mathbf{\Phi} \quad (3.9)$$

como o produto de Kronecker tem propriedade da distributividade, então a LMI da expressão 3.6 pode ser reescrita:

$$\mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{V} \otimes (\mathbf{\Lambda}_1 - \mathbf{Y}_1 \mathbf{B} \mathbf{\Phi}) \mathbf{P} + \mathbf{V}^T \otimes ((\mathbf{\Lambda}_1 - \mathbf{Y}_1 \mathbf{B} \mathbf{\Phi}) \mathbf{P})^T \prec 0 \quad (3.10)$$

$$\mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{V} \otimes \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{P} + \mathbf{V}^T \otimes (\mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{P})^T - \mathbf{V} \otimes \mathbf{Y}_1 \mathbf{B} \mathbf{\Phi} \mathbf{P} - \mathbf{V}^T \otimes (\mathbf{Y}_1 \mathbf{B} \mathbf{\Phi} \mathbf{P})^T \prec 0 \quad (3.11)$$

aplicando a substituição:

$$\mathbf{\Phi} \mathbf{P} = -\mathbf{W} \Rightarrow \mathbf{\Phi} = -\mathbf{WP}^{-1} \quad (3.12)$$

na expressão 3.11 tem-se a LMI 3.3.

Resolvida a questão das expressões do teorema deve saber se a matriz $\mathbf{\Phi}$ calculada via as expressões propostas obtêm solução aceitável para as equações 2.21, 2.22 e 2.24 do PEVA-estrito, consequentemente solução para o Problema 2.2.

A Observação 1, página 14, cita que a escolha da matriz $\mathbf{\Gamma}$ pode ser feita racionalmente e muitas soluções podem ser aceitáveis se o sistema for multivariável, portanto a escolha da matriz $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Phi} \mathbf{Z}_1$ com as matrizes do Problema 3.1 não é descartável inicialmente. Entretanto precisa-se saber se dados as matrizes $\mathbf{\Lambda}_1$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{Y}_1$, $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{\Gamma}$ permite que a matriz $\mathbf{\Lambda}_{c1}$ seja a mesma da equação de Sylvester vista no PEVA-estrito. Assim a grande questão é saber se $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{Z}_1$ do teorema garantem o PEVA-estrito.

A Observação 3, página 14, mostra que a escolha de $\mathbf{\Gamma}$ não é necessária para aplicar o PEVA, pois pode-se descobrir $\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{Z}_1$ pela equação 2.24. O fato de haver duas matrizes a serem determinadas usando apenas uma equação oferece a liberdade de escolher uma matriz $\mathbf{Z}_1$ e verificar se há $\mathbf{\Phi}$ que garante a igualdade, então pode-se escolher inicialmente $\mathbf{Z}_1$ ser a matriz de autovalores a direita do sistema do Problema 3.1.

As relações entre autovetores à direita e modos de malha aberta e fechada com as matrizes do sistema LTI no Problema 3.1 podem ser compactadas na equação:

$$(\mathbf{\Lambda}_1 - \mathbf{Y}_1 \mathbf{B} \mathbf{\Phi}) \mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_1 \mathbf{\Lambda}_{c1} \quad (3.13)$$

sendo $\mathbf{Z}_1$ a matriz cujas colunas são os autovetores a direita do modos do sistema em malha fechada.

A semelhança da equação 3.13 com a expressão da Observação 3 sustenta que solucionar o Problema 3.1 é o mesmo que obter $\mathbf{\Phi}$ do PEVA-estrito sem a necessidade de resolver as equações 2.21 e 2.22. Caso aplicado o Teorema da $\mathbb{D}$ -estabilidade no Problema 3.1 consegue-se calcular $\mathbf{\Phi}$ sem necessidade de especificar $\mathbf{\Lambda}_{c1}$, portanto as operações propostas pelo teorema posto em prova são válidas. —

Entretanto, para poder aplicar o Teorema 8 no Problema 3.1 sem as dificuldades de utilizar LMI com números complexos, o sistema deve ter representação equivalente por matrizes reais; logo, é necessário usar transformações de similaridade que possam reescrever as matrizes do sistema. Uma interessante proposta de transformação é desenvolvida no artigo do Zhang et al. (2015); reescreve-se os modos em malha aberta e os autovetores separando a parte real e imaginária:

$$\lambda_i = \lambda_{Ri} + j\lambda_{Ii} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_{Ri} + j\mathbf{y}_{Ii} \quad (3.15)$$

Considera-se que o sistema em malha aberta possua l -pares de modos em conjugação complexa; dessa forma pode-se reescrever $\mathbf{\Lambda}_1$ na forma real, similar bloco diagonal:

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}_1 = \text{blkdiag} \left\{ \begin{bmatrix} \lambda_{R1} & \lambda_{I1} \\ -\lambda_{R1} & \lambda_{I1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \lambda_{Rl} & \lambda_{Il} \\ -\lambda_{Rl} & \lambda_{Il} \end{bmatrix}, \lambda_{R(l+1)}, \dots, \lambda_{Rp} \right\} \quad (3.16)$$

Para $\mathbf{Y}_1$ ter uma representação real pode-se construir uma matriz similar $\tilde{\mathbf{Y}}_1$ com a seguinte estrutura:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{R1} & \mathbf{y}_{I1} & \cdots & \mathbf{y}_{Rl} & \mathbf{y}_{Il} & \mathbf{y}_{R(l+1)} & \cdots & \mathbf{y}_{Rp} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

As matrizes $\tilde{\mathbf{Y}}_1$ e $\tilde{\Lambda}_1$ podem ser obtidas utilizando-se as relações de similaridade:

$$\mathbf{Q}_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{Q} = \text{blkdiag} \{ \mathbf{Q}_j, \dots, \mathbf{Q}_j, 1, \dots, 1 \} \Rightarrow \mathbf{Q}^H = \mathbf{Q}^{-1} \quad (3.19)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{Y}_1 \mathbf{Q}^H \quad (3.20)$$

$$\tilde{\Lambda}_1 = \mathbf{Q} \Lambda_1 \mathbf{Q}^H \quad (3.21)$$

sendo a matriz $\mathbf{Q}_j$ repetida l vezes e o numero 1 repetido $p - 2l$ vezes na matriz $\mathbf{Q}$.

Graças à série de equações 3.14 à 3.20 é possível propor um novo teorema para solucionar o PEVA para sistema LTI com retroalimentação de estados:

Teorema 9. *Seja o Problema 2.2 cujo objetivo da atribuição de autovalor é uma região $\mathbb{D}$ -estável; Para determinar a matriz de retroalimentação $\mathbf{F}$ deve-se encontrar a matriz $\mathbf{P} \in \mathbb{S}^p$ e $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ que satisfaça a LMI proposta à seguir:*

$$\mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \mathbf{V} \otimes \tilde{\Lambda}_1 \mathbf{P} + \mathbf{V}^T \otimes (\tilde{\Lambda}_1 \mathbf{P})^T + \mathbf{V} \otimes \tilde{\mathbf{Y}}_1 \mathbf{B} \mathbf{W} + \mathbf{V}^T \otimes (\tilde{\mathbf{Y}}_1 \mathbf{B} \mathbf{W})^T \prec 0 \quad (3.22)$$

e resolver o sistema linear

$$\tilde{\Phi} \mathbf{P} = -\mathbf{W} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{F} = \tilde{\Phi} \tilde{\mathbf{Y}}_1^T \quad (3.24)$$

Prova. *Inicializa-se a prova escrevendo o sistema LTI equivalente:*

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}}(t) = \tilde{\Lambda}_1 \tilde{\mathbf{z}}(t) + \tilde{\mathbf{Y}}_1^H \mathbf{B} \tilde{\psi}(t) \quad (3.25)$$

$$\tilde{\psi}(t) = -\tilde{\Phi} \tilde{\mathbf{z}}(t) \quad (3.26)$$

obtido pela seguintes relações de similaridade com as matrizes do Problema 3.1:

$$\tilde{\Lambda}_1 = \sqrt{2} \mathbf{Q} \Lambda_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{Q}^H = \mathbf{Q} \Lambda_1 \mathbf{Q}^H \quad (3.27)$$

$$\tilde{\Lambda}_{c1} = \sqrt{2} \mathbf{Q} \Lambda_{c1} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{Q}^H = \mathbf{Q} \Lambda_{c1} \mathbf{Q}^H \quad (3.28)$$

$$\tilde{\mathbf{Y}}_1^H = \sqrt{2} \mathbf{Q} \mathbf{Y}_1^H \mathbf{B} \quad (3.29)$$

$$\tilde{\mathbf{X}}_{c1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{X}_{c1} \mathbf{Q}^H \quad (3.30)$$

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi \mathbf{Q}^H \quad (3.31)$$

sendo $\mathbf{X}_{c1}$ a matriz cujas colunas são composta por autovetores a direita dos modos do sistema em malha fechada desejados na alocação parcial.

Pode-se simplificar o sistema LTI equivalente para a sua forma compacta:

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}}(t) = (\tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\mathbf{Y}}_1^H \mathbf{B} \tilde{\Phi}) \tilde{\mathbf{z}}(t) \quad (3.32)$$

Considerando $\tilde{\mathbf{Z}}_1$ a matriz dos autovetores a direita do sistema LTI equivalente, tem-se a relação matricial:

$$(\tilde{\Lambda}_1 - \tilde{\mathbf{Y}}_1 \mathbf{B} \tilde{\Phi}) \tilde{\mathbf{Z}}_1 = \tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\Lambda}_{c1} \quad (3.33)$$

Suponha-se que possa aplicar o Teorema 5 para o problema PEVA-estrito no sistema equivalente, então por associação as equações 2.21 a 2.23 devem ser reescritas substituindo-se as matrizes pelas suas respectivas formas similares, como mostrado a seguir:

$$\tilde{\Lambda}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1 - \tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\Lambda}_{c1} = \tilde{\mathbf{Y}}_1^H \mathbf{B} \tilde{\Gamma} \quad (3.34)$$

$$\tilde{\Phi} \tilde{\mathbf{Z}}_1 = \tilde{\Gamma} \quad (3.35)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\Phi} \tilde{\mathbf{Y}}_1^H \quad (3.36)$$

Pode-se unificar as equações 3.34 e 3.35 via substituição da matriz $\tilde{\Gamma}$ obtendo-se a equação 3.33, num procedimento parecido com o descrito na Observação 3, quando simplifica-se as equações 2.22 e 2.21. Manipula-se esta expressão com o uso das transformações de similaridade expressas no início desta prova:

$$\left((\mathbf{Q} \Lambda_1 \mathbf{Q}^H) - (\sqrt{2} \mathbf{Q} \mathbf{Y}_1^H) \mathbf{B} \left(\Phi \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{Q}^H \right) \right) \tilde{\mathbf{Z}}_1 = \tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\Lambda}_{c1} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{Q} (\Lambda_1 - \mathbf{Y}_1 \mathbf{B} \Phi) \mathbf{Q}^H \tilde{\mathbf{Z}}_1 = \tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\Lambda}_{c1} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{Q} (\Lambda_1 - \mathbf{Y}_1 \mathbf{B} \Phi) \mathbf{Q}^H \tilde{\mathbf{Z}}_1 = \tilde{\mathbf{Z}}_1 (\mathbf{Q} \Lambda_{c1} \mathbf{Q}^H) \quad (3.39)$$

A matriz $\mathbf{Z}_1$ no artigo de Datta et al. (2002) é definida pela operação:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Y}_1^H \mathbf{X}_{c1} \quad (3.40)$$

A relação entre as matrizes $\tilde{\mathbf{Z}}_1$ e $\mathbf{Z}_1$ pode ser obtida via as relações seguintes de equivalências:

$$\tilde{\mathbf{Z}}_1 = \tilde{\mathbf{Y}}_1^H \tilde{\mathbf{X}}_{c1} = (\sqrt{2} \mathbf{Y} \mathbf{Q}^H)^H \mathbf{X}_{c1} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{Q}^H = \mathbf{Q} \mathbf{Y}_1^H \mathbf{X}_{c1} \mathbf{Q}^H = \mathbf{Q} \mathbf{Z}_1 \mathbf{Q}^H \quad (3.41)$$

Ao substituir $\tilde{\mathbf{Z}}_1$ da expressão 3.39 pelo resultado da equação 3.41 tem-se:

$$\mathbf{Q} (\Lambda_1 - \mathbf{Y}_1 \mathbf{B} \Phi) \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \mathbf{Z}_1 \mathbf{Q}^H = \mathbf{Q} \mathbf{Z}_1 \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \Lambda_{c1} \mathbf{Q}^H \quad (3.42)$$

$$\mathbf{Q} (\Lambda_1 - \mathbf{Y}_1 \mathbf{B} \Phi) \mathbf{I}_{p \times p} \mathbf{Z}_1 \mathbf{Q}^H = \mathbf{Q} \mathbf{Z}_1 \mathbf{I}_{p \times p} \Lambda_{c1} \mathbf{Q}^H \quad (3.43)$$

$$\mathbf{Q} (\Lambda_1 - \mathbf{Y}_1 \mathbf{B} \Phi) \mathbf{Z}_1 \mathbf{Q}^H = \mathbf{Q} \mathbf{Z}_1 \Lambda_{c1} \mathbf{Q}^H \quad (3.44)$$

$$(\Lambda_1 - \mathbf{Y}_1 \mathbf{B} \Phi) \mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_1 \Lambda_{c1} \quad (3.45)$$

A equação 3.45 prova semelhança entre as expressões 3.34 e 2.24, ou seja, alocação de modos. Confirmada esta equivalência na alocação, deve-se checar se o cálculo da matriz de retroalimentação regido pela equação 3.36 produz resultado parecido com 3.24. Substituindo $\tilde{\Phi}$ e $\tilde{\mathbf{Y}}_1^H$ pelas suas equações similaridades na equação 3.36:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\Phi} \tilde{\mathbf{Y}}_1^H = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \Phi \mathbf{Q}^H \right) (\sqrt{2} \mathbf{Q} \mathbf{Y}_1^H) = \Phi \mathbf{Y}_1^H = \mathbf{F} \quad (3.46)$$

A equação 3.46 prova que calculando a matriz de retroalimentação do sistema utilizando o Teorema 5 ou as equações 3.33 e 3.36 obtêm-se resultados equivalentes, ou seja, a alocação é viável usando o sistema equivalente do Problema 3.1. Sendo o sistema LTI equivalente aplicável para alocação parcial pode-se usar o Teorema da $\mathbb{D}$ -estabilidade para calcular a matriz $\tilde{\Phi}$ via LMI da expressão 3.22. —

Para tornar viável computacionalmente o Teorema 9, propõem-se o seguinte algoritmo nas etapas descritas a seguir:

Algoritmo 2. Escolher o sistema LTI e iniciar o programa:

1. Inserir as entradas:

- a) Matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{L}$ e $\mathbf{V}$;
- b) O conjunto de modos do sistema em malha aberta a serem alterados $\mathbb{Y}_{pA} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$;
- c) Os autovetores $\mathbf{y}_i$ associados a λ_i do conjunto $\mathbb{Y}_{pA}$

2. Verificar se o par de matrizes $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ torna o sistema parcialmente controlável por meio dos modos de malha aberta pertencentes a $\mathbb{Y}_{pA}$.

3. Inserir as matrizes:

- $\Lambda_1 = \text{diag} \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$;
- $\mathbf{Y}_1 = [\mathbf{y}_1 \quad \dots \quad \mathbf{y}_p]$

4. Identificar a quantidade l de pares conjugados complexos de $\mathbb{Y}_{pA}$;

5. Computar a matriz $\mathbf{Q}$ da expressão 3.19.

6. Calcular $\tilde{\mathbf{Y}}_1$ pela expressão 3.20.

7. Determinar $\mathbf{P}$ e $\mathbf{W}$ que permite solução factível para a LMI da expressão 3.22 do teorema 9.

8. Encontrar $\tilde{\Phi}$ através da solução do sistema linear da equação 3.23

9. Calcular a matriz $\mathbf{F}$ pela expressão 3.24.

3.1 Hipóteses decorrente da pesquisa

Sabe-se que a alocação parcial é bem sucedida quando os modos alocados estão corretamente posicionados nas regiões pré-especificadas e os modos fixados permanecem próximos a região inicial com um desvio pequeno e tolerável. Propõem-se duas hipóteses para verificar se o Algoritmo 2 (página 28) garante a aplicação computacional do Teorema 9 (página 26) e consequentemente atender aos objetivos dessa dissertação:

Hipótese 1. *O Algoritmo 2 faz a alocação parcial para $\mathbb{D}$ -região especificada com sucesso.* —

Hipótese 2. *O Algoritmo 2 consegue garantir o no-spillover na alocação parcial.* —

4 Metodologia

4.1 Diretrizes da Simulação

Tratando-se de um trabalho baseado em desenvolvimento teórico especifica-se uma metodologia voltada para o uso de simulações construídas em software com suporte a linguagem de *script*. A construção dessas simulações são uteis para avaliar o Algoritmo 2 e verificar se os objetivos deste trabalho são atendidos. Para tal finalidade divide-se a metodologia em três etapas centrais:

1. Formular problemas PEVA visando $\mathbb{D}$ -estabilidade para sistemas LTI às regiões vertical, disco e setor.
2. Aplicar o Algoritmo 2 para resolver os problemas de PEVA com $\mathbb{D}$ -estabilidade.
3. Analisar os modos de malha aberta e fechada como finalidade de avaliar a eficiência do algoritmo.

4.2 Instrumento e Software

O software numérico utilizado para executar as simulações é o MATLAB 2014a utilizado num sistema operacional Windows 7 Ultimate 64 bits, num computador com processador Intel(R) Core(TM) i5-3210M de 2.5GHz. Esta instalação do MATLAB possui o pacote de extensão de dados conhecido como *Control System Toolbox*, que fornece algoritmos e aplicativos para analisar, projetar e ajustar sistemas de controle linear; e o *Robust Control Toolbox* que possui comandos para resolver problemas de otimização envolvendo LMI's elaboradas na discussão teórica.

4.3 Amostras

Embora a metodologia proposta possa ser aplicada em qualquer sistema LTI, foram escolhidos neste trabalho modelos cuja dinâmica descreve equações diferenciais ordinárias multi-variáveis de segunda ordem. Este tipo de modelo é frequentemente estudado nos problemas de controle em sistemas vibrantes como sejam: controle de modos ressonantes, vibrações aeroelásticas, dentre outras. Nessa classe de modelos a quantidade de elementos dinâmicos possíveis de analisar pode ser arbitrariamente grande; por exemplo: modelos de elementos finitos derivados da discretização dos modelos por parâmetros distribuídos.

A modelagem desse tipo de sistemas pode ser descrita pelas equações 4.1 e 4.2:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{h}(t) = \mathbf{N}\mathbf{u}(t) \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_d\dot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{F}_p\mathbf{h}(t) \quad (4.2)$$

sendo que:

1. $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez;
2. $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de influência (atuadores);
3. $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ o vetor dos sinal de controle;
4. as matrizes $\mathbf{F}_d$ e $\mathbf{F}_p \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são respectivamente as matriz de retroalimentação proporcional e derivativa;
5. $\mathbf{h}(t)$, $\dot{\mathbf{h}}(t)$ and $\ddot{\mathbf{h}}(t) \in \mathbb{R}^n$ são respectivamente os vetores de deslocamento, velocidade e aceleração dos elementos dinâmicos do sistema.

A representação do sistemas de segunda ordem para o LTI na representação canônica controlável ocorre de acordo com as seguintes equações:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.3)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) \quad (4.4)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times m} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_p \quad \mathbf{F}_d] \quad (4.7)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(t) \\ \dot{\mathbf{h}}(t) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

onde $\mathbf{I}_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz identidade de ordem n e $\mathbf{0}_{n \times n}$ matriz nulo de ordem n .

4.3.1 Modelo I

O artigo de Shapiro (2005) apresenta um critério de estabilidade aplicável aos arranjos de manipulação para um robô cuja movimentação é restrita a duas dimensões. O modelo de segunda ordem deste robô apresenta as matrizes:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 8 & \eta \\ -\eta & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{I}_{2 \times 2}$$

Neste modelo considera-se $\eta = 4$ a fim de impor uma situação de instabilidade, conforme descrito pelo próprio autor. As regiões $\mathbb{D}$ -estáveis usadas e os modos de malha aberta que serão atualizados na alocação são descritos na Tabela 2

Tabela 2 – Regiões $\mathbb{D}$ -estáveis para alocação do sistema descrito pelo Modelo I

Tipo de região	Valores	Autovalores Alocáveis
Disco Seção Setor	$r = 1$ e $q = 2$ $\alpha = 0, 1$ e $\beta = 0, 3$ $\theta = 100^\circ$	$0,0039 \pm 0,9001$

4.3.2 Modelo II

Sabe-se que técnicas como QPEVAP, RQPEVA e MNRQPEVA (mencionados na introdução) precisam de matrizes simétricas para aplicação em problemas PEVA-estrito. Para mostrar a flexibilidade do teorema proposto, foi construído um novo modelo composto por matrizes assimétricas com três graus de liberdade, gerado através do uso de uma distribuição uniforme com intervalo de -10 a 10 para cada elemento das matrizes:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -7,6593 & -5,0754 & 0,9311 \\ 6,2936 & -3,1457 & 1,2384 \\ -3,5029 & -2,4862 & -2,0836 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2,0374 & 9,0183 & 6,6374 \\ 0,3073 & 4,4470 & -7,3132 \\ 3,1506 & -1,9984 & -8,7907 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -8,3151 & -3,9655 & -8,0925 \\ -6,7220 & -9,7664 & -7,0697 \\ -3,5156 & 0,7981 & 2,6228 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$$

As regiões $\mathbb{D}$ -estáveis usadas e os modos de malha aberta que serão atualizados na alocação são descritos na Tabela 3

Tabela 3 – Regiões $\mathbb{D}$ -estáveis para alocação do sistema descrito pelo Modelo II

Tipo de região	Valores	Autovalores Alocáveis
Disco	$r = 2$ e $q = 2$	7,9807
Seção	$\alpha = 1$ e $\beta = 2,5$	0,4408
Setor	$\theta = 90^\circ$	0,7076

4.3.3 Modelo III

Um modelo de ordem reduzida para uma asa de aeronave vibrante sob corrente de ar é citado por [Araujo \(2017, pg.39\)](#), através das seguintes matrizes:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 17,6 & 1,28 & 2,89 \\ 1,28 & 0,824 & 0,413 \\ 2,89 & 0,413 & 0,725 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 7,66 & 2,45 & 2,1 \\ 0,23 & 1,04 & 0,223 \\ 0,60 & 0,756 & 0,658 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 121 & 18,9 & 15,9 \\ 0 & 2,7 & 0,145 \\ 11,9 & 3,64 & 15,5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{I}_{3 \times 3}$$

As regiões $\mathbb{D}$ -estáveis usadas, bem como e os modos de malha aberta que serão atualizados na alocação, são descritos na Tabela 4.

Tabela 4 – Regiões $\mathbb{D}$ -estáveis para alocação do sistema descrito pelo Modelo III

Tipo de região	Valores	Autovalores Alocáveis
Seção	$\alpha = 0,4$ e $\beta = 0,6$	$0,0947 \pm 2,5229j$
Disco	$r = 0,5$ e $q = 1,5$	$0,0947 \pm 2,5229j$
Setor	$\theta = 110^\circ$	$-0,8848 \pm 8,4415j$

A sensibilidade do sistema a perturbações que possam mudar o modelo dinâmico padrão é uma questão relevante na engenharia. Portanto, métodos menos sensíveis tendem a ser escolhidos para atender às demandas de projeto. Para comparar a sensibilidade do método PEVA-regional proposto com o EVA-regional clássico propõem-se um experimento numérico onde a matriz de rigidez possui uma perturbação multiplicativa que eleva seus elementos em 2,5%. O objetivo será avaliar a influência da perturbação no projeto nominal feito por cada método, sendo que os autovalores foram alocados para uma região disco com centro em $-1,5$ e raio de $0,5$ com o vetor $h(t=0) = [1 \ 0 \ 0]^T$.

4.3.4 Modelo IV

O artigo de [Brahma e Datta \(2007\)](#) oferece um algoritmo iterativo o qual busca minimizar a norma da matriz de retroalimentação para o problema do *Partial Quadratic Eigenvalue Assignment* (posteriormente o autor abrevia este problema como MNQPE-VAP). Um modelo ilustrativo o qual é estudado possui as seguintes matrizes:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1,4685 & 0,7177 & 0,4757 & 0,4311 \\ 0,7177 & 2,6938 & 1,2660 & 0,9676 \\ 0,4757 & 1,2660 & 2,7061 & 1,3918 \\ 0,4311 & 0,9676 & 1,3918 & 2,1876 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1,3525 & 1,2695 & 0,7967 & 0,8160 \\ 1,2695 & 1,3274 & 0,9144 & 0,7325 \\ 0,7967 & 0,9144 & 0,9456 & 0,8310 \\ 0,8160 & 0,7325 & 0,8310 & 1,1536 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1,3525 & 1,2695 & 0,7967 & 0,8160 \\ 1,2695 & 1,3274 & 0,9144 & 0,7325 \\ 0,7967 & 0,9144 & 0,9456 & 0,8310 \\ 0,8160 & 0,7325 & 0,8310 & 1,1536 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0,3450 & 0,45708 \\ 0,0579 & 0,7630 \\ 0,5967 & 0,9990 \\ 0,2853 & 0,3063 \end{bmatrix}$$

As regiões $\mathbb{D}$ -estáveis a serem usadas e os modos de malha aberta que serão atualizados na alocação são descritos na Tabela 5.

Tabela 5 – Regiões $\mathbb{D}$ -estáveis para alocação do sistema descrito pelo Modelo IV

Tipo de região	Valores	Autovalores Alocáveis
Seção	$\alpha = 0,3$ e $\beta = 0,4$	$-0,0861 \pm 1,6242j$
Disco	$r = 1,5$ e $q = 1$	$-0,0861 \pm 1,6242j; -0,1748 \pm 1,1922j$
Setor	$\theta = 120^\circ$	$-0,1022 \pm 0,8876$

4.3.5 Modelo V

O artigo [Brahma e Datta \(2007\)](#) elabora um controlador robusto construído com objetivo de minimizar a norma da matriz de retroalimentação e torna os autovalores do sistema em malha fechada insensíveis a perturbação. Um modelo ilustrativo no qual o autor trabalhou possui as matrizes:

$$\mathbf{M} = 4\mathbf{I}_{10 \times 10}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= 4\mathbf{I}_{10 \times 10} \\
\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{10 \times 10} \\
\mathbf{N} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{10 \times 2}
\end{aligned}$$

As regiões $\mathbb{D}$ -estáveis usadas e os modos de malha aberta que serão atualizados na alocação são descritos na Tabela 6

Tabela 6 – Regiões $\mathbb{D}$ -estáveis para alocação do sistema descrito pelo Modelo V

Tipo de região	Valores	Autovalores Alocáveis
Disco	$r = 0,5$ e $q = 1,5$	0 e $-0,0251$
Seção	$\alpha = 1,2$ e $\beta = 1,4$	
Setor	$\theta = 60^\circ$	

4.3.6 Modelo VI

O modelo de elementos finitos para estruturas particulares como consolas e lâminas de turbinas é apresentado por [Benner, Laub e Mehrmann \(1995\)](#). Este modelo pode ser categorizado como um sistemas de dimensões larga-moderada e possui 211 elementos de deslocamento. As matrizes do sistema são:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \mathbf{I}_{211 \times 211} \tag{4.9} \\
\mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 100 & -100 & & & & & \\ -100 & 200 & -100 & & & & \\ & -100 & 200 & -100 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -100 & 200 & -100 & \\ & & & & -100 & 200 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{211 \times 211} \tag{4.10}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 & & & & \\ -0.1 & 0.5 & -0.1 & & & \\ & -0.1 & 0.5 & -0.1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -0.1 & 0.5 & -0.1 \\ & & & & -0.1 & 0.4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{211 \times 211} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{B} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T \in \mathbb{R}^{1 \times 211} \quad (4.12)$$

Este sistema possui um autovalor real negativo dominante próximo a origem, nomeado, $\lambda_1 = -0.0199$, o qual causa resposta transitória lenta para a estrutura. O projeto PEVA é conduzido para alocar este autovalor dominante na $\mathbb{D}$ -região do tipo faixa, especificada entre $\alpha = 0.1$ e $\beta = 0.2$.

4.4 Tratamento de Dados

Para avaliar a eficiência do algoritmo, é proposto o uso de tabelas comparativas e gráficos de localização dos modos de malha aberta e fechada. As justificativas são:

- Os gráficos ajudam a avaliar se os modos em malha fechada do sistema estão presentes na região $\mathbb{D}$ -estável.
- Os gráficos também permitem avaliar se somente os modos do sistema em malha aberta desejados são alterados significativamente pela retroalimentação. Assim, pode-se avaliar se há o *no-spillover*.
- Construir tabelas que comparam os modos de malha fechada e aberta ajuda a avaliar a precisão da alocação via Algoritmo 2.
- Construir gráfico de $h(t)$ na situação de perturbação descrita na subseção 4.2.3 para o modelo III, permite verificar as características dinâmicas dos controladores projetados por EVA e PEVA.

A obtenção dos dados foram realizadas com auxílio de 13 programas escritos em linguagem de script, executados no Matlab, são eles:

- **D_PEVA_disco.m**: função focada para obter matriz de retroalimentação para um problema PEVA com região $\mathbb{D}$ -estável do tipo **disco**. As entradas são as matrizes $\tilde{\mathbf{A}}_1$, $\tilde{\mathbf{Y}}_1$, $\mathbf{B}$ e os escalares r e q ;
- **D_PEVA_secao.m**: função focada para obter matriz de retroalimentação para um problema PEVA com região $\mathbb{D}$ -estável do tipo **seção**. As entradas são dados associados às matrizes $\tilde{\mathbf{A}}_1$, $\tilde{\mathbf{Y}}_1$, $\mathbf{B}$ e os escalares α e β ;

- **D_PEVA_setor.m**: função focada para obter matriz de retroalimentação para um problema PEVA com região $\mathbb{D}$ -estável do tipo **setor**. As entradas são dados associados às matrizes $\tilde{\Lambda}_1$, $\tilde{Y}_1$, **B** e o escalar θ ;
- **teste_controlabilidade.m**: é uma função que determina se as matrizes **A** e **B** são parcialmente controláveis para os modos de malha aberta selecionados. A resposta será número 1 para caso verdadeiro;
- **complexo_para_real.m**: função que permite a conversão das matrizes Λ_1 e Y_1 para a forma $\tilde{\Lambda}_1$ e $\tilde{Y}_1$;
- **mapeamento_d_est_disco.m**: gera os gráficos de localização dos modos em malha aberta e fechada, desenhando também a fronteira da $\mathbb{D}$ -região do tipo disco;
- **mapeamento_d_est_secao.m**: é similar ao **mapeamento_d_est_disco.m**; entretanto, a $\mathbb{D}$ -região é do tipo seção.
- **mapeamento_d_est_setor.m**: é similar ao **mapeamento_d_est_disco.m**; entretanto, a $\mathbb{D}$ -região é do tipo setor.
- **Modelo_I.m**, realiza o cálculo da matriz de retroalimentação, constrói-se os gráficos de localização de autovalores e mostra os modos de malha aberta e fechada usados para construir as tabelas comparativas em relação ao Modelo I.
- **Modelo_II.m**, **Modelo_III.m**, **Modelo_IV.m**, **Modelo_V.m** e **Modelo_VI.m**: executam as mesmas tarefas de **Modelo_I.m**, porém cada uma está focada respectivamente num único modelo - II, III, IV, V e VI.
- **D_EVA_disco.m**: executa o cálculo da matriz de retroalimentação via otimização EVA-regional clássica para uma $\mathbb{D}$ -região do tipo disco.
- **vibration_sys.mdl**: programa do simulink que executa a simulação dinâmica regida pela equação 4.1 com perturbação na matriz **K**. Vide detalhes da utilização no apêndice A.

A fim de tratar os dados para obter os gráficos e tabelas desejadas, segue-se o padrão de linguagem de script:

Algoritmo 3. *Escolher o modelo do sistema LTI e iniciar o programa:*

1. *Inserir as matrizes **M**, **D**, **K** e **N**, no programa respectivo;*
2. *Computar as matrizes **A** e **B**;*
3. *Computar as matrizes de autovalores e autovetores à esquerda via comando **eig()** do MATLAB;*

4. Identificar a posição dos autovalores desejáveis de atribuição e associar com os respectivos autovetores à esquerda;
5. Computar as matrizes Λ_1 e Y_1 ;
6. Executar script para checar controlabilidade parcial via **teste_controlabilidade.m**;
7. Caso haja controlabilidade parcial, seguir no programa;
8. Executar script **complexo_para_real.m** visando obter matrizes $\tilde{Y}_1$ e $\tilde{\Lambda}_1$;
9. Inserir os escalares α , β , q e r , θ que descrevem as funções características das $\mathbb{D}$ -regiões;
10. Obter as matrizes de retroalimentação via os programas **D_PEVA_disco.m**, **D_PEVA_secao.m** e **D_PEVA_setor.m**;
11. Salvar os modos de malha aberta e fechada;
12. Construir as tabelas;
13. Executar os programas de linguagem script **mapeamento_d_est_disco.m**, **mapeamento_d_est_secao.m** e **mapeamento_d_est_setor.m** para obter os gráficos desejados;
14. Fim.

Reforçando o que foi dito anteriormente, para executar o algoritmo 3 em cada modelo foi feito um programa escrito uma linguagem de *script* denominados: **Modelo_I.m**, **Modelo_II.m**, **Modelo_III.m**, **Modelo_IV.m** e **Modelo_V.m**. Todos os programas escritos podem ser acessados no link da referência de Almeida (2019).

5 Resultados e Análise

5.1 Modelo I

As matrizes de retroalimentação determinadas pelo **Modelo_I.m** mostradas no *command window* são:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{\mathbb{H}_{\alpha,\beta}} &= \begin{bmatrix} 0,2104 & 2,1224 & -2,1680 & 1,5249 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}^{\mathbb{D}_{\theta}} &= \begin{bmatrix} 0,2283 & 8,7830 & -9,1239 & 5,7805 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}^{\mathbb{D}_{q,r}} &= \begin{bmatrix} -10,6044 & 24,7644 & -28,3862 & 7,0193 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

A Figura 1 mostra os modos de malha aberta e fechada para as três $\mathbb{D}$ -regiões. Observa-se que os autovalores desejáveis de alocação estão dentro das regiões especificadas, enquanto os não desejáveis de alocação permanecem inalterados. A Tabela 7 na linha 1 confirma que os modos não alocáveis permanecem inalterados numa precisão de quatro casas decimais, indicando assim que o algoritmo para este caso garante o *no-spillover*. Esses resultados confirmam que a Hipótese 1 e 2 são verdadeiras, logo o Teorema 9 pode ser aplicado computacionalmente para este exemplo.

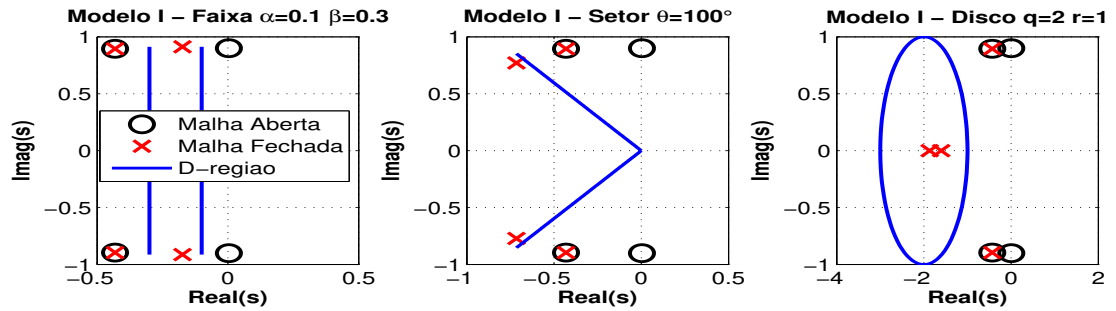


Figura 1 – Localização dos modos de malha aberta e fechada para o Modelo I.

Tabela 7 – Modos do sistema do modelo I

	Malha Aberta	Malha Fechada		
		Faixa	Setor	Disco
1	$-0.4312 \pm 0.8953j$	$-0.4312 \pm 0.8953j$	$-0.4312 \pm 0.8953j$	$-0.4312 \pm 0.8953j$
2	$0.0039 \pm 0.9001j$	$-0.1738 \pm 0.9126j$	$-0.7150 \pm 0.7714j$	-1.8651
3				-1.6038

5.2 Modelo II

As matrizes de retroalimentação calculadas por **Modelo_II.m** e mostradas no *command window* são:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_p^{\mathbb{H}_{\alpha,\beta}} &= \begin{bmatrix} 13,6332 & 1,6111 & -32,1016 \\ -22,3878 & -19,5275 & -0,3927 \\ -5,3674 & 9,8820 & 16,4066 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_d^{\mathbb{H}_{\alpha,\beta}} &= \begin{bmatrix} 17,2692 & 14,7088 & -5,1431 \\ -15,6149 & -2,7163 & -7,8149 \\ 8,1497 & 7,7878 & 2,9818 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_p^{\mathbb{D}_\theta} &= \begin{bmatrix} 3,5908 & -1,6392 & -16,9827 \\ -14,6275 & -13,0271 & -3,9848 \\ -3,9624 & 3,1724 & 6,0042 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_d^{\mathbb{D}_\theta} &= \begin{bmatrix} 7,6957 & 8,3651 & -3,9792 \\ -7,7483 & 1,2155 & -6,2669 \\ 3,7710 & 4,6800 & 0,3773 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_p^{\mathbb{D}_{q,r}} &= \begin{bmatrix} 7,7525 & 1,2333 & -32,2835 \\ -19,1381 & -20,1658 & -1,3219 \\ -5,7638 & 11,5331 & 19,2664 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_d^{\mathbb{D}_{q,r}} &= \begin{bmatrix} 21,3126 & 21,7673 & -7,3208 \\ -18,4864 & -7,0433 & -6,9158 \\ 9,0321 & 8,3414 & 3,6983 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

A Figura 2 mostra os modos de malha aberta e fechada para as três $\mathbb{D}$ -regiões. Também nesse caso os modos de instabilidade são alocados para dentro das regiões especificadas, enquanto os não desejáveis de alocação permanecem inalterados. Nas linhas 3 e 4 da Tabela 8 pode-se confirmar que os modos não alocáveis permanecem inalterados numa precisão de quatro casas decimais, isso significa que o algoritmo para este caso também garante o *no-spillover*. Os resultados observados confirmam que todas as hipóteses formuladas são válidas neste projeto, portanto o Algoritmo 2 tem sucesso para aplicação do Teorema 9.

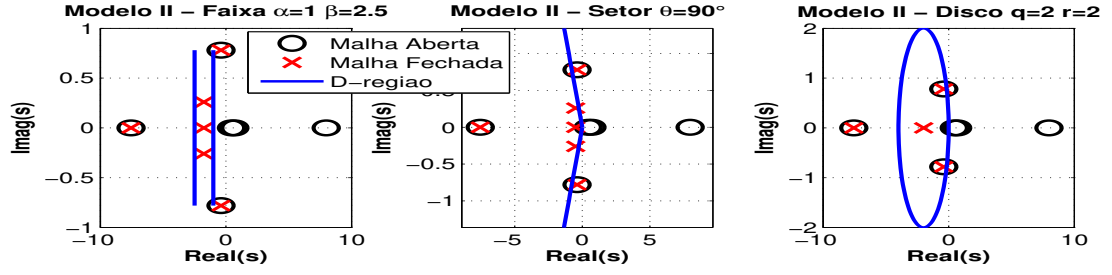


Figura 2 – Localização dos modos de malha aberta e fechada para o Modelo II.

Tabela 8 – Modos do sistema do modelo II

	Malha Aberta	Malha Fechada		
		Faixa	Setor	Disco
1	0.7076	$-1.7500 \pm 0.2595j$	$-0.5000 \pm 0.2595j$	-2.0000
2	7.9807	-1.7500	-0.5000	-2.0000
3	-7.5546	-7.5546	-7.5546	-7.5546
4	$-0.3922 \pm 0.7804j$	$-0.3922 \pm 0.7804j$	$-0.3922 \pm 0.7804j$	$-0.3922 \pm 0.7804j$
5	0.4408			-1.9997

5.3 Modelo III

As matrizes de retroalimentação calculadas por **Modelo_III.m** e mostradas no *command window* são:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_p^{\mathbb{H}_{\alpha,\beta}} &= [-14,2486 \quad -2,1054 \quad -2,6478] \\
 \mathbf{F}_d^{\mathbb{H}_{\alpha,\beta}} &= [-2,6682 \quad -0,9657 \quad -0,6635] \\
 \mathbf{F}_p^{\mathbb{D}_\theta} &= [-6,3282 \quad 1,2251 \quad -1,4776] \\
 \mathbf{F}_d^{\mathbb{D}_\theta} &= [-9,7790 \quad -1,3312 \quad -5,7153] \\
 \mathbf{F}_p^{\mathbb{D}_{q,r}} &= [-4,1949 \quad 1,1415 \quad 20,0786] \\
 \mathbf{F}_d^{\mathbb{D}_{q,r}} &= [-0,1602 \quad 0,4320 \quad -1,5371]
 \end{aligned}$$

A Figura 3 mostra os modos de malha aberta e fechada para as três $\mathbb{D}$ -regiões. Novamente verifica-se por este modelo que os autovalores desejáveis de alocação estão dentro das regiões especificadas, enquanto os não desejáveis de alocação permanecem inalterados. A Tabela 9 na linha 1 e 2 confirma que os modos não alocáveis permanecem inalterados numa precisão de quatro casas decimais, mostrando que o algoritmo garante o *no-spillover* conforme esperado. Dessa forma, fica confirmado que por esse caminho as Hipóteses 1 e 2 são verdadeiras, logo o teorema proposto para solucionar o PEVA-regional atende aos objetivos dessa dissertação.

Visualizando a Figura 4 verifica-se que o deslocamento dos modos do sistema em malha fechada submetido a perturbação de 2,5% da matriz $\mathbf{K}$ para o método EVA faz com que haja dois autovalores instáveis. Entretanto, a instabilidade não ocorre para o PEVA.

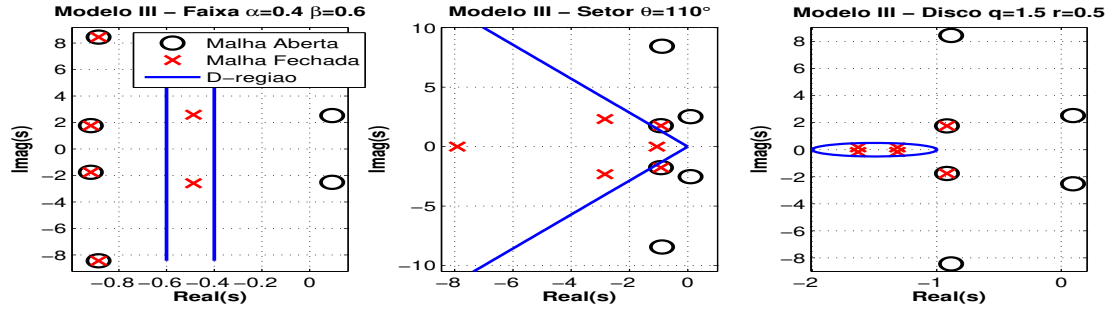


Figura 3 – Localização dos modos de malha aberta e fechada para o Modelo III.

Tabela 9 – Modos do sistema do modelo III

	Malha Aberta	Malha Fechada		
		Faixa	Setor	Disco
1	$-0,9180 \pm 1,7606j$	$-0,9180 \pm 1,7606j$	$-0,9180 \pm 1,7606j$	$-0,9180 \pm 1,7606i$
2	$-0,8848 \pm 8,4415j$	$-0,8848 \pm 8,4415j$	$-2,8410 \pm 2,3202j$	$-1,6320 \pm 0,1694$
3	$0,0947 \pm 2,5229j$	$-0,4873 \pm 2,5866j$	$-7,9106$	$-1,3153 \pm 0,1667$
4			$-1,0607$	

A influência da perturbação na resposta transitória dos elementos do vetor deslocamento pode ser visto na Figura 5, na qual se verifica claramente a situação de instabilidade para o projeto realizado via EVA (cor vermelha) e a estabilidade assintótica no caso do PEVA (cor azul). Portanto, esses resultados mostram que o uso do método PEVA pode garantir robustez ao sistema, mesmo alocando menor quantidade de autovalores para uma determinada $\mathbb{D}$ -região.

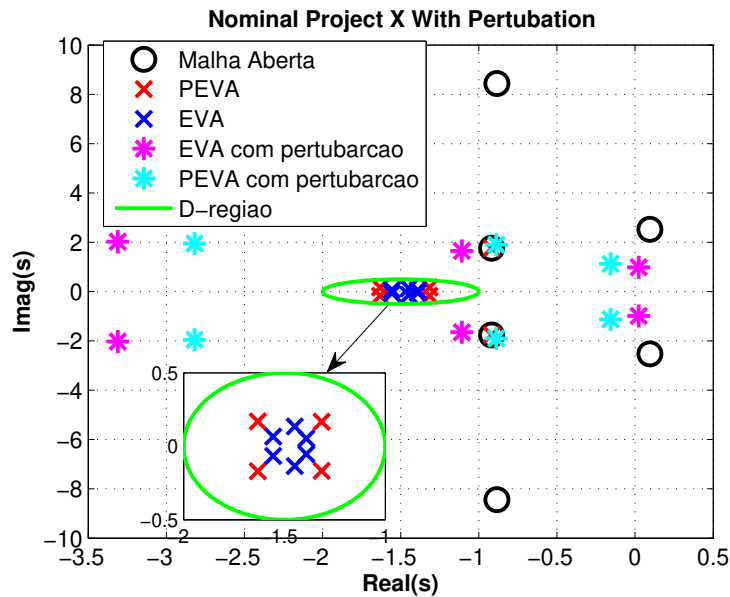


Figura 4 – Localização dos modos de malha aberta e fechada via métodos EVA e PEVA modelo III, projeto nominal com perturbação na matriz $\mathbf{K}$

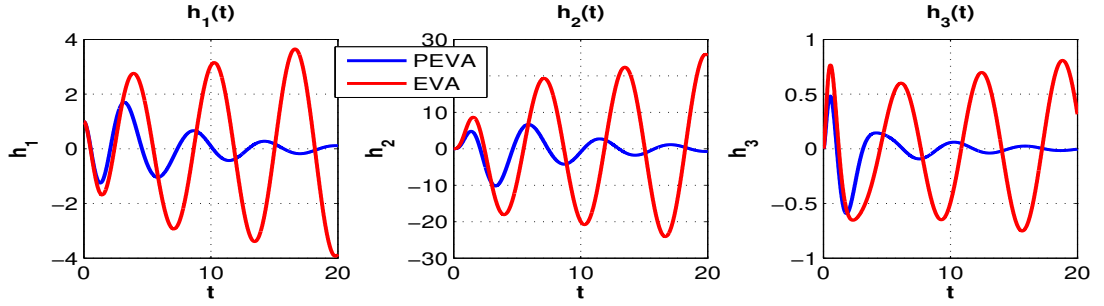


Figura 5 – Comportamento dos elementos do vetor deslocamento para o Modelo III submetido a perturbação da matriz $\mathbf{K}$.

5.4 Modelo IV

As matrizes de retroalimentação calculadas por `Modelo_IV.m` e mostradas no *command window* são:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_p^{\mathbb{H}_{\alpha,\beta}} &= \begin{bmatrix} -0,0572 & 0,0367 & -0,2094 & 0,1247 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_d^{\mathbb{H}_{\alpha,\beta}} &= \begin{bmatrix} -0,1162 & 0,0143 & -0,2673 & 0,2464 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_p^{\mathbb{D}_\theta} &= \begin{bmatrix} -47,1106 & 15,4507 & 1,3857 & 35,5753 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_d^{\mathbb{D}_\theta} &= \begin{bmatrix} -47,6030 & -1,2932 & 59,0234 & 15,5926 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_p^{\mathbb{D}_{q,r}} &= \begin{bmatrix} 2,5725 & 1,3962 & -8,2296 & 1,1915 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_d^{\mathbb{D}_{q,r}} &= \begin{bmatrix} -3,0099 & 2,7897 & 2,3474 & 4,6225 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A Figura 6 mostra os modos de malha aberta e fechada para as três $\mathbb{D}$ -regiões. Mais uma vez os autovalores desejáveis de alocação estão dentro das regiões especificadas, e os não desejáveis de alocação permanecem inalterados. A Tabela 10 confirma nas linhas 1, 2 e 3 que os modos não alocáveis permanecem inalterados numa precisão de quatro casas decimais. Também nesse caso, o algoritmo 2 garante o *no-spillover* e alocação parcial, assim as Hipóteses 1 e 2 são válidas, consequentemente a aplicação computacional do PEVA-regional é um sucesso para este projeto.

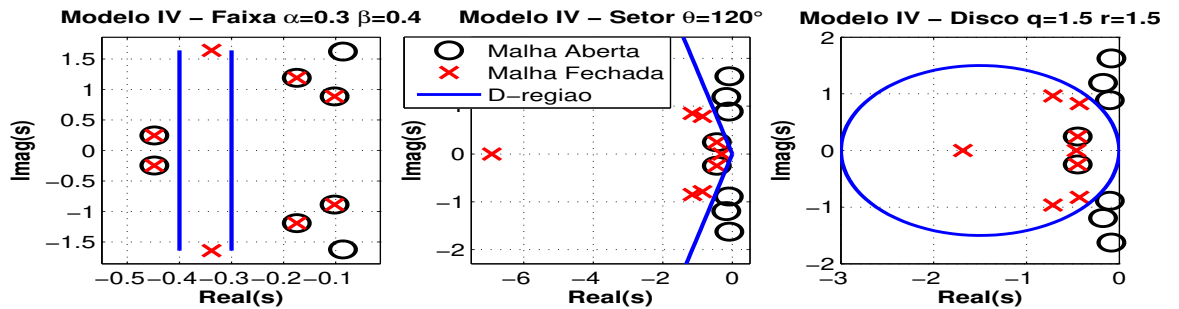


Figura 6 – Localização dos modos de malha aberta e fechada para o Modelo IV.

Tabela 10 – Modos do sistema do modelo IV

	Malha Aberta	Malha Fechada		
		Faixa	Setor	Disco
1	$-0,4480 \pm 0,2465j$	$-0,4480 \pm 0,2465j$	$-0,4480 \pm 0,2465j$	$-0,4480 \pm 0,2465j$
2	$-0,1748 \pm 1,1922j$	$-0,1748 \pm 1,1922j$	$-0,8593 \pm 0,7862j$	$-0,4301 \pm 0,8276i$
3	$-0,1022 \pm 0,8876j$	$-0,1022 \pm 0,8876j$	$-1,1461 \pm 0,8475j$	$-0,7148 \pm 0,9638i$
4	$-0,0861 \pm 1,6242j$	$-0,3381 \pm 1,6419j$	$-6,9145$	$-1,6852$
5			$-0,3074$	$-0,4628$

5.5 Modelo V

As matrizes de retroalimentação calculadas por Modelo_V.m e mostradas no *command window* são:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_p^{\mathbb{H}_{\alpha,\beta}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{p1}^{\mathbb{H}_{\alpha,\beta}} & \mathbf{F}_{p2}^{\mathbb{H}_{\alpha,\beta}} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_{p1}^{\mathbb{H}_{\alpha,\beta}} &= \begin{bmatrix} 3,9008 & -3,7147 & -3,3609 & -2,8738 & -2,3012 \\ 0,0987 & 0,2848 & 0,6388 & 1,1260 & 1,6987 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_{p2}^{\mathbb{H}_{\alpha,\beta}} &= \begin{bmatrix} -1,6991 & -1,1266 & -0,6395 & -0,2856 & -0,0996 \\ 2,3009 & 2,8737 & 3,3609 & 3,7148 & 3,9009 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_d^{\mathbb{H}_{\alpha,\beta}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{d1}^{\mathbb{H}_{\alpha,\beta}} & \mathbf{F}_{d2}^{\mathbb{H}_{\alpha,\beta}} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_{d1}^{\mathbb{H}_{\alpha,\beta}} &= \begin{bmatrix} -3,9497 & -3,7589 & -3,3959 & -2,8963 & -2,3090 \\ 0,0498 & 0,2407 & 0,6037 & 1,1035 & 1,6910 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_{d2}^{\mathbb{H}_{\alpha,\beta}} &= \begin{bmatrix} -1,6914 & -1,1041 & -0,6045 & -0,2415 & -0,0506 \\ 2,3087 & 2,8962 & 3,3959 & 3,7590 & 3,9499 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_p^{\mathbb{D}_{\theta}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{p1}^{\mathbb{D}_{\theta}} & \mathbf{F}_{p2}^{\mathbb{D}_{\theta}} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_{p1}^{\mathbb{D}_{\theta}} &= \begin{bmatrix} -2,2315 & -2,1261 & -1,9256 & -1,6496 & -1,3252 \\ 0,0779 & 0,1833 & 0,3838 & 0,6598 & 0,9842 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_{p2}^{\mathbb{D}_{\theta}} &= \begin{bmatrix} -0,9842 & -0,6598 & -0,3838 & -0,1833 & -0,0779 \\ 1,3252 & 1,6496 & 1,9256 & 2,1261 & 2,2315 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_d^{\mathbb{D}_{\theta}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{d1}^{\mathbb{D}_{\theta}} & \mathbf{F}_{d2}^{\mathbb{D}_{\theta}} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_{d1}^{\mathbb{D}_{\theta}} &= \begin{bmatrix} -2,2592 & -2,1511 & -1,9454 & -1,6624 & -1,3296 \\ 0,0502 & 0,1583 & 0,3640 & 0,6470 & 0,9798 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_{d2}^{\mathbb{D}_{\theta}} &= \begin{bmatrix} -0,9798 & -0,6470 & -0,3640 & -0,1583 & -0,0502 \\ 1,3296 & 1,6624 & 1,9454 & 2,1511 & 2,2592 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_p^{\mathbb{D}_{q,r}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{p1}^{\mathbb{D}_{q,r}} & \mathbf{F}_{p2}^{\mathbb{D}_{q,r}} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_{p1}^{\mathbb{D}_{q,r}} &= \begin{bmatrix} -5,8757 & -5,5942 & -5,0588 & -4,3218 & -3,4555 \\ 0,1242 & 0,4057 & 0,9412 & 1,6782 & 2,5445 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_{p2}^{\mathbb{D}_{q,r}} &= \begin{bmatrix} -2,5445 & -1,6782 & -0,9412 & -0,4057 & -0,1242 \\ 3,4555 & 4,3218 & 5,0588 & 5,5942 & 5,8757 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_d^{\mathbb{D}_{q,r}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{d1}^{\mathbb{D}_{q,r}} & \mathbf{F}_{d2}^{\mathbb{D}_{q,r}} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_{d1}^{\mathbb{D}_{q,r}} &= \begin{bmatrix} -5,9498 & -5,6610 & -5,1118 & -4,3559 & -3,4672 \\ 0,0502 & 0,3389 & 0,8882 & 1,6441 & 2,5328 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{F}_{d2}^{\mathbb{D}_{q,r}} &= \begin{bmatrix} -2,5328 & -1,6441 & -0,8882 & -0,3389 & -0,0502 \\ 3,4672 & 4,3559 & 5,1118 & 5,6610 & 5,9498 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

A Figura 7 mostra os modos de malha aberta e fechada para as três $\mathbb{D}$ -regiões.

Tabela 11 – Modos do sistema do modelo V

	Malha Aberta	Malha Fechada		
		Faixa	Setor	Disco
1	$-0,5000 \pm 0,8518j$	$-0,5000 \pm 0,8518j$	$-0,5000 \pm 0,8518j$	$-0,5000 \pm 0,8518j$
2	$-0,5000 \pm 0,8090j$	$-0,5000 \pm 0,8090j$	$-0,5000 \pm 0,8090j$	$-0,5000 \pm 0,8090j$
3	$-0,5000 \pm 0,7375j$	$-0,5000 \pm 0,7375j$	$-0,5000 \pm 0,7375j$	$-0,5000 \pm 0,7375j$
4	$-0,5000 \pm 0,6360j$	$-0,5000 \pm 0,6360j$	$-0,5000 \pm 0,6360j$	$-0,5000 \pm 0,6360j$
5	$-0,5000 \pm 0,5000j$	$-0,5000 \pm 0,5000j$	$-0,5000 \pm 0,5000j$	$-0,5000 \pm 0,5000j$
6	$-0,5000 \pm 0,3090j$	$-0,5000 \pm 0,3090j$	$-0,5000 \pm 0,3090j$	$-0,5000 \pm 0,3090j$
7	$-1,0000$	$-1,0000$	$-1,0000$	$-1,0000$
8	$-0,9749$	$-0,9749$	$-0,9749$	$-0,9749$
9	$-0,8931$	$-0,8931$	$-0,8931$	$-0,8931$
10	$-0,7095$	$-0,7095$	$-0,7095$	$-0,7095$
11	$-0,2905$	$-0,2905$	$-0,2905$	$-0,2905$
12	$-0,1069$	$-0,1069$	$-0,1069$	$-0,1069$
13	$-0,0251$	$-1,0000 \pm 0,0001j$	$-0,5774$	$-1,5000$
14	$0,0000$		$-0,5773$	$-1,5000$

Observa-se que os autovalores desejáveis de alocação estão dentro das regiões especificadas, enquanto os não desejáveis de alocação permanecem inalterados. A Tabela 11 nas linhas 13 e 14 confirma que os modos desejados de alocação são alterados pela retroalimentação, indicando assim que o algoritmo para este caso garante o *no-spillover*. Estes resultados reforçam a validade das Hipóteses 1 e 2, assim a aplicação computacional do Teorema PEVA-regional proposto pelo Teorema 9 é aceitável para este exemplo.

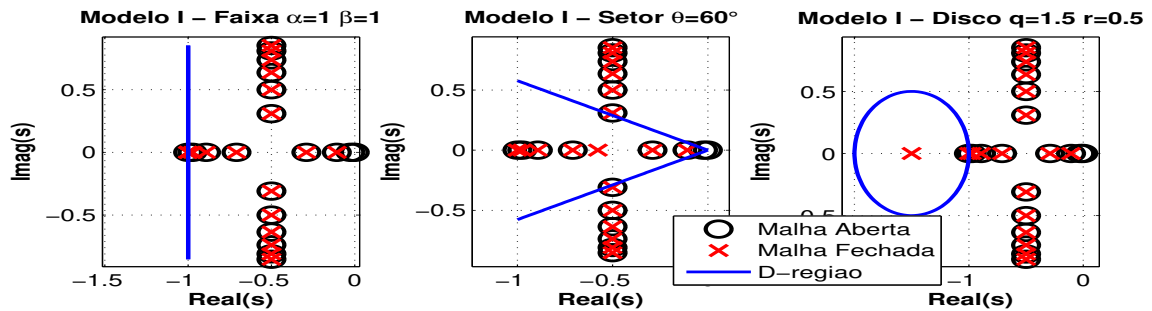


Figura 7 – Localização dos modos de malha aberta e fechada para o Modelo V.

5.6 Modelo VI

Considerando que o cálculo feito pelo Algoritmo 2 para a matriz de retroalimentação desse modelo tem um resultado de grande extensão, resolveu-se situa-la no Anexo B

A Figura 8 mostra os modos de malha aberta e fechada e a $\mathbb{D}$ -região faixa. Observa-se que o único autovalor desejável de alocação esta dentro da região especificada como

Tabela 12 – Modos selecionados do modelo VI

	Malha Aberta	Malha Fechada
1	$-0,1501 \pm 0,3416i$	$-0,1501 \pm 0,3416i$
2	$-0,1500 \pm 0,1662i$	$-0,1500 \pm 0,1662i$
3	$-0,2801$	$-0,2801$
4	$-0,0199$	$-0,1500$

pode ser identificado no minigráfico da Figura 8; enquanto os não desejáveis de alocação permanecem inalterados. De acordo com a Tabela 12, somente o modo da linha 4 é alterado pela retroalimentação, indicando assim que o algoritmo para este caso garante o *no-spillover*. A figura e tabela estudadas evidenciam que as Hipóteses 1 e 2 para este projeto apresentam-se como verdadeiras, assim o Algoritmo 2 garante a alocação PEVA-regional via computação, almejado pelos objetivos dessa dissertação.

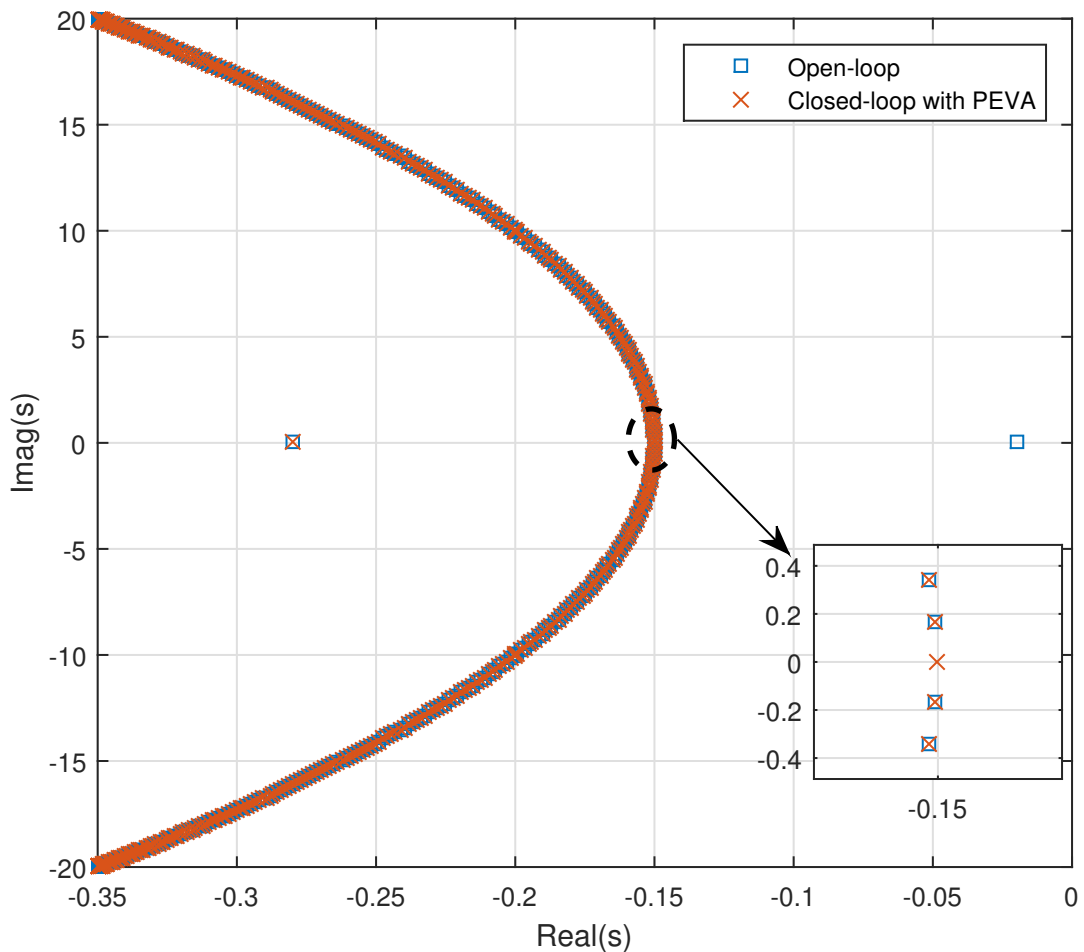


Figura 8 – Localização dos modos de malha aberta e fechada para o Modelo VI.

Considerações Finais

A ausência de referências teóricas sobre aplicação do método PEVA-estrito em controle multiobjetivo e observada as vantagens de usá-la para projetos de sistema controle com muitas variáveis de estados, foram os motivos centrais para a busca de um novo método PEVA baseado na alocação regional de pólos. Essa busca levou a formulação do objetivo principal: Propor um método de atribuição parcial dos autovalores com alocação para regiões $\mathbb{D}$ -estáveis. Para este objetivo ser atendido foi necessário a criação de dois objetivos específicos: propor um teorema para solucionar o PEVA-regional via $\mathbb{D}$ -estabilidade; Construir um algoritmo para sua aplicação computacional evitando o fenômeno do *spillover*.

A descoberta de novo teorema, conforme formulado pelo objetivo principal, pôde ser realizada devido a um processo de revisão bibliográfica capaz de identificar elementos teóricos com potenciais construtores. A mescla dos assuntos discutidos no teorema para solucionar o PEVA de [Datta et al. \(2002\)](#), no projeto do controlador via $\mathbb{D}$ -estabilidade, e o uso da transformação de similaridade descrita por [Zhang, Ouyang e Yang \(2014\)](#); foram bases fundamentais para a criação do Teorema 9, página 26. Esse teorema capaz de solucionar o PEVA-regional para sistema LTI, utiliza LMI, modos controláveis e seus autovetores à esquerda. A criação do algoritmo para execução do teorema proposto foi atendido, conforme observado na página 28, descrito no Algoritmo 2. No aspecto teórico a implementação desse algoritmo não apresenta dificuldade para especificar entradas e solucionar problemas com equações lineares e LMI factível-convexa.

Para confirmar se o Teorema 9 e o Algoritmo 2 conseguem atender os objetivos dessa dissertação, duas hipóteses foram formuladas: uma relativa a verificação da alocação parcial para a $\mathbb{D}$ -região especificada; outra sobre a garantia do no-spillover.

A metodologia escolhida para verificar a validade das hipóteses foi a execução de alguns projetos de controle em ambiente computacional e depois realização a análise do espectro do sistema em malha aberta e fechada. A análise espectral foi realizada com o auxílio de tabelas comparativas e gráficos de localização dos modos do sistema, além de uso de gráficos de resposta transitória. Os resultados de todos os seis projetos realizados mostram que todas as hipóteses são válidas, logo a aplicação computacional do método proposto é viável e consegue-se atender aos objetivos em plenitude.

O método desenvolvido neste trabalho permite que o projeto de síntese do controlador seja baseado num sistema de ordem reduzida cuja dimensão é igual a quantidade de autovalores a serem alocados. Desta maneira, o número de variáveis a serem utilizada nesta proposta é inferior à dos métodos EVA por $\mathbb{D}$ -estabilidade. Essa redução da ordem

do modelo é vantajosa, pois torna o algoritmo menos susceptível a erros de truncamento e condicionamento; além de reduzir a quantidade de memória necessária em relação aos métodos EVA por $\mathbb{D}$ -estabilidade. O algoritmo proposto que usa processo de otimização para solucionar a LMI possui capacidade de ajustar a tolerância mínima para função de custo e a quantidade máxima de iterações permitidas; essa flexibilidade ajuda a tornar mais rápido e confiável o algoritmo para casos particulares. Essas vantagens são interessantes para aplicações em sistemas LTI com muitas variáveis de estados, tais como: modelos observados em redes elétricas, rede de computadores, grandes estruturas civis, sistemas de energia, modelos de vibrações por elementos finitos e etc.

Importante ressaltar que o algoritmo proposto necessita do conhecimento prévio dos autovalores e autovetores à esquerda a serem controlados; assim, é necessário que o projetista utilize métodos adequados de estimação, principalmente em sistemas de larga estrutura. O método proposto exige que os autovalores a serem alocados sejam modos controláveis do sistema em malha aberta.

Diante das observações realizadas, alguns potenciais para futuras pesquisas podem ser recomendados:

- A relevância do uso de LMIs em projeto de controle com incertezas é consolidada na academia; portanto, pesquisas com foco em aplicações de controle robusto parecem ser um futuro promissor.
- A análise do espectro em sistemas com muitas variáveis de estados pode ser impraticável via ação humana; logo, a busca de algoritmos para automatizar a escolha de autovalores em condições pré-estabelecidas e aplicação conjunta com o método proposto é uma linha de pesquisa necessária.
- Objetivos de controle ótimo $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ podem ser satisfeito conjuntamente com o EVA-regional graças ao emprego de teoremas baseados em LMI's. Espera-se que este trabalho seja base para investigar aplicação do PEVA-regional em projetos de controle multiobjetivos, já que consegue-se formular LMI para aplicação objetivo visando alocação parcial dos autovalores.
- A escolha de regiões que sejam insensíveis a perturbações dos parâmetros das matrizes do sistema é um tema já estudado no EVA-regional (DUAN; YU, 2013, pg. 225), entretanto para o PEVA-regional não foi observado esse tema. Pesquisas de análise numérica para identificar e quantificar limitações não descritas para o PEVA-regional poderão ser importantes contribuições no sentido de ajudar a escolha de $\mathbb{D}$ -regiões adequadas para aplicação da técnica.

Os trabalhos desenvolvidos nessa dissertação permitiram a publicação de um artigo científico no *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, cujo endereço online

pode ser visto na referência [Almeida e Araújo \(2019\)](#).

Referências

- ACKERMANN, J. Der entwurf linearer regelungssysteme im zustandsraum. *at-Automatisierungstechnik*, OLDENBOURG WISSENSCHAFTSVERLAG, v. 20, n. 1-12, p. 297–300, 1972. Citado na página 2.
- ALMEIDA, M. O. d.; ARAÚJO, J. M. Partial eigenvalue assignment for lti systems with d-stability and lmi. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, p. 1–10, 3 2019. ISSN 2195-3880. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40313-019-00457-y>>. Citado na página 53.
- ALMEIDA, M. O. de. *PEVA-D-Estabilidade*. 2019. Página web. Disponível em: <<https://github.com/Marco86EngElet/PEVA-D-Estabilidade>>. Citado na página 39.
- ANTSAKLIS, P. J.; MICHEL, A. N. *Linear Systems*. [S.l.]: Birkhäuser, 2006. Citado na página 1.
- ARANGUIZ, E.; BARBOSA, K. A.; VERDEJO, H. D-stability analysis of descriptor systems and application in power systems. *IEEE Latin America Transactions*, IEEE, v. 13, n. 6, p. 1888–1892, 2015. Citado na página 5.
- ARAUJO, J. M. *Tese Acadêmica: Alocação de Autoestrutura em Sistemas Lineares de Segunda Ordem*: Contribuições à análise e projeto de alocação parcial e total. Salvador, Bahia: [s.n.], 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.13140/rg.2.2.27998.02883/1>>. Citado na página 34.
- ARAÚJO, J. M.; CASTRO, A. C.; SANTOS, E. T. F. Alocação de pólos em sistemas lineares invariantes no tempo utilizando realimentação da derivada de estados e a equação de lyapunov. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automática*, scielo, v. 20, p. 263 – 270, 09 2009. ISSN 0103-1759. Citado na página 14.
- ARAÚJO, J. M. et al. Robustness of the quadratic partial eigenvalue assignment using spectrum sensitivities for state and derivative feedback designs. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 37, n. 2, p. 253–268, 2018. Citado na página 4.
- ARAÚJO, J. M.; SANTOS, T. L. M. Control of a class of second-order linear vibrating systems with time-delay: Smith predictor approach. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 108, p. 173–187, 2018. Citado na página 4.
- ARAÚJO, J. M.; SANTOS, T. L. M. A multiplicative eigenvalues perturbation and its application to natural frequency assignment in undamped second-order systems. *SSRN Electronic Journal*, Elsevier BV, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.2139/ssrn-3087860>>. Citado na página 4.
- ARROW, K. J.; MCMANUS, M. A note on dynamic stability. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 448–454, 1958. Citado na página 4.
- ASTRÖM, K. J.; MURRAY, R. M. *Feedback systems: an introduction for scientists and engineers*. [S.l.]: Princeton university press, 2008. 167 p. Citado na página 10.

- BAKKA, T.; KARIMI, H. R. Robust output feedback $\mathcal{H}_\infty$ control synthesis with pole placement for offshore wind turbine system: An lmi approach. In: IEEE. *Control Applications (CCA), 2012 IEEE International Conference on*. [S.l.], 2012. p. 1467–1472. Citado na página 5.
- BARMISH, B.; KANG, H. A survey of extreme point results for robustness of control systems. *Automatica*, v. 29, n. 1, p. 13 – 35, 1993. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000510989390172P>>. Citado na página 20.
- BASS, R.; GURA, I. High order system design via state-space considerations. In: *Joint Automatic Control Conference*. [S.l.: s.n.], 1965. p. 311–318. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 2.
- BENNER, P.; LAUB, A. J.; MEHRMANN, V. *A collection of benchmark examples for the numerical solution of algebraic Riccati equations I: Continuous-time case*. [S.l.], 1995. Citado na página 36.
- BERNSTEIN, D. S. *Matrix mathematics: Theory, facts, and formulas with application to linear systems theory*. [S.l.]: Princeton university press Princeton, 2005. Citado na página 18.
- BOYD, S. et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994. (Studies in Applied Mathematics, v. 15). ISBN 0-89871-334-X. Citado na página 5.
- BOYD, S. et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104), 1994. (Studies in Applied Mathematics). ISBN 9781611970777. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=H2Nxxi5_fo0C>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- BRAHMA, S.; DATTA, B. A sylvester-equation based parametric approach for minimum norm and robust partial quadratic eigenvalue assignment problems. In: IEEE. *Control & Automation, 2007. MED'07. Mediterranean Conference on*. [S.l.], 2007. p. 1–6. Citado na página 35.
- BRAHMA, S.; DATTA, B. An optimization approach for minimum norm and robust partial quadratic eigenvalue assignment problems for vibrating structures. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 324, n. 3-5, p. 471–489, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 14.
- BRAHMA, S. K.; DATTA, B. N. A norm-minimizing parametric algorithm for quadratic partial eigenvalue assignment via sylvester equation. In: IEEE. *Control Conference (ECC), 2007 European*. [S.l.], 2007. p. 490–496. Citado na página 35.
- CHEN, C. *Linear System Theory and Design*. [S.l.]: Oxford University Press, 2013. (Oxford series in electrical and computer engineering). ISBN 9780199959570. Citado na página 14.
- CHEN, C.-T. *Analog and digital control system design: transfer-function, state-space, and algebraic methods*. [S.l.]: Saunders College Pub., 1993. Citado na página 1.

- CHILALI, M.; GAHINET, P.; APKARIAN, P. Robust pole placement in lmi regions. *IEEE transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 44, n. 12, p. 2257–2270, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 18.
- DAS, S.; GOSWAMI, K.; DATTA, B. N. Quadratic partial eigenvalue assignment in large-scale stochastic dynamic systems for resilient and economic design. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 72, p. 359–375, 2016. Citado na página 4.
- DATTA, B. *Numerical methods for linear control systems*. [S.l.]: Academic Press, 2004. 160-164 p. Citado 6 vezes nas páginas 1, 2, 3, 4, 10 e 13.
- DATTA, B. N. Stability and inertia. *Linear Algebra and Its Applications*, Elsevier, v. 302, p. 563–600, 1999. Citado na página 4.
- DATTA, B. N. et al. Partial eigenvalue assignment in linear systems: existence, uniqueness and numerical solution. In: CITESEER. *Proceedings of the Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, Notre Dame. [S.l.], 2002. Citado 10 vezes nas páginas 3, 4, 6, 9, 11, 12, 13, 14, 27 e 51.
- DATTA, S.; CHAKRABORTY, D. Feedback norm minimisation with regional pole placement. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 87, n. 11, p. 2239–2251, 2014. Citado na página 6.
- DATTA, S.; CHAKRABORTY, D.; BELUR, M. N. Low order controller with regional pole placement. In: IEEE. *American Control Conference (ACC)*, 2012. [S.l.], 2012. p. 6702–6707. Citado na página 6.
- DUAN, G.-R.; YU, H.-H. *LMIs in control systems: analysis, design and applications*. [S.l.]: CRC press, 2013. Citado 7 vezes nas páginas 5, 16, 17, 18, 19, 20 e 52.
- FAIRMAN, F. W. *Linear control theory: the state space approach*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1998. Citado na página 1.
- FRIEDLAND, B. *Control system design: an introduction to state-space methods*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012. 243-244 p. Citado na página 2.
- GEROMEL, J.; OLIVEIRA, M. C. de; HSU, L. Lmi characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and its Applications*, v. 285, n. 1, p. 69 – 80, 1998. ISSN 0024-3795. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379598101234>>. Citado na página 20.
- HESPANHA, J. P. *Linear systems theory*. [S.l.]: Princeton university press, 2009. Citado na página 1.
- HONG, S. K.; NAM, Y. Stable fuzzy control system design with pole-placement constraint: an lmi approach. *Computers in Industry*, Elsevier, v. 51, n. 1, p. 1–11, 2003. Citado na página 5.
- HYPIUSOVÁ, M.; ROSINOVÁ, D. Discrete-time robust lmi pole placement for magnetic levitation. p. 1–6, 2018. Citado na página 5.
- Kushel, O. Y. How to generalize **D**-stability. *arXiv e-prints*, p. arXiv:1805.05558, May 2018. Citado na página 4.

- Leite, V. J. S.; Peres, P. L. D. An improved lmi condition for robust d-stability of uncertain polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 48, n. 3, p. 500–504, March 2003. ISSN 0018-9286. Citado na página 21.
- LIU, H.; LI, C. Symmetry preserving partial eigenvalue assignment for undamped structural systems. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 38, n. 1, p. 369–373, 2014. Citado na página 4.
- LIU, K.; YAO, Y. *Robust Control: Theory and Applications*. Wiley, 2016. ISBN 9781118754429. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Ev2zDQAAQBAJ>>. Citado na página 20.
- MAO, X.; DAI, H. Minimum norm partial eigenvalue assignment of high order linear system with no spill-over. *Linear Algebra and its Applications*, Elsevier, v. 438, n. 5, p. 2136–2154, 2013. Citado na página 4.
- NEMIROVSKII, A.; GAHINET, P. The projective method for solving linear matrix inequalities. In: IEEE. *American Control Conference, 1994*. [S.l.], 1994. v. 1, p. 840–844. Citado na página 5.
- NTOGRAMATZIDIS, L. et al. A structural solution to the monotonic tracking control problem. *arXiv preprint arXiv:1412.1868*, 2014. Citado na página 2.
- OSTERTAG, E. *Mono-and multivariable control and estimation: linear, quadratic and LMI methods*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. Citado na página 4.
- OU, L. et al. Partial pole placement in lmi region. *Journal of Control Science and Engineering*, Hindawi Publishing Corp., v. 2014, p. 27, 2014. Citado na página 6.
- PEAUCELLE, D. et al. A new robust d-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems and Control Letters*, v. 40, n. 1, p. 21 – 30, 2000. ISSN 0167-6911. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016769119900119X>>. Citado na página 21.
- QIAN, J.; XU, S. Robust partial eigenvalue assignment problem for the second-order system. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 282, n. 3-5, p. 937–948, 2005. Citado na página 4.
- RAMADAN, M. A.; EL-SAYED, E. A. Partial eigenvalue assignment problem of high order control systems using orthogonality relations. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 59, n. 6, p. 1918–1928, 2010. Citado na página 4.
- Ramos, D. C. W.; Peres, P. L. D. An lmi condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, n. 4, p. 675–678, April 2002. ISSN 0018-9286. Citado na página 21.
- RUGH, W. J.; RUGH, W. J. *Linear system theory*. [S.l.]: prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1996. Citado na página 1.
- SAAD, Y. *A Projection Method for Partial Pole Assignment in Linear State Feedback*. [S.l.], 1986. Citado na página 3.

- SHAPIRO, A. Stability of second-order asymmetric linear mechanical systems with application to robot grasping. *Journal of applied mechanics*, American Society of Mechanical Engineers, v. 72, n. 6, p. 966–968, 2005. Citado na página 32.
- SINHA, A. *Linear systems: optimal and robust control*. [S.l.]: CRC press, 2007. Citado na página 1.
- TOULOTTE, P.-F. et al. Vehicle spacing control using robust fuzzy control with pole placement in lmi region. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Elsevier, v. 21, n. 5, p. 756–768, 2008. Citado na página 5.
- ZHANG, J.; OUYANG, H.; YANG, J. Partial eigenstructure assignment for undamped vibration systems using acceleration and displacement feedback. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 333, n. 1, p. 1–12, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 4 e 51.
- ZHANG, J. et al. Partial quadratic eigenvalue assignment in vibrating systems using acceleration and velocity feedback. *Inverse Problems in Science and Engineering*, Taylor & Francis, v. 23, n. 3, p. 479–497, 2015. Citado na página 25.
- ZHANG, J.; YE, J.; OUYANG, H. Static output feedback for partial eigenstructure assignment of undamped vibration systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 68, p. 555–561, 2016. Citado na página 4.
- ZHANG, L. Multi-input partial eigenvalue assignment for high order control systems with time delay. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Elsevier, v. 72, p. 376–382, 2016. Citado na página 4.

Apêndices

APÊNDICE A – vibration_sys.mdl

Para executar a comparação de métodos EVA e PEVA a perturbação da matriz $\mathbf{K}$ conforme descrito na seção 4.2.3, primeiramente deve executar o program **Modelo_III.m**, em seguida construir o arquivo no simulink conforme a figura 9:

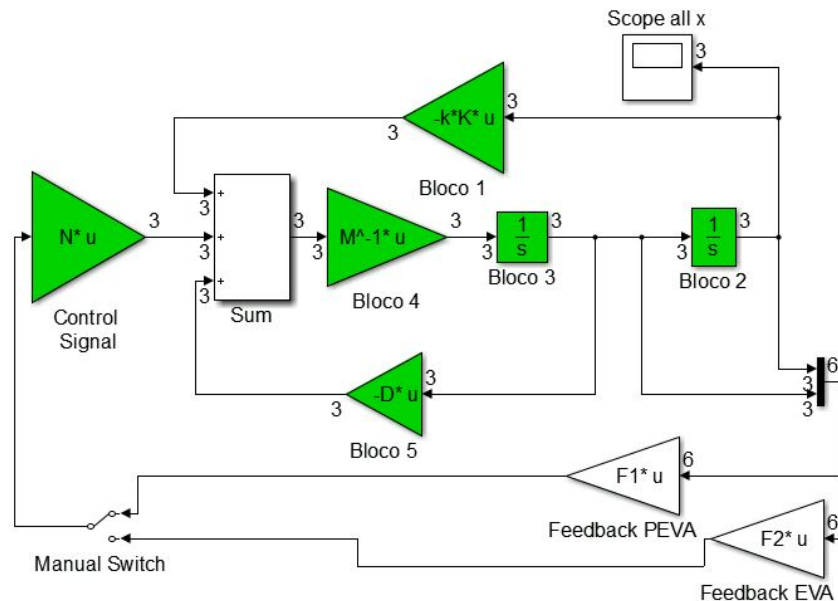


Figura 9 – Modelo Simulink Visão Geral

As Figuras 10 à 17 mostram as configurações desejadas para os blocos da Figura 9. Todos os blocos eles possuem a configuração padrão, entretanto as diferenças são evidenciadas nas regiões circunscritas em cada figura.

Para executar as simulações para o sistema controlado via EVA ou PEVA é necessário antes executar os comandos expressos na Figura 19 para inserir nas variáveis F1 e F2 os valores corretos da matriz de retroalimentação.

Para visualizar as simulações e salvar os dados no ambiente de trabalho do MATLAB é necessário ajustar o **Manual Switch** para configuração adequada realizando dois cliques sobre o bloco. A Figura 20 permite identificar as configurações desejada para simulação EVA e PEVA.

Depois de ajustado o bloco **Manual Switch** para configuração adequada para visualizar os elementos de $h(t)$ no simulink e exportar as informações para o ambiente de trabalho do MATLAB, deve-se configurar o bloco **Scope all x** conforme a Figura 21. Para que haja no ambiente de trabalho as respostas transitórias para os métodos EVA e PEVA, pede-se ao usuário especificar no campo de **Variable name**: ht_PEVA para simulação do projeto via PEVA, e ht_EVA para o caso EVA.

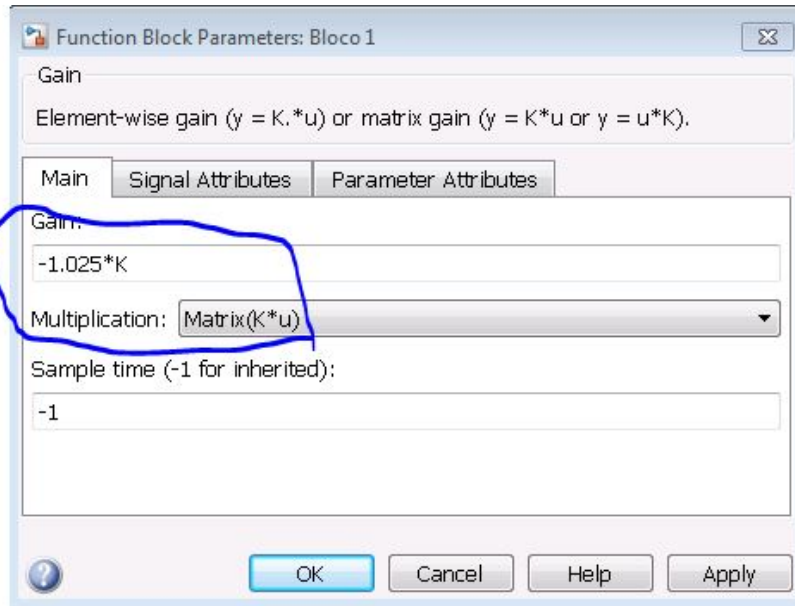


Figura 10 – Especificação dos parâmetros para bloco 1

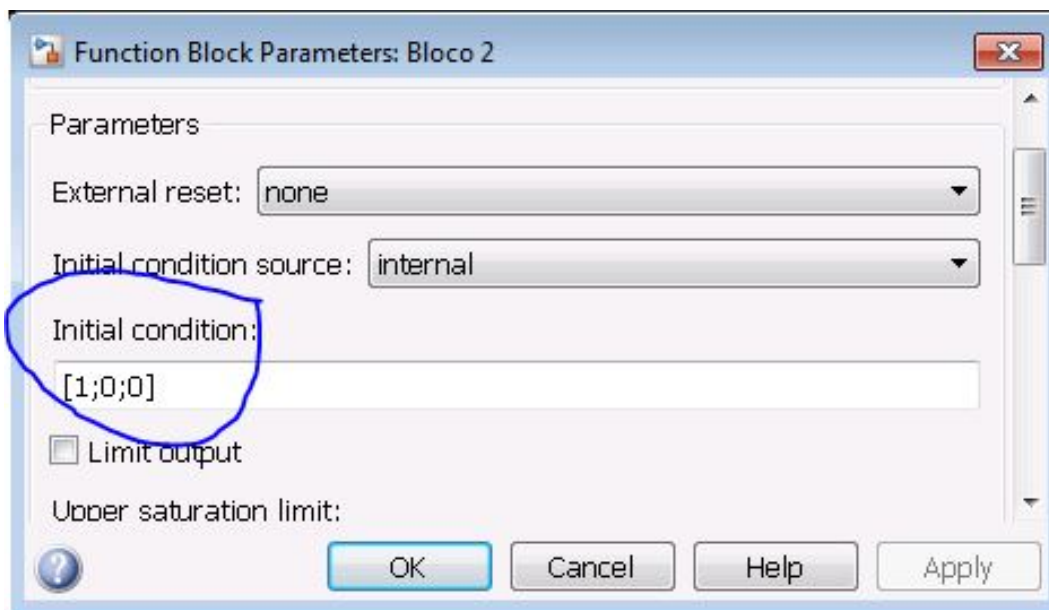


Figura 11 – Especificação dos parâmetros para bloco 2

Uma vez salvo os dados *ht_PEVA* e *ht_EVA*, utiliza-se o código do Apêndice ?? para obter os gráficos comparativos da resposta transitória.

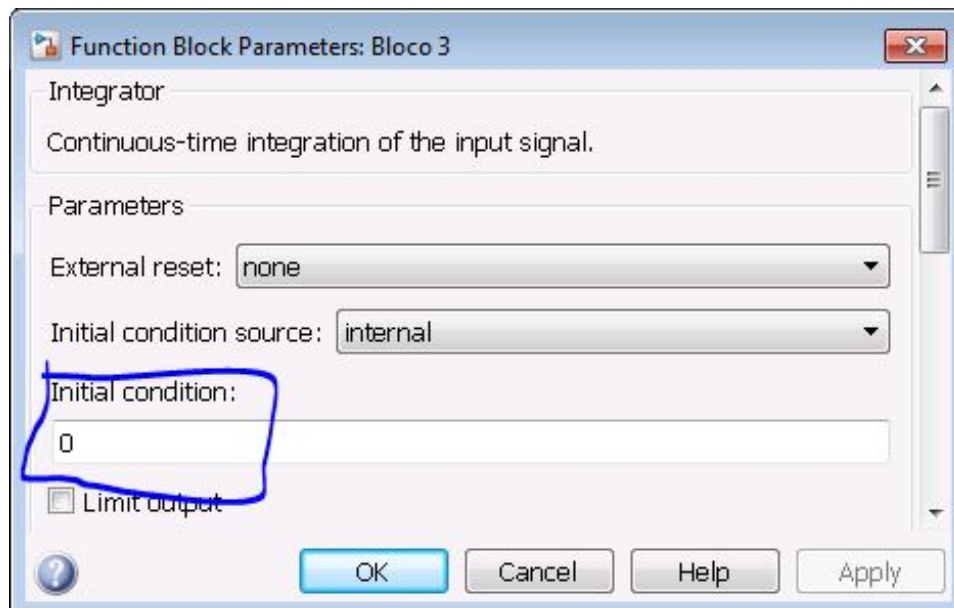


Figura 12 – Especificação dos parâmetros para bloco 3

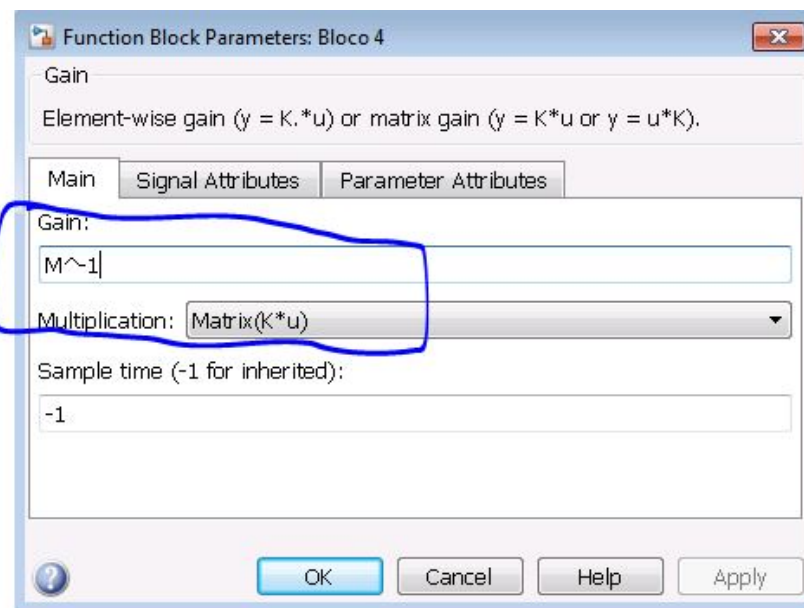


Figura 13 – Especificação dos parâmetros para bloco 4

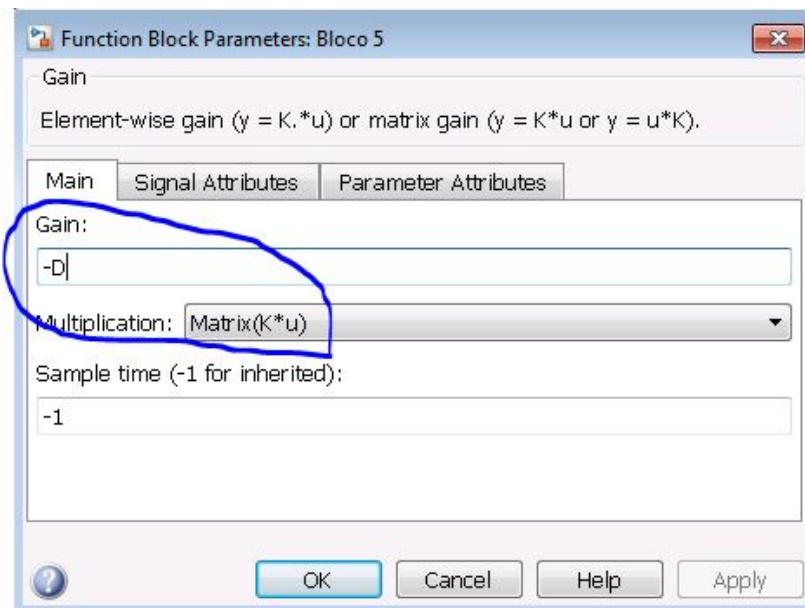


Figura 14 – Especificação dos parâmetros para bloco 5

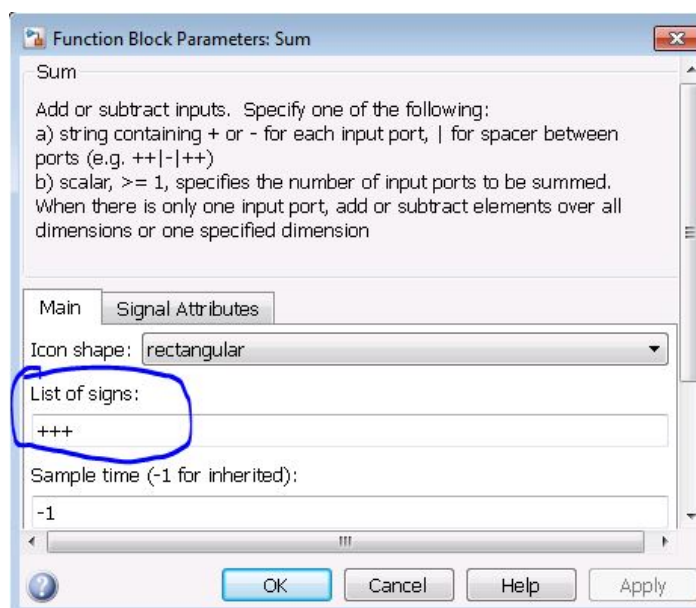


Figura 15 – Especificação dos parâmetros para bloco SUM

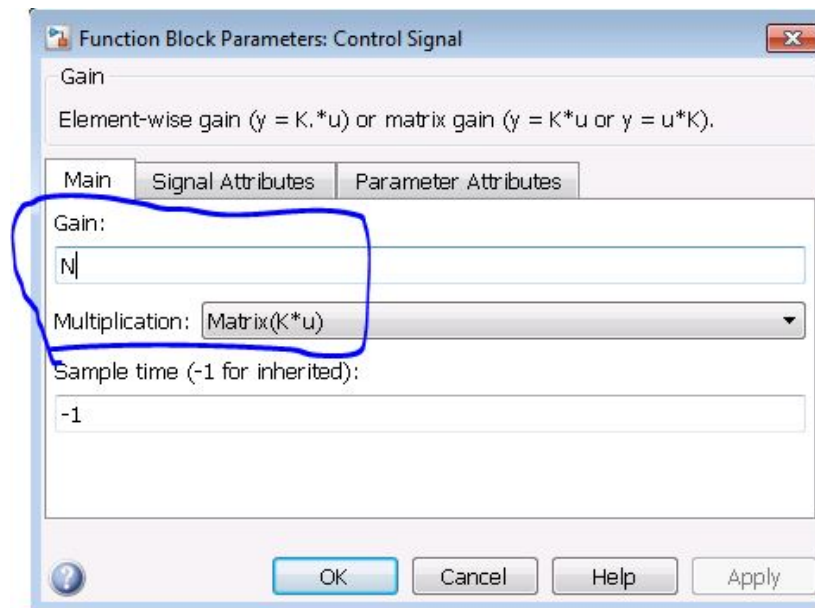


Figura 16 – Especificação dos parâmetros para bloco Control Signal

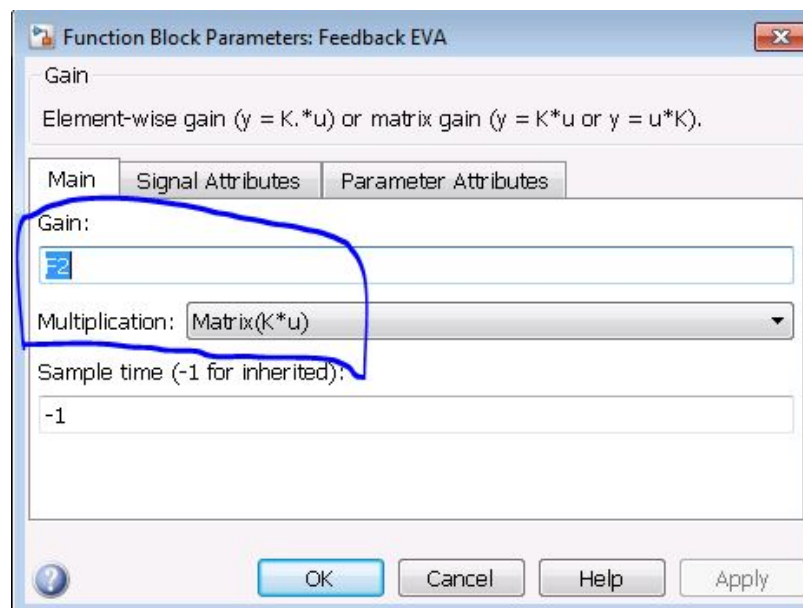


Figura 17 – Especificação dos parâmetros para bloco Feedback EVA

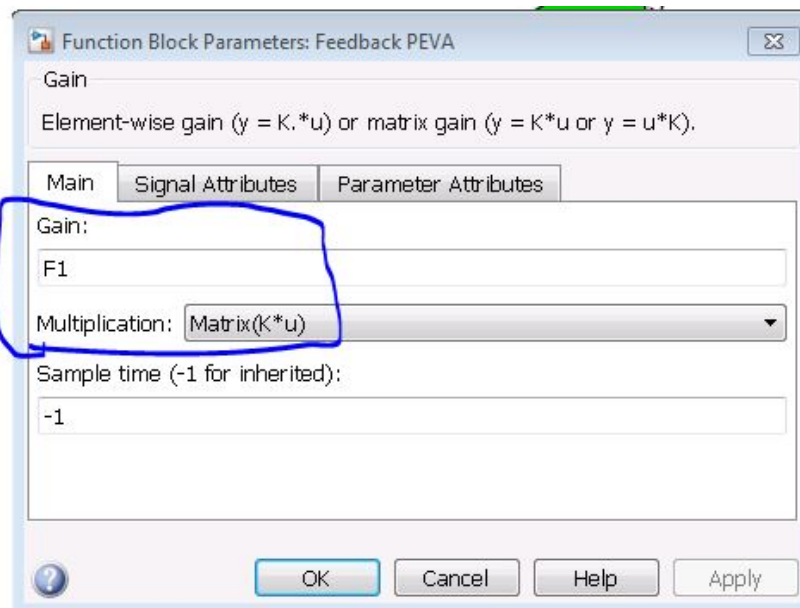


Figura 18 – Especificação dos parâmetros para bloco Feedback PEVA

```
>> F1=Ftild;
F2=D_EVA_disco(A,B,r,q);
```

Figura 19 – Comandos para especificação de variáveis F1 e F2 para uso no simulink

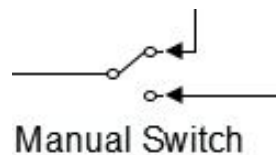


Figura 20 – Bloco seletor para resposta da simulação, chave conectada ao ramo de cima para método PEVA, em baixo para EVA

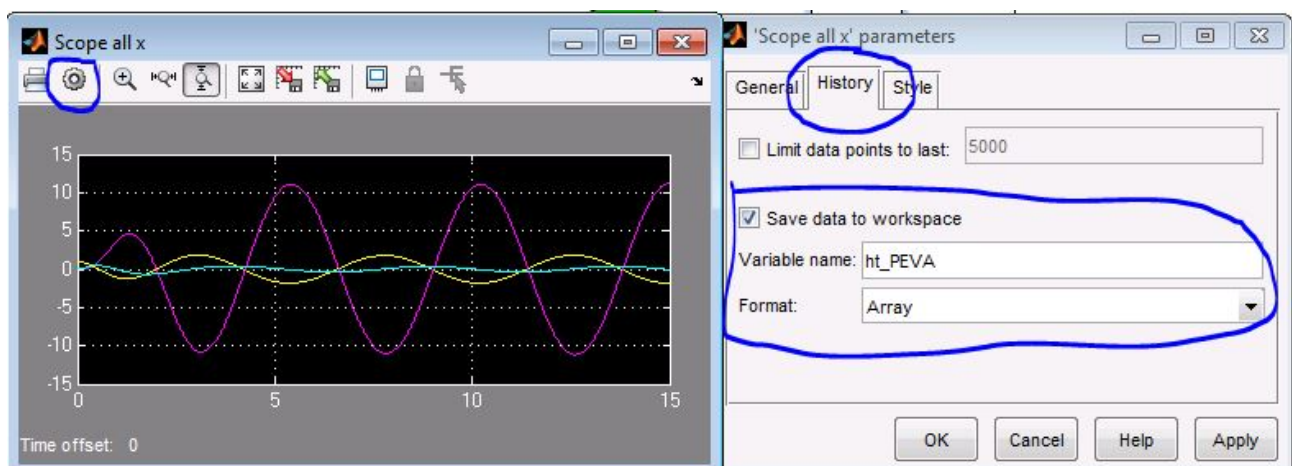


Figura 21 – Configuração, Observação e exportação de resultados no bloco Scope all x

ANEXO A – Artigo



Partial Eigenvalue Assignment for LTI Systems with $\mathbb{D}$ -Stability and LMI

Marconi Oliveira de Almeida¹ · José Mário Araújo²

Received: 6 November 2018 / Revised: 23 January 2019 / Accepted: 19 February 2019 / Published online: 4 March 2019
© Brazilian Society for Automatics–SBA 2019

Abstract

Partial eigenvalue assignment (PEVA) is a milestone in the field of structural dynamics control, for which the system models based on finite-element analysis have larger dimensions. The solution for PEVA has early seminal contributions, but today, other relevant advances have been offered by researchers in this interdisciplinary field. This work aims to demonstrate the construction of a new method to solve PEVA in linear time-invariant systems to guarantee the regional stability of the reassigned eigenvalues. The theoretical review of PEVA and $\mathbb{D}$ -stability are shown to support the development of an algorithm that involves linear matrix inequalities and left-eigenvectors parametrization. To verify the efficiency of the algorithm, tests were performed on numerical examples borrowed from the literature. Furthermore, the solution's quality is illustrated through location plots and eigenvalue comparison tables.

Keywords EVA · PEVA · LMI · LTI · Stability

1 Introduction

The eigenvalue assignment problem (EVA) in linear time-invariant system (LTI) is one of the primary issues for control design that requires both stability and meeting the transient response specifications. The state feedback control structure is the most popular control technique used to solve this problem (Krokavec et al. 2015). Several works show different theoretical and computational methods to compute feedback gain, and the Krokavec et al. (2015) show some of them using: (1) explicit parametric form, (2) Sylvester's equation, (3) singular matrix decomposition properties, (4) the minimal condition number of eigenvector matrix, (5) Moore's parametric form, and (6) linear matrix inequalities (LMIs).

The control design using partial eigenvalue assignment (PEVA) is very profitable for applications, e.g., in structural

dynamics control or largely distributed parameters electrical networks. In such models, the dimension can be of hundreds or thousands, due to the nature of finite-element modeling (FEM). The conventional eigenvalue assignment (EVA) methods (e.g., QR iterations and real Schur form) for many of these control designs whose systems are large or sparse (as in electrical networks, power systems, and computer networks) can fail due to the spillover phenomenon: small changes in the system parameters can lead to significant variations in the real eigenvalues' locations (Datta et al. 2002). The primary goal of the control design in such systems to assign only a small number of eigenvalues using state feedback, which is generally responsible for instability or undesirable phenomena, as resonance or flutter, kept the remaining of the spectrum unchanged. The PEVA problem was revisited in recent work by Araújo (2018) by applying state-derivative feedback.

In light of these facts, the issue of PEVA has gained greater relevance in the engineering and scientific fields. Recent studies are being carried out to solve the PEVA for second-order and high-order systems with or without delay control; thus, some articles recommended for reading that briefly are the developed works by Belotti et al. (2018); Wang and Zhang (2017). Meanwhile, works focused on methods for PEVA with the objective of spectrum assignment (eigenvalues) to predefined regions in the complex plane are less frequent. The article written by Ou et al. (2014) creates an optimization

Marconi Oliveira de Almeida
moliveiraalmeida1986@gmail.com

José Mário Araújo
araujo@ieee.org

¹ Departamento de Engenharia Elétrica, Escola Politécnica, Universidade Federal da Bahia, R. Aristides Novis, n.02, 4º andar, s/n-Federação, Salvador, Bahia CEP: 40210-630, Brazil

² Grupo de Pesquisas em Sinais e Sistemas, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, R. Emídio dos Santos, s/n - Barbalho, Salvador, Bahia CEP: 40301-015, Brazil

algorithm to solve a particular PEVA: make a strict partial assignment for $n - m$ poles and a non-strict assignment for m poles. Unfortunately, the application of an algorithm written by Ou et al. (2014) is restricted to a single-input and single-output (SISO) system.

It is known from the theory of linear systems that the position of eigenvalues influences the transient response behavior, for instance, if its a SISO system: rise time, settling time, and maximum overshoot can be predicted by knowing the real and imaginary part of the poles while using specific formulations. In the multivariable context, thanks to the linear properties, the transfer function can be analyzed as a superposition of several first and second-order functions, each of them with its respective transient response characteristics. An interesting application of the EVA methods is in the monotonic tracking control problem, where it is necessary to adjust the controller to ensure rapid transient stabilization avoiding overshoot and undershoot phenomena. Relevant applications for this problem are in heating/cooling systems, satellite and elevator positioning, and automobile cruise control (Ntogramatzidis et al. 2014, 2016). Nevertheless, these works approach only strict EVA, and the all eigenvalues that are not invariant must be reassigned, in contrast with PEVA methodologies.

The ability to stabilize LTI systems to let the eigenvalues in specified regions is supplied by the theorem of $\mathbb{D}$ -stability and uses LMI that can be solved by interior point optimization algorithms (Ostertag 2011). Some approaches to solving EVA with LMI for continuous and discrete system with $\mathbb{D}$ -stability can be read in Duan and Yu (2013).

Thus, when specifying a $\mathbb{D}$ -region in PEVA to a controllable system, it is desirable to establish limits and ranges for transient response measures, consequently this flexibility will allow PEVA methods to be applied in multiobjective control design, and furtherly it uses fewer equation and variables than regional EVA methods. This approach is relevant for design specifications in sparse and large-scale systems, especially in cases where it is desired to allocate fewer eigenvalues, but techniques capable of solving this type of problem are not reported in the literature to the best of the knowledge of the authors. To provide a method to solve PEVA for regional assignment, equations from PEVA solutions with strict assignment and regional EVA with LMI are intuitively merged to obtain the algorithm proposed in this work. The rest of the paper is organized as follows: in Sect. 2, a classical parametric solution for the PEVA is presented, as well as the statement of the problems involving EVA and PEVA. In Sect. 3, a summary of $\mathbb{D}$ -stability for LTI systems is lined, the proposed approach is described in Sects. 4 and 5, and some examples based on real-world data are offered to show the effectiveness of the proposed approach.

2 Review of Datta's Parametric Solution to PEVA for LTI System

Some useful definitions for formulating the PEVA problem are given:

Definition 1 The equations to define a control system LTI MIMO with state feedback are:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (1)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (2)$$

where $\mathbf{x}(t)$ and $\dot{\mathbf{x}}(t)$ are, respectively, the state vector and its time derivative; $\mathbf{u}(t)$ is input vector; $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, and $\mathbf{F}$ are, respectively, state matrix, control or influence matrix, and state feedback gain. $\square$

The spectrum of a matrix and the open- and closed-loop system modes are useful for describing the problems involving EVA and PEVA methods:

Definition 2 The spectrum of matrix $\mathbf{A}$ symbolized by function $\sigma(\mathbf{A})$ is the set of its eigenvalues. $\square$

Definition 3 $\lambda_i \in \mathbb{C}$ will be defined as an open-loop LTI system mode if $\lambda_i \in \sigma(\mathbf{A})$. $\mu_i \in \mathbb{C}$ will be defined as a closed-loop LTI system mode if $\mu_i \in \sigma(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F})$. $\square$

The control problems involving the EVA and PEVA methods are described below:

Problem 1 The EVA problem consists in determining the matrix $\mathbf{F}$ of the control system such that sets $\mathbb{S}_{OL}$ and $\mathbb{S}_{CL}$:

$$\mathbb{S}_{OL} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C} \quad (3)$$

$$\mathbb{S}_{CL} = \{\mu_1, \dots, \mu_n\} \subset \mathbb{C} \quad (4)$$

as the set of open- and closed-loop system modes, respectively. $\square$

Problem 2 The PEVA problem consists in determining the matrix $\mathbf{F}$ of the control system such that sets $\mathbb{S}_{OL}$ and $\mathbb{S}_{CL}$:

$$\mathbb{S}_{OL} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \quad (5)$$

$$\mathbb{S}_{CL} = \{\mu_1, \dots, \mu_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n\}, \quad p < n \quad (6)$$

as the set of open- and closed-loop system modes, respectively. $\square$

The fundamental difference between Problems 2 and 3 is the amount of system modes closed-loop specified: in the PEVA only p desired modes are needed while in the EVA all modes. The theorem of parametric solution for PEVA developed by Datta et al. (2002) is built based on a set of theorems, definitions and assumptions:

Theorem 1 (Datta et al. (2002)) *LTI system is defined by Eq. (1), and the LTI system in open-loop mode λ_i is controllable if the left eigenvector associated $\mathbf{y}$ satisfies the equation:*

$$\mathbf{y}^H \mathbf{B} \neq \mathbf{0}_{1 \times m} \quad (7)$$

where $\mathbf{y}^H$ is the Hermitian transpose of $\mathbf{y}$ and $\mathbf{0}_{1 \times m}$ is null matrix with m -columns. $\square$

Definition 4 For a LTI system defined by equation (1), set of p open-loop system modes defined by:

$$\mathbb{S}_{pOL} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\} \subset \mathbb{S}_{OL}, \quad n < p, \quad (8)$$

the system will be partially controllable through the modes of set $\mathbb{S}_{pOL}$ if all modes of $\mathbb{S}_{pOL}$ are controllable. $\square$

Theorem 2 (Datta et al. (2002)) *Problem 2 is solvable for any choice of $\mathbb{S}_{CL}$, Eq. (6), if the system is partially controllable with respect to the set $\mathbb{S}_{pOL}$, Eq. (8). That is, whenever a solution exists, there will be endless many others.* $\square$

Assumption 1 The system in problem (2) is partially controllable with respect to the $\mathbb{S}_{pOL}$ describe in Eq. (8). $\square$

Assumption 2 The sets $\mathbb{S}_{OL}$ described by Problem 2 and:

$$\mathbb{S}_{pCL} = \{\mu_1, \dots, \mu_p\} \subset \mathbb{S}_{CL}, \quad p < n \quad (9)$$

should be closed under complex conjugation and also disjoint. $\square$

Assumption 3 The control matrix $\mathbf{B}$ has full column rank. $\square$

Based on these assumptions, theorems and definition obtain a parametric solution theorem for the PEVA:

Theorem 3 (Datta et al. (2002)) *Let $\mathbf{y}_i$ be the left eigenvector associated with the eigenvalue λ_i , and let $\mathbf{Y}_1$ be the matrix of linearly independent eigenvectors of the spectrum to be assigned:*

$$\mathbf{Y}_1 = [\mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_p] \quad (10)$$

Let γ_i be an arbitrary m -row vector having the constraints:

$$\gamma_i = \bar{\gamma}_k \Leftrightarrow \mu_i = \bar{\mu}_k \quad (11)$$

Let the matrices be:

$$\mathbf{\Gamma} = [\gamma_1 \cdots \gamma_p] \quad (12)$$

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \text{blkdiag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_p \} \quad (13)$$

$$\mathbf{\Lambda}_{c1} = \text{blkdiag} \{ \mu_1, \dots, \mu_p \} \quad (14)$$

that is, $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ is an arbitrary, column self-conjugated matrix as defined by (11); and $\text{blkdiag} \{ \}$ is an operator

that builds up a block diagonal matrix with the elements in it argument. The parametric solution for PEVA is the solution for the equations:

$$\mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_1 \mathbf{\Lambda}_{c1} = \mathbf{Y}_1^H \mathbf{B} \mathbf{\Gamma} \quad (15)$$

$$\mathbf{\Phi} \mathbf{Z}_1 = \mathbf{\Gamma} \quad (16)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Phi} \mathbf{Y}_1^H \quad (17)$$

the matrix $\mathbf{Z}_1$ is a non-singular matrix, solution of the Sylvester's equation described by (15), and $\mathbf{Y}_1^H$ is the conjugated transpose of $\mathbf{Y}_1$

Proof See in Theorem 4.1 of Datta et al. (2002). $\square$

Remark 1 The choice of the matrix $\mathbf{\Gamma}$ has been extensively discussed in several works to design of the feedback matrix using Sylvester type equations - see, e.g., Araújo et al. (2009), Chen (2013). All these works show that for the single-input case, the (arbitrary) choice of $\mathbf{\Gamma}$ has no relevance for the solution, since it is unique and invariant with respect to $\mathbf{\Gamma}$. However, for the multi-input case, for each choice of $\mathbf{\Gamma}$, a different solution is obtained, and it gives the designer the possibility of to explore EVA or PEVA design with additional control requisites, e.g., the minimum norm of the feedback matrix $\mathbf{F}$ (Brahma and Datta 2009).

Remark 2 In numerical methods to solve EVA problems, it is estimated that a quantity of FLOPS (floating point operations) in function to n^3 is required, since Theorem 3, depending on the numerical method used, requires only an amount in function to p^3 . In the case of control designs that need to allocate a number of poles $p \ll n$, the preference for numerical methods applied to Theorem 3 is a wise decision. Some mitigable disadvantage of applying Theorem 3 are (1) search for the appropriate choice of the numerical method to solve Sylvester's equation; (2) and the requirement that $\mathbb{S}_{pCL} \cap \mathbb{S}_{OL} = \emptyset$.

Remark 3 Substituting the Gamma expression of (16) into (15) has the following equation:

$$(\mathbf{\Lambda}_1 - \mathbf{Y}_1^H \mathbf{B} \mathbf{\Phi}) \mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_1 \mathbf{\Lambda}_{c1} \quad (18)$$

which shows that $\mathbf{Z}_1$ act as a matrix of eigenvectors and $\mathbf{\Lambda}_{c1}$ is the spectrum matrix of $\mathbf{\Lambda}_1 - \mathbf{Y}_1^H \mathbf{B} \mathbf{\Phi}$. $\square$

Remark 3 shows that the matrix $\mathbf{Z}_1$ is important in the sensitivity of the $\mathbf{\Lambda} - \mathbf{B} \mathbf{F}$ spectrum, so the numerical method to solve the Sylvester's equation directly influences quality of allocation.

According to the author, the parametric algorithm is numerically viable and computationally feasible for large and sparse systems; for some other issues, see Datta et al. (2002).

3 Review of $\mathbb{D}$ -Stability for LTI System

An important concept for $\mathbb{D}$ -stability is the definition of $\mathbb{D}$ -region, according to Duan and Yu (2013):

Definition 5 Consider the complex plane whose coordinates are governed by the variable $s \in \mathbb{C}$, a region of spectrum $\mathbb{D}$ will be described by LMI if there is a characteristic function $\mathbf{G}(s)$ describing:

$$\mathbb{D} = \{s \in \mathbb{C} | \mathbf{G}(s) < 0\} \quad (19)$$

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{L} + s\mathbf{V} + \bar{s}\mathbf{V}^H \quad (20)$$

$$\mathbf{L} \in \mathbb{R}_S^r \quad (21)$$

$$\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{r \times r} \quad (22)$$

$\mathbb{R}_S^r$ is the set of symmetric matrices of order r and $\mathbf{X} < 0$ says that matrix $\mathbf{X}$ is definite-negative. $\square$

In the literature, there are some types of regions already defined, among them some are described in the book written by Duan and Yu (2013):

- Strip whose eigenvalues have a real part limited by $-\beta < \text{Re}\{s\} < -\alpha < 0$;
- Disk of radius r and center by $s = -q \in \mathbb{R}$.
- Sector that is an isosceles triangle of vertex in the origin and bisector coincident with real axis of negative values with the base angle base θ .

Remark 4 If the designer wants to define a region that reflects the non-empty intersection of several regions as (19) through (22), that is, $\mathbb{D} = \bigcap_1^k \mathbb{D}_k \neq \emptyset$, the characteristic matrices (23) and (24) are given as Duan and Yu (2013):

$$\mathbf{L} = \text{blkdiag}\{\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_k\} \quad (23)$$

$$\mathbf{V} = \text{blkdiag}\{\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_k\} \quad (24)$$

Table 1 shows some typical characteristic functions and the related matrices. An important definition is the Kronecker product that helps to formulate the Problem of $\mathbb{D}$ -stability by LMI, see Duan and Yu (2013):

Table 1 Characteristic functions and related matrices

Type	Identification	$\mathbf{L}$	$\mathbf{V}$
Strip	$\mathbb{H}_\beta^\alpha$	$2 \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
Disc	$\mathbb{D}_q^r$	$\begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Sector	$\mathbb{H}_\theta$	$\mathbf{0}_{2 \times 2}$	$\begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$

Definition 6 Consider the matrices $\tilde{\mathbf{A}} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times m}$ and $\tilde{\mathbf{B}} \in \mathbb{C}^{l \times q}$, be $\tilde{\mathbf{a}}_{ik}$, the Kronecker product between the matrix $\tilde{\mathbf{A}}$, and $\tilde{\mathbf{B}}$ will be:

$$\tilde{\mathbf{A}} \otimes \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} a_{11}\tilde{\mathbf{B}} & a_{12}\tilde{\mathbf{B}} & \cdots & a_{1m}\tilde{\mathbf{B}} \\ a_{21}\tilde{\mathbf{B}} & a_{22}\tilde{\mathbf{B}} & \cdots & a_{2m}\tilde{\mathbf{B}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\tilde{\mathbf{B}} & a_{n2}\tilde{\mathbf{B}} & \cdots & a_{nm}\tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \quad (25)$$

$\square$

To determine if the eigenvalues of an LTI system are contained in a stable region specified by the set $\mathbb{D}$, it is useful to define $\mathbb{D}$ -stability:

Theorem 4 Be an LTI system in state space governed by:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \tilde{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (26)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\tilde{\mathbf{F}}\mathbf{x}(t) \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (27)$$

the matrix $\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{F}}$ will be $\mathbb{D}$ -stable, having eigenvalues in set $\mathbb{D}$, if there is a positive definite symmetric matrix $\mathbf{P}$ and a real $\mathbf{W}$ satisfying the LMI:

$$\mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \text{He}\{\mathbf{V}, \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P}\} + \text{He}\{\mathbf{V}, \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{W}\} < 0 \quad (28)$$

$$\text{He}\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\} = \mathbf{X} \otimes \mathbf{Y} + \mathbf{X}^H \otimes \mathbf{Y}^H \quad (29)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{W}\mathbf{P}^{-1} \quad (30)$$

$\square$

4 PEVA with $\mathbb{D}$ -Stability for LTI System

In order for $\mathbf{F}$ to be a solution for PEVA with $\mathbb{S}_{\text{pCL}} \subset \mathbb{D}$, a new method based on Eqs. (17), (18), (28) and (30) is sought to endeavor, thus resulting in the following problem:

Problem 3 Consider the LTI system:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{\Lambda}_1\mathbf{z}(t) + \mathbf{Y}_1^H\mathbf{B}(t) \quad (31)$$

$$\psi(t) = -\Phi\mathbf{z}(t) \quad (32)$$

The matrices $\mathbf{\Lambda}_1$, $\mathbf{Y}_1^H$, Φ , and $\mathbf{B}$ are the same as those in Eq. (15). The objective is to solve the PEVA for this system in order to ensure that the spectrum $\mathbb{S}_{\text{pCL}}$ belongs to the set $\mathbb{D}$. $\square$

Problem 3 is based on Remark (1), since Eq. (18) explicitly describes the fundamental relation between matrix of eigenvalues $\mathbf{\Lambda}_{c1}$ and eigenvectors $\mathbf{Z}_1$ of the system written by (31) and (32).

Hypothesis 1 The matrix Φ of Problem 3 is obtained by solving Theorem 4, while replacing matrices $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ and $\tilde{\mathbf{F}}$ by:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_1, \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{Y}_1^H \mathbf{B}, \tilde{\mathbf{F}} = \Phi \quad (33)$$

□

The rationale for the formulation of Hypothesis 1 is that the $\mathbb{D}$ -stability exposed in Definition 2 is applicable to the LTI system of Problem 3; consequently, there are results depending on the system structure and the quality of the algorithm used.

Hypothesis 2 If Hypothesis 1 is true, then the matrix that guarantees PEVA with $\mathbb{D}$ -stability can be determined by Eq. (17).

To avoid working with complex matrices $\mathbf{A}_1$ and $\mathbf{Y}_1^H$, it is decided to use similar matrices with real representation. The ones that will be used are based on Zhang et al. (2015). First, rewrite the eigenvalue and eigenvector to separate the real and imaginary parts:

$$\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i \quad (34)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_{iR} + j\mathbf{y}_{iI} \quad (35)$$

Suppose there are l -conjugate pairs complex in $\mathbb{S}_{OL}$, so the $\mathbf{A}_1$ matrix can be written in the real similar Jordan's form:

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \text{blkdiag} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \alpha_l & \beta_l \\ -\beta_l & \alpha_l \end{bmatrix}, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_p \right\} \quad (36)$$

A possible similar representation for the matrix $\mathbf{Y}_1$ is given by:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_1 = [\mathbf{y}_{1R} \ \mathbf{y}_{1I} \ \dots \ \mathbf{y}_{pR} \ \mathbf{y}_{pI}] \quad (37)$$

Let the matrices be:

$$\mathbf{T}_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ j & -j \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\mathbf{T} = \text{blkdiag} \{ \mathbf{T}_j, \dots, \mathbf{T}_j, 1, \dots, 1 \} \quad (39)$$

being $\mathbf{T}_j$ repeated l times and number 1 $p - 2l$ times. Therefore, the relation between $\mathbf{Y}_1$ and $\tilde{\mathbf{Y}}_1$ by

$$\tilde{\mathbf{Y}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{Y}_1 \mathbf{T} \quad (40)$$

Through all the hypotheses and equations obtained in this section, a desired algorithm is created by the following procedure:

Procedure 1 Consider a classical PEVA as specified by Definition 1 and a $\mathbb{D}$ -stable target region for spectrum assignment $\mathbb{S}_c$. To determine the matrix $\mathbf{F}$, the steps are followed:

1. Obtain the expression Eq. (1);
2. Determine $\mathbb{S}_{POL}$;
3. Specify $\mathbf{L}$ and $\mathbf{V}$ of the characteristic function;
4. Get the matrices $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{Y}_1$, and $\mathbf{T}$;
5. Compute $\tilde{\mathbf{A}}_1$, and $\tilde{\mathbf{Y}}_1$;
6. Solve the LMI:

$$\mathbf{L} \otimes \mathbf{P} + \text{He} \left\{ \mathbf{V}, \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{P} \right\} + \text{He} \left\{ \mathbf{V}, \tilde{\mathbf{Y}}_1^H \mathbf{B} \mathbf{W} \right\} \prec 0$$

7. Compute $\Phi = \mathbf{W} \mathbf{P}^{-1}$;
8. Compute $\mathbf{F} = \Phi \tilde{\mathbf{Y}}_1^H$.

□

The applying of Procedure 1 consists of transforming the PEVA problem to an LMI. In practice, problems formulated by this mathematical structure have potential applications in multiobjective control design, which can be solved through convex or quasi-convex optimization algorithms (Boyd et al. 1994; Boyd and Vandenberghe 2004).

5 Numerical Examples

The methodology focuses on numerical software simulations for testing the proposed algorithm; these tests are summarily into seven steps:

1. Three models borrowed from the literature were selected to show the effectiveness of the proposal;
2. Rewrite second-order system to an LTI system as (38);
3. Specify three $\mathbb{D}$ -regions for each model: a strip, a sector, or a disk;
4. Execute Procedure 1 for each model with the respective $\mathbb{D}$ -region;
5. Check the location of eigenvalues in open and closed loop.
6. Compare the system spectrum in open and closed loop through tables.
7. Analyze whether partial assignment exists and if it meets the specifications of each problem using the tables and graphs.

In the two last examples, a comparison with the EVA is presented, in order to confront advantages or drawbacks. The software used for simulations is MATLAB 2014a, which was executed on a Windows 7 Ultimate 64-bit operating system on a 2.5-GHz Intel (R) Core (TM) i5-3210M processor. This MATLAB has a package called Control System Toolbox that provides algorithms and applications for analyzing, design-

ing, and adjusting linear control systems. Also, it has the Robust Control Toolbox, which is a package that offers commands to solve LMI elaborated in theoretical discussion.

Although the proposed methodology can be applied in state-space models in general, the focused case studies are of a second-order dynamic type, which is very common for modeling structural and flexible vibrating systems. The number of degrees of freedom of the specific second-order model can be arbitrarily large, as in the case of finite-element models derived from the discretization of distributed parameter models. The time-invariant multivariable second-order model with a control input class can be written according to the differential equation in the matrix form:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{h}(t) = \mathbf{N}\mathbf{u}(t) \quad (41)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_d\dot{\mathbf{h}}(t) + \mathbf{F}_p\mathbf{h}(t) \quad (42)$$

$$\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times m}; \quad \mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}; \quad \mathbf{F}_p, \mathbf{F}_d \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

where $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$ and $\mathbf{K}$ are, respectively, the mass, damping, and stiffness matrices of the system; $\mathbf{N}$ is the influence matrix (actuators); and the vector $\mathbf{u}(t)$ is the control signal. $\mathbf{F}_d$ and $\mathbf{F}_p$ are, respectively, the derivative and proportional feedback matrices; and $\mathbf{h}(t)$, $\dot{\mathbf{h}}(t)$, and $\ddot{\mathbf{h}}(t)$ are, respectively, the vectors of displacement, velocity, and acceleration variables of the system.

The representation of the second-order system for the first order in the controllable canonical form is written according to the equations:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (43)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{F}\mathbf{x}(t) \quad (44)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{I}_{n \times n} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times m} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F}_p \quad \mathbf{F}_d] \quad (47)$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(t) \\ \dot{\mathbf{h}}(t) \end{bmatrix} \quad (48)$$

where the matrix $\mathbf{I}_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is an identity matrix.

5.1 Model I

The work of Shapiro (2005) presents a dynamic linearized model of a grasping robot. Its matrices are described by:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 8 & \eta \\ -\eta & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

In this model, it is considered $\eta = 4$ to obtain the instability condition. $\mathbb{D}$ -stable regions used for assignment are

Table 2 $\mathbb{D}$ -stable regions for the assignment of the system described by Model I

$\mathbb{D}$ -region	Values
Disc	$r = 2 \text{ e } q = 1$
Strip	$\alpha = 0.1 \text{ e } \beta = 0.3$
Sector	$\theta = 100^\circ$

Table 3 Model I eigenvalues to be assigned by the specified D-region.

Strip	Sector	Disc
$0.0039 \pm 0.9001j$	$0.0039 \pm 0.9001j$	$0.0039 \pm 0.9001j$

described in Table 2, and whether these specifications should allocate the eigenvalue is presented in Table 3.

The feedback matrices calculated by the algorithm are

$$\mathbf{F}_p^{\mathbb{H}\alpha} = [0.2104 \quad 2.1223 \quad -2.1679 \quad 1.5249]$$

$$\mathbf{F}_d^{\mathbb{H}\theta} = [0.2281 \quad 8.7828 \quad -9.1237 \quad 5.7802]$$

$$\mathbf{F}_q^{\mathbb{D}'} = [-10.6054 \quad 24.7646 \quad -28.3866 \quad 7.0186]$$

In Fig. 1, spectrum's migration to the desired region occurs to the targeted unwanted eigenvalues that must to be reassigned. Table 4 confirms that the others eigenvalues remain unchanged with a precision of four digits.

5.2 Model II

A model of the aircraft wing under an air stream is explored by works as Henrion et al. (2005), Abdelaziz (2015), and Araújo et al. (2016):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 17.6 & 1.28 & 2.89 \\ 1.28 & 0.824 & 0.413 \\ 2.89 & 0.413 & 0.725 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 7.66 & 2.45 & 2.1 \\ 0.23 & 1.04 & 0.223 \\ 0.60 & 0.756 & 0.658 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 121 & 18.9 & 15.9 \\ 0 & 2.7 & 0.145 \\ 11.9 & 3.64 & 15.5 \end{bmatrix}, \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

The $\mathbb{D}$ -stable regions used for assignment are described in Table 5, and the location of eigenvalues in the complex plane is described in Fig. 2. With the specified eigenvalues presented in Table 6, they should be then assigned.

The feedback matrices calculated by the algorithm are:

$$\mathbf{F}_p^{\mathbb{H}\alpha} = [-14.2486 \quad -2.1054 \quad -2.6478]$$

$$\mathbf{F}_d^{\mathbb{H}\beta} = [-2.6682 \quad -0.9657 \quad -0.6635]$$

$$\mathbf{F}_p^{\mathbb{H}\theta} = [-6.3282 \quad 1.2251 \quad -1.4776]$$

$$\mathbf{F}_d^{\mathbb{H}\theta} = [-9.7790 \quad -1.3312 \quad -5.7153]$$

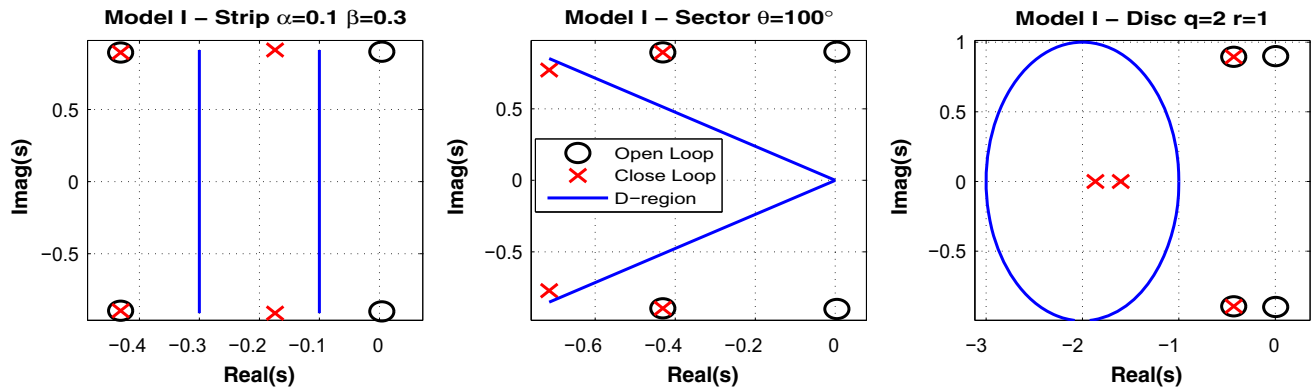


Fig. 1 Location of eigenvalues before and after control by feedback of states for Model I

Table 4 Eigenvalues before and after feedback state control Model I

	Open Loop	Closed-loop		
		Strip	Sector	Disc
1	$-0.4312 \pm 0.8953j$	$-0.4312 \pm 0.8953j$	$-0.4312 \pm 0.8953j$	$-0.4312 \pm 0.8953j$
2	$0.0039 \pm 0.9001j$	$-0.1738 \pm 0.9126j$	$-0.7150 \pm 0.7714j$	-1.8651
3				-1.6038

Table 5 $\mathbb{D}$ -stable regions for the assignment of the system described by Model III

$\mathbb{D}$ -region	Values
Disc	$r = 3$ e $q = 1$
Strip	$\alpha = 0.4$ e $\beta = 0.6$
Sector	$\theta = 110^\circ$

Table 6 Model II eigenvalues to be assigned by specified $\mathbb{D}$ -region

Strip	$0.0947 \pm 2.5229j$
Sector and Disc	$0.0947 \pm 2.5229j$
	$-0.8848 \pm 8.4415j$

$$\mathbf{F}_p^{\mathbb{D}_q} = [-2.9185 \quad 1.5559 \quad 7.0511]$$

$$\mathbf{F}_d^{\mathbb{D}_q} = [-5.4921 \quad -0.4791 \quad -4.1253]$$

Rows 2–4 of Table 7 show the open-loop modes to be allocated; the final positions of closed-loop modes belonging to $\mathbb{S}_{pCL}$ in the specified $\mathbb{D}$ -regions can be confirmed in Fig. 2.

Another numerical experiment was performed to compare the proposed approach with the full-spectrum assignment EVA in a given $\mathbb{D}$ -region. For this experiment, we adopted a disk $\mathbb{D}$ -region with $r = 0.5$, $q = 1.5$. The unstable eigenpair $0.0947 \pm 2.5229j$ was reassigned to the desired region in the PEVA case. Then, the stiffness matrix $\mathbf{K}$ was perturbed by 2% of its nominal value. The performance of the EVA and PEVA

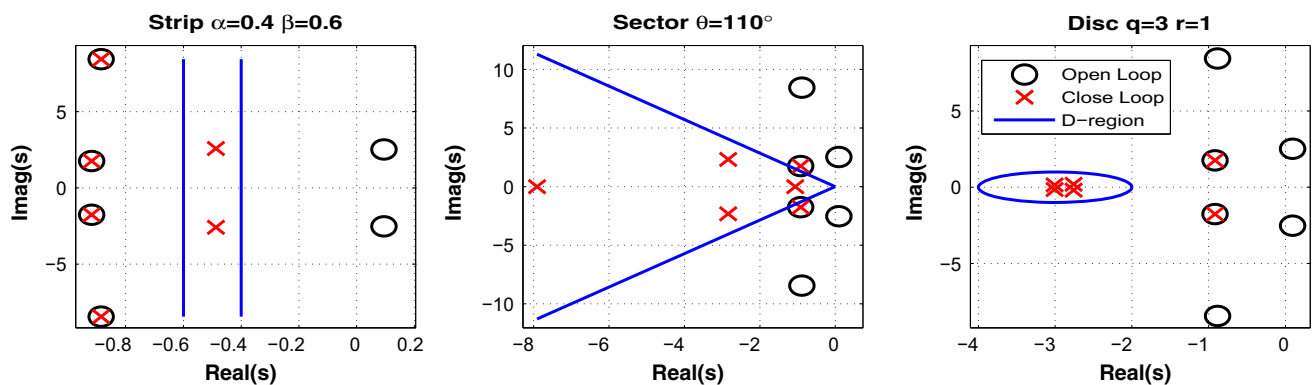
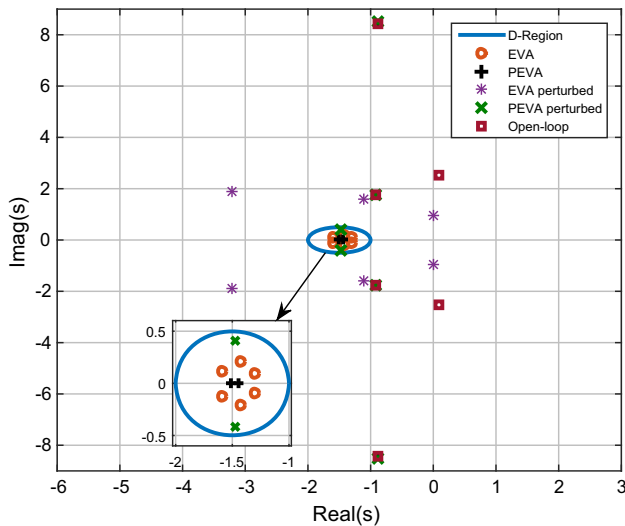


Fig. 2 Location of eigenvalues before and after the control by feedback of states for Model II

Table 7 Eigenvalues before and after feedback state control Model II

	Open Loop	Closed-loop		
		Strip	Sector	Disc
1	$-0.9180 \pm 1.7606j$	$-0.9180 \pm 1.7606j$	$-0.9180 \pm 1.7606j$	$-0.9180 \pm 1.7606i$
2	$-0.8848 \pm 8.4415j$	$-0.8848 \pm 8.4415j$	$-2.8410 \pm 2.3202j$	$-2.8410 \pm 2.3202j$
3	$0.0947 \pm 2.5229j$	$-0.4873 \pm 2.5866j$	-7.9106	$-3.0071 \pm 0.1502i$
4			-1.0607	

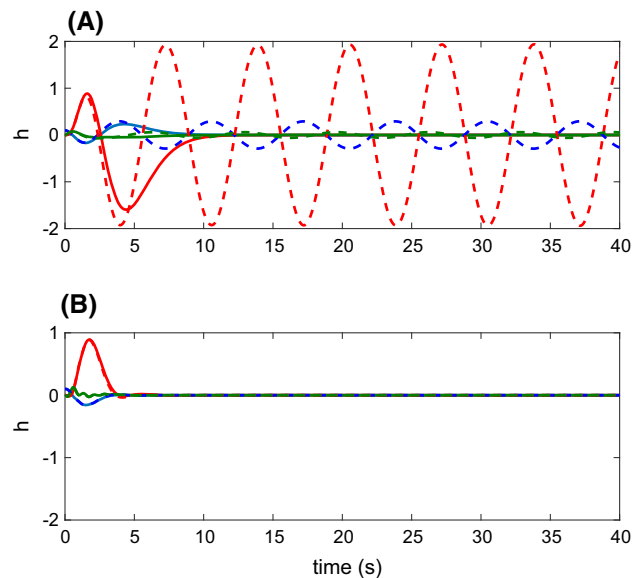
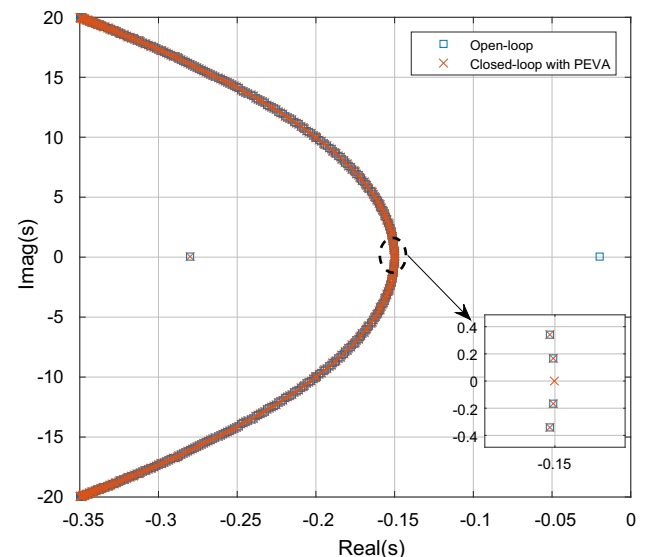
**Fig. 3** Location of eigenvalues for open loop, closed loop with EVA, and closed loop with PEVA for a wing in an airstream flutter suppression design (Model II)

designs is displayed in Fig. 3. It is evident that the presented approach outperforms the EVA in a closed loop, with the spillover phenomenon creating a serious threat for the EVA design. The time evolution for an initial displacement $\mathbf{h}(0) = [0.1 \ 0 \ 0]^T$ in a closed loop for the nominal and perturbed systems is displayed in Fig. 4.

5.3 Model III

This model is borrowed and adapted from Benner et al. (1995), and is an adequate finite-element model to particular structures, like turbine blades and cantilevers. This is a moderately large dimension system, with the displacement vector with dimension 211. The system matrices are:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 100 & -100 & & & \\ -100 & 200 & -100 & & \\ & -100 & 200 & -100 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -100 & 200 & -100 \\ & & & & -100 & 200 \end{bmatrix}_{211 \times 211},$$

**Fig. 4** Time response of displacements in the flutter suppression design with nominal matrices (solid) and 2%-perturbed stiffness matrix (dashed): **a** is for the EVA design and **b** is for the proposed approach (PEVA)**Fig. 5** Spectrum distribution for the Model III, with emphasis on the reassigned open-loop dominant eigenvalue

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}_{211}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 & & & \\ -0.1 & 0.5 & -0.1 & & \\ & -0.1 & 0.5 & -0.1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -0.1 & 0.5 & -0.1 \\ & & & & -0.1 & 0.4 \end{bmatrix}_{211 \times 211},$$

$$\mathbf{B} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]^T_{1 \times 211}$$

This system has a real negative, dominant eigenvalue close to the origin, namely $\lambda_1 = -0.0199$, that can cause a slow transient response of the structure. Then, the PEVA design is conducted to reassign this eigenvalue in a strip with $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.2$. The undesired eigenvalue is correctly reassigned into the $\mathbb{D}$ region, more precisely at the new position $\mu_1 = -0.1500$, that is, the center of the strip, as depicted in Fig. 5. For the EVA design, the gain cannot be computed with the hardware utilized, and MATLAB showed an “of out of memory” event message.

6 Conclusions

An approach to PEVA in linear time-invariant systems using LMIs and a left-eigenvector parametrization was presented. The numerical examples show the effectiveness of the method, with the target eigenvalues being assigned to the given $\mathbb{D}$ -region. Given these results, it is possible to conclude that the algorithm proposed can solve PEVA with $\mathbb{D}$ -stability. The algorithm’s ability, in the process, to maintain eigenvalues of partial assignment with good accuracy allows it to be said that the method guarantees no spillover, a feature desired in the control design developed on the subject of PEVA, mainly in a second-order system. This method uses partial assignment, which does not depend on knowledge of the entire system eigenstructure (eigenvectors and eigenvalues). Future studies focused on numerical analysis of the algorithm may help to understand the limitations and potential applications in multiobjective control.

Acknowledgements This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior—Brasil (CAPES)—Finance Code 00.

References

Abdelaziz, T. H. (2015). Robust pole assignment using velocity plus acceleration feedback for second-order dynamical systems with singular mass matrix. *ISA Transactions*, 57, 71–84.

- Araújo, J. M. (2018). Partial eigenvalue assignment in linear time-invariant systems using state-derivative feedback and a left eigenvectors parametrization. In *Proceedings of IMechE Part I: Journal of Systems and Control Engineering* (pp. 1–5). <https://doi.org/10.1177/0959651818811010>.
- Araújo, J. M., Castro, A. C., & Santos, E. T. F. (2009). Alocação de pólos em sistemas lineares invariantes no tempo utilizando realimentação da derivada de estados e a equação de lyapunov. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automática*, 20, 263–270.
- Araújo, J. M., Dórea, C. E. T., Gonçalves, L. M. G., & Datta, B. N. (2016). State derivative feedback in second-order linear systems: A comparative analysis of perturbed eigenvalues under coefficient variation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 76–77, 33–46.
- Belotti, R., Ouyang, H., & Richiedei, D. (2018). A new method of passive modifications for partial frequency assignment of general structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 99, 586–599.
- Benner, P., Laub, A. J., & Mehrmann, V. (1995). A collection of benchmark examples for the numerical solution of algebraic riccati equations I: Continuous-time case. Technical report, Fak. f. Mathematik, TU Chemnitz.
- Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E., & Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory, studies in applied mathematics* (Vol. 15). Philadelphia, PA: SIAM.
- Boyd, S., & Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. New York, NY: Cambridge University Press.
- Brahma, S., & Datta, B. (2009). An optimization approach for minimum norm and robust partial quadratic eigenvalue assignment problems for vibrating structures. *Journal of Sound and Vibration*, 324(3), 471–489.
- Chen, C. (2013). *Linear system theory and design oxford series in electrical and computer engineering*. Oxford: Oxford University Press.
- Datta, B. N., et al. (2002). Partial eigenvalue assignment in linear systems: Existence, uniqueness and numerical solution. In *Proceedings of the mathematical theory of networks and systems (MTNS)*, Notre Dame, CiteSeer.
- Duan, G. R., & Yu, H. H. (2013). *LMIs in control systems: Analysis, design and applications*. Boca Raton: CRC Press.
- Henrion, D., Šebek, M., & Kučera, V. (2005). Robust pole placement for second-order systems: An LMI approach. *Kybernetika*, 41(1), 1–14.
- Krokavec, D., Filasová, A., & Serbák, V. (2015). On stabilization of switched linear MI systems using in part common left eigenvector assignment based on LMIs. *IFAC-PapersOnLine*, 48(11), 360–365.
- Ntogramatzidis, L., Tregouet, J. F., Schmid, R., & Ferrante, A. (2014). A structural solution to the monotonic tracking control problem. [arXiv:1412.1868](https://arxiv.org/abs/1412.1868).
- Ntogramatzidis, L., Trégouët, J., Schmid, R., & Ferrante, A. (2016). Globally monotonic tracking control of multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(9), 2559–2564. <https://doi.org/10.1109/TAC.2015.2495582>.
- Ostertag, E. (2011). *Mono-and multivariable control and estimation: Linear, quadratic and LMI methods*. New York: Springer.
- Ou, L., Han, S., Wang, Y., Dong, S., & Liu, L. (2014). Partial pole placement in LMI region. *Journal of Control Science and Engineering*, 2014, 27.
- Shapiro, A. (2005). Stability of second-order asymmetric linear mechanical systems with application to robot grasping. *Journal of Applied Mechanics*, 72(6), 966–968.
- Wang, X. T., & Zhang, L. (2017). Partial eigenvalue assignment with time delay in high order system using the receptance. *Linear Algebra and its Applications*, 523, 335–345.

Zhang, J., Ouyang, H., Zhang, Y., & Ye, J. (2015). Partial quadratic eigenvalue assignment in vibrating systems using acceleration and velocity feedback. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 23(3), 479–497.

Publisher's Note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

ANEXO B – Matriz de retroalimentação Modelo VI

Ftil =

Columns 1 through 7						
-0.0365	-0.0365	-0.0365	-0.0365	-0.0365	-0.0365	-0.0365
Columns 8 through 14						
-0.0365	-0.0365	-0.0364	-0.0364	-0.0364	-0.0364	-0.0364
Columns 15 through 21						
-0.0363	-0.0363	-0.0363	-0.0362	-0.0362	-0.0362	-0.0361
Columns 22 through 28						
-0.0361	-0.0360	-0.0360	-0.0359	-0.0359	-0.0358	-0.0358
Columns 29 through 35						
-0.0357	-0.0357	-0.0356	-0.0355	-0.0355	-0.0354	-0.0353
Columns 36 through 42						
-0.0353	-0.0352	-0.0351	-0.0351	-0.0350	-0.0349	-0.0348
Columns 43 through 49						
-0.0347	-0.0346	-0.0346	-0.0345	-0.0344	-0.0343	-0.0342
Columns 50 through 56						
-0.0341	-0.0340	-0.0339	-0.0338	-0.0337	-0.0336	-0.0335
Columns 57 through 63						
-0.0334	-0.0333	-0.0331	-0.0330	-0.0329	-0.0328	-0.0327
Columns 64 through 70						
-0.0325	-0.0324	-0.0323	-0.0322	-0.0320	-0.0319	-0.0318
Columns 71 through 77						
-0.0316	-0.0315	-0.0314	-0.0312	-0.0311	-0.0309	-0.0308
Columns 78 through 84						
-0.0306	-0.0305	-0.0303	-0.0302	-0.0300	-0.0299	-0.0297
Columns 85 through 91						
-0.0296	-0.0294	-0.0293	-0.0291	-0.0289	-0.0288	-0.0286
Columns 92 through 98						
-0.0284	-0.0282	-0.0281	-0.0279	-0.0277	-0.0275	-0.0274
Columns 99 through 105						
-0.0272	-0.0270	-0.0268	-0.0266	-0.0264	-0.0263	-0.0261
Columns 106 through 112						
-0.0259	-0.0257	-0.0255	-0.0253	-0.0251	-0.0249	-0.0247

Columns 113 through 119						
-0.0245	-0.0243	-0.0241	-0.0239	-0.0237	-0.0235	-0.0233
Columns 120 through 126						
-0.0231	-0.0229	-0.0226	-0.0224	-0.0222	-0.0220	-0.0218
Columns 127 through 133						
-0.0216	-0.0213	-0.0211	-0.0209	-0.0207	-0.0205	-0.0202
Columns 134 through 140						
-0.0200	-0.0198	-0.0195	-0.0193	-0.0191	-0.0189	-0.0186
Columns 141 through 147						
-0.0184	-0.0181	-0.0179	-0.0177	-0.0174	-0.0172	-0.0170
Columns 148 through 154						
-0.0167	-0.0165	-0.0162	-0.0160	-0.0157	-0.0155	-0.0153
Columns 155 through 161						
-0.0150	-0.0148	-0.0145	-0.0143	-0.0140	-0.0138	-0.0135
Columns 162 through 168						
-0.0133	-0.0130	-0.0127	-0.0125	-0.0122	-0.0120	-0.0117
Columns 169 through 175						
-0.0115	-0.0112	-0.0110	-0.0107	-0.0104	-0.0102	-0.0099
Columns 176 through 182						
-0.0097	-0.0094	-0.0091	-0.0089	-0.0086	-0.0083	-0.0081
Columns 183 through 189						
-0.0078	-0.0075	-0.0073	-0.0070	-0.0067	-0.0065	-0.0062
Columns 190 through 196						
-0.0059	-0.0057	-0.0054	-0.0051	-0.0049	-0.0046	-0.0043
Columns 197 through 203						
-0.0041	-0.0038	-0.0035	-0.0033	-0.0030	-0.0027	-0.0024
Columns 204 through 210						
-0.0022	-0.0019	-0.0016	-0.0014	-0.0011	-0.0008	-0.0005
Columns 211 through 217						
-0.0002	-0.1303	-0.1303	-0.1303	-0.1303	-0.1303	-0.1302
Columns 218 through 224						
-0.1302	-0.1301	-0.1301	-0.1300	-0.1299	-0.1298	-0.1298
Columns 225 through 231						
-0.1297	-0.1296	-0.1295	-0.1293	-0.1292	-0.1291	-0.1290
Columns 232 through 238						
-0.1288	-0.1287	-0.1285	-0.1283	-0.1282	-0.1280	-0.1278
Columns 239 through 245						
-0.1276	-0.1274	-0.1272	-0.1270	-0.1268	-0.1265	-0.1263
Columns 246 through 252						

-0.1261	-0.1258	-0.1256	-0.1253	-0.1250	-0.1248	-0.1245
Columns 253 through 259						
-0.1242	-0.1239	-0.1236	-0.1233	-0.1230	-0.1226	-0.1223
Columns 260 through 266						
-0.1220	-0.1216	-0.1213	-0.1209	-0.1205	-0.1202	-0.1198
Columns 267 through 273						
-0.1194	-0.1190	-0.1186	-0.1182	-0.1178	-0.1174	-0.1170
Columns 274 through 280						
-0.1165	-0.1161	-0.1157	-0.1152	-0.1147	-0.1143	-0.1138
Columns 281 through 287						
-0.1133	-0.1129	-0.1124	-0.1119	-0.1114	-0.1109	-0.1104
Columns 288 through 294						
-0.1098	-0.1093	-0.1088	-0.1083	-0.1077	-0.1072	-0.1066
Columns 295 through 301						
-0.1061	-0.1055	-0.1049	-0.1043	-0.1038	-0.1032	-0.1026
Columns 302 through 308						
-0.1020	-0.1014	-0.1008	-0.1001	-0.0995	-0.0989	-0.0983
Columns 309 through 315						
-0.0976	-0.0970	-0.0963	-0.0957	-0.0950	-0.0944	-0.0937
Columns 316 through 322						
-0.0930	-0.0923	-0.0916	-0.0909	-0.0903	-0.0896	-0.0888
Columns 323 through 329						
-0.0881	-0.0874	-0.0867	-0.0860	-0.0852	-0.0845	-0.0838
Columns 330 through 336						
-0.0830	-0.0823	-0.0815	-0.0808	-0.0800	-0.0792	-0.0785
Columns 337 through 343						
-0.0777	-0.0769	-0.0761	-0.0753	-0.0746	-0.0738	-0.0730
Columns 344 through 350						
-0.0722	-0.0713	-0.0705	-0.0697	-0.0689	-0.0681	-0.0672
Columns 351 through 357						
-0.0664	-0.0656	-0.0647	-0.0639	-0.0631	-0.0622	-0.0614
Columns 358 through 364						
-0.0605	-0.0596	-0.0588	-0.0579	-0.0570	-0.0562	-0.0553
Columns 365 through 371						
-0.0544	-0.0535	-0.0527	-0.0518	-0.0509	-0.0500	-0.0491
Columns 372 through 378						
-0.0482	-0.0473	-0.0464	-0.0455	-0.0446	-0.0437	-0.0427
Columns 379 through 385						
-0.0418	-0.0409	-0.0400	-0.0391	-0.0381	-0.0372	-0.0363

Columns 386 through 392

-0.0354	-0.0344	-0.0335	-0.0326	-0.0316	-0.0307	-0.0297
---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Columns 393 through 399

-0.0288	-0.0279	-0.0269	-0.0260	-0.0250	-0.0241	-0.0231
---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Columns 400 through 406

-0.0222	-0.0212	-0.0202	-0.0193	-0.0183	-0.0174	-0.0164
---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Columns 407 through 413

-0.0155	-0.0145	-0.0135	-0.0126	-0.0116	-0.0106	-0.0097
---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Columns 414 through 420

-0.0087	-0.0077	-0.0068	-0.0058	-0.0048	-0.0039	-0.0029
---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Columns 421 through 422

-0.0019	-0.0010
---------	---------